arXiv:2301.05232v1 [math.CO] 12 Jan 2023

# 完美着色的强制周期性

Pyry Herva 和 Jarkko Kari

摘要

我们研究特定约束下二维构型的强制周期性，并采用多维符号动力系统的代数方法：其中， $d$维构型和有限图案分别表示为关于 $d$ 变量的形式幂级数和劳朗多项式。我们考虑完美着色，即满足以下条件的构型：对于某个固定的相对邻域，任意点的邻域中某种给定颜色的点数只取决于该点的颜色。我们证明，通过适当选择字母表，任何完美着色都有一个非平凡湮灭子；也就是说，存在一个劳朗多项式，使其与表示该完美着色的幂级数的形式乘积为零。利用已知结果，我们得到二维完美着色具有强制周期性的一个充分条件。作为这一结果的推论，我们为方形网格和三角网格上的强制周期性已知结果给出了简洁的新证明。此外，我们还得到关于王网格中完美着色强制周期性的新结果。我们还考虑一种特别简单类型的完美着色：相对于某种形状具有低阿贝尔复杂度的构型，并推广了一个给出此类构型必然具有周期性的充分条件。此外，我们还考察了一些算法方面。

## 1 引言

我们称一个 $d$ 维构型 $c \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$——即对 $d$ 维整数网格 $\mathbb{Z}^d$ 进行着色，其中使用来自有限集 $\mathcal{A}$ 的颜色——是关于某个有限相对邻域 $D \subseteq \mathbb{Z}^d$ 的完美着色，如果在图案 $c|_{\mathbf{u}+D}$ 中，任意给定颜色 $\mathcal{A}$ 的数量仅取决于任意 $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d$ 处的颜色 $c(\mathbf{u})$。对于一般图，也有类似的定义：设图 $G=(V,E)$ 的顶点着色 $\varphi\colon V \to \mathcal{A}$ 使用有限颜色集 $\mathcal{A}$，若某个顶点 $u \in V$ 的 $r$-邻域中任意给定颜色的数量仅取决于 $u$ [28, 29] 的颜色 $\varphi(u)$，则称其为半径为 $r$ 的完美着色。更一般地说，完美着色的定义是等划分 [8] 定义的特例。

若 $\varphi\colon V \to \{0,1\}$ 是图 $G=(V,E)$ 的二元顶点着色，则我们可以定义顶点集的一个子集 $C \subseteq V$——一个码——使其包含所有颜色为 1 的顶点。若 $\varphi$ 是半径为 $r$ 的完美着色，则码 $C$ 具有如下性质：对于某些固定的非负整数 $a$ 和 $b$，顶点 $u \in V$ 的 $r$-邻域中，$C$ 的码字数量在 $u \notin C$ 时为 $a$，在 $u \in C$ 时为 $b$。这种码称为完美 $(r,b,a)$-覆盖

或简称完美多重覆盖 [1, 5]。这个定义与图的控制和覆盖码 [11, 5] 有关。

设 $D \subseteq \mathbb{Z}^d$ 为一个有限集，$\mathcal{A}$ 为一个有限的颜色集。如果两个有限图案 $p$、$q \in \mathcal{A}^D$ 中每种符号在 $\mathcal{A}$ 中的出现次数都相同，则称它们阿贝尔等价。构型 $c \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 相对于有限形状 $D$ 的阿贝尔复杂度，是 $c$ [30]中形状为 $D$ 的图案的阿贝尔等价类数量。注意，如果 $c \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$是相对于 $D$ 和 $|\mathcal{A}| = n$的完美着色，那么 $c$ 相对于 $D$ 的阿贝尔复杂度至多为 $n$。阿贝尔复杂度是单维符号动力系统和词组合学中广泛研究的概念 [22]。

本文研究二维完美着色的强制周期性，即研究所有着色必然具有周期性的条件。我们给出强制周期性的一般条件。作为这一结果的推论，我们为关于正方形网格和三角网格上完美着色强制周期性的已知结果 [1, 28, 29] 给出新的证明，并得出关于王网格上完美着色强制周期性的新结果。此外，我们研究低阿贝尔复杂度的二维构型，即相对于某种形状具有阿贝尔复杂度 1 的构型：我们推广了关于这类构型强制周期性的一个论述。我们采用多维符号动力系统的代数方法 [17] ，即将构型表示为形式幂级数，将有限图案表示为 Laurent 多项式。该方法旨在推进符号动力系统中的一个著名开放问题——Nivat 猜想 [27] ——该猜想关注的是：对于某个 $m$、$n$，当二维构型的 $m \times n$ 矩形图案数量足够少时，是否具有强制周期性。因此，Nivat 猜想主张了莫尔斯-赫德隆定理 [24]的一个二维推广。

本文是会议论文 [12] 的扩展版本，我们在该论文中研究了完美覆盖的强制周期性，也就是只有两种颜色的完美着色。

## 论文结构

我们首先在第2节介绍符号动力系统、元胞自动机和图的基本概念，并对完美着色作形式化定义。第3节介绍相关的代数概念，以及多维符号动力系统的代数方法；第4节则描述一种算法，用于求给定二维 Laurent 多项式的直线多项式因子。第5节探讨完美覆盖的强制周期性，即仅使用两种颜色的完美着色；随后在第6节，我们将上一节的结果推广到使用任意大字母表的完美着色。之后，我们在第7节证明一个关于低阿贝尔复杂度二维构型的强制周期性的命题。在第8节，我们探讨有关完美着色的一些算法问题。

# 2 预备知识

## 符号动力系统基础

我们简要回顾一些与本文相关的符号动力系统基本概念。参考资料可参见例如 [4, 19, 21]。尽管我们的结果主要涉及二维构型，我们仍在任意维数下陈述定义。

设 $\mathcal{A}$ 为一个有限集（字母表），$d$ 为一个正整数（维数）。定义在 $\mathcal{A}$ 上的 $d$维构型，是一个以 $\mathcal{A}$中的颜色为颜色的无限网格 $\mathbb{Z}^d$ 的着色，也就是字母表 $\mathcal{A}$上的 $d$维构型空间 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 中的一个元素。我们用 $c_{\mathbf{u}} = c(\mathbf{u})$ 表示构型 $c \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 在单元格 $\mathbf{u}$ 中的符号或颜色。向量 $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d$定义的平移 $\tau^{\mathbf{t}}$会将构型 $c$平移，使得对所有 $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d$，都有 $\tau_{\mathbf{t}}(c)_{\mathbf{u}} = c_{\mathbf{u}-\mathbf{t}}$。若构型 $c$ 满足 $\tau^{\mathbf{t}}(c) = c$，则称其为 $\mathbf{t}$-周期的；若它对某个非零 $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d$是 $\mathbf{t}$-周期的，则称其为周期的。此外，若构型在某个 $k \in \mathbb{Z}$下是 $k\mathbf{v}$-周期的，我们称其在方向 $\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$上具有周期性。若一个 $d$维构型 $c$ 具有 $d$ 个线性无关的周期向量，则称其为强周期构型。强周期构型在每个有理方向上都是周期的。二维强周期构型称为二周期构型。

有限图案是在某个有限形状 $D \subseteq \mathbb{Z}^d$ 上对符号进行的一种赋值，也就是说，它是 $\mathcal{A}^D$ 的一个元素。特别地，$\mathcal{A}^D$ 中的有限图案称为 $D$-图案。我们用 $\mathcal{A}^*$ 表示 $\mathcal{A}$ 上所有有限图案的集合，其中维数 $d$ 可由上下文确定。若有限图案 $p \in \mathcal{A}^D$ 出现在构型 $c \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 中，或者说 $c$ 包含 $p$，则称 $p \in \mathcal{A}^D$ 出现在构型 $c \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 中；也就是说，对于某个 $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d$，有 $\tau^{\mathbf{t}}(c)|_D = p$。给定一个形状 $D$，$c$ 的所有 $D$-图案构成集合 $\mathcal{L}_D(c) = \{\tau^{\mathbf{t}}(c)|_D \mid \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d\}$；而 $c$ 的所有有限图案构成的集合记为 $\mathcal{L}(c)$，称为 $c$ 的语言。对于一组构型 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$，我们将 $\mathcal{L}_D(\mathcal{S})$ 和 $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ 分别定义为对所有 $c \in \mathcal{S}$ 的 $\mathcal{L}_D(c)$ 和 $\mathcal{L}(c)$ 取并集。

构型 $c \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$关于形状 $D$的图案复杂度 $P(c, D)$，是其中包含的不同 $D$-图案的数量。对于任意 $a \in \mathcal{A}$，我们用 $|p|_a$ 表示有限图案 $p$中颜色 $a$ 出现的次数。若对于所有 $a \in \mathcal{A}$ 都有 $|p|_a = |q|_a$，则称两个有限图案 $p, q \in \mathcal{A}^D$ 阿贝尔等价；也就是说，$p$ 和 $q$中每种颜色出现的次数都相同。构型 $c \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ 关于有限形状 $D$ 的阿贝尔复杂度 $A(c, D)$，是其中不同的 $D$-图案按阿贝尔等价划分后所得的数量 [30]。显然，$A(c, D) \leq P(c, D)$。若 $c$关于 $D$ 具有低复杂度，则称

$$P(c, D) \leq |D|$$

并且若 $c$ 关于 $D$ 具有低阿贝尔复杂度，则称

$$A(c, D) = 1.$$

通过赋予 $\mathcal{A}$离散拓扑，并考虑其在 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 上诱导的积拓扑（即前离散拓扑），可以使构型空间 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 成为一个紧拓扑空间。该拓扑由一个度量诱导：如果两个构型在原点周围的大范围区域内一致，则它们彼此接近。因此，$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 是一个紧度量空间。

构型空间的子集 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 是一个子移位，当且仅当它在拓扑上是闭的且具有平移不变性，也就是说，如果 $c \in \mathcal{S}$，那么对于所有 $\mathbf{t}$，$\in \mathbb{Z}^d$ 也有 $\tau^{\mathbf{t}}(c) \in \mathcal{S}$。等价地，也可以用禁用图案来定义子移位：给定一个禁用有限图案集合 $F \subseteq \mathcal{A}^*$，集合

$$X_F = \{c \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \mid \mathcal{L}(c) \cap F = \emptyset\}$$

所有避开禁用图案的构型所组成的集合是一个子移位。此外，每个子移位都可由禁止某些有限图案得到。如果 $F \subseteq \mathcal{A}^*$ 是有限的，那么我们称 $X_F$为有限型子移位（SFT）。

构型 $c$ 的轨道是其所有平移 $\mathcal{O}(c) = \{\tau^{\mathbf{t}}(c) \mid \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d\}$ 所组成的集合。轨道闭包 $\mathcal{O}(c)$ 是在前离散拓扑下其轨道的拓扑闭包。构型 $c$ 的轨道闭包是包含 $c$的最小子移位。它由所有满足 $c'$ 使得 $\mathcal{L}(c') \subseteq \mathcal{L}(c)$的构型组成。

## 元胞自动机

我们简要介绍元胞自动机理论中的一个经典结果，该结果将在第6节中用到。关于这一主题更全面的综述，请参见 [13] 。

在有限字母表 $\mathcal{A}$ 上，$d$维元胞自动机（简称 CA）是一个映射$F$: $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$，由邻域向量 $N = (\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n)$ 和局部规则$f$: $\mathcal{A}^n \longrightarrow \mathcal{A}$ 确定，满足

$$F(c)(\mathbf{u}) = f(c(\mathbf{u} + \mathbf{t}_1), \ldots, c(\mathbf{u} + \mathbf{t}_n)).$$

如果元胞自动机的局部规则具有以下形式，则称其为可加的或线性的

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$$

where $a_1, \ldots, a_n \in R$是某个有限环 $R$的元素，而 $\mathcal{A}$是一个 $R$-模 .

在第6节中，我们将考察元胞自动机的满射性，并使用一项称为伊甸园定理的经典结果。该定理由 Moore 和 Myhil 证明，它通过有限构型上的单射性来刻画满射性。若两个构型 $c_1$ 和 $c_2$在其不同的元胞集合 $\mathrm{diff}(c_1, c_2) = \{\mathbf{u} \mid c_1(\mathbf{u}) \neq c_2(\mathbf{u})\}$ 上仅有有限个差异，则称它们渐近。若对于任意不同的渐近构型 $c_1$ 和 $c_2$，$F(c_1) \neq F(c_2)$，则称元胞自动机 $F$ 是前单射的。显然，单射元胞自动机是前单射的。伊甸园定理指出，元胞自动机的前单射性等价于其满射性：

定理（伊甸园定理，[23, 25]）。细胞自动机是满射，当且仅当它是前单射。

在一维情形下，伊甸园定理可推出以下推论：

推论。对于一维满射元胞自动机，每个构型都只有有限个原像。

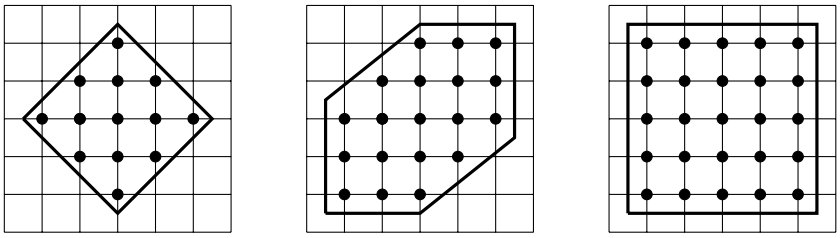

图 1：方格网格、三角网格和王网格的相对 2-邻域，依次如图所示。

## 图

本文考虑的图都是简单、无向且连通的。顶点集为 $V$、边集为 $E$ 的图 $G$记作 $G = (V, E)$。图 $G = (V, E)$ 中两个顶点 $u \in V$ 和 $v \in V$ 之间的距离 $d(u, v)$，是它们在 $G$中的最短路径长度。图 $G = (V, E)$ 中，$u \in V$ 的 $r$-邻域是集合$N_r(u) = \{v \in V \mid d(v, u) \leq r\}$。我们考虑的图的顶点集为 $V = \mathbb{Z}^2$，边集 $E \subseteq \{\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2, \mathbf{u} \neq \mathbf{v}\}$具有平移不变性。这意味着，对于所有$r$ 以及任意两点 $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2$ 和 $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2$，它们的 $r$-邻域都仅相差一个平移，即 $N_r(\mathbf{u}) = N_r(\mathbf{v}) + \mathbf{u} - \mathbf{v}$。此外，我们假设$G$ 的所有顶点都只有有限个邻居，也就是说，假设 $G$ 的度有限。我们将这些图称为二维（无限）网格图，或简称（无限）网格。在网格图$G$中，我们称 $\mathbf{0}$ 的 $r$-邻域为 $G$ 的相对 $r$-邻域，因为它决定了 $G$中任意顶点的 $r$-邻域。事实上，对于所有 $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2$，都有 $N_r(\mathbf{u}) = N_r + \mathbf{u}$，其中 $N_r$ 是 $G$的相对 $r$-邻域。给定网格图的边集，就能确定每个 $r$的相对 $r$-邻域。我们介绍三种二维无限网格图：

- 方格网格是具有（$\mathbb{Z}^2$、$E_{\mathcal{S}}$）的无限网格图

$$E_{\mathcal{S}} = \{\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \mid \mathbf{u} - \mathbf{v} \in \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}\}.$$

- 三角网格是具有（$\mathbb{Z}^2$、$E_{\mathcal{T}}$）的无限网格图

$$E_{\mathcal{T}} = \{\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \mid \mathbf{u} - \mathbf{v} \in \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (1, 1), (-1, -1)\}\}.$$

- 王网格是具有（$\mathbb{Z}^2$、$E_{\mathcal{K}}$）的无限网格图

$$E_{\mathcal{K}} = \{\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \mid \mathbf{u} - \mathbf{v} \in \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1)\}\}.$$

这些网格图的相对 2-邻域如图 1 所示。

### 完美着色

设 $\mathcal{A}=\{a_1,\dots,a_n\}$ 是一个由 $n$ 种颜色构成的有限字母表，$D\subseteq\mathbb{Z}^d$ 是一个有限形状。如果对于所有 $i$、$j\in\{1,\dots,n\}$，都存在数值 $b_{ij}$，使得对于所有满足 $c_{\mathbf{u}}=a_j$ 的 $\mathbf{u}\in\mathbb{Z}^d$，颜色 $a_i$ 在 $\mathbf{u}$ 的 $D$-邻域（即图案 $c|_{\mathbf{u}+D}$）中出现的次数恰好为 $b_{ij}$，则称构型 $c\in\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 是相对于 $D\subseteq\mathbb{Z}^d$ 的完美着色，或称 $D$-完美着色。$D$-完美着色 $c$ 的矩阵记为 $\mathbf{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，其中数值 $b_{ij}$ 如上所述。矩阵为 $\mathbf{B}$ 的 $D$-完美着色称为一个（完美）$(D,\mathbf{B})$-着色。任何 $D$-完美着色都简称为完美着色。换言之，如果顶点 $\mathbf{u}$ 的给定邻域中某种颜色的单元格数量仅取决于 $\mathbf{u}$ 的颜色，则该构型就是完美着色。

任意图 $G=(V,E)$也可以定义完美着色。同样，设 $\mathcal{A}=\{a_1,\dots,a_n\}$ 是一个有限的颜色集。图 $G$ 上的顶点着色 $\varphi\colon V\to\mathcal{A}$ 称为矩阵 $\mathbf{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 下的 $r$-完美着色，如果颜色为 $a_j$ 的顶点的 $r$-邻域中，颜色为 $a_i$ 的顶点数恰好为 $b_{ij}$。显然，若 $G$ 是顶点集为 $\mathbb{Z}^d$的平移不变图，则 $G$的 $r$-完美着色恰好是 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 中的 $D$-完美着色，其中 $D$是图 $G$的相对 $r$-邻域。

## 3 代数概念

我们回顾与我们相关的基本概念和一些结果，这些内容涉及一种针对多维符号动力系统的代数方法，该方法在 [17] 中引入并得到研究。另见 [14]，其中有对该主题的简要综述。

设 $c\in\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 是一个 $d$ 维构型。表示 $c$ 的幂级数是形式幂级数

$$c(X)=c(x_1,\dots,x_d)=\sum_{\mathbf{u}=(u_1,\dots,u_d)\in\mathbb{Z}^d}c_{\mathbf{u}}x_1^{u_1}\cdots x_d^{u_d}=\sum_{\mathbf{u}\in\mathbb{Z}^d}c_{\mathbf{u}}X^{\mathbf{u}}$$

关于 $d$ 个变量 $X=(x_1,\dots,x_d)$。我们用 $M[[X^{\pm1}]]=M[[x_1^{\pm1},\dots,x_d^{\pm1}]]$ 表示整环 $M$ 上关于 $d$ 个变量 $X=(x_1,\dots,x_d)$ 的所有形式幂级数的集合。若 $d=1$ 或 $d=2$，我们记作 $x=x_1$ 和 $y=x_2$。如果一个幂级数只有有限个不同的系数，则称其为有限型的；如果其系数全为整数，即属于集合 $\mathbb{Z}[[X^{\pm1}]]$，则称其为整数值的。构型总是由有限型幂级数表示，而有限型幂级数总是表示一个构型。因此，从现在起，我们可以将任何有限型幂级数称为构型。

我们还考虑劳朗多项式，也可以简称为多项式。我们用 $R[X^{\pm1}]=R[x_1^{\pm1},\dots,x_d^{\pm1}]$ 表示环 $R$ 上关于 $d$ 个变量 $X=(x_1,\dots,x_d)$ 的劳朗多项式集合。当讨论普通（即非劳朗）多项式时，我们使用“普通”一词，并像往常一样用 $R[X]$ 表示 $R$ 上的普通多项式环。

如果两个 Laurent 多项式在所考虑的多项式环中所有公因子都是单位元，我们就称它们没有公因子；如果它们有非单位元公因子，就称它们有公因子。例如，在 $\mathbb{C}[X^{\pm1}]$ 中，两个多项式没有

公因子，是指它们所有的公因子都是常数或单项式；而在 $\mathbb{C}[X]$ 中，两个真多项式没有公因子，是指它们所有的公因子都是常数。幂级数 $c = c(X) = \sum_{\mathbf{u}\in\mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{u}} X^{\mathbf{u}}$ 的支撑是集合 $\mathrm{supp}(c) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d \mid c_{\mathbf{u}} \neq 0\}$。显然，多项式是支撑有限的幂级数。多项式$f(X)$的第 $k$ 次伸缩是多项式 $f(X^k)$。伸缩示例见图 2。

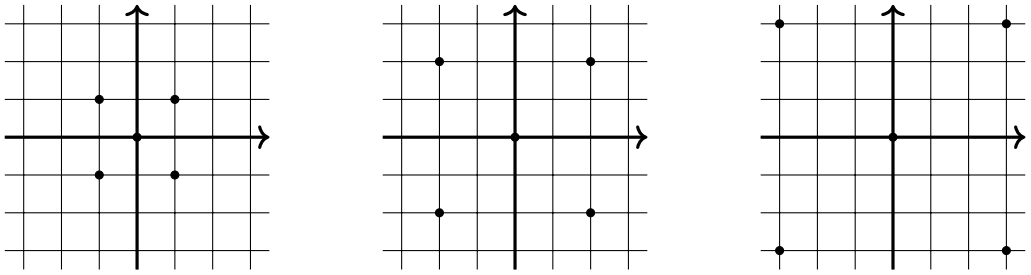

图 2：多项式 $f(X) = 1 + x^{-1}y^{-1} + x^{-1}y^{1} + x^{1}y^{-1} + x^{1}y^{1}$ 及其伸缩 $f(X^2)$ 和 $f(X^3)$ 的支撑。

两个真多项式 $f, g \in R[x_1, \ldots, x_d]$ 的 $x_i$-结式 $\mathrm{Res}_{x_i}(f, g)$ 是关于变量 $x_i$ 的 $f$ 和 $g$ 的 Sylvester 矩阵的行列式。我们省略细节，读者可从 [6], 中自行验证；我们转而将每个 $i \in \{1, \ldots, d\}$ 的结式 $\mathrm{Res}_{x_i}(f, g) \in R[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d]$ 视为一个具有以下两个性质的特定真多项式：

- $\mathrm{Res}_{x_i}(f, g)$ 属于由 $f$ 和 $g$ 生成的理想，即存在真多项式 $h$ 和 $l$ ，使得

$$hf + lg = \mathrm{Res}_{x_i}(f, g).$$

- 如果两个真多项式 $f$和 $g$在 $R[x_1, \ldots, x_d]$中没有公因子，那么 $\mathrm{Res}_{x_i}(f, g) \neq 0$。

设 $R$ 是一个环， $M$ 是一个（左） $R$-模。多项式 $f = f(X) = \sum_{i=1}^{m} a_i X^{\mathbf{u}_i} \in R[X^{\pm 1}]$与幂级数 $c = c(X) = \sum_{\mathbf{u}\in\mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{u}} X^{\mathbf{u}} \in M[X^{\pm 1}]$的形式乘积定义良好，为形式幂级数

$$fc = f(X)c(X) = \sum_{\mathbf{u}\in\mathbb{Z}^d} (fc)_{\mathbf{u}} X^{\mathbf{u}} \in M[X^{\pm 1}]$$

其中

$$(fc)_{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{m} a_i c_{\mathbf{u}-\mathbf{u}_i}.$$

如果多项式 $f = f(X)$ 湮灭幂级数 $c = c(X)$，或者说是其湮灭子，则称该多项式湮灭该幂级数，即 $fc = 0$，也就是说，它们的乘积是零幂级数。

在典型情形下，我们假设 $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}$ ，因此将任意构型 $c \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$视为有限型的整数值幂级数 $c(X)$。由于用单项式 $X^{\mathbf{u}}$乘以 $c(X)$

会得到表示 $c$ 沿 $\mathbf{u}$ 平移后的幂级数 $\tau^{\mathbf{u}}(c)$，因此，当且仅当差分多项式 $X^{\mathbf{u}}-1$湮灭 $c$ $(X)$ 时， $c$ 是 $\mathbf{u}$-周期的。（差分多项式是指任意 $\mathbf{u}\neq 0$对应的多项式 $X^{\mathbf{u}}-1$ 。）这意味着，自然可以考虑用 $\mathbb{C}[X^{\pm 1}]$中的多项式乘以 $c$ 。然而请注意， $c$ 与多项式 $f\in\mathbb{C}[X^{\pm 1}]$ 的乘积未必是整数值的，但它仍是有限型的，因而是一个构型。若多项式 $f$ 使构型$c$ 成为强周期的（即在 $d$ 个线性无关方向上周期），则称 $f$ 将该构型周期化（或称 $f$ 是该构型的周期化子），也就是说， $fc$ 是强周期的。我们将构型 $c$ 的所有复系数周期化子组成的集合记为 $\mathrm{Per}(c)$；它是 $\mathbb{C}[X^{\pm 1}]$ 的一个理想，因此称为 $c$的周期化多项式理想。请注意，湮灭子也是周期化子。还要注意，若 $c$ 有一个周期化子 $f$，则对某个 $\mathbf{u}$，$(X^{\mathbf{u}}-1)f$ 是 $c$ 的一个湮灭子。因此， $c$ 有非平凡（即非零）湮灭子，当且仅当它有非平凡周期化子。以下定理指出，若一个构型有非平凡周期化子，那么它实际上有一个形式特别简单的湮灭子——若干差分多项式的乘积。

定理 1（[17]）。设 $c\in\mathbb{Z}[[X^{\pm 1}]]$ 是任意维数中的一个构型，并假设它有一个非平凡的周期化子。那么存在 $m\geq 1$ 以及两两线性无关的向量 $\mathbf{t}_1$、...、$\mathbf{t}_m$，使得

$$(X^{\mathbf{t}_1}-1)\cdots(X^{\mathbf{t}_m}-1)$$

湮灭 $c$。

直线多项式是指支撑至少包含两个点，且支撑中的点位于唯一一条直线上的多项式。换言之，多项式 $f$ 是直线多项式，当且仅当它不是单项式，并且存在向量 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}\in\mathbb{Z}^d$ 使得 $\mathrm{supp}(f)\subseteq\mathbf{u}+\mathbb{Q}\mathbf{v}$。在这种情况下，我们称 $f$ 是方向 $\mathbf{v}$ 上的直线多项式。若非零向量 $\mathbf{v}$、$\mathbf{v}'\in\mathbb{Z}^d$ 满足 $\mathbf{v}'\in\mathbb{Q}\mathbf{v}$，则称它们平行；显然，此时方向 $\mathbf{v}$ 上的直线多项式也是任意与之平行的方向上的直线多项式。若向量 $\mathbf{v}\in\mathbb{Z}^d$ 的分量两两互素，则称 $\mathbf{v}$ 为本原向量。如果 $\mathbf{v}$ 是本原向量，那么 $\mathbb{Q}\mathbf{v}\cap\mathbb{Z}^d=\mathbb{Z}\mathbf{v}$。对于任意非零向量 $\mathbf{v}\in\mathbb{Z}^d$，都存在一个与之平行的本原向量 $\mathbf{v}'\in\mathbb{Z}^d$。因此，在直线多项式的定义中，我们可以假设向量 $\mathbf{v}$ $f$是本原向量，从而 $\mathrm{supp}(f)\subseteq\mathbf{u}+\mathbb{Z}\mathbf{v}$。下文中，我们优选用本原向量来表示方向。

任意直线多项式 $\phi$沿方向 $\mathbf{v}$ 的（本原）直线多项式都可以唯一地写成如下形式:

$$\phi=X^{\mathbf{u}}(a_0+a_1X^{\mathbf{v}}+\ldots+a_nX^{n\mathbf{v}})=X^{\mathbf{u}}(a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n)$$

其中 $\mathbf{u}\in\mathbb{Z}^d$、$n\geq 1$、$a_0\neq 0$、$a_n\neq 0$且 $t=X^{\mathbf{v}}$。我们称单变量真多项式 $a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n\in\mathbb{C}[t]$ 为 $\phi$的标准形。此外，对于单项式$aX^{\mathbf{u}}$，我们将其标准形定义为 $a$。因此，方向 $\mathbf{v}$ 上的两个直线多项式具有相同的标准形，当且仅当它们相差一个乘法因子 $X^{\mathbf{u}}$，其中 $\mathbf{u}\in\mathbb{Z}^d$。

差分多项式是直线多项式，因此定理 1 给出的湮灭子是直线多项式的乘积。被差分多项式湮灭意味着具有周期性。更一般地，构型 $c$ 被本原方向 $\mathbf{v}$ 上的直线多项式湮灭，可以理解为一维 $\mathbf{v}$-纤维

$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{\mathbf{u}+k\mathbf{v}} X^{\mathbf{u}+k\mathbf{v}}$ 在方向 v 上的 $c$ 被湮灭；由于一维情形下的湮灭意味着存在有界周期，我们可以得出：构型具有周期性，当且仅当它被直线多项式湮灭。已知若 $c$ 有一个其直线多项式因子至多涉及一个本原方向的周期化子，则 $c$具有周期性：

定理 2（[18]）。设 $c \in \mathbb{Z}[[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]]$ 是一个二维构型，且 $f$ 是 $c$的周期化子。则以下条件成立。

- 如果 $f$ 没有任何直线多项式因子，那么 $c$ 是二周期的。
- 如果 $f$ 的所有直线多项式因子都属于同一个本原方向，那么 $c$ 在该方向上是周期的。

证明概要。周期化多项式理想 Per($c$) $= \{g \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \mid gc$ 是 $c$ 的二周期$\}$ 主理想，由多项式 $g = \phi_1 \cdots \phi_m$生成，其中 $\phi_1$、.....、$\phi_m$是沿两两不平行方向 [18]的直线多项式。由于 $f \in$ Per($c$)，我们知道 $g$ 整除 $f$。如果 $f$ 没有任何直线多项式因子，那么 $g = 1$ ，因此 $c = gc$ 是二周期的。如果 $f$ 有直线多项式因子，且它们都属于同一个本原方向 v，那么 $g$ 是沿该方向的直线多项式。由于 $gc$ 是二周期的，因此它被某个 $k \in \mathbb{Z}$的 $(X^{k\mathbf{v}} - 1)$ 湮灭。这意味着构型 $c$ 被沿方向 v 的直线多项式 $(X^{k\mathbf{v}} - 1)g$ 湮灭。由此可知， $c$ 在方向 v 上是周期的。

□

上文概述的前一个定理的证明，很大程度上依赖于 [17] 中构造的理想 Per($c$) 的结构。我们给出另一种证明概要，仿照 [16] 中对结式的使用：

定理 2 的第二种证明概要。根据定理 1，非平凡周期化子 $f$ 的存在意味着 $c$ 有一个特殊湮灭子 $g = \phi_1 \cdots \phi_m$，它是若干个差分直线多项式 $\phi_1$、.....、$\phi_m$ 的乘积，这些直线多项式对应两两不平行的方向。 $g$ 的所有不可约因子都是直线多项式。如果 $f$ 没有任何直线多项式因子，那么周期化子 $f$ 和 $g$ 就没有公因子。我们可以假设二者都是真多项式；必要时，可将它们乘以适当的单项式。由于 $f$、$g \in \in$ Per($c$)，它们的结式 Res$_x$($f, g$) 也属于 Per($c$)，这意味着 $c$ 有一个非平凡的湮灭子，其中只含变量 $y$；因为 $f$ 和 $g$ 没有公因子，所以 Res$_x$($f, g$) $\neq 0$ 。这意味着 $c$ 在竖直方向上是周期的。类似地， $y$-结式 Res$_y$($f, g$) 表明 $c$ 是水平周期的，因此是二周期的。

对于 $f$ 仅在一个方向 v 上有直线多项式因子的情形，证明过程类似，只需考虑 $\phi c$ 而非 $c$，其中 $\phi$ 是 $f$ 和 $g$ 在方向 v 上的最大公直线多项式因子。由此可得 $\phi c$ 是二周期的，这意味着 $c$ 在方向 v 上是周期的。

□

本文还考虑定义在字母表 $\mathcal{A}$ 上的构型，其中 $\mathbb{Z}^n$ 是有限子集，即长度为 $n$ 的整数向量集合，因此研究从集合 $\mathbb{Z}^n[[X^{\pm 1}]]$ 到 $n \geq 2$ 的有限型形式幂级数。特别地，我们将这类构型称为整数向量构形。在这一设定下，我们还考虑多项式对幂级数的乘法。多项式的系数是 $n \times n$ 整数矩阵，即元素

属于环 $\mathbb{Z}^{n\times n}$。由于 $\mathbb{Z}^n$ 是一个（左） $\mathbb{Z}^{n\times n}$-模，且我们将 $\mathbb{Z}^n$ 中的向量视为列向量，因此多项式 $f = f(X) \in \mathbb{Z}^{n\times n}[X^{\pm 1}]$ 与幂级数$c = c(X) \in \mathbb{Z}^n[[X^{\pm 1}]]$的乘积是良定义的。因此，我们称 $c(X) \in \mathbb{Z}^n[[X^{\pm 1}]]$ 是 t-周期的，如果它被多项式 $\mathrm{I}X^{\mathbf{t}} - \mathrm{I}$ 湮灭；若它对某个非零的 t 是 t-周期的，则称其为周期的。

将任意字母表上的构型表示为整数向量构型，有一种自然的方法。设 $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ 是一个含有 $n$ 个元素的有限字母表。构型 $c \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 的向量表示是构型 $c' \in \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}^{\mathbb{Z}^d}$（或幂级数 $c'(X) \in \mathbb{Z}^n[[X^{\pm 1}]]$ 表示 $c'$），其定义满足：$c'_{\mathbf{u}} = \mathbf{e}_i$ 当且仅当 $c_{\mathbf{u}} = a_i$。这里，$\mathbf{e}_i \in \mathbb{Z}^n$ 表示第 $i$个自然基向量，即第 $i$个分量为 1、其余分量均为 0 的向量。显然， $c$ 是 t-周期的，当且仅当它的向量表示是 t-周期的。因此，要研究一个构型的周期性，只需研究其向量表示的周期性。

$i$层 $c = \sum \mathbf{c}_{\mathbf{u}} X^{\mathbf{u}} \in \mathbb{Z}^n[[X^{\pm 1}]]$ 的幂级数为

$$\mathrm{layer}_i(c) = \sum c_{\mathbf{u}}^{(i)} X^{\mathbf{u}} \in \mathbb{Z}[[X^{\pm 1}]]$$

其中 $c_{\mathbf{u}}^{(i)}$是 $\mathbf{c}_{\mathbf{u}}$ 的第 $i$ 个分量。显然，当且仅当对于所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$， $c$ 的第 $i$ 层都沿方向 $\mathbf{v}$ 周期时， $c \in \mathbb{Z}^n[[X^{\pm 1}]]$ 才沿方向 $\mathbf{v}$ 周期。

最后，设 $R$ 为有限环， $\mathcal{A}$ 为有限 $R$-模。多项式 $f(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i X^{-\mathbf{u}_i} \in R[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_d^{\pm 1}]$ 定义了一个加性元胞自动机，其邻域向量为 $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$，局部规则为 $f'(y_1, \ldots, y_n) = a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n$。更准确地说，由 $f$ 确定的元胞自动机作用于构型 $c$所得的像是构型 $fc$。

# 4 求给定二元 Laurent 多项式的直线多项式因子

本节中我们有 $d = 2$，因此所有多项式都含有两个变量 $x$ 和 $y$。由非零向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2$ 确定的开、闭离散半平面分别为集合 $H_{\mathbf{v}} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2 \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}^{\perp} \rangle > 0\}$ 和 $\overline{H}_{\mathbf{v}} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2 \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}^{\perp} \rangle \geq 0\}$，其中 $\mathbf{v}^{\perp} = (v_2, -v_1)$ 与 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ 正交。我们还用 $l_{\mathbf{v}} = \overline{H}_{\mathbf{v}} \setminus H_{\mathbf{v}}$ 表示经过原点且平行于 $\mathbf{v}$ 的离散直线。换言之，沿 $\mathbf{v}$ 的方向移动时，由 $\mathbf{v}$ 确定的半平面是直线 $l_{\mathbf{v}}$ “右侧”的半平面。若存在向量 $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^2$ 使得 $D \subseteq \overline{H}_{\mathbf{v}} + \mathbf{t}$ 且 $|D \cap (l_{\mathbf{v}} + \mathbf{t})| \geq 2$，则称有限集 $D \subseteq \mathbb{Z}^2$ 在方向 $\mathbf{v}$ 上有一条外边。我们称 $D \cap (l_{\mathbf{v}} + \mathbf{t})$ 为 $D$ 在方向 $\mathbf{v}$ 上的外边。与 $\mathbf{v}$ 对应的外边意味着 $D$ 的凸包沿 $D$ 周围的顺时针方向有一条平行于 $\mathbf{v}$ 的边。

若有限非空集合 $D$ 在方向 $\mathbf{v}$ 上没有外边，则存在向量 $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^2$，使得 $D \subseteq \overline{H}_{\mathbf{v}} + \mathbf{t}$ 且 $|D \cap (l_{\mathbf{v}} + \mathbf{t})| = 1$，于是我们称 $D$ 在方向 $\mathbf{v}$ 上有一个顶点。我们称 $D \cap (l_{\mathbf{v}} + \mathbf{t})$ 为 $D$ 在方向 $\mathbf{v}$ 上的顶点。若多项式 $f$ 的支撑在方向 $\mathbf{v}$ 上有外边或顶点，则分别称该多项式在方向 $\mathbf{v}$ 上有外边或顶点。注意，每个非空有限形状 $D$ 或者有

在任意非零方向上有一条边或一个顶点。还要注意，在此语境中，方向 v 和 –v 并不相同：一个形状可能在方向 v 上有外边，但在方向 –v 上没有外边。以下引理表明，多项式只有在其外边所在的方向上才可能有直线多项式因子。

引理 3（[16]）。设 $f$ 是一个非零多项式，且含有方向 v 上的直线多项式因子。那么 $f$ 在方向 v 和 –v 上有外边。

设 $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ 是一个非零本原向量，且 $f = \sum f_{\mathbf{u}} X^{\mathbf{u}}$ 是一个多项式。回忆一下，$f$ 的 v- 纤维是如下形式的多项式

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{\mathbf{u}+k\mathbf{v}} X^{\mathbf{u}+k\mathbf{v}}$$

其中 $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2$。因此，多项式的非零 v-纤维要么是直线多项式，要么是单项式。我们用 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f)$ 表示多项式 $f$的所有非零 v-纤维的不同标准形构成的集合，因此它是一个由一元真多项式组成的有限集。下面这个简单的例子说明了纤维及其标准形的概念。

例 4。我们来确定 $f = f(X) = f(x, y) = 3x + y + xy^2 + xy + x^3y^3 + x^4y^4$ 且 $\mathbf{v} = (1, 1)$ 时的集合 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f)$。将各项分组后，可以写成

$$f = 3x + y(1 + xy) + xy(1 + x^2y^2 + x^3y^3) = X^{(1,0)} \cdot 3 + X^{(0,1)}(1 + t) + X^{(1,1)}(1 + t^2 + t^3)$$

其中 $t = X^{(1,1)} = xy$。因此，$\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f) = \{3, 1 + t, 1 + t^2 + t^3\}$。图 3 展示了示意图。

□

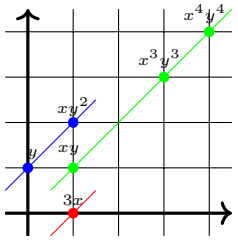


图 3：{v1} 的支撑及其不同的 (1, 1)-纤维 .

如上面的例子所示，多项式是其纤维的线性组合：对于任意多项式 $f$ 和任意非零本原向量 v，我们可以写成

$$f = X^{\mathbf{u}_1}\psi_1 + \ldots + X^{\mathbf{u}_n}\psi_n$$

其中某些 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{Z}^2$ 满足 $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f)$。我们在下一个定理的证明中使用这一点。

定理 5. 多项式 $f$ 在方向 v 上有直线多项式因子，当且仅当 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f)$ 中的多项式有公因子。

证明。对于任意方向 v 上的直线多项式 $\phi$，以及任意多项式 $g$，乘积 $\phi g$ 的 v-纤维有公因子 $\phi$。换句话说，如果多项式 $f$ 在方向 v 上有直线多项式因子 $\phi$，那么 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f)$ 中的多项式以 $\phi$ 的标准形作为公因子。

对于逆向结论，假设 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f)$ 中的多项式有一个公因子$\phi$。那么存在向量 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{Z}^2$ 以及多项式 $\phi\psi_1, \ldots, \phi\psi_n \in \mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f)$，使得

$$f = X^{\mathbf{u}_1}\phi\psi_1 + \ldots + X^{\mathbf{u}_n}\phi\psi_n.$$

因此，$\phi$ 是 $f$ 在方向 v 上的直线多项式因子。 □

注意，引理 3 实际上可由定理 5 直接推出：方向 v 或 $-\mathbf{v}$ 上的一个顶点（而非外边）会产生一个非零单项式 v-纤维，这意味着 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f)$ 中的多项式没有公因子。

因此，要找出 $f$ 的直线多项式因子，我们首先需要确定直线多项式可能的方向，也就是 $f$ 的（有限多个）外边的方向；然后需要检查这些可能的方向 v 中，哪些方向上 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f)$ 中的多项式有公因子。显然，存在算法可以找出给定多项式的外边，并判断有限个直线多项式是否有公因子。如果存在这样的公因子，那么根据定理 5，多项式 $f$ 在该方向上有一个直线多项式因子。我们证明了以下定理。

定理 6. 存在一种算法，可以求出给定的二元（Laurent）多项式的直线多项式因子。

# 5 两种颜色的完美着色的强制周期性

本节讨论仅有两种颜色的二维完美着色的强制周期性。不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{A} = \{a_1, a_2\} = \{0, 1\}$ ($a_1 = 0, a_2 = 1$)，并考虑完美着色 $c \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$，因为在我们的讨论中，颜色的名称并不重要。因此，设 $c \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ 是关于 $D \subseteq \mathbb{Z}^2$ 的完美着色，且 $\mathrm{B} = (b_{ij})_{2\times 2}$ 是 $c$ 的矩阵。定义集合 $C = \{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2 \mid c_{\mathbf{u}} = 1\}$。该集合具有如下性质：点 u 的邻域 $\mathbf{u}+D$ 中恰有 $a = b_{21}$ 个颜色为 1 的点（当 $\mathbf{u} \notin C$ 时），恰有 $b = b_{22}$ 个颜色为 1 的点（当 $\mathbf{u} \in C$ 时）。事实上，$C$ 是由相对邻域 $D$ 确定的无限网格 $G$ 的完美（多重）覆盖。更准确地说，集合 $C$ 是 $G$ 的一个（完美）$(D, b, a)$- 覆盖。这是以下定义的一种变体：在任意图中，若顶点集的子集 $C$ 满足，对于一个顶点 $u$，其 $r$-邻域中属于 $C$ 的顶点数在 $u \notin C$ 时为 $a$，在 $u \in C$ 时为 $b$，则称该子集为一个 $(r, b, a)$-覆盖。相关参考文献见 [1] 。显然，在平移不变图中，$(r, b, a)$-覆盖与 $(D, b, a)$-覆盖相对应，其中 $D$ 是该图的相对 $r$-邻域。因此，将任何仅有两种颜色的完美着色称为完美覆盖是很自然的。注意，$(D, b, a)$-覆盖是一个 $D$-完美

矩阵着色

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} |D| - a & |D| - b \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Axenovich 的下述定理指出，在方格网格中，“几乎所有” $(1, b, a)$-覆盖都是二周期的。

定理 7（[1]）。若 $b-a \neq 1$，则方格网格中的每个 $(1, b, a)$-覆盖都是二周期的。

对于有限集 $D \subseteq \mathbb{Z}^2$，我们将其特征多项式定义为多项式 $f_D(X) = \sum_{\in D} X^{-\mathbf{u}}$ $X$ $\sum_{\in \mathbb{Z}^2} X^{\mathbf{u}}$ $c \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ $\mathbf{u}$。我们用 $\mathbf{1}(\ )$ 表示常数幂级数 $\mathbf{u}$。若 是一个 $(D, b, a)$-覆盖，则由定义可得 $f_D(X)c(X) = (b-a)c(X) + a\mathbb{I}(X)$，这等价于 $(f_D(X) - (b-a))\, c(X) = a\mathbb{I}(X)$。因此，若 $c$ 是一个 $(D, b, a)$-覆盖，则 $f_D(X) - (b-a)$ 是 $c$ 的周期化子。因此，由定理 2 可知，多项式 $f_D(X) - (b-a)$ 不含直线多项式因子，是 $(D, b, a)$-覆盖具有强制周期性的充分条件。因此，我们得到定理 2 的以下推论：

推论 8. 设 $D \subseteq \mathbb{Z}^2$ 是一个有限形状，且 $b$ 和 $b$ 是非负整数。如果 $g = f_D - (b-a)$ 没有直线多项式因子，那么每个 $(D, b, a)$-覆盖都是二周期的。

利用我们的表述和代数方法，我们可以对定理 7 给出一个简单的证明：

定理 7 的重新表述。设 $D$ 是方格网格的相对 1-邻域，并假设 $b-a \neq 1$。那么每个 $(D, b, a)$-覆盖都是二周期的。

证明。设 $c$ 是任意一个 $(D, b, a)$-覆盖。 $g = f_D - (b-a)$ 的外边 $= x^{-1} + y^{-1} + 1 - (b-a) + x + y$ 的方向为 $(1, 1)$、$(-1, -1)$、$(1, -1)$ 和 $(-1, 1)$，因此根据引理 3， $g$ 的任何直线多项式因子要么沿方向 $(1, 1)$，要么沿方向 $(1, -1)$。对于 $\mathbf{v} \in \{(1, 1)、(1, -1)\}$，我们有 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(g) = \{1 + t, 1 - (b-a)\}$。图 4 给出了示意图。由于 $1 - (b-a)$ 是一个非平凡单项式，根据定理 5，周期化子 $g \in \mathrm{Per}(c)$ 没有直线多项式因子，因此由推论 8 可得结论。 □

对于半径为 $r \geq 2$ 的方格网格中的强制周期性完美覆盖这一已知结果，我们也可以给出类似的证明。

定理 9（[29]）。设 $r \geq 2$，且 $D$ 是方格网格的相对 $r$-邻域。那么每个 $(D, b, a)$-覆盖都是二周期的。换言之，对于所有 $r \geq 2$，方格网格中的所有 $(r, b, a)$-覆盖都是二周期的。

证明。设 $c$ 是任意一个 $(D, b, a)$-覆盖。根据引理 3， $g = f_D - (b-a)$ 的任一直线多项式因子的方向都是 $(1, 1)$ 或 $(1, -1)$。因此，假设 $\mathbf{v} \in \{(1, 1), (1, -1)\}$。我们有 $\phi_1 = 1 + t + \ldots + t^r \in \mathcal{F}_{\mathbf{v}}(g)$ 和 $\phi_2 = 1 + t + \ldots + t^{r-1} \in \mathcal{F}_{\mathbf{v}}(g)$。图 4 展示了 $r = 2$ 情况下的示意图。由于 $\phi_1 - \phi_2 = t^r$， 多项式 $\phi_1$ 和 $\phi_2$ 没有公因子，因此根据定理 5，周期化子 $g$ 没有直线多项式因子。由推论 8 即得结论。 □

在三角网格中也有类似的结果，我们可以利用推论 8 以类似的方法证明它们。

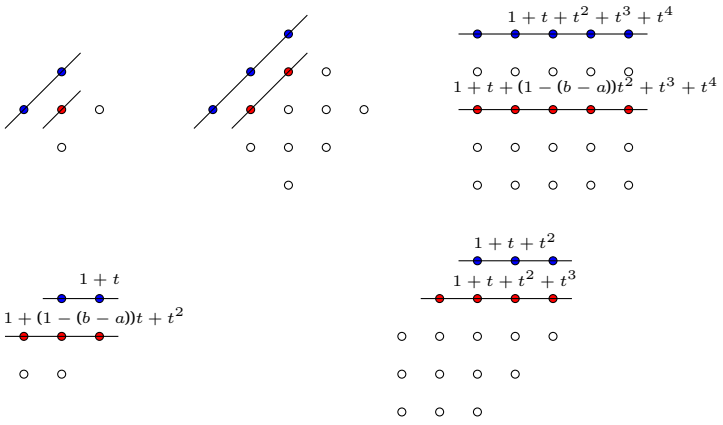


图 4：定理7、9、10、11和12的证明示意图。上排左侧的星座图展示了定理 7 的证明。上排中间的星座图展示了带有 $r=2$ 的定理 9 的证明。上排右侧的星座图展示了带有 $r=2$ 的定理 12 的证明。下排左侧的星座图展示了定理 10 的证明。下排右侧的星座图展示了带有 $r=2$ 的定理 11 的证明。在每个星座图中，我们都指出了 $\mathcal{F}_{\mathsf{v}}(g)$ 中两个没有公因子的标准形，它们来自 $\mathrm{supp}(g)$ 中某条外边 v 的点。

定理 10（[29]）。令 $D$ 为三角网格的相对 1-邻域，并假设 $b-a\neq -1$。那么，三角网格中的每个（$D$，$b$，$a$）-覆盖都是二周期的。换言之，只要 $b-a\neq -1$，三角网格中的所有（1，$b$，$a$）-覆盖都是二周期的。

证明。设 $c$ 是任意一个 $(D,b,a)$-覆盖。$g=f_D-(b-a)=x^{-1}y^{-1}+x^{-1}+y^{-1}+1-(b-a)+x+y+xy$ 的外边方向分别为 (1, 1)、$(-1,-1)$、(1, 0)、$(-1, 0)$、(0, 1) 和 $(0,-1)$，因此根据引理 3，$g$ 的任何直线多项式因子的方向只能是 (1, 1)、(1, 0) 或 (0, 1)。因此，令 $\mathsf{v}\in\{$(1, 1)、(1, 0)、(0, 1)$\}$。我们有 $\mathcal{F}_{\mathsf{v}}(g)=\{1+t, 1+(1-(b-a))t+t^2\}$。图 4 给出了示意图。多项式 $\phi_1=1+t$ 和 $\phi_2=1+(1-(b-a))t+t^2$ 满足 $\phi_1^2-\phi_2=(1+b-a)t$。因此，如果 $b-a\neq -1$，它们就没有任何公因子；于是根据定理 5，多项式 $g$ 没有直线多项式因子。由推论 8 即得所需结论。□

定理 11（[29]）。设 $r\geq 2$，且令 $D$ 为三角网格的相对 $r$-邻域。那么，每个 $(D,b,a)$-覆盖都是二周期的。换言之，对于所有 $r\geq 2$，三角网格中的每个 $(r,b,a)$-覆盖都是二周期的。

证明。设 $c$ 是任意一个 $(D,b,a)$-覆盖。$g=f_D-(b-a)$ 的外边方向为 (1,1)、$(-1,-1)$、(1,0)、$(-1,0)$、(0,1) 和 $(0,-1)$，因此根据引理 3，$g$ 的任何直线多项式因子的方向只能是 (1,1)、(1,0) 或 (0,1)。因此，设 $\mathsf{v}\in\{$(1,1),(1,0),(0, 1)$\}$。存在 $n\geq 1$，使得 $1+t+\ldots+t^n\in\mathcal{F}_{\mathsf{v}}(g)$ 且 $1+t+\ldots+t^{n+1}\in\mathcal{F}_{\mathsf{v}}(g)$。图 4 给出了 $r=2$ 的示意图。由于这两个多项式没有公因子，根据

定理 5，多项式 $g$ 没有直线多项式因子。再次应用推论 8 即可得到所述结论。

□

若 $a \neq b$，则对于任意 $r \geq 1$ any 王网格中的 $(r, b, a)$-覆盖都是二周期的：

定理 12. 设 $r \geq 1$ 为任意值， $D$ 为王网格的相对 $r$-邻域，并假设 $a \neq b$。那么，任意 $(D, b, a)$-覆盖都是二周期的。换言之，只要 $a \neq b$，王网格中的所有 $(r, b, a)$-覆盖都是二周期的。

证明. 设 $c$ 为任意一个 $(D, b, a)$-覆盖。 $g = f_D - (b - a)$的外边方向为 (1, 0)、$(-1, 0)$、(0, 1) 和 $(0, -1)$。因此，根据引理 3， $g$ 的任一直线多项式因子的方向为 (1, 0) 或 (0, 1)。令 $\mathbf{v} \in \{(1, 0), (0, 1)\}$。我们有 $\phi_1 = 1 + t + \ldots + t^{r-1} + (1 - (b - a))t^r + t^{r+1} + \ldots + t^{2r} \in \mathcal{F}_{\mathbf{v}}(g)$ 和 $\phi_2 = 1 + t + \ldots + t^{2r} \in \mathcal{F}_{\mathbf{v}}(g)$。图 4 展示了 $r = 2$ 情形下的示意图。由于 $\phi_2 - \phi_1 = (b - a)t^r$ 是一个非平凡单项式， $\phi_1$ 和$\phi_2$ 没有公因子。因此，根据定理 5，多项式 $g$ 没有直线多项式因子，由此根据推论 8 得证。 □

在上述证明中，我们用到了这样一个事实：两个单变量 Laurent 多项式没有公因子，当且仅当它们生成整个理想 $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$；而这又当且仅当它们生成一个非零单项式。这称为弱零点定理 [6]。

形状 $D \subseteq \mathbb{Z}^2$ 是凸的，当且仅当它是交集 $D = \mathrm{conv}(D) \cap \mathbb{Z}^2$，其中 $\mathrm{conv}(D) \subseteq \mathbb{R}^2$ 是 $D$的实凸包。上述所有形状都是凸的。接下来，我们将推广上述定理，并给出凸形状 $D$的 $(D, b, a)$-覆盖具有强制周期性的一个充分条件。

因此，设 $D \subseteq \mathbb{Z}^2$ 是一个有限凸形状。任何 $(D, b, a)$-覆盖都有一个周期化子 $g = f_D - (b - a)$。和之前一样，我们考察 $g$ 是否有直线多项式因子，因为如果没有，那么推论 8 就保证强制周期性。对于任意的 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$，集合 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f_D)$ 中只包含对应不同 $n \geq 1$ 的多项式 $\phi_n = 1 + \ldots + t^{n-1}$，这是因为 $D$ 是凸的：如果 $D$ 包含两个点，那么 $D$ 就包含它们之间的每一个点。因此， $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(g)$ 中只包含对应不同 $n \geq 1$ 的多项式$\phi_n$；并且，如果 $b - a \neq 0$，它还可能包含某个多项式 $\phi_{n_0} - (b - a)t^{m_0}$，其中存在某个 $n_0 \geq 1$ 使得 $\phi_{n_0} \in \mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f_D)$，且存在某个 $m_0 \geq 0$。如果 $b - a = 0$，那么 $g = f_D$，因此 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(g) = \mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f_D)$。

两个多项式 $\phi_m$ 和 $\phi_n$ 有公因子，当且仅当 $\gcd(m, n) > 1$。更一般地，多项式 $\phi_{n_1}, \ldots, \phi_{n_r}$ 有公因子，当且仅当 $d = \gcd(n_1, \ldots, n_r) > 1$；事实上，它们的最大公因子是第 $d$ 个分圆多项式

$$\prod_{\substack{1 \leq k \leq d \\ \gcd(k,d)=1}} (t - e^{i \cdot \frac{2\pi k}{d}}).$$

引入以下记号。对于任意多项式 $f$，我们用 $\mathcal{F}'_{\mathbf{v}}(f)$ 表示所有 $\mathbf{u} \notin \mathbb{Z}\mathbf{v}$ 对应的非零纤维 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{\mathbf{u}+k\mathbf{v}} X^{\mathbf{u}+k\mathbf{v}}$ 的标准形集合。换言之，我们排除经过原点的纤维。我们还用 $\mathrm{fib}_{\mathbf{v}}(f)$ 表示经过原点的纤维 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{k\mathbf{v}} X^{k\mathbf{v}}$ 的标准形。若 $\mathrm{fib}_{\mathbf{v}}(f) \neq 0$，则有 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f) = \mathcal{F}'_{\mathbf{v}}(f) \cup \{\mathrm{fib}_{\mathbf{v}}(f)\}$；若 $\mathrm{fib}_{\mathbf{v}}(f) = 0$，则有 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f) = \mathcal{F}'_{\mathbf{v}}(f)$）。

应用定理 2 和定理 5，我们得到以下定理，它给出了有限且凸的 $D$ 上每个 $(D, b, a)$-覆盖都是周期的充分条件。该定理推广了上文证明的结果。事实上，这些结果都是该定理的推论。该定理的第一部分也曾在 [7] 中提及，当时背景略有不同，表述也更为一般。

定理 13. 设 $D$ 是一个有限凸形状，$g = f_D - (b - a)$，并设 $E$ 为 $g$的外边缘方向集合。

- 假设 $b - a = 0$。对于任意 $\mathbf{v} \in E$，记 $d_{\mathbf{v}} = \gcd(n_1, \ldots, n_r)$，其中 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(g) = \{\phi_{n_1}, \ldots, \phi_{n_r}\}$。若对所有 $\mathbf{v} \in E$，$d_{\mathbf{v}} = 1$ 成立，则每个 $(D, b, a)$-覆盖都是二周期的。若 $d_{\mathbf{v}} = 1$ 对除某个与之平行的 $\mathbf{v} \in E$之外的所有情况都成立，则每个 $(D, b, a)$-覆盖都是周期的。

- 假设 $b - a \neq 0$。对于任意 $\mathbf{v} \in E$，记 $d_{\mathbf{v}} = \gcd(n_1, \ldots, n_r)$，其中 $\mathcal{F}'_{\mathbf{v}}(g) = \{\phi_{n_1}, \ldots, \phi_{n_r}\}$。若对任意 $\mathbf{v} \in E$，第 $d_{\mathbf{v}}$ 个分圆多项式与 $\mathrm{fib}_{\mathbf{v}}(g)$没有公因子，则每个 $(D, b, a)$-覆盖都是二周期的。若除某个与之平行的 $\mathbf{v} \in E$之外的所有情况都满足该条件，则每个 $(D, b, a)$-覆盖都是周期的。（注意，特别地，若 $d_{\mathbf{v}} = 1$，则该条件成立。）

证明。首先假设 $b - a = 0$。如果对所有 $\mathbf{v} \in E$ 都有 $d_{\mathbf{v}} = 1$，那么 $g$ 的 $\mathbf{v}$-纤维没有公因子，因此根据定理 5 $g$，它没有直线多项式因子。如果除了某些平行的 $\mathbf{v} \in E$ 以外，$d_{\mathbf{v}} = 1$ 对所有情形都成立，那么 $g$ 的所有直线多项式因子都处于平行方向。因此，根据定理 2，结论成立。

接着假设 $b - a \neq 0$。如果对所有 $\mathbf{v} \in E$，$d_{\mathbf{v}}$ 次分圆多项式和 $\mathrm{fib}_{\mathbf{v}}(g)$ 都没有公因子，那么根据定理 5 $g$，它没有直线多项式因子。如果除了某些平行的 $\mathbf{v} \in E$ 以外，该条件对所有情形都成立，那么 $g$ 的所有直线多项式因子都处于平行方向。因此，根据定理 2，这种情况下结论也成立。□

# 6 任意大字母表上的完美着色的强制周期性

本节证明一个定理，该定理给出了任意大字母表上的二维完美着色具有强制周期性的充分条件。作为该定理和上一节定理的推论，我们得到了二维无限网格图上的完美着色具有强制周期性的条件。

我们先证明一些适用于任意维数的引理。我们考察完美着色的向量表示，因为这样可以为任何此类向量表示得到一个非平凡的湮灭子：

引理 14. 设 $c$ 是字母表大小为 $n$、矩阵为 $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n \times n}$ 的 $D$-完美着色的向量表示。那么 $c$ 被以下多项式湮灭：

$$f(X) = \sum_{\mathbf{u} \in D} \mathbf{I} X^{-\mathbf{u}} - \mathbf{B}.$$

注. 注意，上述湮灭子与 $(D, b, a)$-覆盖的周期化子 $\sum_{\mathbf{u}\in D} X^{-\mathbf{u}}$ 一$(b-a)$ 相似。

证明。任取 $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d$，并假设 $c_{\mathbf{v}} = \mathbf{e}_j$。那么 $(\mathrm{B}c)_{\mathbf{v}} = \mathrm{B}\mathbf{e}_j$ 是 B 的第 $j$ 列。另一方面，根据 B 的定义，我们有 $((\sum_{\mathbf{u}\in D}\mathrm{I}X^{-\mathbf{u}})c)_{\mathbf{v}} = \sum_{\mathbf{u}\in D} c_{\mathbf{v}+\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\mathbf{e}_i$，这也是 B 的第 $j$ 列。因此，$(fc)_{\mathbf{v}} = 0$，从而 $fc = 0$，因为 v 是任意的。 □

下面的引理表明，与具有非平凡湮灭子的整数构型情形一样，完美着色的向量表示也有一个特殊湮灭子，它是若干差分多项式的乘积。我们称系数为整数矩阵的两个多项式模 $p$ 同余，是指它们对应的系数模 $p$ 同余；称两个整数矩阵模 $p$ 同余，是指它们对应的分量模 $p$ 同余。

引理15。设 $c$ 是一个字母表大小为 $n$、矩阵为 $\mathrm{B} = (b_{ij})_{n\times n}$ 的 $D$-完美着色的向量表示。那么 $c$ 被多项式湮灭

$$g(X) = (\mathbf{I}X^{\mathbf{v}_1} - \mathbf{I}) \cdots (\mathbf{I}X^{\mathbf{v}_m} - \mathbf{I})$$

对于某些向量 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$。

证明。根据引理 14，幂级数 $c$ 被 $f(X) = \sum_{\mathbf{u}\in D} \mathrm{I}X^{-\mathbf{u}} - \mathrm{B}$ 消去。令 $p$ 为大于 $nc_{\max}$ 的素数，其中 $c_{\max}$ 是 $c$ 的系数各分量的最大绝对值。由于 $f$ 的系数彼此可交换，对于任意正整数 $k$，根据二项式定理可得

$$f^{p^k} = f^{p^k}(X) \equiv \sum_{\mathbf{u}\in D} \mathbf{I}X^{-p^k\mathbf{u}} - \mathbf{B}^{p^k} \pmod{p}.$$

我们有 $f^{p^k}(X)c(X) \equiv 0$(模 $p$)。不同的矩阵 $\mathrm{B}^{p^k}$(模 $p$) 只有有限多个。因此，令 $k$ 和 $k'$ 互不相同，且满足 $\mathrm{B}^{p^k} \equiv \mathrm{B}^{p^{k'}}$ (模 $p$)。于是，$f' = f^{p^k} - f^{p^{k'}}$(模 $p$) 的系数属于 I 和 –I。由于 $f^{p^k}c \equiv 0$( 模 $p$) 且 $f^{p^{k'}}c \equiv 0$( 模 $p$)，又有

$$f'c \equiv 0 \pmod{p}.$$

构型 $f'c$ 的各分量的绝对值均不超过 $nc_{\max}$。由于我们选取的 $p$ 大于 $nc_{\max}$，这意味着

$$f'c = 0.$$

由于 $f' = \sum_{\mathbf{u}\in P_1} \mathrm{I}X^{\mathbf{u}} - \sum_{\mathbf{u}\in P_2} \mathrm{I}X^{\mathbf{u}}$ 对于 $\mathbb{Z}^d$ 的某些有限子集 $P_1$ 和 $P_2$ 成立，因此，$f'$ 湮灭 $c$ 等价于 $f'' = \sum_{\mathbf{u}\in P_1} X^{\mathbf{u}} - \sum_{\mathbf{u}\in P_2} X^{\mathbf{u}}$ 湮灭 $c$ 的每一层。因此，$c$ 的每一层都有非平凡的湮灭子，由定理 1 可知，$c$ 的每一层都有一个特殊湮灭子，它是差分多项式的乘积。令

$$g' = (X^{\mathbf{v}_1} - 1) \cdots (X^{\mathbf{v}_m} - 1)$$

为所有这些特殊湮灭子的乘积。由于 $g'$ 湮灭 $c$ 的每一层，多项式

$$g = (\mathbf{I}X^{\mathbf{v}_1} - \mathbf{I}) \cdots (\mathbf{I}X^{\mathbf{v}_m} - \mathbf{I})$$

湮灭 $c$。 □

引理 16。设 $p$ 是一个素数，且 $H$ 是定义在 $\mathbb{Z}_p^n$ 上、由多项式 $h = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{A}_i X^{\mathbf{u}_i} \in \mathbb{Z}_p^{n\times n}[X^{\pm 1}]$ 确定的加性元胞自动机，其中系数 $\mathbf{A}_i$ 两两可交换。假设存在 $M \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ 和矩阵 $\mathbf{C}_0$、……、$\mathbf{C}_k$，它们彼此可交换，且与每个 $\mathbf{A}_i$ 均可交换，使得

$$\mathbf{C}_0\mathbf{A}_0 + \ldots + \mathbf{C}_k\mathbf{A}_k = M \cdot \mathbf{I}$$

在 $\mathbb{Z}_p^{k\times k}$ 中成立。那么 $H$ 是满射。

证明。反设 $H$ 不是满射。根据伊甸园定理，$H$ 不是前单射，因此存在两个不同的渐近构型 $c_1$ 和 $c_2$，使得 $H(c_1) = H(c_2)$，也就是说，$h(X)c_1(X) = h(X)c_2(X)$。因此，$h$ 是 $e = c_1 - c_2$ 的湮灭子。不失一般性，可以假设 $c_1(0) \neq c_2(0)$，即 $e(0) = \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$。取 $l$，使得 $e$ 的支撑 $\mathrm{supp}(e) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d \mid e(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}\}$ 包含在一个 $d$ 维超立方体中。注意，在 $\mathbb{Z}_p^{k\times k}$ 中有

$$f^{p^l} = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{A}_i^{p^l} X^{p^l\mathbf{u}_i}$$

它也是 $e$ 的一个湮灭子。因此，根据 $l$ 的选取，对于所有 $i \in \{1, \ldots, k\}$，我们有 $\mathbf{A}_i^{p^l}\mathbf{v} = \mathbf{0}$。将恒等式

$$\mathbf{C}_0\mathbf{A}_0 + \ldots + \mathbf{C}_k\mathbf{A}_k = M \cdot \mathbf{I}$$

to 的 $p^l$ 次幂与向量 $\mathbf{v}$ 从右侧相乘，得到

$$M^{p^l} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{C}_0^{p^l}\mathbf{A}_0^{p^l}\mathbf{v} + \ldots + \mathbf{C}_k^{p^l}\mathbf{A}_k^{p^l}\mathbf{v} = \mathbf{0} + \ldots + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

然而，这与 $M^{p^l}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ 矛盾。因此，$H$ 必须是满射，正如所声称的那样。

□

定理 17. 设 $D \subseteq \mathbb{Z}^2$ 是一个有限形状，并假设存在一个整数 $t_0$，使得多项式 $f_D - t = \sum_{\mathbf{u}\in D} X^{-\mathbf{u}} - t$ 在 $t \neq t_0$ 时没有直线多项式因子。那么，当 $\det(\mathbf{B} - t_0\mathbf{I}) \neq 0$ 时，任何具有矩阵 B 的 $D$-完美着色都是二周期的。如果对于任意 $t$，$f_D - t$ 都没有直线多项式因子，那么每个 $D$-完美着色都是二周期的。

证明。设 $c$ 是一个具有矩阵 B 的 $D$-完美着色的向量表示。根据引理 14 和 15，它有两个不同的湮灭子：$f = \sum_{\mathbf{u}\in D} \mathbf{I}X^{-\mathbf{u}} - \mathbf{B}$ 和 $g = (\mathbf{I}X^{\mathbf{v}_1} - \mathbf{I}) \cdots (\mathbf{I}X^{\mathbf{v}_m} - \mathbf{I})$。将 I 替换为 1，将 B 替换为变量 $t$，并考虑相应的整数值多项式 $f' = \sum_{\mathbf{u}\in D} X^{-\mathbf{u}} - t = f_D - t$ 和 $g' = (X^{\mathbf{v}_1} - 1) \cdots (X^{\mathbf{v}_m} - 1)$，它们属于 $\mathbb{C}[x, y, t]$。这里 $X = (x, y)$。

不失一般性，我们可以假设 $f'$ 和 $g'$ 是真多项式。事实上，我们可以分别用单项式乘以 $f'$ 和 $g'$，使所得多项式 $f''$ 和 $g''$ 成为真多项式，并且它们有公因子当且仅当 $f'$ 和 $g'$ 有公因子。因此，如果 $f'$ 和 $g'$ 不是真多项式，我们可以改为考虑 $f''$ 和 $g''$。

我们考察 $f'$和 $g'$的 $y$-结式 Res$_y(f', g')$，并记作

$$\mathrm{Res}_y(f', g') = f_0(t) + f_1(t)x + \ldots + f_k(t)x^k.$$

根据结式的性质，Res$_y(f', g')$ 属于由 $f'$和 $g'$生成的理想，并且只有当 $f'$ 和 $g'$ 有公因子时，它才可能是零多项式。由于 $g'$ 是直线多项式的乘积， $f'$ 和 $g'$ 的任一公因子也是直线多项式的乘积。特别地，如果 $f'$ 和 $g'$ 有公因子，那么它们就有一个公用的直线多项式因子。然而，根据假设，当 $t \neq t_0$时， $f'$没有直线多项式因子。因此，只有当 $t = t_0$时， $f'$和$g'$才可能有公因子；于是，只有当 $t = t_0$时，Res$_y(f', g')$ 才可能为零。另一方面，当且仅当 $f_0(t) = \ldots = f_k(t) = 0$时，Res$_y(f', g') = 0$。由此可得，对于某个 $m \geq 0$，gcd$(f_0(t) \ldots, f_k(t)) = (t - t_0)^m$。因此，

$$\mathrm{Res}_y(f', g') = (t - t_0)^m(f_0'(t) + f_1'(t)x + \ldots + f_k'(t)x^k)$$

其中，多项式 $f_0'(t) \ldots, f_k'(t)$ 没有公因子。

B根据欧几里得算法，存在多项式 $a_0(t) \ldots, a_k(t)$，使得

$$a_0(t)f_0'(t) + \ldots + a_k(t)f_k'(t) = 1. \tag{1}$$

此外，多项式 $a_0(t) \ldots, a_k(t)$ 的系数是有理数，因为多项式 $f_0'(t) \ldots, f_k'(t)$ 是整数值的。注意，如果对于任意 $t$， $f'$ 都没有直线多项式因子，那么 $m = 0$，因此对于每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$， $f_i'(t) = f_i(t)$。

现在考虑多项式

$$(\mathbf{B} - t_0\mathbf{I})^m(f_0'(\mathbf{B}) + f_1'(\mathbf{B})x + \ldots + f_k'(\mathbf{B})x^k)$$

它是将 I 和 B 分别代入 Res$_y(f', g')$ 中的 1 和 $t$ 所得到的。由于 Res$_y(f', g')$ 属于由 $f'$ 和 $g'$ 生成的理想，因此上述多项式属于由 $f$ 和 $g$ 生成的理想。因此，它是 $c$ 的湮灭子，因为 $f$ 和 $g$ 都是 $c$ 的湮灭子。

假设 det(B $- t_0$I) $\neq 0$ or that $m = 0$。现在还

$$h = f_0'(\mathbf{B}) + f_1'(\mathbf{B})x + \ldots + f_k'(\mathbf{B})x^k$$

是 $c$ 的一个湮灭子。由于 $f_0'(t) \ldots, f_k'(t)$ 没有公因子， $h$ 不为零，否则就会有 $f_0'$(B) $= \ldots = f_k'$(B) $= 0$，而 B 的最小多项式将成为 $f_0'(t) \ldots, f_k'(t)$ 的一个公因子，这就产生了矛盾。

将 $t =$ B 代入方程1，我们得到

$$a_0(\mathbf{B})f_0'(\mathbf{B}) + \ldots + a_k(\mathbf{B})f_k'(\mathbf{B}) = \mathbf{I}.$$

将上述方程两边乘以方程中所有有理数分母的公倍数 $M$，并对其取模 $p$，其中 $p$ 是一个不整除 $M$ 的素数。我们得到以下恒等式

$$a'_0(\mathbf{B})f'_0(\mathbf{B}) + \ldots + a'_k(\mathbf{B})f'_k(\mathbf{B}) = M \cdot \mathbf{I} \not\equiv 0 \pmod{p}$$

其中方程中的所有系数都是整数矩阵。

根据引理 16，由 $h = \sum_{i=0}^{k} f'_i(x^i)$ 确定的加性元胞自动机是满射的。由于 $h$ 只是变量 $x$ 的多项式，它定义了一个满射的一维元胞自动机 $H$，并且将 $c$ 的每个水平纤维映射为 0。因此，$c$ 的每个水平纤维都是 0 的一个原像。设 $c'$ 是 $c$ 的一个水平纤维。伊甸园定理意味着，0 在 $H$ 下只有有限个（设为 $N$ 个）原像。由于 $c'$ 的每个平移同样都是 0 的一个原像，我们得出，对于某个 $i \in \{0, \ldots, N-1\}$，有 $c' = \tau^i(c')$。因此，$(N-1)!$ 是 $c$ 的所有水平纤维的一个公周期，从而 $c$ 是水平周期的。

对 $f'$ 和 $g'$ 的 $x$-结式重复同样的论证，我们可以证明 $c$ 也是垂直周期的。因此，$c$ 是二周期的。 □

作为上述定理及上一节定理的推论，我们为方格网格和三角网格中完美着色的强制周期性给出了新的证明，并得到了王网格中完美着色强制周期性的一项新结果：

推论 18（[29]）。设 $D$ 为方格网格的相对 1-邻域。那么，只要 $\det(\mathrm{B} - \mathrm{I}) \neq 0$，任意具有矩阵 B 的 $D$- 完美着色都是二周期的。换言之，只要 $\det(\mathrm{B} - \mathrm{I}) \neq 0$，方格网格中任意具有矩阵 B 的 1- 完美着色都是二周期的。

证明。在定理 7 的证明中，我们已经证明，当 $t \neq 1$时，多项式 $f_D - t$ 没有直线多项式因子。因此，根据定理 17，只要 $\det(\mathrm{B} - \mathrm{I}) \neq 0$，任意 ($D$, B)-着色都是二周期的。 □

推论 19（[29]）。设 $D$ 为三角网格的相对 1-邻域。那么，只要 $\det(\mathrm{B} + \mathrm{I}) \neq 0$，任意具有矩阵 B 的 $D$-完美着色都是二周期的。换言之，只要 $\det(\mathrm{B} + \mathrm{I}) \neq 0$，三角网格中任意具有矩阵 B 的 1-完美着色都是二周期的。

证明。在定理 10 的证明中已表明，当 $t \neq -1$ 时，多项式 $f_D - t$ 没有直线多项式因子。因此，根据定理 17，只要 $\det(\mathrm{B} + \mathrm{I}) \neq 0$，任意 ($D$, B)-着色都是二周期的。 □

推论 20（[29]）。令 $r \geq 2$，并令 $D$ 为方格网格的相对 $r$-邻域。那么每个 $D$-完美着色都是二周期的。换言之，对于所有 $r \geq 2$，方格网格中的任意 $r$-完美着色都是二周期的。

证明。在定理 9 的证明中已经证明，对于任意 $t$，多项式 $f_D - t$ 都没有直线多项式因子。因此，根据定理 17，每个 $D$-完美着色都是二周期的。 □

推论 21（[29]）。设 $r \geq 2$，且设 $D$ 是三角网格的相对 $r$-邻域。那么每个 $D$-完美着色都是二周期的。换言之，对于所有 $r \geq 2$，三角网格中的任意 $r$-完美着色都是二周期的。

证明。在定理 11 的证明中已证明，对于任意 $t$，多项式 $f_D - t$ 都没有直线多项式因子。因此，根据定理 17，每个 $D$-完美着色都是二周期的。

□

推论 22。设 $r \geq 1$，且 $D$ 是王网格的相对 $r$-邻域。那么，只要 det(B) $\neq 0$，每个矩阵为 B 的 $D$-完美着色都是二周期的。换言之，只要 det(B) $\neq 0$，王网格中每个矩阵为 B 的 $r$-完美着色都是二周期的。

证明。在定理 12 的证明中，我们证明了当 $t \neq 0$ 时，多项式 $f_D - t$ 没有直线多项式因子。因此，根据定理 17，只要 det(B) $\neq 0$，任意 ($D$, B)-着色都是二周期的。

□

注。注意，推论 18、19、20 和 21 中的结果在 [29] 中以稍微更一般的形式陈述并证明。事实上，在 [29] 中已证明，如果构型 $c \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ 被

$$\sum_{\mathbf{u} \in D} \mathbf{I} X^{-\mathbf{u}} - \mathbf{B}$$

其中，$\mathbf{B} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ 是一个任意的整数矩阵，其行列式满足四个推论中的条件，且 $D$ 如推论中所述，则 $c$ 必然是周期的。这类构型被称为广义中心函数。然而，在引理 14 中，我们证明了任意具有矩阵 B 的 $D$-完美着色的向量表示都被该多项式消去；也就是说，我们证明了完美着色的向量表示是一个广义中心函数。通过分析定理 17 的证明，我们看到该定理对广义中心函数同样成立，因此其后的推论也同样适用于广义中心函数，从而我们得到了与 [29]中相同的结果。

# 7 低阿贝尔复杂度构型的强制周期性

本节证明一个关于低阿贝尔复杂度二维构型的强制周期性的命题，该命题推广了 [7]中的一个结果。事实上，如 [7] 所述，我们将阿贝尔复杂度的定义从有限图案推广到多项式，并在这一更一般的阿贝尔复杂度定义下证明强制周期性的命题。

设 $c \in \{\mathbf{e}_1、\ldots\ldots、\mathbf{e}_n\}^{\mathbb{Z}^d}$，且 $D \subseteq \mathbb{Z}^d$ 为一个有限形状。考虑多项式 $f = \mathbf{I} \cdot f_D(X) = \sum_{\mathbf{u} \in D} \mathbf{I} X^{-\mathbf{u}} \in \mathbb{Z}^{n \times n}[X^{\pm 1}]$。$(fc)_{\mathbf{v}} = \sum_{\mathbf{u} \in D} \mathbf{I} \cdot \mathbf{c}_{\mathbf{v}+\mathbf{u}}$ 的第 $i$ 个系数表示在 $c$ 中 $\mathbf{v}$ 的 $D$ 邻域内颜色为 $\mathbf{e}_i$ 的元胞数量，因此，相对于 $D$，$c$ 的阿贝尔复杂度恰好等于 $fc$ 的不同系数的数量。

更一般地，对于一个整数值的向量构型 $c \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$，其中 $\mathcal{A}$ 是由整数向量构成的有限集，我们定义其相对于多项式$f \in \mathbb{Z}^{n\times n}[X^{\pm 1}]$ 的阿贝尔复杂度 $A(c, f)$ 如下：

$$A(c, f) = |\{(fc)_{\mathbf{v}} \mid \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d\}|.$$

该定义可以扩展到整数构型和多项式。事实上，我们将构型 $c \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ where $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}$ 相对于多项式 $f = \sum f_i X^{\mathbf{u}_i} \in \mathbb{Z}[X^{\pm 1}]$ 的阿贝尔复杂度 $A(c, f)$ 定义为向量表示 $c'$of $c$ 相对于多项式 $f' = \mathbf{I}\cdot f = \sum f_i \cdot \mathbf{I} \cdot X^{\mathbf{u}_i}$ 的阿贝尔复杂度 $A(c', f')$。因此，如果 $A(c, f) = 1$，我们就称 $c$ 相对于多项式 $f$ 具有低阿贝尔复杂度。显然，该定义与构型相对于有限形状的低阿贝尔复杂度定义一致：因为如果 $c$ 是整数构型，那么 $A(c, D) = 1$ 当且仅当 $A(c, f_D) = 1$；如果 $c$ 是整数向量构型，那么 $A(c, D) = 1$ 当且仅当 $A(c, \mathbf{I} \cdot f_D) = 1$。

我们研究低阿贝尔复杂度二维构型的强制周期性。注意，低阿贝尔复杂度的构型不一定是周期的。事实上，[30] 中证明了，对于某个有限形状 $D$，存在阿贝尔复杂度为 $A(c, D) = 1$ 的非周期二维构型。然而，[7] 中证明了，若 $A(c, f) = 1$，且多项式 $f$没有直线多项式因子，那么假设 $f$ 的支撑是凸的，$c$就是二周期的。下面的定理加强了这一结果，并表明无须假设多项式的支撑是凸的。我们将此结果作为定理 2 的推论得到。

定理 23. 设 $c$ 是字母表大小为 $n$的二维整数构型，并假设其关于多项式 $f \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ 具有低阿贝尔复杂度。若 $f$ 没有直线多项式因子，则 $c$ 是二周期的。若 $f$ 的直线多项式因子都沿唯一的本原方向 $\mathbf{v}$，则 $c$ 是 $\mathbf{v}$-周期的。因此，若 $f_D$ 没有直线多项式因子，或其直线多项式因子都沿唯一的本原方向，那么任何关于 $D$ 具有低阿贝尔复杂度的构型分别都是二周期的或周期的。

证明。根据假设 $A(c, f) = 1$，我们有 $f'c' = \mathbf{c}^0\mathbb{I}$，其中 $\mathbf{c}_0 \in \mathbb{Z}^n$，这里 $c'$是 $c$的向量表示，且 $f' = \mathbf{I} \cdot f$。因此，$f$使 $c'$的每一层都具有周期性。若 $f$没有直线多项式因子，则根据定理 2，$c'$ 的每一层都是二周期的，因而 $c'$也是二周期的。若 $f$ 的直线多项式因子仅沿一个本原方向 $\mathbf{v}$，则根据定理 2，$c'$ 的每一层都是 $\mathbf{v}$-周期的，因而 $c'$ 也具有 $\mathbf{v}$-周期性。由于 $c$ 是周期的当且仅当其向量表示 $c'$ 是周期的，故结论成立。 □

注。在 [7] 中，如果一个整数构型 $c$相对于 $f$ 具有低阿贝尔复杂度，就意味着 $c$ 是强周期的，那么多项式 $f \in \mathbb{Z}[X^{\pm 1}]$ 称为阿贝尔刚性。在上面的定理中，我们证明了，如果多项式 $f \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ 没有直线多项式因子，那么它就是阿贝尔刚性的。此外，反向结论也成立，正如 [7], 中所证明的：也就是说，如果多项式$f \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ 有直线多项式因子，那么它就不是阿贝尔刚性的。这意味着，如果 $f$ 有直线多项式因子，那么就存在一个构型，它不是二周期的，但相对于 $f$具有低阿贝尔复杂度。事实上，正如 [7]中所述，这一方向对所有 $d$都成立，而不仅仅对 $d = 2$ 成立。

在下面的例子中，我们提出一个与低阿贝尔复杂度构型相关的开放问题。

例 24（周期铺砌问题）。本例讨论由单个铺砌块进行的平移铺砌。在此语境下，我们将铺砌块定义为任意有限子集 $F \subseteq \mathbb{Z}^d$，而由铺砌块 $F$ 进行的铺砌，是指满足以下条件的子集 $C \subseteq \mathbb{Z}^d$：网格 $\mathbb{Z}^d$ 中的每个点都能唯一表示为 $F$ 中的一个元素与 $C$中的一个元素之和。将铺砌 $C$ 表示为其示性函数，我们得到一个 $d$维二元构型 $c \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$，定义为

$$c_{\mathbf{u}} = \begin{cases} 1, \text{ if } \mathbf{u} \in C \\ 0, \text{ if } \mathbf{u} \notin C \end{cases} .$$

构型 $c$恰好有 $|F|$个形状为 $-F$的不同图案，即恰好包含一个符号 1 的图案。换言之，相对于 $-F$，它具有低复杂度。令$f = f_F = \sum_{\mathbf{u} \in F} X^{-\mathbf{u}}$为 $F$的特征多项式。由于 $C$是由 $F$进行的铺砌，因此我们有 $fc = 0$。事实上，相对于 $f$和 $-F$， $c$具有低阿贝尔复杂度。因此，根据定理 23，如果 $f_F$没有直线多项式因子，则由 $F \subset \mathbb{Z}^2$进行的任何铺砌都是二周期的。

周期铺砌问题指出，如果存在由铺砌块 $F \subseteq \mathbb{Z}^d$ 组成的铺砌，那么也存在由 $F$ [20, 31] 组成的周期铺砌。通过简单的鸽巢原理论证可以看出，在维数为 $d = 1$ 时，所有由单个铺砌块构成的平移铺砌都是周期的，因此周期铺砌问题在维数为 1 [26] 时成立。对于 $d \geq 2$，这一猜想要棘手得多，直到最近，Bhattacharya 才证明它对 $d = 2$ [3] 成立。在 [9] 中，针对 $d = 2$ 的情形给出了一种略有不同的证明，并作了一些推广。对于 $d \geq 3$，这一猜想仍有部分问题尚未解决。不过，最近已有证明表明，对于某些足够大的 $d$，周期铺砌猜想不成立 [10]。

# 8 算法方面

子移位中的所有构型都是周期的；尤其是，当子移位中根本不存在任何构型时，这一说法也成立！能够识别这类平凡情形很有用。

所有

$$\mathcal{S}(D, b, a) = \{c \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} \mid (f_D - (b - a))c = a_{\mathbb{I}}(X)\}$$

$(D, b, a)$-覆盖的集合，对于任意给定的有限形状 $D$ 以及非负整数$b$和 $a$，都是一个有限型子移位。因此，对于给定的邻域 $D$ 以及覆盖常数 $b$ 和 $a$，是否存在任何 $(D, b, a)$-覆盖的问题，等价于有限型子移位$\mathcal{S}(D, b, a)$是否非空的问题。一般而言，给定有限型子移位是否为空是不可判定的；但是，如果已知该有限型子移位不是非周期的，那么正如王浩通过一个经典论证所示，该问题就变得可判定：

引理 25（[32]）。如果一个有限型子移位为空集，或者包含一个强周期构型，那么它的空性问题是可判定的，也就是说，存在一种算法可以确定该有限型子移位中是否存在任何构型。

特别地，如果 $g = f_D - (b - a)$ 的直线多项式因子至多沿一个方向，那么是否存在任何 $(D, b, a)$-覆盖的问题是可判定的：

定理 26. 给定一个有限的 $D \subseteq \mathbb{Z}^2$ 以及非负整数 $b$ 和 $a$，使得多项式 $g = f_D - (b - a) \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ 的直线多项式因子至多沿一个本原方向。则存在一种算法，可以判断是否存在任何 $(D, b, a)$-覆盖。

证明. 令 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(D, b, a)$ 为所有 $(D, b, a)$-覆盖构成的有限型子移位。由于 $g$ 的直线多项式因子至多沿一个本原方向，根据定理 2，$\mathcal{S}$ 中的每个元素都是周期的。任何包含周期构型的二维有限型子移位也包含二周期构型。因此，$\mathcal{S}$ 要么为空，要么包含一个二周期构型，故根据引理 25，存在一种算法可以判断 $\mathcal{S}$ 是否非空。 □

对于给定的 $D$、$b$ 和 $a$，人们或许也想设计一个完美的 $(D, b, a)$-覆盖。在定理 26 的假设下，这可以有效地实现：正如我们所见，如果 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(D, b, a)$ 非空，它就包含一个二周期构型。对于任意二周期构型 $c$，很容易检查 $c$ 是否包含禁用图案。通过逐一枚举二周期构型，最终必定能找到一个属于 $\mathcal{S}$ 的构型。

如果多项式 $g$ 没有直线多项式因子，则以下更强的结论成立：

定理 27. 如果对于给定的有限形状 $D \subseteq \mathbb{Z}^2$ 和非负整数 $b$ 和 $a$，多项式 $g = f_D - (b - a)$ 没有直线多项式因子，那么有限型子移位 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(D, b, a)$ 是有限的。因此，可以有效地构造出 $\mathcal{S}$ 的所有有限多个元素。

上述定理第一部分的证明依赖于这样一个事实：二维子移位是有限的，当且仅当它只包含双周期配置 [2]。根据定理 2，如果 $g$ 没有直线多项式因子，那么它使之周期化的每个构型（包括 $\mathcal{S}$ 中的每个构型）都是双周期的，因此 $\mathcal{S}$ 是有限的。该定理的第二部分，即可以有效地生成 $\mathcal{S}$ 的所有有限多个元素这一事实，对任意维数的有限型子移位普遍成立：

引理 28. 给定一个有限的 $F \subseteq \mathcal{A}^*$，若 $X_F$ 是有限的，则可以有效地构造出 $X_F$ 的元素。

证明。给定一个有限 $F \subseteq \mathcal{A}^*$ 和一个图案 $p \in \mathcal{A}^D$，假设强周期构型在 $X_F$ 中稠密，就可以有效地检验 $p \in \mathcal{L}(X_F)$。事实上，对于肯定实例，我们有一个半算法：猜测一个强周期构型 $c$，并验证 $c \in X_F$ 和 $p \in \mathcal{L}(c)$。对于任意有限型子移位 $X_F$，都存在一个用于否定实例的半算法，这是一种标准的紧致性论证：猜测一个有限 $E \subseteq \mathbb{Z}^d$，使得 $D \subseteq E$，并验证每个满足 $q|_D = p$ 的 $q \in \mathcal{A}^E$ 都包含一个禁用子图案。

因此，给定有限的 $F$、$G \subseteq \mathcal{A}^*$，假设强周期构型在 $X_F$ 和 $X_G$ 中稠密，就可以有效地判定 $X_F = X_G$ 是否成立。事实上，$X_F \subseteq X_G$ 当且仅当没有 $p \in G$ 属于 $\mathcal{L}(X_F)$；我们已在上文证明这一条件是可判定的。类似地，我们也可以检验 $X_G \subseteq X_F$。

最后，给定一个有限的 $F \subseteq \mathcal{A}^*$，且已知 $X_F$ 是有限的。$X_F$ 中的所有元素都是强周期的，因此强周期构型显然在 $X_F$ 中稠密。可以有效地枚举所有由强周期构型组成的有限集 $P$。对于每个平移不变的 $P$（因此也是一个有限型子移位），都可以构造一个由禁用图案组成的有限集 $G \subseteq \mathcal{A}^*$，使得 $X_G = P$。如上所示，有一种算法可以检验 $X_F = X_G = P$ 是否成立。由于 $X_F$ 是有限的，最终会找到一个集合 $P$，使得 $X_F = P$。

□

现在我们来讨论一个更一般的问题：在任意大小的字母表上，完美着色是否存在。设 $D \subseteq \mathbb{Z}^2$ 是一个有限形状，B 是一个 $n \times n$ 整数矩阵。要确定是否存在任何 (*D*, B)- 着色，等价于询问有限型子移位

$$\mathcal{S}(D, \mathbf{B}) = \{c \in \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}^{\mathbb{Z}^2} \mid gc = 0\}$$

是否非空，其中 $g = \sum_{\mathbf{u} \in D} \mathrm{I} X^{-\mathbf{u}} - \mathrm{B}$，因为它恰好是所有 (*D*, B)-着色的向量表示的集合。

定理 29. 给定有限形状 $D \subseteq \mathbb{Z}^2$、非负整数矩阵 B 和整数 $t_0$，使得多项式 $f_D(x, y) - t \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ 在 $t \neq t_0$ 且 $\det(\mathrm{B} - t_0 \mathrm{I}) \neq 0$ 时没有直线多项式因子。那么，(*D*, B)-着色只有有限多个，并且可以有效地构造出来。特别地，存在一种算法可以确定是否存在任何 (*D*, B)-着色。

证明。令 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(D, \mathrm{B})$ 为所有 (*D*, B)-颜色的向量表示所构成的有限型子移位。根据定理 17，$\mathcal{S}$ 的所有元素都是二周期的。因此，$\mathcal{S}$ 是有限的，由引理 28 可得所述结论。

□

推论 18、19　　、20、21 和 22 与上述定理共同得出以下推论。

推论 30。对于满足给定条件的矩阵 B，以下判定问题均可判定。

- 存在 (*D*, B)-颜色，其中 $D$ 是方格网格的相对 1-邻域，且 $\det(\mathrm{B} - \mathrm{I}) \neq 0$。
- 存在 (*D*, B)-颜色，其中 $D$ 是三角网格的相对 1-邻域，且 $\det(\mathrm{B} + \mathrm{I}) \neq 0$。
- （*D*,B）-颜色方案的存在性，其中 $D$ 是方格网格的相对 $r$-邻域，且 B 任意。
- （*D*,B）-颜色方案的存在性，其中 $D$ 是三角网格的相对 $r$-邻域，且 B 任意。
- 存在（*D*, B）-着色，其中 $D$ 是王网格的相对 $r$邻域，且 $\det(\mathrm{B}) \neq 0$。

定理 31. 给定一个关于两个变量的多项式 $f$，其直线多项式因子至多具有一个平行方向，则存在一种算法，可以判定是否存在任意具有低阿贝尔复杂度的二维构型：它们取值于大小为 $n$ 的字母表，并且相对于 $f$而言具有低阿贝尔复杂度。事实上，此类构型只有有限多个，而且可以有效地将它们全部构造出来。

证明。字母表大小为 $n$、关于 $f$ 具有低阿贝尔复杂度的所有构型的向量表示集合 $\{c \in \{\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_n\}^{\mathbb{Z}^2} \mid \mathrm{I}fc = 0\}$ 是一个有限型子移位。根据定理 23，它只包含二周期构型，因此是有限的。于是，由引理 28 可得所述结论。

□

# 9 结论

我们研究了二维完美着色，并运用多维符号动力系统的代数方法，证明了其强制周期性的一般条件（定理 17）。作为该定理的推论，我们为方形网格和三角网格中已知的强制周期性结果给出了新的证明，并在王网格中得到了一个新结果。此外，我们推广了关于低阿贝尔复杂度二维构型强制周期性的一个结论。我们还在强制周期性的背景下，对算法可判定性作了一些探讨。

我们所有关于完美着色强制周期性的结果都用到了定理 2，因此仅涉及二维构型。然而，存在定理 2 的 $d$ 维版本 [15], ，所以我们想知道是否存在类似于定理 17 的结果，能为任意维数 $d$ 的 $d$ 维完美着色给出强制周期性的充分条件。显然，每个一维完美着色必定是周期的。

# 参考文献


[1] M. A. Axenovich. 关于以恒定半径的球覆盖无限矩形网格的多重覆盖。《离散数学》，268(1):31 – 48，2003年。

[2] A. Ballier、B. Durand 和 E. Jeandal。铺砌的结构方面。载于 Susanne Albers 和 Pascal Weil 编，《第25届理论计算机科学专题讨论会论文集》，第1卷，莱布尼茨国际信息学论文集（LIPIcs），第61–72页，德国达格施图尔，2008。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik。[3] S. Bhattacharya。铺砌的周期性与可判定性 $\mathbb{Z}^2$。《美国数学杂志》，142，2016年2月。

[4] T. Ceccherini-Silberstein 和 M. Coornaert。《细胞自动机与群》。Springer 数学专著丛书。Springer Berlin Heidelberg，2010年。

[5] G. Cohen、I. Honkala、S. Litsyn 和 A. Lobstein。《覆盖码》。爱思唯尔，1997。[6] D. A. Cox、J. Little 和 D. O'Shea。《理想、簇与算法：计算代数几何与交换代数导论》。施普林格，2015年。[7] N. Geravker 和 S. A. Puzynina。非矩形图案的阿贝尔型 Nivat 猜想。arXiv:2111.04690，2021年12月。[8] C. Godsil。等划分。Paul Erd ¨ os is Eighty 第1卷，第173–192页，1993年。[9] R. Greenfeld 和 T. Tao。 $\mathbb{Z}^d$中的平移铺砌结构。《离散分析》，2021年。[10] R. Greenfeld 和 T. Tao。周期铺砌猜想的一个反例，2022年。[11] T. W. Haynes、S. Hedetniemi 和 P. Slater。《图的控制基础》。CRC出版社，第1版，1997。[12] E. Heikkil¨a、P. Herva 和 J. Kari。关于二维网格的完美覆盖。载于 Volker Diekert 和 Mikhail Volkov 编，《语言理论发展》，第152–163页，施普林格·查姆，2022年。施普林格国际出版公司。[13] J. Kari。元胞自动机理论：综述。《理论计算机科学》，334(1)：3–33，2005年。[14] J. Kari。平面的低复杂度铺砌。载于《形式系统的描述复杂性》——第21届 IFIP WG 1.02 国际会议，DCFS 2019，《计算机科学讲义》第11612卷，第35–45页。施普林格，2019年。[15] J. Kari。代数子移位中的扩张性与周期性。已投稿，2022年。[16] J. Kari 和 E. Moutot。代数子移位中的 Nivat 猜想与图案复杂度。《理论计算机科学》，777：379–386，2019年。[17] J. Kari 和 M. Szabados。Nivat 猜想的代数几何方法。载于 ICALP 2015 论文集，第II部分，《计算机科学讲义》第9135卷，第273–285页，2015年。[18] J. Kari 和 M. Szabados。Nivat 猜想的代数几何方法。《信息与计算》，271：104481，2020年。[19] P. Kurka。《拓扑动力系统与符号动力系统》。SMF丛书。法国数学学会，2003年。[20] J. C. Lagarias 和 Y. Wang。用单个图块的平移副本铺砌直线。《数学发明》，124：341–365，1996年。

[21] D. Lind 和 B. Marcus。《符号动力学与编码导论》。剑桥大学出版社，1995。[22] M. Lothaire。《词组合学》。剑桥数学文库。剑桥大学出版社，第2版，1997。[23] E. F. Moore。自我复制的机器模型。1962。[24] M. Morse 和 G. A. Hedlund。符号动力系统。《美国数学杂志》，60(4):815–866，1938。[25] J. R. Myhill。Moore 伊甸园定理的逆命题。1963。[26] D. Newman。整数的镶嵌。《数论杂志》，9(1):107–111，1977。[27] M. Nivat。在第24届自动机、语言与编程国际研讨会（ICALP 1997）上的特邀报告，1997。[28] S. A. Puzynina。半径为 $r > 1$ 的无限矩形网格的完美着色。`《电子数学与信息学通报》，5:283–292，2008。[29] S. A. Puzynina。广义二维无限词的周期性。《信息与计算》，207(11):1315–1328，2009。[30] S. A. Puzynina。阿贝尔复杂度较低的非周期二维词。《电子组合学杂志》，26(4)，2019年。[31] M. Szegedy。用有限簇铺砌无限网格的算法。第39届计算机科学基础年会论文集（目录号98CB36280），第137–145页，1998。[32] H. Wang。通过模式识别证明定理——II。《贝尔系统技术杂志》，40(1):1–41，1961。