arXiv:2301.05248v1 [math.NT] 12 Jan 2023

关于 $\mathbb{F}_2$ 的一些乘性函数

Luis H. Gallardo、Olivier Rahavandrainy 布雷斯特大学，法国国家科学研究中心混合研究单位6205，布列塔尼大西洋数学实验室 电子邮箱：luis.gallardo@univ-brest.fr, olivier.rahavandrainy@univ-brest.fr

2023年1月16日

数学主题分类（2010）：11T55, 11T06。

摘要
我们将关于乘性函数、狄利克雷卷积和逆元的一般概念推广到 $\mathbb{F}_2$ 上。由此得到了一些有趣的结果，即奇二元多项式为完全多项式的必要条件。请注意，我们受到了 [4] 和 [10], 中关于奇完全数的“类似”研究的启发。

1 $\mathbb{F}_2$ 上的完全多项式

设 $A \in \mathbb{F}_2[x]$ 是一个非零多项式。若 A 有一次因子，则称其为偶多项式；否则称其为奇数。我们将 $\mathbb{F}_2$ 上形如 $1 + x^a(x + 1)^b$ 的不可约多项式称为梅森素数多项式，其中 a、b 为正整数。若 d 是 A 的一个因子，且 $\gcd(d, \frac{A}{d}) = 1$，则称其为酉因子。令 $\omega(A)$ 表示 A 在 $\mathbb{F}_2$ 上不同不可约因子（或素因子）的个数；令 $\sigma(A)$（分别为 $\sigma^*(A)$）表示 A 的所有因子之和（分别为所有酉因子之和）（σ 和 σ^* 是乘性函数）。若 $\sigma(A) = A$（分别地，若 $\sigma^*(A) = A$），则称 A 为完全多项式（分别为酉完全多项式）。完全多项式的概念由 E. F. Canaday 于 1941 年首次提出（[2]）。许多后续研究（[1], [5], [6], [7], [9]）列出了这类多项式。我们得到：- “显然”的那些多项式，形如 $(x^2 + x)^{2^n-1}$，其中 n 为正整数；- 另外九个，它们是唯一的偶多项式，且仅能被梅森素数整除（[9], 定理 1.1），

- 以及两个可被非梅森素数（[8]）整除的 1。

我们未能找到奇完全多项式。不过，对于此类多项式 A，可以得到以下结果：
- A 是一个平方数： $A = S^2$。此外，如果 S 是无平方因子的（[5]），我们称 A 是特殊的，
- A的不可约因子个数（按重数计）至少为 12，且 $\deg(A) > 200$ ([3])，

- $\omega(A) \geq 5$，并且如果 A 是特殊的，那么 $\omega(A) \geq 10$ ([5] 和 [6])。

2 关于 $\mathbb{F}_2$的乘性函数

定义 2.1. 设 f： $\mathbb{F}_2[x] \setminus 0 \to \mathbb{F}_2[x]$ 是一个映射。若当最大公因式$(A, B) = 1$时，有 $f(AB) = f(A)f(B)$，则称其为乘性的（分别称为完全乘法的）；（分别地，对任意 $A, B \in \mathbb{F}_2[x] \setminus 0$均成立）。

引理 2.2. 设 f 是一个乘性函数。那么， $f(1) = 1$，且 f 完全由 $f(P^r)$的取值确定，其中 P不可约且 $r \in \mathbb{N}^*$。

例 2.3。
- 乘法单位函数 δ： $\delta(A) = 1$ 若 $A = 1$，则 $\delta(A) = 0$ 否则。
- 常值函数 z： $z(A) = 1$，对任意 A （z 不是恒等函数）。
- 恒等函数 Id：$\mathrm{Id}(A) = A$，对任意 A。
- 欧拉函数 ϕ： $\phi(P^r) = P^r + P^{r-1}$ 若 P不可约且 $r \geq 1$。
- 函数 σ： $\sigma(A)$ 等于 A 的所有因子之和。
- 函数 σ^*： $\sigma^*(A)$ 等于 A的所有西因子之和。
- 莫比乌斯函数 μ： $\mu(A) = \begin{cases} \\ \end{cases}$ 当 A 是无平方因子时，否则为 0。

注意， δ、 z、Id、Id_k 都是完全乘法的，而 μ、 σ 和 σ^* 仅为乘性函数。

3 狄利克雷卷积

定义 3.1. 对于两个乘性函数 f、g，我们将卷积积定义为：

$$(f * g)(A) = \sum_{D|A} f(D)\ g(\frac{A}{D}).$$

通过直接计算，我们得到以下引理和例子。

引理 3.2. 卷积 $f * g$ 也是积性的。此外，

$f * g = g * f$, $f * (g * h) = (f * g) * h$, $f * \delta = f$, $f * (g + h) = f * g + f * h$, 以及 $f(g * h) = fg * fh$，如果 f 是完全乘法的。

引理 3.3。以下等式成立：

$$z * \mu = \delta,\ \phi * z = \mathrm{Id},\ \sigma = \mathrm{Id} * z.$$

证明。考虑 P^r 处的值，其中 P 不可约且 $r \in \mathbb{N}^*$。 □

引理 3.4（莫比乌斯反演公式）。
当且仅当 $f = g * \mu$ 时，有 $g = f * z$。

注 3.5。若 f、g 和 h 都是积性函数，且 $f(S) = g(S)$，其中 S 为某个值，则一般而言，$(h * f)(S) \neq (h * g)(S)$。例如，$S = x(x+1)$ $f = \mathrm{Id}$ $h = g = \sigma$。有：$\sigma(S) = S = \mathrm{Id}(S)$，但 $(\sigma * \sigma)(S) = 0 \neq 1 = (\sigma * \mathrm{Id})(S)$（见引理 3.7 和 3.13）。

3.1 平方卷积

定义 3.6。f 的平方卷积记作 $f^{2\text{卷积}}$，是卷积 $f * f$。

引理 3.7. 设 P 是不可约的。那么对于任意 $r \geq 0$，$f^{2\mathrm{conv}}(P^{2r}) = (f(P^r))^2$ 和 $f^{2\mathrm{conv}}(P^{2r+1}) = 0$。

证明. 首先，$f^{2\mathrm{conv}}(P^0) = 1$。对于 $r \geq 1$，

$$\begin{aligned} f^{2\mathrm{conv}}(P^{2r}) &= \sum_{t=0}^{2r} f(P^t) \cdot f(P^{2r-t}) = f(P^{2r}) + f(P^{2r}) + \sum_{t=1}^{2r-1} f(P^t) \cdot f(P^{2r-t}) \\ &= \sum_{t=1}^{r-1} f(P^t) f(P^{2r-t}) + (f(P^r))^2 + \sum_{t=r+1}^{2r-1} f(P^t) f(P^{2r-t}) = (f(P^r))^2. \\ f^{2\mathrm{conv}}(P^{2r+1}) &= \sum_{t=0}^{2r+1} f(P^t) \cdot f(P^{2r+1-t}) = 0 + \sum_{t=1}^{2r} f(P^t) \cdot f(P^{2r+1-t}) \\ &= \sum_{t=1}^{r} f(P^t) \cdot f(P^{2r+1-t}) + \sum_{t=r+1}^{2r} f(P^t) \cdot f(P^{2r+1-t}) = 0. \end{aligned}$$

□

我们立即得到

推论 3.8. 设 A 是一个非零二元多项式。当且仅当 $A = S^2$ 且 $f(S) = S$时，$f^{2\mathrm{conv}}(A) = A$。

3.2 卷积 $\sigma * \mu$

引理 3.9. 设 P 不可约且 $m \in \mathbb{N}^*$。则

$$(\sigma * \mu)(P^m) = P^m \ so\ that\ \sigma * \mu = \mathrm{Id}.$$

证明。由 $(\sigma * \mu)(P) = \sigma(P) + \mu(P) = 1 + P + 1 = P$可得，对于 $m \geq 2$，$(\sigma * \mu)(P^m) = \sigma(P^m) + \mu(P^m) + \sigma(P^{m-1})\mu(P) + 0 \cdots + 0 = \sigma(P^m) + \sigma(P^{m-1}) = P^m$。 □

推论 3.10。若 A 是奇数且完全，则

$$\sum_{D|A, D\neq 1, A, A/D\ square-free} \sigma(D) = 0.$$

证明。由此有：$\sigma(A) = A$，且 $A = S^2$。因此，

$$A + 0 + \sum_{D|A, D\neq 1, A, A/D\ square-free} \sigma(D) = (\sigma * \mu)(A) = \mathrm{Id}(A) = A.$$ □

3.3 卷积 $\sigma * z$

引理 3.11. 设 P 不可约且 $r \in \mathbb{N}$。那么

$$(\sigma * z)(P^{2r}) = (\sigma(P^r))^2 \ and\ (\sigma * z)(P^{2r+1}) = P \cdot (\sigma(P^r))^2.$$

证明. 对 r 使用归纳法。情形 $r = 0$ 显然。

假设 $(\sigma * z)(P^{2r}) = (\sigma(P^r))^2$ 且 $(\sigma * z)(P^{2r+1}) = P \cdot (\sigma(P^r))^2$。

One has: $(\sigma * z)(P^{2r+2}) = \sigma(P^{2r+2}) + z(P^{2r+2}) + \sum_{k=1}^{2r+1} \sigma(P^{2r+2-k}) \cdot z(P^k)$.

Thus, $(\sigma * z)(P^{2r+2}) = \sigma(P^{2r+2}) + 1 + \sum_{k=1}^{2r+1} \sigma(P^{2r+2-k}) = (1 + \cdots + P^{r+1})^2$.

$(\sigma * z)(P^{2r+3}) = \sigma(P^{2r+3}) + z(P^{2r+3}) + \sum_{k=1}^{2r+2} \sigma(P^{2r+3-k}) \cdot z(P^k)$.

So, $(\sigma * z)(P^{2r+3}) = \sigma(P^{2r+3}) + 1 + \sum_{k=1}^{2r+2} \sigma(P^{2r+3-k}) = P \cdot (1 + \cdots + P^{r+1})^2$.

□

推论 3.12. 若 A 是特殊且完全的，则 $\sigma(D) = A + 1 + \sum_{D|A, D\neq 1, A} \sigma^*(A)$。

证明. 有：$\sigma(A) = A$ 且 $A = S^2$，其中 S 无平方因子。因此，

$$A + 1 + \sum_{D|A, D\neq 1, A} \sigma(D) = (\sigma * z(A) = \sigma^*(A).$$ □

3.4 卷积 $\sigma * \mathrm{Id}$

引理 3.13. 设 P 为不可约。则对于任意 $r \geq 0$,

$$(\sigma * \mathrm{Id})(P^{2r}) = (\sigma * \mathrm{Id})(P^{2r+1}) = (\sigma(P^r))^2.$$

证明。可得:

$$\begin{aligned}
(\sigma * \mathrm{Id})(P^m) &= \sum_{\ell=0}^{m} \sigma(P^\ell) \cdot P^{m-\ell} \\
&= P^m + \sigma(P^m) + \sum_{\ell=1}^{m-1} \sigma(P^\ell) \cdot P^{m-\ell} \\
&= \sigma(P^{m-1}) + \frac{1}{1+P} \cdot \sum_{\ell=1}^{m-1} (1 + P^{\ell+1}) P^{m-\ell} \\
&= \sigma(P^{m-1}) + \frac{(m-1)P^{m+1}}{1+P} + \frac{P}{1+P} \cdot \frac{1+P^{m-1}}{1+P} \\
&= \frac{(1+P^2)\sigma(P^{m-1}) + (1+P)(m-1)P^{m+1} + P + P^m}{1+P^2} \\
&= \frac{1 + mP^{m+1} + (m+1)P^{m+2}}{1+P^2}.
\end{aligned}$$

取 $m = 2r$ 或 $m = 2r+1$，即可得到我们的结果。 □

推论 3.14. 若 $A = S^2$ 是奇数且完全，则 $\sum_{D|A, D\neq 1,, A} \sigma(D) D = \frac{(\sigma(S^2))}{S^2}$。

证明。可得 $A = S^2$，$0 = A + \sigma(A)$ 和 $(\sigma(S))^2 = (\sigma * \mathrm{Id})(S^2) = \sigma(A) + A + \sum_{D|A, D\neq 1, A} \sigma(D) \cdot \frac{A}{D}$。 □

3.5 卷积 $\sigma * \phi$

引理 3.15. 设 P 是不可约的。那么对于任意 $r \geq 0$，$(\sigma * \phi)(P^{2r}) = P^{2r}$，且 $(\sigma * \phi)(P^{2r+1}) = 0$。

证明。通过直接计算，如上所述，可得:

$$(\sigma * \phi)(P^m) = \sum_{\ell=0}^{m} \sigma(P^\ell) \cdot \phi(P^{m-\ell}) = (m-1)P^m.$$

□

推论 3.16. 若 A 是奇数且完全的，则 $\phi(A) = \sum_{D|A,D\neq 1,A} \sigma(D)\phi(\frac{A}{D})$。

证明。首先， A 必定是平方数。因此，我们得到

$$A = (\sigma * \phi)(A) = \sigma(A) + \sum_{D|A,D\neq A} \sigma(D)\phi(A/D) = A + \sum_{D|A,D\neq A} \sigma(D)\phi(A/D).$$

□

3.6 卷积 $\sigma^* * \mu$

引理 3.17。设 P 是不可约的，且 $m \in \mathbb{N}^*$。那么

$$(\sigma^* * \mu)(P) = P \text{ and } (\sigma^* * \mu)(P^m) = P^m + P^{m-1} = \phi(P^m) \text{ if } m \geq 2.$$

证明。情形 $m = 1$ 显然。对于 $m \geq 2$，有 $(\sigma^* * \mu)(P^m) = \sigma^*(P^m) + \mu(P^m) + \sigma^*(P^{m-1})\mu(P) = \sigma^*(P^m) + \sigma^*(P^{m-1}) = P^m + P^{m-1}$。 □

推论 3.18。如果 A 是平方数，那么 $\phi(A) = \sum_{D|A,A/D \text{ square}-free} \sigma^*(D)$.

证明。由此可得 $A = S^2$。因此，$\sum_{D|A, A/D \text{ square}-free} \sigma^*(D) = (\sigma^* * \mu)(A) = \phi(A)$。 □

3.7 卷积 $\sigma^* * z$

引理 3.19。设 P 不可约且 $r \in \mathbb{N}$。那么

$$(\sigma^* * z)(P^{2r}) = \sigma(P^{2r}) \text{ and } (\sigma^* * z)(P^{2r+1}) = P \cdot \sigma(P^{2r}).$$

证明。对 r 使用归纳法。情形 $r = 0$ 显然。
假设 $(\sigma^* * z)(P^{2r}) = \sigma(P^{2r})$ 且 $(\sigma^* * z)(P^{2r+1}) = P \cdot \sigma(P^{2r})$。$2r+1$有：$(\sigma^* * z)(P^{2r+2}) = \sigma^*(P^{2r+2}) + z(P^{2r+2}) + \sum \sigma^*(P^{2r+2-k}) \cdot z(P^k)$。$k=1 2r+1$因此，$(\sigma^* * z)(P^{2r+2}) = \sigma^*(P^{2r+2}) + 1 + \sum \sigma^*(P^{2r+2-k}) = \sigma(P^{2r+2})$，$k=1 2r+2$($\sigma^* * z)(P^{2r+3}) = \sigma^*(P^{2r+3}) + z(P^{2r+3}) + \sum \sigma^*(P^{2r+3-k}) \cdot z(P^k)$。$k=1 2r+2$所以，$(\sigma^* * z)(P^{2r+3}) = \sigma^*(P^{2r+3}) + 1 + \sum \sigma^*(P^{2r+3-k}) = P \cdot \sigma(P^{2r+2})$。$k=1$

□

推论 3.20。如果 A 是特殊且完全的，则 $A = \sum_{D|A} \sigma^*(D)$。

证明。可得： $\sigma(A) = A$ 且 $A = S^2$，其中 S 无平方因子。因此，$\sum_{D|A} \sigma^*(D) = (\sigma^* * z)(A) = \sigma(A) = A$。 □

3.8 卷积 $\sigma^* * \mathrm{Id}$

引理 3.21。设 P 不可约且 $r \in \mathbb{N}$。那么

$$(\sigma^* * \mathrm{Id})(P^{2r}) = \sigma(P^{2r}) = (\sigma^* * \mathrm{Id})(P^{2r+1}).$$

证明。对于 $m \geq 1$，经过计算可得：

$$(\sigma^* * \mathrm{Id})(P^m) = \sum_{\ell=0}^{m} \sigma^*(P^\ell) \cdot P^{m-\ell} = 1 + (m-1)P^m + (P + \cdots + P^{m-1}).$$

若 m 是偶多项式（分别地，若 m 是奇数），则可得所需结果。 □

推论 3.22。若 A 是奇数且完全，则 $\sum_{D|A,\, D\neq 1,\, A} \left(\frac{D}{D}\right) = \sigma^*(A) - A$。

证明。首先， A 必须是平方数。因此，我们得到

$$A = \sigma(A) = (\sigma^* * \mathrm{Id})(A) = \sigma^*(A) + A + \sum_{D|A, D\neq 1, A} \sigma^*(D) \cdot \frac{A}{D}.$$

□

3.9 卷积 $\sigma^* * \phi$

引理 3.23。设 P 为不可约且 $r \in \mathbb{N}$。那么

$$(\sigma^* * \phi)(P^{2r}) = \phi(P^{2r}) \ and \ (\sigma^* * \phi)(P^{2r+1}) = 0.$$

证明。有：$(\sigma^* * \phi)(P^m) = \sum_{\ell=0}^{m} \sigma^*(P^\ell) \cdot \phi(P^{m-\ell}) = (m-1)(P^m + P^{m-1})$。 □

推论 3.24. 若 A 是奇数且完全的，则 $\sigma^*(A) = \sum_{D|A,\, D\neq 1, A} \sigma^*(D) \cdot \phi(\frac{A}{D})$。

3.10 卷积 $\sigma^* * \sigma$

引理 3.25. 设 P 不可约且 $r \in \mathbb{N}$。那么

$$(\sigma^* * \sigma)(P^{2r}) = \sigma(P^{2r}) \text{ and } (\sigma^* * \sigma)(P^{2r+1}) = 0.$$

证明。可得：$(\sigma^* * \sigma)(P^m) = \sum_{\ell=0}^{m} \sigma^*(P^\ell) \cdot \sigma(P^{m-\ell}) = (m-1)\sigma(P^m)$。 □

推论 3.26。若 A 是奇数且完全的，则 $\sigma^*(A) = \sum_{D|A, D \neq 1, A} \sigma^*(D) \cdot \sigma(\frac{A}{D})$。

证明。多项式 A 是一个平方数。因此，$A = \sigma(A) = (\sigma^* * \sigma)(A)$。 □

4 狄利克雷逆

引理 4.1。设 f 是一个乘性函数。那么，存在唯一的乘性函数 f^{inv}（称为 f的狄利克雷逆），使得 $f * f^{\text{inv}} = \delta$。

证明。令 $f^{\text{inv}}(1) = f(1) = 1$。若 $A = P^r$，其中 P 不可约，我们递归地定义 $f^{\text{inv}}(P^r)$，令：$f_{\text{inv}}(P) = f(P)$ $f_{\text{inv}}(P^r) = \sum_{\ell=0}^{r-1} f_{\text{inv}}(P^\ell) f(P^{r-\ell})$。若 $A = P_1^{r_1} \cdots P_k^{r_k}$，其中每个 P_i 都不可约且 $P_i \neq P_j$，若 $i \neq j$，则定义 $f^{\text{inv}}(A)$ 为 $f_{\text{inv}}(P_1^{r_1}) \cdots f_{\text{inv}}(P_k^{r_k})$。

□

引理 4.2。设 f 和 g 都是积性函数。那么

$$(f^{\text{inv}})^{\text{inv}} = f \text{ and } (f * g)^{\text{inv}} = f^{\text{inv}} * g^{\text{inv}}.$$

例 4.3。由引理 3.3，我们立即得到

$$\mu^{\text{inv}} = z,\ z^{\text{inv}} = \mu,\ \phi^{\text{inv}} * \mathrm{Id} = z,\ \mathrm{Id}^{\text{inv}} = \phi^{\text{inv}} * \mu,\ \mathrm{Id} * \mu = \phi.$$

4.1 Id 的狄利克雷逆

我们用 Id^{inv} 表示 Id 的狄利克雷逆。

引理 4.4. 若 P 是不可约的，则对于任意 $m \geq 2$，$\mathrm{Id}^{\text{inv}}(P) = P$ 且 $\mathrm{Id}^{\text{inv}}(P^m) = 0$。

证明. 对 m 使用归纳法。首先，$\mathrm{Id}^{\mathrm{inv}}(P) = \mathrm{Id}(P) = P$ 且 $\mathrm{Id}^{\mathrm{inv}}(P^2) = \mathrm{Id}(P^2) + \mathrm{Id}^{\mathrm{inv}}(P) \cdot \mathrm{Id}(P) = P^2 + P \cdot P = 0$。假设对于$2 \le \ell \le m-1$，$\mathrm{Id}^{\mathrm{inv}}(P^\ell) = 0$。于是得到:

$$\begin{aligned}\mathrm{Id}^{\mathrm{inv}}(P^m) &= \mathrm{Id}(P^m) + \sum_{\ell=1}^{m-1} \mathrm{Id}^{\mathrm{inv}}(P^\ell) \cdot \mathrm{Id}(P^{m-\ell}) \\ &= P^m + P \cdot P^{m-1} + \sum_{\ell=2}^{m-1} \mathrm{Id}^{\mathrm{inv}}(P^\ell) \cdot \mathrm{Id}(P^{m-\ell}) \\ &= P^m + P^m + 0.\end{aligned}$$

□

4.1.1 卷积 $\mathrm{Id}^{\mathrm{inv}} * z$

引理 4.5. 设 P为不可约且 $m \ge 1$。则，$(\mathrm{Id}^{\mathrm{inv}} * z)(P^m) = 1 + P$。

证明。对 m 用归纳法：$(\mathrm{Id}^{\mathrm{inv}} * z)(P) = \mathrm{Id}^{\mathrm{inv}}(P) + z(P) = P + 1$。
对于 $m \ge 2$:

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}^{\mathrm{inv}} * z)(P^m) &= \mathrm{Id}^{\mathrm{inv}}(P^m) + z(P^m) + \sum_{k=1}^{m-1} \mathrm{Id}^{\mathrm{inv}}(P^{m-k}) \cdot z(P^k) \\ &= 0 + 1 + 0 + \mathrm{Id}^{\mathrm{inv}}(P) \cdot z(P^{m-1}).\end{aligned}$$

□

4.1.2 卷积 $\sigma * \mathrm{Id}^{\mathrm{inv}}$

引理 4.6. 有 $\sigma * \mathrm{Id}^{\mathrm{inv}} = z$，因此 $(\sigma * \mathrm{Id}^{\mathrm{inv}})(P^m) = 1$，对任意不可约的 P 和 $m \ge 0$ 均成立。

证明。由以下事实可得：$\sigma * \mu = \mathrm{Id}$ 和 $\mu^{\mathrm{inv}} = z$。 □

推论 4.7. 如果 A 是奇数且完全，则

$$\frac{A+1}{A} = \sum_{D \mid A, D \ne A, \frac{A}{D}\, \textit{square-free}} \frac{\sigma(D)}{D}.$$

4.2 ϕ的狄利克雷逆

我们用 ϕ^{inv} 表示 ϕ的狄利克雷逆。

引理 4.8. 对任意不可约 P和 $m \in \mathbb{N}^*$，都有 $\phi^{\mathrm{inv}} = \mathrm{Id}^{\mathrm{inv}} * z$，使得 $\phi^{\mathrm{inv}}(P^m) = 1 + P$。

证明。由以下事实可得：$\phi = \mathrm{Id} * \mu$ 和 $\mu^{\mathrm{inv}} = z$。 □

4.2.1 卷积 $\sigma * \phi^{\text{inv}}$

引理 4.9。设 P 不可约且 $r \in \mathbb{N}$。那么

$$(\sigma * \phi^{\text{inv}})(P^{2r}) = 1 \ and \ (\sigma * \phi^{\text{inv}})(P^{2r+1}) = 0.$$

证明。可得:

$$\begin{aligned}
(\sigma * \phi^{\text{inv}})(P^m) &= \sum_{\ell=0}^{m} \sigma(P^\ell) \cdot \sigma^{\text{inv}}(P^{m-\ell}) \\
&= \phi^{\text{inv}}(P^m) + \sigma(P^m) + \sum_{\ell=1}^{m-1} \sigma(P^\ell) \cdot \phi^{\text{inv}}(P^{m-\ell}) \\
&= 1 + P + \sigma(P^m) + \sum_{\ell=1}^{m-1} (1+P) \cdot \sigma(P^\ell) \\
&= 1 + P + \sigma(P^m) + \sum_{\ell=1}^{m-1} (1 + P^{\ell+1}) \\
&= m - 1.
\end{aligned}$$

□

推论 4.10。如果 A是奇数且完全的，那么

$$A = 1 + \sigma(rad(A)) + \sum_{D|A, D\neq 1, A} \sigma(D) \cdot \phi^{\text{inv}}(\frac{A}{D}).$$

4.3 σ的狄利克雷逆

我们用 σ^{inv} 表示 σ的狄利克雷逆。

引理 4.11。如果 P 不可约，那么

$$\sigma^{\text{inv}}(P) = 1 + P, \ \sigma^{\text{inv}}(P^2) = P \ and \ \sigma^{\text{inv}}(P^m) = 0 \ for \ m \geq 3.$$

Proof. $\sigma^{\text{inv}}(P) = \sigma(P) = 1 + P$, $\sigma^{\text{inv}}(P^2) = \sigma(P^2) + \sigma^{\text{inv}}(P)\sigma(P) = P$.

$$\begin{aligned}
\sigma^{\text{inv}}(P^3) &= \sigma(P^3) + \sigma^{\text{inv}}(P)\sigma(P^2) + \sigma^{\text{inv}}(P^2)\sigma(P) \\
&= 1 + P + P^2 + P^3 + (1+P)(1+P+P^2) + P(1+P) \ . \\
&= 0.
\end{aligned}$$

对于 $m \geq 4$，我们对 m 使用归纳法。假设 $\sigma^{\text{inv}}(P^\ell) = 0$，其中$3 \leq \ell \leq m-1$。我们得到:

$$\begin{aligned}\sigma^{\text{inv}}(P^m) &= \sigma(P^m) + \sum_{\ell=1}^{m-1} \sigma^{\text{inv}}(P^\ell)\sigma(P^{m-\ell}) \\ &= \sigma(P^m) + (1+P)\sigma(P^{m-1}) + P\sigma(P^{m-2}) + 0 \\ &= \sigma(P^m) + \sigma(P^{m-1}) + P(\sigma(P^{m-1}) + \sigma(P^{m-2})) \\ &= P^m + P \cdot P^{m-1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

推论 4.12. 如果 A 是奇数且完全的，那么

$$A = \sigma^{\text{inv}}(A) + \sum_{D|A, D\neq A, 1} \sigma^{\text{inv}}(D) \cdot \sigma(\frac{A}{D}).$$

证明。由以下事实可得：$(\sigma^{\text{inv}} * \sigma)(A) = \delta(A) = 0$ 以及 $\sigma(A) = A$。 □

4.3.1 卷积 $\sigma^{\text{inv}} * z$

引理 4.13。对于任意不可约的 P，有 $\sigma^{\text{inv}} * z = \text{Id}^{\text{inv}}$，因此，

$$(\sigma^{\text{inv}} * z)(P) = P \text{ and } (\sigma^{\text{inv}} * z)(P^m) = 0 \text{ if } m \geq 2.$$

证明。我们得到 $\sigma^{\text{inv}} * z = (\sigma * \mu)^{\text{inv}} = \text{Id}^{\text{inv}}$。 □

4.3.2 卷积 $\sigma^{\text{inv}} * \text{Id}$

引理 4.14。对于任意不可约的 P，有 $\sigma^{\text{inv}} * \text{Id} = \mu$，因此，

$$(\sigma^{\text{inv}} * \text{Id})(P) = 1 \text{ and } (\sigma^{\text{inv}} * \text{Id})(P^m) = 0, \text{ for any } m \geq 2.$$

证明。由以下事实可得：$\sigma * \mu = \text{Id}$。 □

推论 4.15。若 A是特殊且完全的，则

$$A = rad(A) + \sum_{D|A, A\neq A, 1} \sigma^{\text{inv}}(D) \cdot \frac{A}{D}.$$

证明。由以下事实可得：$(\sigma^{\text{inv}} * \text{Id})(A) = 0$。 □

4.3.3 卷积 $\sigma^{\text{inv}} * \mu = (\sigma * z)^{\text{inv}}$

引理 4.16。设 P不可约。则 $(\sigma^{\text{inv}} * \mu)(P^m) = P$当 $m \in \{1, 3\}$, $(\sigma^{\text{inv}} * \mu)(P^2) = 1$且 $(\sigma^{\text{inv}} * \mu)(P^m) = 0$当 $m \geq 4$。

证明。$(\sigma^{\text{inv}} * \mu)(P) = \sigma^{\text{inv}}(P) + \mu(P) = 1 + P + 1 = P$。$(\sigma^{\text{inv}} * \mu)(P^2) = \sigma^{\text{inv}}(P^2) + \mu(P^2) + \sigma^{\text{inv}}(P) \cdot \mu(P) = P + 0 + (1 + P) \cdot 1 = 1$。$(\sigma^{\text{inv}} * \mu)(P^3) = 0 + 0 + P \cdot 1 + 0 = P$。对于 $m \geq 4$, $(\sigma^{\text{inv}} * \mu)(P^m) = \sigma^{\text{inv}}(P^m) + \mu(P^m) + \sigma^{\text{inv}}(P^{m-1}) \cdot \mu(P) + 0 = 0 + 0$。

□

推论 4.17. 如果 A是特殊且完全的，那么

$$\sum_{D|A, A \neq A, 1, \frac{A}{D} \text{ square-free}} \sigma^{\text{inv}}(D) = 1 + rad(A).$$

证明。由以下事实可得：$(\sigma^{\text{inv}} * \mu)(A) = 1$ 以及 $\sigma^{\text{inv}}(A) = rad(A)$。 □

4.3.4 卷积 $\sigma^* * \sigma^{\text{inv}}$

引理 4.18. 设 P 不可约且 $m \geq 1$。则

$$(\sigma^* * \sigma^{\text{inv}})(P^2) = P \text{ and } (\sigma^* * \sigma^{\text{inv}})(P^m) = 0 \text{ if } m \neq 2.$$

证明. 有：

$$\begin{aligned}(\sigma^* * \sigma^{\text{inv}})(P^m) &= \sum_{\ell=0}^{m} \sigma^*(P^\ell) \cdot \sigma^{\text{inv}}(P^{m-\ell}) \\ &= \sigma^{\text{inv}}(P^m) + \sigma^*(P^m) + \sum_{\ell=1}^{m-1} \sigma^*(P^\ell) \cdot \sigma^{\text{inv}}(P^{m-\ell}).\end{aligned}$$

回忆一下，若 $m \geq 3$, 则 $\sigma^{\text{inv}}(P) = 1 + P$, $\sigma^{\text{inv}}(P^2) = P$, 且 $\sigma^{\text{inv}}(P^m) = 0$。若 $m \in \{1, 2\}$, 则通过直接计算可得结果。
对于 $m \geq 3$, 若 $m - \ell \geq 3$, 则 $\sigma^{\text{inv}}(P^m) = 0$ 且 $\sigma^{\text{inv}}(P^{m-\ell}) = 0$。
因此,

$$\begin{aligned}(\sigma^* * \sigma^{\text{inv}})(P^m) &= 1 + P^m + \sum_{\ell=m-2}^{m-1} (1 + P^\ell) \cdot \sigma^{\text{inv}}(P^{m-\ell}) \\ &= 1 + P^m + (1 + P^{m-2}) \cdot P + (1 + P^{m-1}) \cdot (1 + P) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

4.4 σ^*的狄利克雷逆

我们用 $\sigma^{*\mathrm{inv}}$ 表示 σ^*的狄利克雷逆。

引理 4.19. 设 P 不可约且 $r \in \mathbb{N}$。则

$$\sigma^{*\mathrm{inv}}(P^{2r}) = 0 \ and \ \sigma^{*\mathrm{inv}}(P^{2r+1}) = P^r(1+P).$$

证明. 我们对 r使用归纳法证明该命题。情形 $r = 0$ 显然。对于 $0 \le t \le r-1$, 设 $\sigma^{*\mathrm{inv}}(P^{2t}) = 0$ 且 $\sigma^{*\mathrm{inv}}(P^{2t+1}) = P^t(1+P)$。有:

$$\begin{aligned}
\sigma^{*\mathrm{inv}}(P^{2r}) &= \sigma^*(P^{2r}) + \sigma^{*\mathrm{inv}}(P)\sigma^*(P^{2r-1}) + \sum_{t=1}^{r-1} \sigma^{*\mathrm{inv}}(P^{2t+1})\sigma^*(P^{2r-2t-1}) \\
&= 1 + P^{2r} + (1+P)(1+P^{2r-1}) + \sum_{t=1}^{r-1} P^t(1+P)(1+P^{2r-2t-1}) \\
&= P + P^{2r-1} + (1+P)(P + P^2 + \cdots + P^r + P^{r+1} + \cdots + P^{2r-2}) \\
&= P + P^{2r-1} + P(1+P^{2r-2}) = 0.
\end{aligned}$$

Now,

$$\begin{aligned}
\sigma^{*\mathrm{inv}}(P^{2r+1}) &= \sigma^*(P^{2r+1}) + \sigma^{*\mathrm{inv}}(P)\sigma^*(P^{2r}) + \sum_{t=1}^{r-1} \sigma^{*\mathrm{inv}}(P^{2t+1})\sigma^*(P^{2r-2t}) \\
&= 1 + P^{2r+1} + (1+P)(1+P^{2r}) + \sum_{t=1}^{r-1} P^t(1+P)(1+P^{2r-2t}) \\
&= P + P^{2r} + (1+P)\sum_{t=1}^{r-1}(P^t + P^{2r-t}) \\
&= P + P^{2r} + (1+P)(P + \cdots + P^{r-1} + P^{r+1} + \cdots + P^{2r-1}) \\
&= P + P^{2r} + P(1+P^{2r-1}) + (1+P)P^r = 0 + (1+P)P^r.
\end{aligned}$$

□

4.4.1 卷积 $\sigma^{*\mathrm{inv}} * z = (\sigma^* * \mu)^{\mathrm{inv}}$

引理 4.20. 设 P 不可约且 $r \in \mathbb{N}$。则

$$(\sigma^{*\mathrm{inv}} * z)(P^{2r}) = P^r \ and \ (\sigma^{*\mathrm{inv}} * z)(P^{2r+1}) = P^{r+1}.$$

证明。回顾一下, $\sigma^{*\mathrm{inv}}(P^{2t}) = 0$ 且 $\sigma^{*\mathrm{inv}}(P^{2t+1}) = P^t(1+P)$。有 $(\sigma^{*\mathrm{inv}} * z)(P) = \sigma^{*\mathrm{inv}}(P) + z(P) = 1 + P + 1 = P$, $(\sigma^{*\mathrm{inv}} * z)(P^2) = \sigma^{*\mathrm{inv}}(P^2) + z(P^2) + \sigma^{*\mathrm{inv}}(P) \cdot z(P) = 0 + 1 + (1+P) \cdot 1 = P$以及 $(\sigma^{*\mathrm{inv}} * z)(P^3) = \sigma^{*\mathrm{inv}}(P^3) + z(P^3) + 0 + \sigma^{*\mathrm{inv}}(P) \cdot z(P^2) = P(1+P) + 1 + (1+P) \cdot 1 = P^2$。

对于 $r \geq 2$,

$$\begin{aligned}(\sigma^{*\mathrm{inv}} * z)(P^{2r}) &= \sigma^{*\mathrm{inv}}(P^{2r}) + z(P^{2r}) + \sum_{t=0}^{r-1} \sigma^{*\mathrm{inv}}(P^{2t+1}) \cdot 1 \\ &= 0 + 1 + \sum_{t=0}^{r-1} P^t(1+P) = 1 + 1 + P^r = P^r.\end{aligned}$$

$$(\sigma^{*\mathrm{inv}} * z)(P^{2r+1}) = P^r(1+P) + 1 + \sum_{t=0}^{r-1} P^t(1+P) \cdot 1 = P^{r+1}. \qquad \square$$

4.4.2 卷积 $\sigma^{*\mathrm{inv}} * \mathrm{Id}$

引理 4.21. 设 P 为不可约且 $r \in \mathbb{N}$。则

$$(\sigma^{*\mathrm{inv}} * \mathrm{Id})(P^{2r}) = P^r \ \textit{and}\ (\sigma^{*\mathrm{inv}} * \mathrm{Id})(P^{2r+1}) = P^r.$$

证明. 有:

$$(\sigma^{*\mathrm{inv}} * \mathrm{Id})(P^{2r}) = 0 + P^{2r} + \sum_{t=0}^{r-1} \sigma^{*\mathrm{inv}}(P^{2t+1}) P^{2r-2t-1} = P^{2r} + (1+P) \sum_{t=0}^{r-1} P^{2r-t-1} = P^r.$$

$$(\sigma^{*\mathrm{inv}} * \mathrm{Id})(P^{2r+1}) = P^r(1+P) + P^{2r+1} + (1+P) \sum_{t=0}^{r-1} P^{2r-t} = P^r. \qquad \square$$

推论 4.22. 如果 A是特殊的且完全的，则

$$A = rad(A) + \sum_{D|A, D \neq A, 1, D\, square\text{-}free} \sigma^{*\mathrm{inv}}(D) \cdot \frac{A}{D}.$$

证明. 由以下事实可得：$(\sigma^{*\mathrm{inv}} * \mathrm{Id})(A) = rad(A)$。 $\square$

4.4.3 卷积 $\sigma^{*\mathrm{inv}} * \mu = (\sigma^* * z)^{\mathrm{inv}}$

引理 4.23. 设 P 是不可约的，且 $r \geq 1$。那么

$$(\sigma^{*\mathrm{inv}} * \mu)(P^{2r}) = P^{r-1}(1+P) \ \textit{and}\ (\sigma^{*\mathrm{inv}} * \mu)(P^{2r+1}) = P^r \cdot (1+P).$$

证明. $(\sigma^{*\mathrm{inv}} * \mu)(P) = \sigma^{*\mathrm{inv}}(P) + \mu(P) = 1 + P + 1 = P$。
$(\sigma^{*\mathrm{inv}} * \mu)(P^2) = \sigma^{*\mathrm{inv}}(P^2) + \mu(P^2) + \sigma^{*\mathrm{inv}}(P) \cdot \mu(P) = 0 + 0 + (1+P) \cdot 1 = 1 + P$。对于 $r \geq 2$,
$(\sigma^{*\mathrm{inv}} * \mu)(P^{2r}) = \sigma^{*\mathrm{inv}}(P^{2r}) + \mu(P^{2r}) + \sigma^{*\mathrm{inv}}(P^{2r-1}) \cdot \mu(P) + 0 = 0 + 0 + P^{r-1}(1+P) \cdot 1$。

$$(\sigma^{*\mathrm{inv}} * \mu)(P^{2r+1}) = \sigma^{*\mathrm{inv}}(P^{2r+1}) + \mu(P^{2r+1}) + 0 = P^r \cdot (1+P) + 0. \qquad \square$$

推论 4.24. 若 A是特殊且完全的，则

$$\sum_{D|A, A\neq A, 1, \frac{A}{D}\ square\text{-}free} \sigma^{*\mathrm{inv}}(D) = \sigma(rad(A)).$$

证明。由以下事实可得：$(\sigma^{*\mathrm{inv}} * \mu)(A) = \sigma(rad(A))$ 且 $\sigma^{*\mathrm{inv}}(A) = 0 = \mu(A)$。 □

4.4.4 卷积 $\sigma * \sigma^{*\mathrm{inv}} = (\sigma^* * \sigma^{\mathrm{inv}})^{\mathrm{inv}}$

引理 4.25。设 P 不可约且 $r \geq 0$。则

$$(\sigma * \sigma^{*\mathrm{inv}})(P^{2r}) = P^r \ and\ (\sigma * \sigma^{*\mathrm{inv}})(P^{2r+1}) = 0.$$

证明。我们有：

$$\begin{aligned}(\sigma * \sigma^{*\mathrm{inv}})(P^m) &= \sum_{\ell=0}^{m} \sigma(P^\ell) \cdot \sigma^{*\mathrm{inv}}(P^{m-\ell}) \\ &= \sigma^{*\mathrm{inv}}(P^m) + \sigma(P^m) + \sum_{\ell=1}^{m-1} \sigma(P^\ell) \cdot \sigma^{*\mathrm{inv}}(P^{m-\ell}).\end{aligned}$$

- $m = 2r$ 为偶数的情况，其中 $\sigma^{*\mathrm{inv}}(P^m) = 0$ 且 $\sigma^{*\mathrm{inv}}(P^{m-\ell}) = 0$，若 $m - \ell$ 是偶多项式。

令 $m - \ell = 2r - \ell = 2s + 1$。

$$\begin{aligned}(\sigma * \sigma^{*\mathrm{inv}})(P^m) &= \sigma(P^m) + \sum_{s=0}^{r-1} \sigma(P^{2r-2s-1}) \cdot \sigma^{*\mathrm{inv}}(P^{2s+1}) \\ &= \sigma(P^m) + \sum_{s=0}^{r-1} \sigma(P^{2r-2s-1}) \cdot P^s(1+P) \\ &= \sigma(P^m) + \sum_{s=0}^{r-1} (1 + P^{2r-2s}) \cdot P^s \\ &= \sigma(P^{2r}) + \sum_{s=0}^{r-1} (P^s + P^{2r-s}) \\ &= P^r.\end{aligned}$$

- $m = 2r + 1$ 为奇数的情形

$\sigma^{*\mathrm{inv}}(P^m) = P^r(1+P)$ 和 $\sigma^{*\mathrm{inv}}(P^{m-\ell}) = 0$，如果 $m - \ell$为偶多项式。

令 $m - \ell = 2r + 1 - \ell = 2s + 1$。

$$
\begin{aligned}
(\sigma * \sigma^{*\mathrm{inv}})(P^m) &= P^r(1+P) + \sigma(P^{2r+1}) + \sum_{s=0}^{r-1} \sigma(P^{2r-2s}) \cdot \sigma^{*\mathrm{inv}}(P^{2s+1}) \\
&= P^r + P^{r+1} + \sigma(P^{2r+1}) + \sum_{s=0}^{r-1} \sigma(P^{2r-2s}) \cdot P^s(1+P) \\
&= P^r + P^{r+1} + \sigma(P^{2r+1}) + \sum_{s=0}^{r-1} (1 + P^{2r-2s+1}) \cdot P^s \\
&= P^r + P^{r+1} + \sigma(P^{2r+1}) + \sum_{s=0}^{r-1} (P^s + P^{2r+1-s}) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

□

推论 4.26. 如果 A是特殊且完全的，那么

$$A = rad(A) + \sum_{D|A, D\neq A, 1, D\, square\text{-}free} \sigma^{*\mathrm{inv}}(D) \cdot \sigma(\frac{A}{D}).$$

证明。由以下事实可得： $\sigma^{*\mathrm{inv}}(A) = 0$ 以及$(\sigma^{*\mathrm{inv}} * \sigma)(A) = rad(A)$。

□

5 更多结果： $\sigma^{\mathrm{inv}} * \phi$、 $\sigma^{*\mathrm{inv}} * \phi$ 和 $\phi *$Id

通过类似的计算，我们得到

引理 5.1. 设 P不可约且 $m \geq 1$。那么 i) $(\sigma^{\mathrm{inv}} * \phi)(P^2) = 1$ 且$(\sigma^{\mathrm{inv}} * \phi)(P^m) = 0$，若 $m \neq 2$。 ii) $(\sigma^{*\mathrm{inv}} * \phi)(P^{2m}) = \phi(P^m)$，且$(\sigma^{\mathrm{inv}} * \phi)(P^{2m-1}) = 0$。 iii) $(\phi *$ Id$)(P) = 1$ 且$(\phi *$ Id$)(P^{2m}) = P^{2m} = (\phi *$ Id$)(P^{2m+1})$。

参考文献

[1] J. T. B. Beard Jr, 《再论完全多项式》, Publ.Math. Debre- cen 38/1-2 (1991), 5–12。

[2] E. F. Canaday, 《多项式因子的和》, 《杜克数学杂志》8 (1941), 721–737。

[3] U. Caner Cengiz, P. Pollack and E. Trevi$N$o, 完全多项式的计数, 《有限域及其应用》47 (2017年), 242–255.

[4] L. H. Gallardo, O. Rahavandrainy, 关于奇完全数的新同余式, 《落基山数学杂志》36(1) (2006年), 225–235.[5] L. H. Gallardo, O. Rahavandrainy, $\mathbb{F}_2$上的奇完全多项式, 《波尔多数论杂志》19 (2007年), 165–174.[6] L. H. Gallardo, O. Rahavandrainy, $\mathbb{F}_2$ 上不存在具有四个素因子的奇完全多项式, 《葡萄牙数学》（新系列）66(2) (2009年), 131–145.[7] L. H. Gallardo, O. Rahavandrainy, $\mathbb{F}_2$ 上具有四个素因子的偶完全多项式, 《国际纯粹与应用数学杂志》52(2) (2009年), 301–314.[8] L. H. Gallardo, O. Rahavandrainy, $\mathbb{F}_2$ 上稀有完全多项式的刻画, 《函数与逼近》55.1 (2016年), 7–21.[9] L. H. Gallardo, O. Rahavandrainy, $\mathbb{F}_2$ 上所有仅以梅森素数为奇因子的偶（酉）完全多项式, 《克拉古耶瓦茨数学杂志》49(4) (2025年), 639–652.
[10] J. Touchard, 关于素数与完全数, 《数学文稿》19 (1953年), 35–39.