arXiv:2301.05278v1 [math.CO] 12 Jan 2023

正规复形的混合体积

LAUREN NOWAK、PATRICK O'MELVENY 和 DUSTIN ROSS

Abstract. 正规复形是多面体扇的正交截断。在本文中，我们研究正规复形的混合体积。我们的主要结果给出了一个充分条件，确保与给定扇相关的正规复形的混合体积满足亚历山德罗夫–芬切尔不等式。通过将结果专门应用于拟阵的 Bergman 扇，我们利用正规复形的亚历山德罗夫–芬切尔不等式，给出了 Heron–Rota–Welsh 猜想的一种新证明。

1. Introduction

亚历山德罗夫–芬切尔不等式是凸几何的核心。该不等式断言，对于任意凸体 $P_\heartsuit$、$P_\diamondsuit$、$P_3 \ldots$、$P_d \in \mathbb{R}^d$，它们的混合体积满足

$$\mathrm{MVol}(P_\heartsuit, P_\diamondsuit, P_3, \ldots, P_d)^2 \geq \mathrm{MVol}(P_\heartsuit, P_\heartsuit, P_3, \ldots, P_d)\,\mathrm{MVol}(P_\diamondsuit, P_\diamondsuit, P_3, \ldots, P_d).$$

本文旨在研究亚历山德罗夫–芬切尔不等式在一种显然非凸的情形下的类似结果。我们感兴趣的几何对象是法复形，它们是 A. Nathanson 和第三位作者近期引入的 [NR21]。给定一个纯的单纯扇 Σ，与之相关的法复形 Σ大致而言，是通过用垂直于Σ的射线的半空间截断 Σ 的每个锥而得到的多面体复形。截断半空间位置的选择，会为每个扇 Σ产生一族相关的法复形。本文的研究动机是这个问题：对于给定的扇Σ，相关法复形的混合体积是否满足亚历山德罗夫–芬切尔不等式？我们的主要结果（定理 5.1）描述了关于Σ的两个易于验证的条件，只要满足这些条件，便可对这个问题给出肯定的回答。

研究法复形混合体积的动机之一是，在热带扇这一特殊情形下，它们对应于相关周环中除子的混合次数。因此，关于法复形的亚历山德罗夫–芬切尔不等式会导出这些周环中非平凡的数值不等式。近年来备受关注的一类热带扇是拟阵的伯格曼扇。我们的主要结果（定理6.2）的一个应用是，拟阵伯格曼扇所关联的法复形满足亚历山德罗夫–芬切尔不等式。将这些不等式转译回拟阵周环后，我们得到一个基于体积理论的证明，证明拟阵的特征多项式具有对数凹性。这一结果最初由 Heron、Rota 和 Welsh [Rot71, Her72, Wel76] 猜想，随后由 Adiprasito、Huh 和 Katz [AHK18]首次证明。

1.1. 论文概述。 我们在第2节简要回顾法复形及其体积的构造。法复形记作 $C_{\Sigma,*}(z)$，它取决于向量空间 $N_{\mathbb{R}}$ 及其内积 $* \in \mathrm{Inn}(N_{\mathbb{R}})$ 上一个带标记的单纯 d扇 Σ，以及伪立方截断值 $z \in \mathrm{Cub}(\Sigma, *) \subseteq \mathbb{R}^{\Sigma(1)}$的选取。$C_{\Sigma,*}(z)$ 的体积记作 $\mathrm{Vol}_{\Sigma,\omega,*}(z)$，其中 ω 是Σ的顶维锥上的权函数；其定义为 $C_{\Sigma,*}(z)$ 中极大多胞体体积的加权和。我们回顾 [NR21], 的主要结果，该结果断言，若 (Σ, ω) 是一个热带扇，则

$$\mathrm{Vol}_{\Sigma,\omega,*}(z) = \deg_{\Sigma,\omega}(D(z)^d) \quad \text{where} \quad D(z) = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} z_\rho X_\rho \in A^1(\Sigma). \tag{1.1}$$

在第 3 节中，我们引入了正规复形 $C_{\Sigma,\ *}(z_1)$……，$C_{\Sigma,\ *}(z_d)$，记作 $\mathrm{MVol}_{\Sigma,\ \omega,\ *}(z_1, \ldots, z_d)$；它们是极大多胞体的混合体积的加权和。与凸几何中的混合体积类似，我们证明了正规复形的混合体积的特征在于其具有对称性、多重线性，并且按体积归一化（命题 3.1 ）。此外，我们证明混合体积在伪立方锥 $\mathrm{Cub}(\Sigma, *)$ 上非负，并在立方锥 $\mathrm{Cub}(\Sigma, *)$ 上为正（命题 3.5 ）。对于所有热带扇 (Σ, ω)，我们利用 (1.1) 证明（定理 3.6 ）

$$\mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1, \ldots, z_d) = \deg_{\Sigma,\omega}(D(z_1) \cdots D(z_d)). \tag{1.2}$$

在第 4 节中，我们发展了正规复形的面结构，这与多胞体的经典面结构高度相似。特别地，正规复形 $C_{\Sigma,\ *}(z)$ 的面由锥 $\tau \in \Sigma$ 索引，并且每个面都可表示为 $C_{\Sigma,\ *}(z)$ 与由 τ 的射线所索引的截断超平面的交。我们描述了每个面本身如何被视为与星扇 Σ^τ 相关联的正规复形，并据此定义面的（混合）体积。本节的主要结果（命题 4.13）说明，如何根据面的混合体积计算正规复形的混合体积。

在第 5 节中，我们介绍三元组 $(\Sigma, \omega, *)$ 成为 AF 的含义——即立方值的混合体积满足亚历山德罗夫–芬切尔不等式。我们的主要结果（定理 5.1）受到 Cordero-Erausquin、Klartag、Merigot 和 Santambrogio[CEKMS19] 以及 Br¨and´en 和 Leake [BL21], 的工作的启发，指出 $(\Sigma, \omega, *)$ 是 AF，当且仅当：(i) 所有维数至少为三的星扇在移除原点后仍保持连通；(ii) 与二维星扇 Σ 相关联的二次体积多项式恰好有一个正特征值。事实上，在这些条件下，我们论证体积多项式 $\mathrm{Vol}_{\Sigma,\omega,*}(z)$ 是 $\mathrm{Cub}(\Sigma, *)$-Lorentzian 的，进而推出 $(\Sigma, \omega, *)$ 是 AF。

在第6节中，我们简要回顾拟阵和 Bergman 扇的相关概念，随后利用定理 5.1 证明拟阵的 Bergman 扇是亚历山德罗夫–芬切尔的（定理6.2）。

最后，我们推导出 Heron–Rota–Welsh 猜想是法复形的亚历山德罗夫–芬切尔不等式的一个推论。

1.2. **与其他工作的关系**。 自 Adiprasito、Huh 和 Katz [AHK18], 首次证明 Heron–Rota–Welsh 猜想以来，已经出现了许多替代性证明、推广以及令人振奋的相关进展（不完整的列表包括 [BHM+22、BHM+20、BES20、ADH20、AP20、AP21、BH20、AGV21、ALGV19、ALGV18、CP21]）。我们将本文中的体积理论方法视为观察拟阵特征多项式对数凹性的新角度，同时也要承认，我们的方法与其他几个数学家团队的方法具有某些共同特征，并且受益于他们的研究。具体而言，我们的方法依赖于拟阵特征多项式的 Chow理论解释，该解释由 Huh 和 Katz [HK12], 证明，在 Adiprasito、Huh 和 Katz [AHK18], 最初的证明中发挥了核心作用，也同样是 Braden、Huh、Matherne、Proudfoot 和 Wang [BHM+22] 以及 Backman、Eur 和 Simpson [BES20]后续证明的核心。此外，我们的方法证明了体积多项式是 Lorentzian 的，这也是 Backman、Eur 和 Simpson [BES20]以及 Br¨and´en 和 Leake [BL21]两组方法中的一个核心特征。我们注意到，尽管 [BES20] 和 [BL21]的方法似乎主要针对拟阵，但我们的方法可以直接推广到更一般的热带交理论背景中（第三作者将在即将发表的工作中详细阐述这一推广）。通过在现有文献中加入一种关于 Heron–Rota–Welsh 猜想的新体积理论方法，我们希望本文能够欢迎一批新的、具有几何兴趣的研究者加入这一蓬勃发展的研究领域，从而为进一步发展打开大门。

1.3. **致谢**。 作者谨向 Federico Ardila、Matthias Beck、Emily Clader、Chris Eur 和 Serkan Ho¸sten 致以谢意，感谢他们分享与本项目相关的见解。本研究得到美国国家科学基金会资助，项目编号：DMS-2001439。

2. Background on normal complexes

本节将介绍有关多面体扇和法复形的记号、约定及预备结果。

2.1. **扇的定义与约定**。 设 $N_{\mathbb{R}}$ 是一个维数为 n的实向量空间。给定一个多面体扇 $\Sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$，我们用 $\Sigma(k)$表示 Σ 的 k维锥。用 $\preceq$表示 Σ的锥之间的面包含关系；对于每个锥 $\sigma \in \Sigma$，用 $\sigma(k) \subseteq \Sigma(k)$表示 σ的 k维面。对于任意锥 σ，用 σ° 表示 σ 的相对内部，并用 $N_{\sigma,\mathbb{R}} \subseteq N_{\mathbb{R}}$表示 σ 的线性张成。

若 Σ 中所有极大锥的维数均相同，则称扇 Σ 为**纯的**。若我们为每条射线 $\rho \in \Sigma(1)$都选定一个特殊的生成向量 $0 \neq u_\rho \in \rho$，则称 Σ 为**带标记的**。此后，我们假设所有扇均为纯的、多面体的且带标记的，并用术语 d**-扇** 指维数为 d的纯多面体带标记扇。

我们称 Σ 为**单纯的**，如果对所有 $\sigma \in \Sigma$，都有 $\dim(N_{\sigma,\mathbb{R}}) = |\sigma(1)|$。单纯锥 σ 的面与 $\sigma(1)$ 的子集一一对应。对于单纯扇 Σ 中的每个面包含关系$\tau \preceq \sigma$，令 $\sigma \setminus \tau$ 表示 σ 中射线为 $\sigma(1) \setminus \tau(1)$ 的面。给定两个面 $\tau, \pi \preceq \sigma$，用 $\tau \cup \pi$ 表示 σ 中射线为 $\tau(1) \cup \pi(1)$ 的面。

给定一个单纯的 d-扇 Σ 和一个权函数 $\omega\colon \Sigma(d) \to \mathbb{R}_{>0}$，如果有序对 (Σ, ω) 满足加权平衡条件，我们就称其为**热带扇**:

$$\sum_{\substack{\sigma \in \Sigma(d) \\ \tau \prec \sigma}} \omega(\sigma) u_{\sigma \setminus \tau} \in N_{\tau,\mathbb{R}} \quad \text{for all} \quad \tau \in \Sigma(d-1).$$

虽然热带扇的定义可以推广到非单纯扇，但本文始终假设所有热带扇都是单纯的。如果对所有 $\sigma \in \Sigma(d)$ 都有 $\omega(\sigma) = 1$，我们就称 Σ 是**平衡的**，并在记号中省略 ω。

2.2. 周环与次数映射。 令 $M_\mathbb{R}$ 表示 $N_\mathbb{R}$ 的对偶，并令 $\langle -, - \rangle$ 为对偶配对。给定一个单纯扇 $\Sigma \subseteq N_\mathbb{R}$，$\Sigma$ 的 **周环** 定义为

$$A^\bullet(\Sigma) := \frac{\mathbb{R}\big[x_\rho \mid \rho \in \Sigma(1)\big]}{\mathcal{I} + \mathcal{J}}$$

其中

$$\mathcal{I} := \big\langle x_{\rho_1} \cdots x_{\rho_k} \mid \mathbb{R}_{\geq 0}\{\rho_1, \ldots, \rho_k\} \notin \Sigma \big\rangle \quad \text{and} \quad \mathcal{J} := \left\langle \sum_{\rho \in \Sigma(1)} \langle v, u_\rho \rangle x_\rho \;\middle|\; v \in M_\mathbb{R} \right\rangle.$$

由于 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$ 都是齐次的，周环 $A^\bullet(\Sigma)$ 是一个分次环；我们用 $A^k(\Sigma)$ 表示其中次数为 k 的齐次元素所成的子群。我们将 $A^\bullet(\Sigma)$ 的生成元记为 $X_\rho := [x_\rho] \in A^1(\Sigma)$，并且对于任意 $\sigma \in \Sigma(k)$，定义

$$X_\sigma := \prod_{\rho \in \sigma(1)} X_\rho \in A^k(\Sigma).$$

如果 Σ 是一个单纯的 d-扇，那么 $A^k(\Sigma)$ 中的每个元素都可以写成 X_σ 的线性组合，其中 $\sigma \in \Sigma(k)$（例如参见 [AHK18，命题 5.5]）。因此，对于所有 $k > d$，都有 $A^k(\Sigma) = 0$。此外，如果 (Σ, ω) 是热带的，那么存在一个定义良好的 **次数映射**

$$\deg_{\Sigma,\omega} : A^d(\Sigma) \to \mathbb{R}$$

使得 $\deg_{\Sigma,\omega}(X_\sigma) = \omega(\sigma)$ 对每个 $\sigma \in \Sigma(d)$ 都成立（例如，参见 [AHK18，命题 5.6]）.

2.3. 法复形。现在我们回顾 [NR21]中的法复形构造。除了一个单纯的 d-扇 $\Sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$之外，法复形的构造还需要额外选取一个内积 $* \in \mathrm{Inn}(N_{\mathbb{R}})$ 和一个值 $z \in \mathbb{R}^{\Sigma(1)}$。给定这样的 $*$ 和 z，我们定义与每个 $\rho \in \Sigma$ 相关联的、位于 $N_{\mathbb{R}}$ 中的一组超平面和半空间：

$$H_{\rho,*}(z) := \{v \in N_{\mathbb{R}} \mid v * u_\rho = z_\rho\} \quad \text{and} \quad H^-_{\rho,*}(z) := \{v \in N_{\mathbb{R}} \mid v * u_\rho \le z_\rho\}.$$

接着，对于每个 $\sigma \in \Sigma$，我们定义多胞体 $P_{\sigma,*}(z)$，如下：

$$P_{\sigma,*}(z) := \sigma \cap \bigcap_{\rho \in \sigma(1)} H^-_{\rho,*}(z).$$

注意，$P_{\sigma,*}(z)$ 只是由垂直于 σ 的射线的超平面对锥 σ 作截断所得——法向的含义由 $*$ 决定，而锥的射线上的法超平面的位置由 z 决定。我们希望由这些多胞体构造一个多面体复形，但一般而言，它们不会沿面相交。为确保它们沿面相交，我们要求 z 与 $*$ 相容。

对于每个 $\sigma \in \Sigma$，令 $w_{\sigma,*}(z) \in N_{\sigma,\mathbb{R}}$ 为满足对所有 $\rho \in \sigma$ 均有 $w_{\sigma,*}(z) * u_\rho = z_\rho$ 的唯一向量 (1)。该向量的存在性和唯一性源于向量 u_ρ（其中 $\rho \in \sigma(1)$）线性独立这一事实——这等价于单纯性假设。接着，如果满足以下条件，我们就称 z 关于 $(\Sigma, *)$ 是**立方型（伪立方型）**的：

$$w_{\sigma,*}(z) \in \sigma^\circ \quad (w_{\sigma,*}(z) \in \sigma) \quad \text{for all} \quad \sigma \in \Sigma.$$

换言之，伪立方值是指使截断超平面在每个锥内相交的 z 取值，而立方值是指使它们在每个锥的相对内部相交的取值。立方值的集合记作 $\mathsf{Cub}(\Sigma, *) \subseteq \mathbb{R}^{\Sigma(1)}$，伪立方值的集合记作 $\mathsf{Cub}(\Sigma, *) \subseteq \mathbb{R}^{\Sigma(1)}$。

现在我们概述 [NR21]中的关键结果，这些结果是本文后续论述所必需的（参见 [NR21，命题 3.2、3.3 和 3.7]）。

命题 2.1. 设 $\Sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ 为一个单纯 d扇，且设 $* \in \mathrm{Inn}(N_{\mathbb{R}})$ 为一个内积。

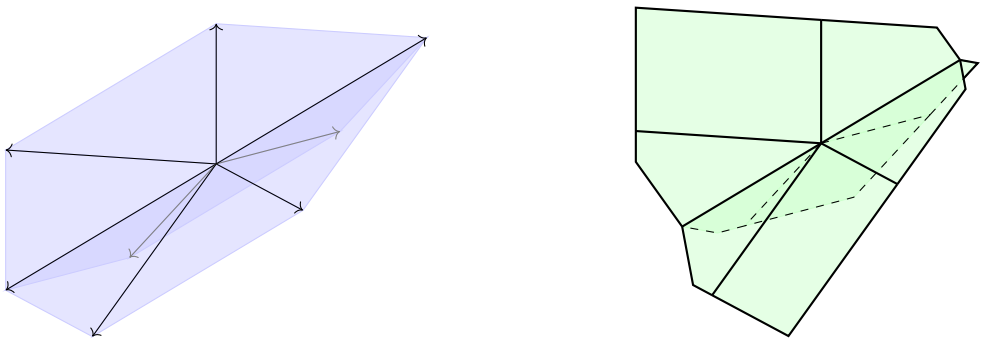
(1) 集合 $\overline{\mathsf{Cub}(\Sigma, *)} \subseteq \mathbb{R}^{\Sigma(1)}$ 是一个多面锥，且 $\overline{\mathsf{Cub}(\Sigma, *)^\circ} = \mathsf{Cub}(\Sigma, *)$。 *(2)* 对于 $z \in \mathsf{Cub}(\Sigma, *)$, $P_{\sigma,*}(z)$ 的顶点为 $\{w_{\tau,*}(z) \mid \tau \preceq \sigma\}$。 *(3)* 对于 $z \in \mathsf{Cub}(\Sigma, *)$, 多胞体 $P_{\sigma,*}(z)$ 沿面相交。

对于任意多胞体 P，令 $\widehat{P}$ 表示 P的所有面的集合。命题 2.1 的第三部分意味着

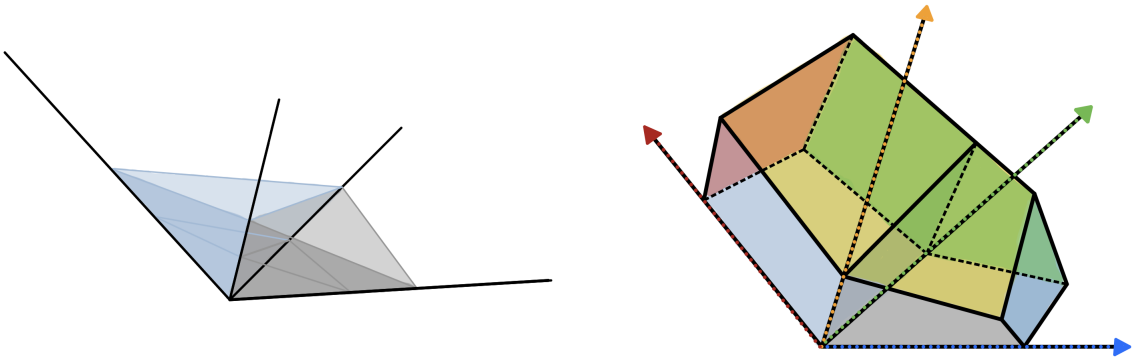
$$C_{\Sigma,*}(z) := \bigcup_{\sigma \in \Sigma(d)} \widehat{P_{\sigma,*}(z)}$$

当 $z \in \mathsf{Cub}(\Sigma, *)$ 时，它是一个多面体复形，这个多面体复形称为**关于 Σ 的法复形 $*$ 和 z**。

下图展示了一个二维热带扇及其对应的法复形。该扇由九个沿面粘合的二维锥组成，这九个锥各自对应法复形中的一个四边形。



接下来这对图像展示了一个三维扇，由两个沿着一个二维面相交的极大锥组成，以及与之对应的法复形。虽然这个扇不是热带的，但读者不妨将此图视为某个更高维向量空间中的三维热带扇的一小部分。



2.4. 法复形的体积。 设 $\Sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ 是一个单纯的 d 扇，$* \in \mathsf{Inn}(N_{\mathbb{R}})$ 是一个内积，且 $z \in \mathsf{Cub}(\Sigma, *)$ 是一个伪立方值。非正式地说，法复形 $C_{\Sigma,*}(z)$ 的体积是多胞体 $P_{\sigma,*}(z)$（满足 $\sigma \in \Sigma(d)$）的体积之和；不过，我们需要谨慎地说明，在每个子空间 $N_{\sigma,\mathbb{R}}$ 中，“体积 ”具体指什么。

对于每个锥 $\sigma \in \Sigma$，定义离散子群

$$N_\sigma := \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}(u_\rho \mid \rho \in \sigma(1)) \subseteq N_{\mathbb{R}},$$

并令 M_σ 表示其对偶：$M_\sigma := \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(N_\sigma, \mathbb{Z}) \subseteq M_{\sigma,\mathbb{R}} := \mathsf{Hom}_{\mathbb{R}}(N_{\sigma,\mathbb{R}}, \mathbb{R})$。利用内积 $*$，我们可以将 $M_{\sigma,\mathbb{R}}$ 与 $N_{\sigma,\mathbb{R}}$ 等同，因此可以将 M_σ 视为 $N_{\sigma,\mathbb{R}}$中的一个格。对于每个 $\sigma \in \Sigma$，令

$$\mathrm{Vol}_\sigma : \{\text{polytopes in } N_{\sigma,\mathbb{R}}\} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

为满足以下性质的体积函数：格$M_\sigma \subseteq N_{\sigma,\mathbb{R}}$ 的一个基本单形的体积为单位体积。将**法复形的体积** $C_{\Sigma,*}(z)$定义为各个 d维多胞体的体积之和，简记为 $\mathrm{Vol}_{\Sigma,*}(z)$：

$$\mathrm{Vol}_{\Sigma,*}(z) := \sum_{\sigma\in\Sigma(d)} \mathrm{Vol}_\sigma(P_{\sigma,*}(z)).$$

稍作推广，设 $\omega\colon \Sigma(d) \to \mathbb{R}_{>0}$ 是定义在 Σ 的极大锥上的权函数。**法复形的体积**$C_{\Sigma,*}(z)$ **以** ω 加权，定义为

$$\mathrm{Vol}_{\Sigma,\omega,*}(z) := \sum_{\sigma\in\Sigma(d)} \omega(\sigma)\,\mathrm{Vol}_\sigma(P_{\sigma,*}(z)).$$

[NR21] 的主要结果是对法复形加权体积的 Chow理论解释，只要 (Σ, ω) 是热带的，该解释便成立。

定理 2.2 ([NR21，定理 6。3])。 设 (Σ,ω) 是一个热带 d-扇，$* \in \mathrm{Inn}(N_\mathbb{R})$ 是一个内积，$z \in \mathrm{Cub}(\Sigma,*)$ 是一个伪立方值。则

$$\mathrm{Vol}_{\Sigma,\omega,*}(z) = \deg_{\Sigma,\omega}(D(z)^d)$$

其中

$$D(z) = \sum_{\rho\in\Sigma(1)} z_\rho X_\rho \in A^1(\Sigma).$$

3. Mixed Volumes of Normal Complexes

本文的首要目标是将定理 2.2 推广为关于混合体积的论述。为此，我们简要回顾混合体积的经典理论，并推荐以 Schneider 的著作 [Sch14] 作为全面的参考。

3.1. 多胞体的混合体积。 混合体积是将体积概念与闵可夫斯基加法运算结合后自然得到的结果。我们从一个 d 维实向量空间 V 和一个体积函数 $\mathrm{Vol}:\{$中的多胞体 $V\} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 开始。**混合体积函数**

$$\mathrm{MVol} : \{\text{polytopes in } V\}^d \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

是由以下三个性质唯一确定的函数。

- （对称性）对于任意置换 $\pi \in S_d$,

$$\mathrm{MVol}(P_1,\ldots,P_d) = \mathrm{MVol}(\pi(P_1,\ldots,P_d)).$$

- **(多重线性)** 对任意 $i = 1,\ldots,d$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{MVol}(P_1,\ldots,\lambda P_i + P_i',\ldots,P_d) = \lambda\,\mathrm{MVol}(P_1,\ldots,P_i,\ldots,P_d)\\ + \mathrm{MVol}(P_1,\ldots,P_i',\ldots,P_d),\end{aligned}$$

其中，多胞体的线性组合定义为

$$\lambda P_i + P_i' = \{\lambda v + w \mid v \in P_i, w \in P_i'\}.$$

- （归一化）对于任意多胞体 P，

$$\mathrm{MVol}(P, \dots, P) = \mathrm{Vol}(P).$$

这种混合体积函数的存在性和唯一性归功于闵可夫斯基 [Min03]，他证明了此类函数更一般地适用于凸体，而不仅仅适用于多胞体。

3.2. 法复形的混合体积。 现在我们定义法复形的混合体积。设 $\Sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ 是一个单纯的 d-扇，并设 $* \in \mathrm{Inn}(N_{\mathbb{R}})$ 是一个内积。给定伪立方值 $z_1, \dots, z_d \in \mathrm{Cub}(\Sigma, *)$，我们将法复形 $C_{\Sigma,*}(z_1), \dots, C_{\Sigma,*}(z_d)$ 的**混合体积**简记为 $\mathrm{MVol}_{\Sigma,*}(z_1, \dots, z_d)$，定义如下：

$$\mathrm{MVol}_{\Sigma,*}(z_1, \dots, z_d) := \sum_{\sigma \in \Sigma(d)} \mathrm{MVol}_\sigma(P_{\sigma,*}(z_1), \dots, P_{\sigma,*}(z_d)).$$

换言之，混合体积等于与 Σ 的顶维锥相关联的多胞体的混合体积之和。更一般地，若 $\omega : \Sigma(d) \to \mathbb{R}_{>0}$ 是一个权函数，则由 ω **加权的**法复形 $C_{\Sigma,*}(z_1), \dots, C_{\Sigma,*}(z_d)$ 的**混合体积**定义如下：

$$\mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1, \dots, z_d) := \sum_{\sigma \in \Sigma(d)} \omega(\sigma)\, \mathrm{MVol}_\sigma(P_{\sigma,*}(z_1), \dots, P_{\sigma,*}(z_d)).$$

为验证这确实是法复形混合体积的一种有意义的概念，我们检查它是否由多胞体混合体积的三个刻画性质的类似性质所刻画。

命题 3.1。 设 $\Sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ 是一个单纯的 d-扇，$* \in \mathrm{Inn}(N_{\mathbb{R}})$ 是一个内积，且 $\omega : \Sigma(d) \to \mathbb{R}_{>0}$ 是一个权函数。

(1) 对于任意 $z_1, \dots, z_d \in \overline{\mathrm{Cub}}(\Sigma, *)$ 和 $\pi \in S_d$，

$$\mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1, \dots, z_d) = \mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(\pi(z_1, \dots, z_d)).$$

(2) 对于任意 $i = 1, \dots, d$，以及任意 $z_1, \dots, z_i, z_i', \dots, z_d \in \overline{\mathrm{Cub}}(\Sigma, *)$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，

$$\begin{aligned}\mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1, \dots, \lambda z_i + z_i', \dots, z_d) = \lambda\, &\mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1, \dots, z_i, \dots, z_d) \\ &+ \mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1, \dots, z_i', \dots, z_d).\end{aligned}$$

(3) 对于任意 $z \in \overline{\mathrm{Cub}}(\Sigma, *)$，

$$\mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z, \dots, z) = \mathrm{Vol}_{\Sigma,\omega,*}(z).$$

此外，任意 fu 函数 $\overline{\mathrm{Cub}}(\Sigma, *)^d \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 满足性质 (1) – (3) 必定是 混合体积$_{\Sigma,\omega,*}$.

证明。 鉴于

$$\mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1,\dots,z_d)=\sum_{\sigma\in\Sigma(d)}\omega(\sigma)\,\mathrm{MVol}_{\sigma}(P_{\sigma,*}(z_1),\dots,P_{\sigma,*}(z_d))$$

且右侧各项只是多胞体的混合体积，因此性质 (1) 和 (3) 可由多胞体情形下混合体积的对称性和规范化性质推出。此外，一旦我们证明

$$P_{\sigma,*}(\lambda z+z')=\lambda P_{\sigma,*}(z)+P_{\sigma,*}(z') \tag{3.2}$$

对于所有 $z、\overline{z'}\in$ Cub(Σ、 ∗) 和 $\lambda\in\mathbb{R}_{\geq 0}$，性质 (2) 也可由多胞体情形下混合体积的多重线性性质推出。因此，只需证明 (3.2)，我们将通过证明两个包含关系来完成。

首先，假设 $v\in P_{\sigma、*}(\lambda z+z')$。根据命题 2.1，$P_{\sigma、*}(\lambda z+z')$ 的顶点为$\{w_{\tau,*}(\lambda z+z')$ $\mid \tau\preceq\sigma\}$，因此我们可以将 v 写成凸组合：

$$v=\sum_{\tau\preceq\sigma}a_\tau\,w_{\tau,*}(\lambda z+z')\quad\text{for some}\quad a_\tau\in\mathbb{R}_{\geq 0}\quad\text{with}\quad\sum_{\tau\preceq\sigma}a_\tau=1. \tag{3.3}$$

为了证明 $v\in\lambda P_{\sigma,*}(z)+P_{\sigma,*}(z')$，下一步是证明这些顶点是线性的：

$$w_{\tau,*}(\lambda z+z')=\lambda w_{\tau,*}(z)+w_{\tau,*}(z'). \tag{3.4}$$

由于 $w_{\tau,*}(\lambda z+z')$ 是 $N_{\tau,\mathbb{R}}$ 中满足对所有 $\rho\in\tau(1)$ 都有 $w_{\tau,*}(\lambda z+z')*u_\rho=(\lambda z+z')_\rho$ 的唯一向量，因此证明 (3.4) 就等同于证明 $\lambda w_{\tau,*}(z)+w_{\tau,*}(z')$ 也满足这些方程。利用内积的双线性以及 w 向量的定义，我们有

$$\begin{aligned}(\lambda w_{\tau,*}(z)+w_{\tau,*}(z'))*u_\rho&=\lambda w_{\tau,*}(z)*u_\rho+w_{\tau,*}(z')*u_\rho\\&=\lambda z_\rho+z'_\rho\\&=(\lambda z+z')_\rho.\end{aligned}$$

因此，(3.4) 成立，将 (3.4) 代入 (3.3) 可得

$$v=\lambda\sum_{\tau\preceq\sigma}a_\tau w_{\tau,*}(z)+\sum_{\tau\preceq\sigma}a_\tau w_{\tau,*}(z')\in\lambda P_{\sigma,*}(z)+P_{\sigma,*}(z').$$

为证明另一个包含关系，假设 $v\in\lambda P_{\sigma,*}(z)+P_{\sigma,*}(z')$。那么 $v=\lambda w+w'$ 存在某个 $w\in P_{\sigma,*}(z)$ 和 $w'\in P_{\sigma,*}(z')$。这意味着 $w,w'\in\sigma$，此外，$w\cdot u_\rho\leq z_\rho$且对于所有 $\rho\in\sigma$ (1)，$w'\cdot u_\rho\leq z'_\rho$。由于 σ 是一个锥，$u=\lambda w+w'\in\sigma$，并且对于每个 $\rho\in\sigma(1)$，我们有

$$\begin{aligned}v*u_\rho&=(\lambda w+w')*u_\rho\\&=\lambda w*u_\rho+w'*u_\rho\\&\leq\lambda z_\rho+z'_\rho,\end{aligned}$$

由此可得 $v \in P_{\sigma,*}(\lambda z + z')$。

最后，为证明命题的最后一项断言，设 $F\colon \mathrm{Cub}(\Sigma,*)^d \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 满足性质 (1)–(3)。我们的目标是证明，对于任意伪立方值 $z_1,\dots,z_d \in \mathrm{Cub}(\Sigma,*)$，都有 $F(z_1,\dots,z_d) = \text{混合体积}_{\Sigma,\omega,*}(z_1,\dots,z_d)$。令 $z = \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_d \overline{z_d}$ with $\lambda_1,\dots,\lambda_d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 任意。性质 (3) 蕴含

$$F(z,\dots,z) = \mathrm{Vol}_{\Sigma,\omega,*}(z) = \mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z,\dots,z).$$

利用性质 (1) 和 (2)，我们可以将该等式的左边和右边分别展开为关于 $\lambda_1,\dots,\lambda_d$ 的多项式：

$$\begin{aligned}\sum_{k_1,\dots,k_d} \binom{d}{k_1,\dots,k_d} F(\underbrace{z_1,\dots,z_1}_{k_1},\dots,\underbrace{z_d,\dots,z_d}_{k_d})\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_d^{k_d} \\ = \sum_{k_1,\dots,k_d} \binom{d}{k_1,\dots,k_d} \mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(\underbrace{z_1,\dots,z_1}_{k_1},\dots,\underbrace{z_d,\dots,z_d}_{k_d})\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_d^{k_d}\end{aligned}$$

令这两个多项式中 $\lambda_1\cdots\lambda_d$ 的系数相等，即可得到所需结论：$F(z_1,\dots,z_d) = \text{混合体积}_{\Sigma,\omega,*}(z_1,\dots,z_d)$。 □

研究亚历山德罗夫–芬切尔不等式的方法还需要以下正性结果。

命题 3.5. 设 $\Sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ 是一个单纯的 d-扇，$* \in \mathrm{Inn}(N_{\mathbb{R}})$ 是一个内积，并且 $\omega\colon \Sigma(d) \to \mathbb{R}_{>0}$ 是一个权函数。则

$$\mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1,\dots,z_d) \geq 0 \quad \textit{for all} \quad z_1,\dots,z_d \in \overline{\mathrm{Cub}}(\Sigma,*)$$

and

$$\mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1,\dots,z_d) > 0 \quad \textit{for all} \quad z_1,\dots,z_d \in \mathrm{Cub}(\Sigma,*).$$

证明。第一条结论由混合体积的定义 $_{\Sigma,\ \omega,\ *}$ 以及多胞体的混合体积非负这一性质得出 [Sch14, 定理 5.1.7]。对于第二条结论，我们首先注意到，$z \in \mathrm{Cub}(\Sigma,\ *)$ 蕴含 $P_{\sigma,\ *}(z)$ 对每个 $\sigma \in \Sigma(d)$ 都具有 d 维数，这是因为 $P_{\sigma,\ *}(z)$ 在组合意义上等价于一个 d-立方体 [NR21, 命题 3.8]。因此，第二条结论由满维多胞体的混合体积严格为正这一性质得出 [Sch14, 定理 5.1.8]。 □

3.3. **混合体积与混合次数**。现在，我们将定理 2.2 推广，以便从 Chow 理论的角度解释与热带扇相关的法复形的混合体积。

定理 3.6. 设 (Σ,ω) 是一个热带 d-扇，设 $* \in \mathrm{Inn}(N_{\mathbb{R}})$ 是一个内积，且设 $z_1,\dots,z_d \in \mathrm{Cub}(\Sigma,*)$ 是伪立方值。那么

$$\mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1,\dots,z_d) = \deg_{\Sigma,\omega}(D(z_1)\cdots D(z_d)).$$

证明. 根据命题 3.1，只需证明函数

$$\overline{\mathrm{Cub}}(\Sigma,*)^d \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$(z_1,\dots,z_d) \mapsto \deg_{\Sigma,\omega}(D(z_1)\cdots D(z_d))$$

具有对称性、多重线性，且由 $\mathrm{Vol}_{\Sigma,\omega,*}$ 归一化。对称性源于$A^\bullet(\Sigma)$ 是一个交换环；多重线性源于 $\deg_{\Sigma,\omega} : A^d(\Sigma) \to \mathbb{R}$是一个线性映射；而归一化则是定理 2.2 的内容。□

4. Faces of Normal Complexes

本节将为法复形建立一种面结构，类似于多胞体的面结构。与多胞体的情形类似，我们将看到，每个面都可由法复形与支撑超平面相交得到；每个面本身也可视为一个法复形；而面的面本身也是一个面。随后，我们将证明一些基本性质，阐述法复形的（混合）体积与其各面的（混合）体积之间的关系，这与经典多胞体情形中的核心结果完全平行。

4.1. 正交分解。法复形的面构造大量运用了与每个锥 $\tau \in \Sigma$ 相关的 $N_{\mathbb{R}}$ 的正交分解，下面我们将对此进行说明。对于每个 $\tau \in \Sigma$，我们已经见过子空间 $N_{\tau,\mathbb{R}} \subseteq \mathbf{N}_{\mathbb{R}}$，它是 τ 的线性张成；现在我们为商空间引入记号

$$N^\tau_{\mathbb{R}} := N_{\mathbb{R}}/N_{\tau,\mathbb{R}}.$$

利用内积 $*$，我们可以将 $N^\tau_{\mathbb{R}}$ 识别为 $N_{\tau,\mathbb{R}}$ 的正交补：

$$N^\tau_{\mathbb{R}} = N^\perp_{\tau,\mathbb{R}} = \{v \in N_{\mathbb{R}} \mid v * u = 0 \text{ for all } u \in N_{\tau,\mathbb{R}}\} \subseteq N_{\mathbb{R}},$$

从而将 $N_{\mathbb{R}}$ 分解为正交和 $N_{\mathbb{R}} = N_{\tau,\mathbb{R}} \oplus N^\tau_{\mathbb{R}}$。我们用 $\mathbf{pr}_\tau$ 和 $\mathbf{pr}^\tau$ 表示到该分解各因子的正交投影。

正如我们将在下文看到的，给定一个法复形 $C_{\Sigma,*}(z)$ 和一个锥 $\tau \in \Sigma$，我们将与之关联一个面 $\mathbf{F}^\tau(C_{\Sigma,*}(z))$，且该面将位于空间 $N^\tau_{\mathbb{R}}$ 中。为了帮助读者理解 $\mathbf{F}^\tau(C_{\Sigma,*}(z))$ 的构造及其随后作为法复形的诠释，我们从此约定：**上标专用于表示与向量空间 $N^\tau_{\mathbb{R}}$ 相关的对象。**例如，Σ^τ 表示 $N^\tau_{\mathbb{R}}$ 中的一个扇，而 $*^\tau$ 表示 $N^\tau_{\mathbb{R}}$ 上的一个内积。

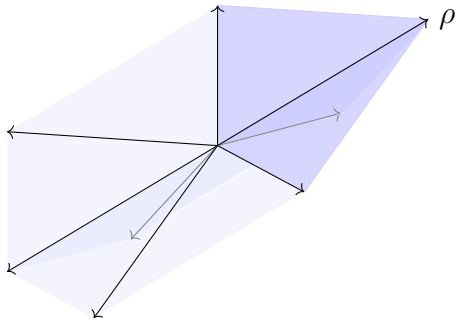
4.2. 正规复形的面。 正规复形的面构造主要分为两个步骤。第一步与多胞体情形完全类似：将法复形与一组支撑超平面相交，从而得到一个子复形。然而，若要将所得子复形视为法复形本身，

构造的第二步要求我们将这个多面体子复形平移至原点，然后便可赋予它一个位于 $N_{\mathbb{R}}^{\tau}$ 内的法复形结构。

设 $\Sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ 为单纯的 d 扇，$* \in \mathrm{Inn}(N_{\mathbb{R}})$ 为一个内积，$z \in \mathrm{Cub}(\Sigma, *)$ 为一个伪立方值。对每个锥 $\tau \in \Sigma$，定义 τ 在 Σ 中的**邻域为**

$$\mathrm{N}_\tau\Sigma := \{\pi \mid \pi \preceq \sigma \text{ for some } \sigma \in \Sigma \text{ with } \tau \preceq \sigma\}.$$

为说明这个定义，我们将下述二维扇中射线 ρ 的邻域加深显示。



注意，$\mathrm{N}_\tau\Sigma$ 本身是 $N_{\mathbb{R}}$ 中的一个单纯的 d 扇，其锥是 Σ 的子集，而 $\mathrm{N}_\tau\Sigma$ 的极大锥由 Σ 中所有包含 τ 的极大锥构成。由于每个极大锥 $\sigma \in \mathrm{N}_\tau\Sigma(d)$ 都包含 τ 作为一个面，根据定义可知，每个满足 $\rho \in \tau(1)$ 的超平面 $H_{\rho,*}(z)$ 都是 $P_{\sigma,*}(z)$ 的支撑超平面：

$$P_{\sigma,*}(z) \subseteq H^{-}_{\rho,*}(z) \quad \text{for all} \quad \sigma \in \mathrm{N}_\tau\Sigma(d) \quad \text{and} \quad \rho \in \tau(1).$$

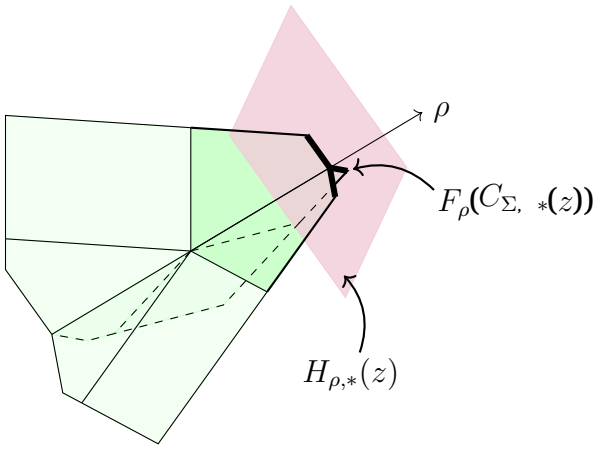
因此，对于每个 $\sigma \in \mathrm{N}_\tau\Sigma(d)$，通过与所有这些超平面相交，我们得到 $P_{\sigma,*}(z)$ 的一个面：

$$\mathrm{F}_\tau(P_{\sigma,*}(z)) := P_{\sigma,*}(z) \cap \bigcap_{\rho\in\tau(1)} H_{\rho,*}(z).$$

这些多胞体及其所有面构成了 $C_{\Sigma,*}(z)$ 的一个多面体子复形，我们将其记为

$$\mathrm{F}_\tau(C_{\Sigma,*}(z)) := \bigcup_{\sigma\in\mathrm{N}_\tau\Sigma(d)} \mathrm{F}_\tau\widehat{(P_{\sigma,*}(z))}.$$

为了通过一个具体例子说明多面体子复形 $\mathrm{F}_\tau(C_{\Sigma,*}(z))$ 是如何构造的，下图展示了一个二维法复形，其中，与射线 ρ 的邻域相关联的极大多胞体集合以深色标出。我们还画出了与 ρ 相关联的超平面。该超平面与深色多胞体的交集为 $F_\rho(C_{\Sigma,*}(z))$；在此例中，它是一个多面体复形，由三条在点 $w_{\rho,*}(z)$ 相交的线段组成。



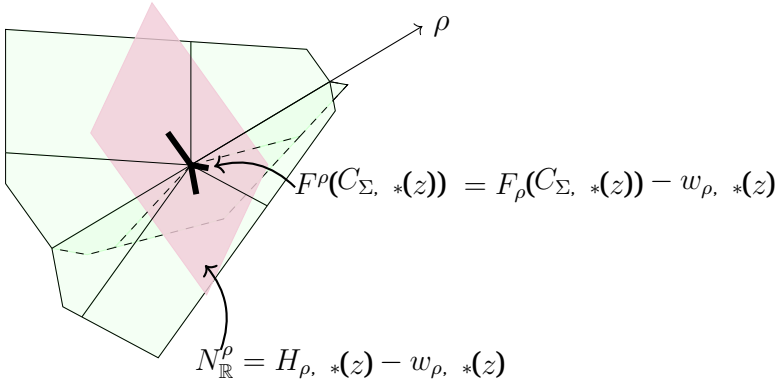
人们或许会想把 $\mathrm{F}_\tau(C_{\Sigma,\ *}(z))$ 称为 $C_{\Sigma,\ *}(z)$ 的一个“面”；然而，这样称呼有个缺点：$\mathrm{F}_\tau(C_{\Sigma,\ *}(z))$ 本身并不是法复形（例如，所有法复形都包含原点，而 $\mathrm{F}_\tau(C_{\Sigma,\ *}(z))$ 通常并不包含原点）。因此，我们的构造还需要再进行一步，即将 $\mathrm{F}_\tau(C_{\Sigma,\ *}(z))$ 沿向量 $w_{\tau,\ *}(z)$ 平移。注意，回溯这些定义可以发现，仿射子空间之间存在一种对应关系

$$\bigcap_{\rho\in\tau(1)} H_{\rho,*}(z) = N_{\mathbb{R}}^{\tau} + w_{\tau,*}(z).$$

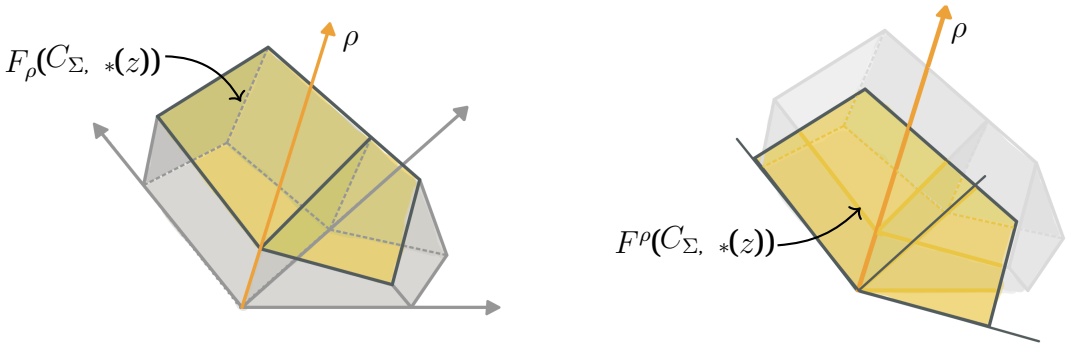
由于按定义，$\mathrm{F}_\tau(C_{\Sigma,\ *}(z))$包含在左侧，因此将其平移$-w_{\tau,\ *}(z)$后，得到 $N_{\mathbb{R}}^{\tau}$中的一个多面体复形。我们将与 $\tau\in\Sigma$ 相关联的$C_{\Sigma,\ *}(z)$**面**定义为这个多面体复形：

$$\mathrm{F}^{\tau}(C_{\Sigma,*}(z)) := \mathrm{F}_{\tau}(C_{\Sigma,*}(z)) - w_{\tau,*}(z) \subseteq N_{\mathbb{R}}^{\tau}.$$

在我们的贯穿示例中，与射线 ρ 相关联的面在下方的 $N_{\mathbb{R}}^{\rho}$ 中示出。



接下来的两幅图分别描绘子复形 $\mathrm{F}^\rho(C_{\Sigma,\ *}(z))\subseteq C_{\Sigma,\ *}(z)$，以及平移至原点后的面 $\mathrm{F}^\rho(C_{\Sigma,\ *}(z))$，其中 ρ 是三维扇的一条射线。



在接下来的小节中，用符号表示多胞体 $\mathrm{F}_\tau(P_{\sigma,\ *}(z))$ 的平移体也会很有用。我们定义

$$\mathrm{F}^\tau(P_{\sigma,*}(z)) := \mathrm{F}_\tau(P_{\sigma,*}(z)) - w_{\tau,*}(z).$$

用这些平移后的多胞体表示，我们可以将 $C_{\Sigma,*}(z)$ 的 τ 面写作

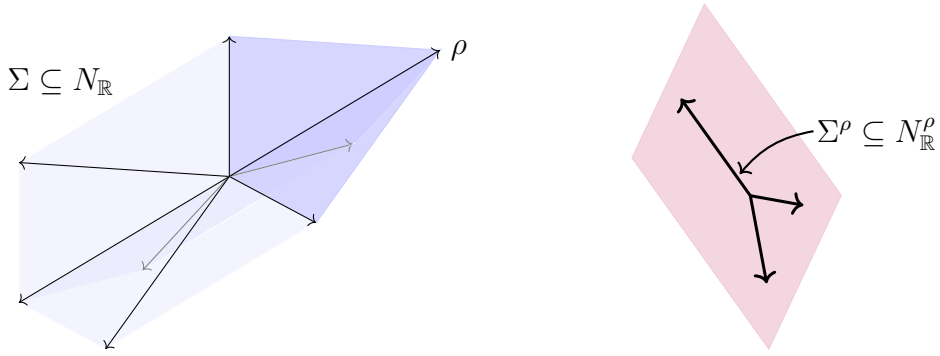
$$\mathrm{F}^\tau(C_{\Sigma,*}(z)) = \bigcup_{\sigma \in \mathrm{N}_\tau \Sigma(d)} \mathrm{F}^\tau(\widehat{P_{\sigma,*}(z)}).$$

4.3. 作为法复形的面。本小节的目的是将每个面 $\mathrm{F}^\tau(C_{\Sigma,*}(z))$ 实现为一个法复形。为此，我们需要若干要素；具体而言，需要一个位于 $N^\tau_{\mathbb{R}}$ 中的带标记的、纯的、单纯扇 Σ^τ，一个定义在 $N^\tau_{\mathbb{R}}$ 上的内积 $*^\tau$，以及一个伪立方值 $z^\tau \in \mathsf{Cub}(\Sigma^\tau, *^\tau)$。下面逐一定义这些要素。

对于每个锥 $\tau \in \Sigma$，将 Σ 在 $\tau \in \Sigma$ 处的**星**定义为 $N^\tau_{\mathbb{R}}$ 中由 τ 邻域内各锥的投影组成的扇：

$$\Sigma^\tau := \{\mathrm{pr}^\tau(\pi) \mid \pi \in \mathrm{N}_\tau \Sigma\}.$$

二维扇 Σ 在射线 ρ 处的星如下图所示。图中，ρ 邻域内有三个二维锥，它们投影到三个一维锥上，这些一维锥构成星扇 Σ^ρ的极大锥。



今后，我们用简写 $\pi^\tau = \mathrm{pr}^\tau(\pi)$。

给定任意一个满足 $\pi \in \mathrm{N}_\tau\Sigma$ 的锥 $\pi^\tau \in \Sigma^\tau$，我们也可以将 π^τ 视为较大锥 $\sigma = \pi \cup \tau \in \mathrm{N}_\tau\Sigma$的投影。注意，$\mathrm{N}_\tau\Sigma$中唯一投影到$\pi^\tau$的极大锥是 σ，由此可知，Σ^τ 中的每个锥都是 $\mathrm{N}_\tau\Sigma$中一个特定的 锥的投影。换句话说，存在一个双射

$$\{\sigma \in \mathrm{N}_\tau\Sigma \mid \tau \preceq \sigma\} \to \Sigma^\tau$$
$$\sigma \mapsto \sigma^\tau.$$

由假设 Σ 是一个单纯的 d-扇可知，Σ^τ 是 $N^\tau_\mathbb{R}$ 中一个维数为 $d^\tau = d - \dim(\tau)$ 的纯单纯扇。此外，Σ 的单纯性假设意味着每条射线 $\eta \in \Sigma^\tau(1)$ 都是唯一一条射线 $\hat{\eta} \in \mathrm{N}_\tau\Sigma(1)$ 的投影，因此我们可以用向量 $\mathrm{pr}^\tau(u_{\hat{\eta}})$ 标记每条射线 $\eta \in \Sigma^\tau(1)$。

现在我们在 $N^\tau_\mathbb{R}$ 中有了一个带标记的纯单纯扇，接下来只需定义内积和伪立方值。内积 $*^\tau \in \mathrm{Inn}(N^\tau_\mathbb{R})$ 定义为内积 $* \in \mathrm{Inn}(N_\mathbb{R})$ 在子空间 $N^\tau_\mathbb{R}$ 上的限制。最后，给定任意 $z \in \mathbb{R}^{\Sigma(1)}$，我们按以下规则定义$z^\tau \in \mathbb{R}^{\Sigma^\tau(1)}$

$$z^\tau_\eta = z_{\hat{\eta}} - w_{\tau,*}(z) * u_{\hat{\eta}},$$

其中，与前文一样，$\hat{\eta} \in \mathrm{N}_\tau\Sigma(1)$ 是满足 $\mathrm{pr}^\tau(\hat{\eta}) = \eta$ 的唯一射线。

现在，我们已具备陈述并证明以下结果所需的一切要素：法复形的面本身也是法复形。

命题 4.1. 设 $\Sigma \subseteq N_\mathbb{R}$ 是一个单纯的 d-扇，$* \in \mathrm{Inn}(N_\mathbb{R})$ 是一个内积，且 $\tau \in \Sigma$ 是一个锥。若 $z \in \mathbb{R}^{\Sigma(1)}$ 关于 $(\Sigma, *)$ 是（伪）立方型的，则 z^τ 关于 $(\Sigma^\tau, *^\tau)$ 是（伪）立方型的，并且

$$\mathrm{F}^\tau(C_{\Sigma,*}(z)) = C_{\Sigma^\tau,*^\tau}(z^\tau).$$

我们注意到，第一个陈述——即 z^τ 是（伪）立方型的——是使 $C_{\Sigma^\tau,*^\tau}(z^\tau)$ 有定义的必要条件。命题 4.1 是关于法复形的陈述，或者等价地说，是关于构成这些复形的多胞体的陈述。为了证明命题 4.1，我们先证明以下关键引理，它仅涉及多胞体的顶点。

引理 4.2. 设 $\Sigma \subseteq N_\mathbb{R}$ 是一个单纯的 d-扇，$* \in \mathrm{Inn}(N_\mathbb{R})$ 是一个内积，且 $\tau \in \Sigma$ 是一个锥。对于任意满足 $\tau \preceq \sigma$ 的 $\sigma \in \Sigma$，我们有

$$\mathrm{pr}^\tau(w_{\sigma,*}(z)) = w_{\sigma,*}(z) - w_{\tau,*}(z) = w_{\sigma^\tau,*^\tau}(z^\tau).$$

证明。我们首先证明第一个等式。为此，我们先说明$w_{\sigma,*}(z) - w_{\tau,*}(z) \in N^\tau_\mathbb{R}$。由于 $N^\tau_\mathbb{R} = N^\perp_{\tau,\mathbb{R}}$，只需证明 $w_{\sigma,*}(z) - w_{\tau,*}(z)$ 与

基 $\{u_\rho \mid \rho \in \tau(1)\} \subseteq N_{\tau,\mathbb{R}}$ 正交。根据 w 向量的定义以及假设 $\tau \preceq \sigma$，我们计算得

$$(w_{\sigma,*}(z) - w_{\tau,*}(z)) * u_\rho = z_\rho - z_\rho = 0 \quad \text{for all} \quad \rho \in \tau(1),$$

由此可得 $w_{\sigma,*}(z) - w_{\tau,*}(z) \in N_{\mathbb{R}\circ}^\tau$。由于 $N_{\mathbb{R}} = N_{\tau,\mathbb{R}} \oplus N_{\mathbb{R}}^\tau$，正交分解 $w_{\sigma,*}(z) = w_{\tau,*}(z) + (w_{\sigma,*}(z) - w_{\tau,*}(z))$ 因而推出

$$\mathrm{pr}_\tau(w_{\sigma,*}(z)) = w_{\tau,*}(z) \quad \text{and} \quad \mathrm{pr}^\tau(w_{\sigma,*}(z)) = w_{\sigma,*}(z) - w_{\tau,*}(z). \tag{4.3}$$

为证明 $w_{\sigma,*}(z) - w_{\tau,*}(z) = w_{\sigma^\tau,*^\tau}(z^\tau)$，我们现在说明 $w_{\sigma,*}(z) - w_{\tau,*}(z)$ 是 $N_{\sigma^\tau,\mathbb{R}}$ 的一个元素，并且是定义 $w_{\sigma^\tau,*^\tau}(z^\tau)$ 的方程组的一个解：

$$v *^\tau u_\eta = z_\eta^\tau \quad \text{for all} \quad \eta \in \sigma^\tau(1). \tag{4.4}$$

为验证 $w_{\sigma,*}(z) - w_{\tau,*}(z) \in N_{\sigma^\tau,\mathbb{R}}$，我们首先注意到可以写成

$$w_{\sigma,*}(z) = \sum_{\rho \in \sigma(1)} a_\rho \, u_\rho$$

对于某些值 $a_\rho \in \mathbb{R}$，此时

$$\begin{aligned} w_{\sigma,*}(z) - w_{\tau,*}(z) &= \mathrm{pr}^\tau(w_{\sigma,*}(z)) \\ &= \sum_{\rho \in \sigma(1)\setminus\tau(1)} a_\rho \, \mathrm{pr}^\tau(u_\rho) \\ &= \sum_{\eta \in \sigma^\tau(1)} a_{\hat\eta} \, u_\eta, \end{aligned}$$

其中第一个等式用到了 (4.3)，第二个等式用到了 pr^τ 在 $N_{\tau,\mathbb{R}}$ 上为零，第三个等式则用到了 σ^τ 的射线与 $\sigma(1) \setminus \tau(1)$ 之间存在自然双射。最后，我们展开定义，检查 $w_{\sigma,*}(z) - w_{\tau,*}(z)$ 是方程 (4.4) 的一个解：

$$\begin{aligned} (w_{\sigma,*}(z) - w_{\tau,*}(z)) *^\tau u_\eta &= (w_{\sigma,*}(z) - w_{\tau,*}(z)) * (u_{\hat\eta} - \mathrm{pr}_\tau(u_{\hat\eta})) \\ &= w_{\sigma,*}(z) * u_{\hat\eta} \; - \; w_{\tau,*}(z) * u_{\hat\eta} \; - \; \big(w_{\sigma,*}(z) - w_{\tau,*}(z)\big) * \mathrm{pr}_\tau(u_{\hat\eta}) \\ &= z_{\hat\eta} - w_{\tau,*}(z) * u_{\hat\eta} \\ &= z_\eta^\tau, \end{aligned}$$

其中，第一个等式用到了 $u_{\hat\eta}$ 的正交分解以及 $*^\tau$ 只是 $*$ 的限制这一事实；第二个等式用到了内积的线性；第三个等式用到了 $w_{\sigma,*}(z)$ 的定义，以及向量 $\mathrm{pr}_\tau(u_{\hat\eta})$ 和 $w_{\sigma,*}(z) - w_{\tau,*}(z) = \mathrm{pr}^\tau(w_{\sigma,*}(z))$ 属于正交子空间这一事实。□

命题 *4.1* 的证明。为了在立方情形下证明第一个陈述，假设 $z \in \mathbb{R}^{\Sigma(1)}$ 是立方型的。这意味着，对于每个 $\sigma \in \Sigma$，我们都可以写成

$$w_{\sigma,*}(z) = \sum_{\rho \in \sigma(1)} a_\rho u_\rho$$

对于某些正值 $a_\rho \in \mathbb{R}_{>0}$。考虑 Σ^τ 的任意一个锥，我们可以将其写成 σ^τ with$\tau \preceq \sigma$。应用该引理，我们于是得到

$$\begin{aligned} w_{\sigma^\tau,*^\tau}(z^\tau) &= \mathrm{pr}^\tau(w_{\sigma,*}(z)) \\ &= \sum_{\rho \in \sigma(1)\setminus\tau(1)} a_\rho \ \mathrm{pr}^\tau(u_\rho) \\ &= \sum_{\eta \in \sigma^\tau(1)} a_{\hat{\eta}} \ u_\eta. \end{aligned}$$

这表明 $w_{\sigma^\tau,\ *^\tau}(z^\tau)$ 可以写成 σ^τ 的射线生成元的正组合，从而证明了 $z^\tau \in \mathsf{Cub}(\Sigma^\tau,\ *^\tau)$。伪立方情形中的证明完全相同，只需将“正”替换为“非负”。

为了证明

$$\mathrm{F}^\tau(C_{\Sigma,*}(z)) = C_{\Sigma^\tau,*^\tau}(z^\tau),$$

只需确定这些复形中的极大多胞体。换言之，我们必须证明，对于每个 $\sigma \in \mathsf{N}_\tau\Sigma(d)$，都有

$$\mathrm{F}^\tau(P_{\sigma,*}(z)) = P_{\sigma^\tau,*^\tau}(z^\tau). \tag{4.5}$$

为了证明（4.5），我们分析这些多胞体的顶点。

根据命题 2.1，$P_{\sigma,*}(z)$ 的顶点为 $\{w_{\pi,*}(z) \mid \pi \preceq \sigma\}$。由于

$$F_\tau(P_{\sigma,*}(z)) = P_{\sigma,*}(z) \cap \bigcap_{\rho \in \tau(1)} H_{\rho,*}(z),$$

由此可知，$F_\tau(P_{\sigma,*}(z))$ 的顶点为

$$\{w_{\pi,*}(z) \mid \pi \preceq \sigma \text{ and } w_{\pi,*}(z) * u_\rho = z_\rho \text{ for all } \rho \in \tau(1)\}.$$

若锥 $\pi \preceq \sigma$ 满足对所有 $\rho \in \tau(1)$ 都有 $w_{\pi,*}(z) * u_\rho = z_\rho$，则 w-向量的定义表明 $w_{\pi,*}(z) = w_{\pi\cup\tau,*}(z)$，由此可知，$F_\tau(P_{\sigma,*}(z))$ 的顶点为

$$\mathrm{Vert}\big(F_\tau(P_{\sigma,*}(z))\big) = \{w_{\pi,*}(z) \mid \tau \preceq \pi \preceq \sigma\}.$$

Upon 平移 $w_{\tau,*}(z)$，将 $F_\tau(P_{\sigma,*}(z))$ 变为 $F^\tau(P_{\sigma,*}(z))$，我们可见

$$\begin{aligned} \mathrm{Vert}\big(F^\tau(P_{\sigma,*}(z))\big) &= \{w_{\pi,*}(z) - w_{\tau,*}(z) \mid \tau \preceq \pi \preceq \sigma\} \\ &= \{w_{\pi^\tau,*^\tau}(z^\tau) \mid \pi^\tau \preceq \sigma^\tau\} \\ &= \mathrm{Vert}\big(P_{\sigma^\tau,*^\tau}(z^\tau)\big), \end{aligned}$$

其中，第二个等式是引理 4.2 的应用，第三个等式是命题 2.1 的应用。匹配了 (4.5) 中多胞体的顶点后，便可得出多胞体相等。□

命题 4.1 的重要意义在于，它使我们能够为法复形的每一个面赋予法复形的结构，特别是由此可以计算面的（混合）体积。更具体地说，若 $\omega : \Sigma(d) \to \mathbb{R}_{>0}$ 是一个权函数，则我们得到一个由 $\omega^\tau(\sigma^\tau) = \omega(\sigma)$ 对所有 $\sigma \in \Sigma(d)$ 定义的权函数 $\omega^\tau\colon \Sigma^\tau(d^\tau) \to \mathbb{R}_{>0}$。由 ω 加权的面 $\mathrm{F}^\tau(C_{\Sigma,*}(z))$ 的体积为

$$\mathrm{Vol}_{\Sigma^\tau,\omega^\tau,*^\tau}(z^\tau).$$

同样，由 ω 加权的面 $\mathrm{F}^\tau(C_{\Sigma,*}(z_1))\dots\mathrm{F}^\tau(C_{\Sigma,*}(z_{d^\tau}))$ 的混合体积 is

$$\mathrm{MVol}_{\Sigma^\tau,\omega^\tau,*^\tau}(z_1^\tau,\dots,z_{d^\tau}^\tau).$$

在接下来的两个小节中，我们将运用这些概念证明基本结果，说明法复形的（混合）体积与其面的（混合）体积之间的关系。在使用混合体积进行论证时，考虑面的面将很有用；因此，接下来的结果——即法复形的面的面也是原法复形的面——将发挥作用。

命题 4.6。设 $\Sigma \subseteq N_\mathbb{R}$ 是一个单纯的 d-扇，$* \in \mathrm{Inn}(N_\mathbb{R})$ 是一个内积，且 $z \in \mathrm{Cub}(\Sigma, *)$ 是一个伪立方值。如果 τ、$\pi \in \Sigma$ 满足 $\tau \preceq \pi$，则

$$\mathrm{F}^{\pi^\tau}(\mathrm{F}^\tau(C_{\Sigma,*}(z))) = \mathrm{F}^\pi(C_{\Sigma,*}(z)).$$

证明。根据命题 4.1，本命题中的断言等价于

$$\mathrm{F}^{\pi^\tau}(C_{\Sigma^\tau,*^\tau}(z^\tau)) = C_{\Sigma^\pi,*^\pi}(z^\pi).$$

这就足够了 只需匹配这些复形中的极大多胞体，因此我们必须证明 :

$$\mathrm{F}^{\pi^\tau}(P_{\sigma^\tau,*^\tau}(z^\tau)) = P_{\sigma^\pi,*^\pi}(z^\pi) \quad \text{for all} \quad \sigma \in \Sigma(d) \quad \text{with} \quad \tau \preceq \sigma. \tag{4.7}$$

等式 (4.7) 左侧多胞体的顶点为

$$\{w_{\mu^\tau,*^\tau}(z^\tau) - w_{\pi^\tau,*^\tau}(z^\tau) \mid \pi^\tau \preceq \mu^\tau \preceq \sigma^\tau\}$$

而（4.7）右侧的顶点是

$$\{w_{\mu^\pi,*^\pi}(z^\pi) \mid \mu^\pi \preceq \sigma^\pi\}.$$

注意，这两组顶点都由 $\mu \in \Sigma$ 以 $\pi \preceq \mu \preceq \sigma$ 为指标，并且我们有

$$\begin{aligned} w_{\mu^\tau,*^\tau}(z^\tau) - w_{\pi^\tau,*^\tau}(z^\tau) &= \mathrm{pr}^{\pi^\tau}(w_{\mu^\tau,*^\tau}(z^\tau)) \\ &= \mathrm{pr}^{\pi^\tau}(\mathrm{pr}^\tau(w_{\mu,*}(z))) \\ &= \mathrm{pr}^\pi(w_{\mu,*}(z)) \\ &= w_{\mu^\pi,*^\pi}(z^\pi), \end{aligned}$$

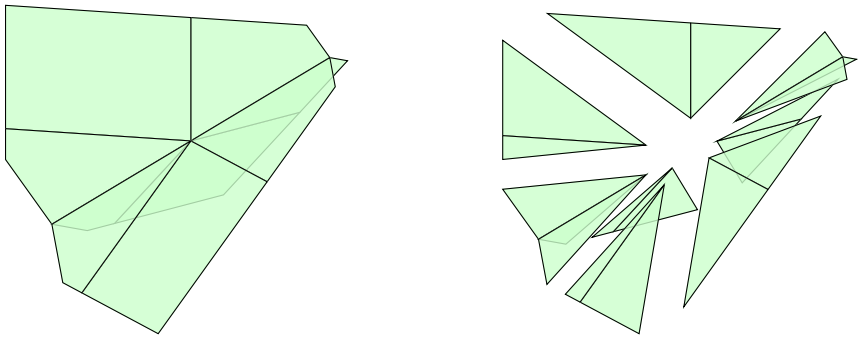
其中，第一个、第二个和第四个等式由引理 4.2 得出，而第二个等式则是基于这样一个观察：投影 pr^π 可以分解为两个步骤：$\mathrm{pr}^\pi = \mathrm{pr}^{\pi^\tau} \circ \mathrm{pr}^\tau$。因此，(4.7) 中的多胞体顶点一一对应，命题得证。□

4.4. 体积与面。 本小节旨在证明以下结果，该结果将法复形的体积与其各面的体积联系起来。

命题 4.8。 设 $\Sigma \subseteq N_\mathbb{R}$ 是一个带有权函数 $\omega : \Sigma(d) \to \mathbb{R}_{>0}$ 的单纯 d-扇，设 $* \in \mathrm{Inn}(N_\mathbb{R})$ 为一个内积，并设 $z \in \mathrm{Cub}(\Sigma, *)$ 为一个伪立方值。那么

$$\mathrm{Vol}_{\Sigma,\omega,*}(z) = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} z_\rho \, \mathrm{Vol}_{\Sigma^\rho,\omega^\rho,*^\rho}(z^\rho).$$

定理右侧的求和对应于将法复形分解为以其各面为底的棱锥，如下一幅图所示。



命题 4.8 可由以下引理推出，该引理将体积函数 Vol_σ on$N_{\sigma,\,\mathbb{R}}$ 与超平面 $N_{\sigma^\rho,\,\mathbb{R}} \subseteq N_{\sigma,\,\mathbb{R}}$上的体积函数 $\mathrm{Vol}_{\sigma^\rho}$ 联系起来。

引理 4.9。 在命题 *4.8* 的假设下，设 $\sigma \in \Sigma(d)$ 且 $\rho \in \sigma(1)$。对于任意多胞体 $P \subseteq N_{\sigma^\rho,\,\mathbb{R}}$ 和 $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，有

$$\mathrm{Vol}_\sigma\big(\mathrm{conv}(0, P + au_\rho)\big) = a(u_\rho * u_\rho) \cdot \mathrm{Vol}_{\sigma^\rho}(P).$$

作为直观理解，我们注意到，引理 4.9 左侧出现的多胞体 $\mathrm{conv}(0,\ P + au_\rho)$ 是由多胞体 P 先沿着与$N_{\sigma^\rho,\,\mathbb{R}}$正交的射线 ρ 平移 P，再与原点取凸包得到的。结果可以看作一个以 P 为底面、以原点为顶点的棱锥。右侧可以

进一步理解为这个棱锥体积的"底面积乘以高"的公式，其中向量 au_ρ 的"高度"为 $a(u_\rho * u_\rho)$。现在我们将这一非正式讨论精确化。

引理 4.9 的证明。令 $\{v_\eta \mid \eta \in \sigma(1)\} \subseteq M_\sigma$ 为 $\{u_\eta \mid \eta \in \sigma(1)\} \subseteq N_\sigma$ 的对偶基，由下列方程唯一确定：

$$v_\eta * u_\mu = \begin{cases} 1 & \mu = \eta \\ 0 & \mu \neq \eta. \end{cases}$$

回想一下， σ^ρ 的每个射线生成元都可唯一表示为 $\mathrm{pr}_\rho(u_\eta)$，其中 $\eta \in \sigma(1) \setminus \{\rho\}$；我们断言， M_{σ^ρ} 中 $\mathrm{pr}_\rho(u_\eta)$ 的对偶向量是 v_η——换言之，$\mathrm{pr}_\rho(u_\eta)$ 的对偶向量与 u_η 的对偶向量相同。为验证这一点，注意对于任意 η， $\mu \in \sigma(1) \setminus \{\rho\}$，有

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}^\rho(u_\eta) *^\rho v_\mu &= (u_\eta - \mathrm{pr}_\rho(u_\eta)) * v_\mu \\ &= u_\eta * v_\mu \\ &= \begin{cases} 1 & \mu = \eta \\ 0 & \mu \neq \eta, \end{cases} \end{aligned}$$

其中，第一个等号利用了 u_η 分解为其正交分量这一事实，以及 $*^\rho$ 只是 $*$ 的限制这一事实；第二个等号则利用了 $\mathrm{pr}_\rho(u_\eta)$ 是 u_ρ 的倍数这一事实，以及 $u_\rho * v_\mu = 0$。

利用这些 对偶基，我们在向量空间 $N_{\sigma,\mathbb{R}}$ 和 $N_{\sigma^\rho,\mathbb{R}}$ b 中定义了单纯形 y

$$\Delta(\sigma) = \mathrm{conv}(0, \{v_\eta \mid \eta \in \sigma(1)\}) \subseteq N_{\sigma,\mathbb{R}}$$

and

$$\Delta(\sigma^\rho) = \mathrm{conv}(0, \{v_\eta \mid \eta \in \sigma(1) \setminus \{\rho\}\}) \subseteq N_{\sigma^\rho,\mathbb{R}}.$$

根据我们关于如何在 $N_{\sigma,\mathbb{R}}$ 和 $N_{\sigma^\rho,\mathbb{R}}$ 中归一化体积的约定，以及上文已验证 $\{v_\eta \mid \eta \in \sigma(1) \setminus \{\rho\}\}$ 是 σ^ρ 的射线生成元的对偶基，这些单纯形的体积均为单位体积：

$$\mathrm{Vol}_\sigma(\Delta(\sigma)) = \mathrm{Vol}_{\sigma^\rho}(\Delta(\sigma^\rho)) = 1.$$

注意， $\Delta(\sigma^\rho)$ 是 $\Delta(\sigma)$ 的一个面，我们可以写成 $\Delta(\sigma) = \mathrm{conv}(v_\rho, \Delta(\sigma^\rho))$。如果将 $\Delta(\sigma)$ 的顶点 v_ρ 投影到由 ρ 张成的直线上，我们会得到一个新的单纯形

$$\Delta_1(\sigma) = \mathrm{conv}(\mathrm{pr}_\rho(v_\rho), \Delta(\sigma^\rho)).$$

由于投影 pr_ρ 与面 $\Delta(\sigma^\rho)$平行，因此可得

$$\mathrm{Vol}_\sigma(\Delta_1(\sigma)) = \mathrm{Vol}_\sigma(\Delta(\sigma)) = \mathrm{Vol}_{\sigma^\rho}(\Delta(\sigma^\rho)).$$

现在，通过沿着 ρ 将顶点 $\mathrm{pr}_\rho(v_\rho)$滑动到新的顶点 au_ρ，定义一个新的单纯形：

$$\Delta_2(\sigma) = \mathrm{conv}(au_\rho, \Delta(\sigma^\rho)).$$

根据标准投影公式，我们有 $\mathrm{pr}_\rho(v_\rho) = \frac{u_\rho}{u_\rho * u_\rho}$，由此可知，$\Delta_2(\sigma)$ 是将 $\Delta_1(\sigma)$ 的顶点 $\mathrm{pr}_\rho(v_\rho)$ 的高度缩放 $a(u_\rho * u_\rho)$ 倍后得到的。因此，体积也相应缩放为 $a(u_\rho * u_\rho)$：

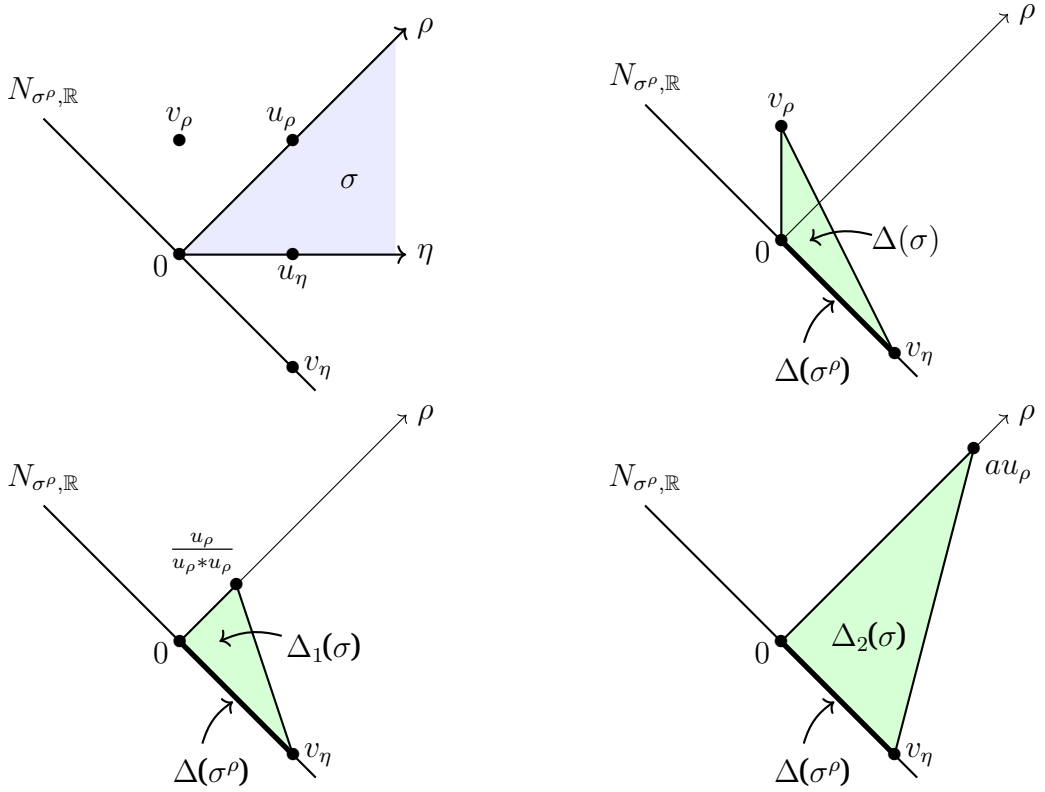
$$\mathrm{Vol}_\sigma(\Delta_2(\sigma)) = a(u_\rho * u_\rho) \cdot \mathrm{Vol}_\sigma(\Delta_1(\sigma)) = a(u_\rho * u_\rho) \cdot \mathrm{Vol}_{\sigma^\rho}(\Delta(\sigma^\rho)).$$

更简洁地说，我们已经证明

$$\mathrm{Vol}_\sigma\left(\mathrm{conv}(au_\rho, P)\right) = a(u_\rho * u_\rho) \cdot \mathrm{Vol}_{\sigma^\rho}(P) \tag{4.10}$$

当 $P = \Delta(\sigma^\rho)$ 时。

作为直观说明，我们在下方描绘了上述讨论中的多胞体序列，具体情形取二维锥 σ；我们在 $\mathbb{R}^2$ 中使用通常的点积对其进行了可视化。



现在我们将（4.10）推广到任意单纯形$P \subseteq N_{\sigma^\rho,\,\mathbb{R}}$。为此，首先注意到，一个单纯形 P 可以通过对特定单纯形 $\Delta(\sigma^\rho)$依次施加平移和在线性空间 $N_{\sigma^\rho,\,\mathbb{R}}$上的线性变换得到。在 $N_{\sigma^\rho,\,\mathbb{R}}$ 内进行平移 P 不会影响（4.10）任一侧的体积

另一方面，给定一个线性变换 T，我们可以通过固定向量 u_ρ，将其简单地扩展为$\widehat{}$在线性空间 $N_{\sigma,\ \mathbb{R}}$ 上的线性变换 T，在这种情况下，我们有

$$\widehat{T}(\mathrm{conv}(au_\rho, P)) = \mathrm{conv}(au_\rho, T(P)).$$

$\widehat{}$由于 $\det(T) = \det(T)$，且线性变换会按其行列式绝对值缩放体积，因此我们得出，对 P 进行线性变换后，等式 (4.10) 仍然成立：

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_\sigma\left(\mathrm{conv}(au_\rho, T(P))\right) &= \mathrm{Vol}_\sigma\left(\widehat{T}(\mathrm{conv}(au_\rho, P))\right)\\ &= |\det(\widehat{T})|\,\mathrm{Vol}_\sigma\left(\mathrm{conv}(au_\rho, P)\right)\\ &= |\det(T)| \cdot a(u_\rho * u_\rho) \cdot \mathrm{Vol}_{\sigma^\rho}(P)\\ &= a(u_\rho * u_\rho) \cdot \mathrm{Vol}_{\sigma^\rho}(T(P)).\end{aligned}$$

已知 (4.10) 对单纯形成立，我们通过对任意多胞体 $P \subseteq N_{\sigma^\rho,\mathbb{R}}$进行三角剖分 P，并将 (4.10) 应用于三角剖分中的每个单纯形，从而将其推广。结合 (4.10) 以及 $\mathrm{conv}(au_\rho, P)$ 只是 $\mathrm{conv}(0, P + au_\rho)$ 的反射、因而具有相同体积这一观察，即可得到该引理。□

现在我们利用引理 4.9 来证明命题 4.8。

命题 *4.8* 的证明。对于每个顶维锥 $\sigma \in \Sigma(d)$ 和 $\rho \in \sigma(1)$，考虑多胞体面 $\mathrm{F}_\rho(P_{\sigma,*}(z)) \subseteq P_{\sigma,\ *}(z)$。根据定义，我们有

$$\mathrm{F}_\rho(P_{\sigma,*}(z)) = \mathrm{F}^\rho(P_{\sigma,*}(z)) + w_{\rho,*}(z).$$

注意到 $w_{\rho,*}(z) = \frac{z_\rho}{u_\rho * u_\rho} u_\rho$，引理 4.9 计算出棱锥 $\mathrm{conv}(0, \mathrm{F}_\rho(P_{\sigma,*}(z))$ 的体积：

$$\mathrm{Vol}_\sigma\left(\mathrm{conv}(0, \mathrm{F}_\rho(P_{\sigma,*}(z)))\right) = z_\rho\,\mathrm{Vol}_{\sigma^\rho}(\mathrm{F}^\rho(P_{\sigma,*}(z)) = z_\rho\,\mathrm{Vol}_{\sigma^\rho}(P_{\sigma^\rho,*^\rho}(z^\rho)), \tag{4.11}$$

其中，第二个等式是对 (4.5) 的应用。

接下来，注意到我们可以将每个多胞体$P_{\sigma,\ *}(z)$ 分解为以面 $\mathrm{F}_\rho(P_{\sigma,\ *}(z))$ 为底、且满足 $\rho \in \sigma(1)$ 的棱锥，从而得到

$$\mathrm{Vol}_\sigma(P_{\sigma,*}(z)) = \sum_{\rho\in\sigma(1)} \mathrm{Vol}_\sigma\left(\mathrm{conv}(0, \mathrm{F}_\rho(P_{\sigma,*}(z))\right). \tag{4.12}$$

然后我们计算：

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_{\Sigma,\omega,*}(z) &= \sum_{\sigma\in\Sigma(d)} \omega(\sigma)\,\mathrm{Vol}_\sigma(P_{\sigma,*}(z)) \\ &= \sum_{\sigma\in\Sigma(d)} \omega(\sigma) \sum_{\rho\in\sigma(1)} \mathrm{Vol}_\sigma\left(\mathrm{conv}(0, \mathrm{F}_\rho(P_{\sigma,*}(z))\right) \\ &= \sum_{\sigma\in\Sigma(d)} \omega(\sigma) \sum_{\rho\in\sigma(1)} z_\rho\,\mathrm{Vol}_{\sigma^\rho}(P_{\sigma^\rho,*^\rho}(z^\rho)) \\ &= \sum_{\rho\in\Sigma(1)} z_\rho \sum_{\sigma^\rho\in\Sigma^\rho(d-1)} \omega^\rho(\sigma^\rho)\,\mathrm{Vol}_{\sigma^\rho}(P_{\sigma^\rho,*^\rho}(z^\rho)) \\ &= \sum_{\rho\in\Sigma(1)} z_\rho\,\mathrm{Vol}_{\Sigma^\rho,\omega^\rho,*^\rho}(z^\rho),\end{aligned}$$

其中，第一个等号是 $\mathrm{Vol}_{\Sigma,\omega,*}(z)$ 的定义；第二个和第三个等号分别来自 (4.12) 和 (4.11)；第四个等号由 ω^ρ 的定义以及以下事实得出：$\Sigma^\rho(d-1)$ 中包含 ρ 的锥与 $\Sigma(d)$ 中的锥之间存在双射，该双射由 $\sigma^\rho \leftrightarrow \sigma$ 给出；第五个等号是 $\mathrm{Vol}_{\Sigma^\rho,\omega^\rho,*^\rho}(z^\rho)$ 的定义。□

4.5. 混合体积与面。 本小节旨在将命题 4.8 推广为以下关于混合体积的更一般论述。关于强同构多面体在经典情形下的类似结果，参见 [Sch14, 引理 5.1。5]

命题 4.13。 设 $\Sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ 是一个带权函数 $\omega\colon \Sigma(d) \to \mathbb{R}_{>0}$ 的单纯 d-扇，$* \in \mathrm{Inn}(N_{\mathbb{R}})$ 是一个内积，且 $z_1, \ldots, z_d \in \mathrm{Cub}(\Sigma, *)$ 是伪立方值。那么

$$\mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1,\ldots,z_d) = \sum_{\rho\in\Sigma(1)} z_{1,\rho}\,\mathrm{MVol}_{\Sigma^\rho,\omega^\rho,*^\rho}(z_2^\rho,\ldots,z_d^\rho).$$

证明。我们对 d 使用归纳法。若 $d = 1$，则混合体积就是体积，此时命题 4.13 是命题 4.8 的特例。现在假设命题 4.13 在维数小于 $d > 1$ 时成立。定义

$$F(z_1,\ldots,z_d) = \sum_{\rho\in\Sigma(1)} z_{1,\rho}\,\mathrm{MVol}_{\Sigma^\rho,\omega^\rho,*^\rho}(z_2^\rho,\ldots,z_d^\rho).$$

为证明 $F =$混合体积$_{\Sigma,\ *,\ \omega}$，命题 3.1 告诉我们，只需证明 F 满足（1）对称、（2）多重线性，以及（3）相对于体积正确归一化；我们按相反顺序检验这些性质。

检验（3）时，我们注意到

$$\begin{aligned} F(z,\dots,z) &= \sum_{\rho\in\Sigma(1)} z_\rho \,\mathrm{MVol}_{\Sigma^\rho,\omega^\rho,*^\rho}(z^\rho,\dots,z^\rho) \\ &= \sum_{\rho\in\Sigma(1)} z_\rho \,\mathrm{Vol}_{\Sigma^\rho,\omega^\rho,*^\rho}(z^\rho) \\ &= \mathrm{Vol}_{\Sigma,\omega,*}(z), \end{aligned}$$

其中，第一个等式是 F 的定义，第二个等式是命题 3.1 第 (3) 部分，第三个等式是命题 4.8。

要验证 (2)，需要考虑两种情况：第一个坐标上的线性，以及其他每个坐标上的线性。根据 F 的定义，第一个坐标上的线性很容易得出；而其他每个坐标上的线性，则由命题 3.1 第 (2) 部分应用于 $(\Sigma^\rho, *^\rho, \omega^\rho)$ 得出。

最后，要验证 (1)，我们首先注意到，将命题 3.1 第 (1) 部分应用于 $(\Sigma^\rho, *^\rho, \omega^\rho)$ 可知，F 关于各项 $z_2,\dots,z_d$ 是对称的。因此，只需证明 F 在转置 z_1 和 z_2 后保持不变。为此，我们首先对 F 的定义中出现的混合体积应用归纳假设，得到

$$F(z_1,\dots,z_d) = \sum_{\rho\in\Sigma(1)} z_{1,\rho} \sum_{\eta^\rho\in\Sigma^\rho(1)} z^\rho_{2,\eta^\rho}\,\mathrm{MVol}_{\Sigma^{\rho,\eta},\omega^{\rho,\eta},*^{\rho,\eta}}(z_3^{\rho,\eta},\dots,z_d^{\rho,\eta}), \tag{4.14}$$

其中，为避免括号和上标过多，例如我们将 $\Sigma^{\rho,\eta}$ 简写为 $(\Sigma^\rho)^{\eta^\rho}$。注意，(4.14) 右侧出现的混合体积是与面的面相关联的混合体积。命题 4.6 告诉我们，法复形的 ρ-面的 η^ρ-面与原法复形的 τ 面相同，其中 $\tau\in\Sigma(2)$ 是包含以 ρ 和 η 为射线的二维锥。因此，

$$\mathrm{MVol}_{\Sigma^{\rho,\eta},\omega^{\rho,\eta},*^{\rho,\eta}}(z_3^{\rho,\eta},\dots,z_d^{\rho,\eta}) = \mathrm{MVol}_{\Sigma^\tau,\omega^\tau,*^\tau}(z_3^\tau,\dots,z_d^\tau).$$

记住每个二维锥 τ 在 (4.14) 中出现两次，分别对应射线的两种排列，我们有

$$F(z_1,\dots,z_d) = \sum_{\substack{\tau\in\Sigma(2)\\ \tau(1)=\{\rho,\eta\}}} (z_{1,\rho}z^\rho_{2,\eta^\rho} + z_{1,\eta}z^\eta_{2,\rho^\eta})\,\mathrm{MVol}_{\Sigma^\tau,\omega^\tau,*^\tau}(z_3^\tau,\dots,z_d^\tau).$$

因此，接下来只需证明 $z_{1,\rho}z^\rho_{2\ ,\eta^\rho} + z_{1,\eta}z^\eta_{2\ ,\rho^\eta}$ 在交换 1 和 2 后保持不变。根据 z^ρ 的定义直接计算可得

$$z_{1,\rho}z^\rho_{2,\eta^\rho} + z_{1,\eta}z^\eta_{2,\rho^\eta} = z_{1,\rho}\big(z_{2,\eta} - w_{\rho,*}(z_2) * u_\eta\big) + z_{1,\eta}\big(z_{2,\rho} - w_{\eta,*}(z_2) * u_\rho\big),$$

由此可见，只需证明两者

$$z_{1,\rho}w_{\rho,*}(z_2) * u_\eta \quad \text{and} \quad z_{1,\eta}w_{\eta,*}(z_2) * u_\rho$$

是不变的　　在交换 1 和 2 后保持不变。这一不变性可由以下计算得出　　s

$$w_{\rho,*}(z_2) = \frac{z_{2,\rho}}{u_\rho * u_\rho} u_\rho \quad \text{and} \quad w_{\eta,*}(z_2) = \frac{z_{2,\eta}}{u_\eta * u_\eta} u_\eta. \qquad \square$$

下一节的计算将用到命题 4.13 的以下解析推论。

推论 4.15。 除命题 *4.13* 的假设外，假设 $\mathrm{Cub}(\Sigma, *)$非空。那么，对于任意固定的 $z_1, \dots,$ $z_k \in \mathrm{Cub}(\Sigma, *)$，有

$$\frac{\partial}{\partial z_\rho} \mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1, \dots, z_k, \underbrace{z, \dots, z}_{d-k}) = (d-k)\, \mathrm{MVol}_{\Sigma^\rho,\omega^\rho,*^\rho}(z_1^\rho, \dots, z_k^\rho, \underbrace{z^\rho, \dots, z^\rho}_{d-k-1}).$$

证明。 假设 $\mathrm{Cub}(\Sigma, *) \neq \emptyset$意味着 $\mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1, \dots, z_k, z, \dots, z)$ 是关于 $\mathbb{R}[z_\rho \mid \rho \in \Sigma(1)]$, 的 $d-k$ 次多项式，因此导数有定义。命题 4.13 和混合体积的对称性意味着

$$\frac{\partial}{\partial z_{i,\rho}} \mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1, \dots, z_d) = \mathrm{MVol}_{\Sigma^\rho,\omega^\rho,*^\rho}(z_1^\rho, \dots, z_{i-1}^\rho, z_{i+1}^\rho, \dots, z_d^\rho).$$

将 $\mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1, \dots, z_k, z, \dots, z)$ 视为 $\mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1, \dots, z_d)$ 与以下特化的复合

$$z_{k+1} = \cdots = z_d = z,$$

于是由多元链式法则即可得出结果。 $\square$

5. Alexandrov–Fenchel inequalities

多胞体混合体积（或更一般地，凸体混合体积）最重要的性质之一是**亚历山德罗夫–芬切尔不等式**。给定实向量空间 V中的多胞体 $P_1, \dots, P_d$，其维数为 d，体积函数为 Vol，亚历山德罗夫–芬切尔不等式指出

$$\mathrm{MVol}(P_1, P_2, P_3, \dots, P_d)^2 \geq \mathrm{MVol}(P_1, P_1, P_3, \dots, P_d)\, \mathrm{MVol}(P_2, P_2, P_3, \dots, P_d)$$

（证明及历史参考文献参见，例如 [Sch14, 定理 7.3.1]）。本节旨在研究法复形混合体积框架下的亚历山德罗夫–芬切尔不等式。

设 $\Sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ 为一个单纯的 d-扇， $\omega : \Sigma(d) \to \mathbb{R}_{>0}$ 为权函数，且 $* \in \mathrm{Inn}(N_{\mathbb{R}})$ 为内积。若三元组 $(\Sigma, \omega, *)$ 满足**亚历山德罗夫–芬切尔**性质，或简称**亚历山德罗夫–芬切尔**（**AF**），则称之为亚历山德罗夫–芬切尔型；若 $\mathrm{Cub}(\Sigma, *) \neq \emptyset$ 且

$$\mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1, z_2, z_3, \dots, z_d)^2 \geq \mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1, z_1, z_3, \dots, z_d)\, \mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_2, z_2, z_3, \dots, z_d)$$

对所有 $z_1, \dots, z_d \in \mathrm{Cub}(\Sigma, *)$均成立。本节证明以下结果，该结果给出了证明三元组 $(\Sigma, \omega, *)$ 为亚历山德罗夫–芬切尔的充分条件。

定理 5.1。 设 $\Sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ 为一个单纯的 d-扇， $\omega : \Sigma(d) \to \mathbb{R}_{>0}$ 为一个权函数，并且 $* \in \mathrm{Inn}(N_{\mathbb{R}})$ 一个内积，使得 $\mathrm{Cub}(\Sigma, *) \neq \emptyset$。三元组 $(\Sigma, \omega, *)$ 在满足以下两个条件时称为亚历山德罗夫–芬切尔：

(i) $\Sigma^\tau \setminus \{0\}$ 对任意满足 $k \leq d-3$ 的锥 $\tau \in \Sigma(k)$ 都是连通的；(ii) $\mathrm{Hess}\big(\mathrm{Vol}_{\Sigma^\tau, \omega^\tau, *^\tau}(z)\big)$ 对任意 $\tau \in \Sigma(d-2)$恰有一个正特征值。

注 5.2。 定理 5.1 中的条件 (i) 可理解为要求扇 Σ没有任何"夹点"。例如，在四维中，该条件排除了局部看起来像两个沿一条射线相交的四维锥的扇，因为与该射线关联的星扇由两个仅在原点相交的三维锥组成。

注 5.3。 定理 5.1 的条件 (ii) 仅涉及 Σ 的二维星。由于二维扇的体积多项式是一个二次型，条件 (ii) 中出现的海森矩阵是常数矩阵。条件 (ii) 可以看作多边形的布伦–明可夫斯基不等式的一个类似物。关于一个不满足条件 (ii) 的二维（热带）扇的例子，参见 [BH17]。

5.1. **定理 5.1 的证明**。 我们对定理 5.1 的证明主要受到 Cordero-Erausquin、Klartag、Merigot 和 Santambrogio 最近提出的经典亚历山德罗夫–芬切尔不等式证明的启发 [CEKMS19]——其中关键的几何输入是命题 4.13。尽管 [CEKMS19] 中的论证几乎可以原封不动地应用于此处，但我们将利用 Br¨和´en 以及 Leake 最近发展出的关于 Lorentzian 多项式的思想，给出一个更为精简的证明 [BL21]。在给出定理 5.1 的证明之前，我们先介绍关于 Lorentzian 多项式的关键思想。

5.1.1. 锥上的洛伦兹型多项式。 理解 AF 不等式的一种方式，是将其视为 2×2 矩阵的非正性

$$\begin{bmatrix} \mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1, z_1, z_3, \ldots, z_d) & \mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_d) \\ \mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_2, z_1, z_3, \ldots, z_d) & \mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_2, z_2, z_3, \ldots, z_d) \end{bmatrix},$$

而这种非正性等价于该矩阵恰有一个正特征值。洛伦兹多项式是捕捉这一观察本质的巧妙工具，因此为理解 AF 型不等式提供了自然的框架。

我们关于洛伦兹多项式的讨论遵循 Br¨and´en 和 Leake [BL21]。设 $C \subseteq \mathbb{R}^n_{>0}$是一个非空开凸锥，且令 $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 为一个次数为 d的齐次多项式。对于每个 $i = 1, \ldots, n$ 以及 $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$，我们采用以下

表示偏导数和方向导数的简写

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{and} \quad \partial_v = \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i.$$

我们称 f 为 C-**Lorentzian**，如果对于所有 $v_1, \dots, v_d \in C$，

(P) $\partial_{v_1} \cdots \partial_{v_d} f > 0$，且 **(H)** Hess($\partial_{v_3} \cdots \partial_{v_d} f$) 恰有一个正特征值。

为了将洛伦兹多项式与 AF 型不等式联系起来，我们回顾以下关键观察（见 [BH20, 命题 4.4]）。

引理 5.4. 设 $C \subseteq \mathbb{R}^n_{>0}$ 为非空开凸锥，且 $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ 为 C-*Lorentzian*。则对于所有 $v_1, v_2, v_3 \dots, v_d \in C$，有

$$\left(\partial_{v_1}\partial_{v_2}\partial_{v_3} \cdots \partial_{v_d} f\right)^2 \geq \left(\partial_{v_1}\partial_{v_1}\partial_{v_3} \cdots \partial_{v_d} f\right)\left(\partial_{v_2}\partial_{v_2}\partial_{v_3} \cdots \partial_{v_d} f\right).$$

证明。 考虑对称 2×2 矩阵

$$M = \begin{bmatrix} \partial_{v_1}\partial_{v_1}\partial_{v_3} \cdots \partial_{v_d} f & \partial_{v_1}\partial_{v_2}\partial_{v_3} \cdots \partial_{v_d} f \\ \partial_{v_2}\partial_{v_1}\partial_{v_3} \cdots \partial_{v_d} f & \partial_{v_2}\partial_{v_2}\partial_{v_3} \cdots \partial_{v_d} f \end{bmatrix}.$$

根据 **(P)**， M 的各项均为正，因此 Perron–Frobenius 定理意味着 M 至少有一个正特征值。另一方面， M 是 Hess($\partial_{v_3} \cdots \partial_{v_d} f$) 的一个主子式，而根据 **(H)**，该矩阵恰有一个正特征值；因此，由柯西交错定理可知， M 至多有一个正特征值。因此， M 恰有一个正特征值，这意味着 M 的行列式非正，从而证明了该引理。□

Br¨and´en 和 Leake [BL21], 证明了以下结果，该结果对于研究锥上的洛伦兹型多项式尤其有用。我们认为，该结果有效地实现了 [CEKMS19]中的关键见解；本质上，它消除了对 [CEKMS19]中的一个归纳参数的需求，因为该归纳参数已包含在洛伦兹多项式的递归性质之中。

引理 5.5 ([BL21], 命题 2.4)。 设 $C \subseteq \mathbb{R}^n_{>0}$ 是一个非空开凸锥，且 $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ 是一个次数为 d 的齐次多项式。如果

(1) $\partial_{v_1} \cdots \partial_{v_d} f > 0$ 对所有 $v_1, \dots, v_d \in C$ 均成立，(2) $\mathrm{Hess}\left(\partial_{v_1} \cdots \partial_{v_{d-2}} f\right)$ 是不可约的[1]，并且对于所有 $v_1, \dots, v_{d-2} \in C$，其非对角元素均非负，且(3) $\partial_i f$ 对所有 $i = 1, \dots, n$ 都是 C-*Lorentzian*，

那么 f 是 C-*Lorentzian*。

[1]若一个 $n \times n$ 矩阵 M 是**不可约的**，则当且仅当其关联邻接图是连通的；该邻接图是以 n 个带标号顶点为顶点的无向图，并且当 M 的（i, j）项非零时，在第 i个顶点与第 j个顶点之间连一条边。

5.1.2. 洛伦兹体积多项式。 现在我们讨论如何利用上述关于锥上的洛伦兹型多项式的讨论来研究法复形的混合体积。设 $\Sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$为一个单纯的 d-扇， $\omega\colon\ \Sigma(d) \to \mathbb{R}_{>0}$ 为一个权函数， $* \in$Inn($N_{\mathbb{R}}$)为一个内积。我们假设 Cub(Σ, $*$) $\neq \emptyset$，在此情况下，函数 Vol$_{\Sigma,\ \omega,\ *}$: Cub(Σ, $*$) $\to \mathbb{R}$ 是一个关于 $\mathbb{R}[z_\rho \mid \rho \in \Sigma(1)]$中 d 次齐次多项式。根据命题 3.1(3)，我们有

$$\mathrm{Vol}_{\Sigma,\omega,*}(z) = \mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z, \dots, z).$$

由命题 3.1(1) 和 (2)（以及链式法则）可得 t

$$\partial_{z_1} \cdots \partial_{z_k} \mathrm{Vol}_{\Sigma,\omega,*}(z) = \frac{d!}{d-k!}\, \mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1, \dots, z_k, \underbrace{z, \dots, z}_{d-k}) \tag{5.6}$$

对于任意 $z_1, \dots, z_k \in$ Cub($\Sigma, *$)。特别地，为了证明 ($\Sigma, \omega, *$) 是亚历山德罗夫–芬切尔（AF），现在可以看出，只需（由引理 5.4）证明 Vol$_{\Sigma,\omega,*}$ 是 Cub($\Sigma, *$)-Lorentzian。因此，定理 5.1 是以下更强结果的推论。

定理 5.7. 设 $\Sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ 是一个单纯的 d-扇， $\omega\colon\ \Sigma(d) \to \mathbb{R}_{>0}$ 是一个权函数， $* \in \mathrm{Inn}(N_{\mathbb{R}})$ 是一个内积，且满足 $\mathrm{Cub}(\Sigma, *) \neq \emptyset$。若满足以下两个条件，则 $\mathrm{Vol}_{\Sigma,\omega,*}$ 是 $\mathrm{Cub}(\Sigma, *)$-*Lorentzian*:

(i) $\Sigma^\tau \setminus \{0\}$ 对于任意满足 $k \leq d-3$ 的锥 $\tau \in \Sigma(k)$ 都是连通的；(ii) $\mathrm{Hess}\big(\mathrm{Vol}_{\Sigma^\tau,\omega^\tau,*^\tau}(z)\big)$ 对于任意 $\tau \in \Sigma(d-2)$恰有一个正特征值。

证明。 我们对 d 使用归纳法来证明定理 5.7。

首先考虑基础情形 $d = 2$ （此时条件 (i) 是空泛的）。注意，由 (5.6) 以及混合体积的正性（命题 3.5），Vol$_{\Sigma,\omega,*}$ 满足 (P)；而 Vol$_{\Sigma,\omega,*}$ 满足 (H) 等价于条件 (ii)。因此，当 $d = 2$ 时，定理 5.7 成立。

现在令 $d > 2$，并假设 ($\Sigma, \omega, *$) 满足定理 5.7 中的条件 (i) 和条件 (ii)。为证明 Vol$_{\Sigma,\omega,*}$ 是 Cub($\Sigma, *$)-Lorentzian，我们使用引理 5.5。利用 (5.6) 转述引理 5.5 的三个条件后，我们必须证明

(1) 对所有 $z_1, \dots, z_d \in \in$Cub($\Sigma, *$)，MVol$_{\Sigma,\omega,*}$($z_1, \dots, z_d$) > 0；(2) 对所有 $z_1, \dots, z_{d-2} \in \in$Cub($\Sigma, *$)，Hess$\big(\mathrm{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1, \dots, z_{d-2}, z, z)\big)$ 不可约，且非对角线元素非负；(3) 对所有 $\rho \in \Sigma(1)$， ∂_ρ Vol$_{\Sigma,\omega,*}$(z) 都是 Cub($\Sigma, *$)-Lorentzian。

注意，(1) 仅仅是混合体积的正性（命题 3.5）。为证明 (3)，注意命题 3.1(3) 和推论 4.15（结合 $k = 0$）共同推出

$$\partial_\rho \mathrm{Vol}_{\Sigma,\omega,*}(z) = d\, \mathrm{Vol}_{\Sigma^\rho,\omega^\rho,*^\rho}(z^\rho).$$

对 ($\Sigma^\rho, \omega^\rho, *^\rho$) 应用归纳假设——这是可行的，因为 Σ^ρ 的任何星扇都是 Σ 的星扇，因此我们假设 ($\Sigma, \omega, *$) 满足

定理 5.7 的两个条件，这意味着 $(\Sigma^\rho, \omega^\rho, *^\rho)$ 也满足定理 5.7 的两个条件——这意味着 $\partial_\rho \operatorname{Vol}_{\Sigma,\omega,*}(z)$ 是 Lorentzian，从而验证了 (3)。

最后，为了证明 (2)，我们使用推论 4.15 计算

$$\partial_\rho \operatorname{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1,\dots,z_{d-2},z,z) = 2\operatorname{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1^\rho,\dots,z_{d-2}^\rho,z^\rho).$$

若 $\tau \in \Sigma(2)$ 的射线为 ρ 和 η，则

$$z_{\eta^\rho}^\rho = z_\eta - w_{\rho,*}(z) * u_\eta = z_\eta - \frac{u_\rho * u_\eta}{u_\rho * u_\rho} z_\rho,$$

由此可得，

$$\partial_\eta\partial_\rho \operatorname{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1,\dots,z_{d-2},z,z) = 2\operatorname{MVol}_{\Sigma^\tau,\omega^\tau,*^\tau}(z_1^\tau,\dots,z_{d-2}^\tau) \tag{5.8}$$

另一方面，若 ρ 和 η 不在同一个公共锥 $\tau \in \Sigma(2)$ 上，则

$$\partial_\eta\partial_\rho \operatorname{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1,\dots,z_{d-2},z,z) = 0. \tag{5.9}$$

立方值的混合体积的正性，以及 (5.8) 和 (5.9)，由此推出 $\operatorname{Hess}\big(\operatorname{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1,\dots,z_{d-2},z,z)\big)$ 具有非负的非对角元素；当行索引和列索引是锥 $\tau \in \Sigma(2)$ 的射线时，这些元素为正。定理 5.7 的第一个条件表明，我们可以从 Σ 的任意一条射线出发，只经过一维锥和二维锥的相对内部，就到达另一条任意射线，由此可推出 $\operatorname{Hess}\big(\operatorname{MVol}_{\Sigma,\omega,*}(z_1,\dots,z_{d-2},z,z)\big)$ 是不可约的，从而完成证明。□

6. Application: the Heron–Rota–Welsh conjecture

作为我们关于法复形混合体积的研究成果的一项应用，本节将展示如何利用定理 5.1 证明 Heron–Rota–Welsh 猜想。该猜想指出，任意拟阵的特征多项式系数都是对数凹的。拟阵与混合体积之间的桥梁是 Bergman 扇；本节将先简要回顾拟阵与 Bergman 扇的相关概念。

6.1. 拟阵与 Bergman 扇。

A **（无环）拟阵** $\mathsf{M} = (E, \mathcal{L})$ 由一个有限集合 E（称为**基集**）和一个子集族 $\mathcal{L} \subseteq 2^E$（称为**平坦**）组成，并满足以下三个条件：

(F1) $\emptyset \in \mathcal{L}$，(F2) 若 $F_1, F_2 \in \mathcal{L}$，则 $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{L}$；并且 (F3) 若 $F \in \mathcal{L}$，则 $E \setminus F$ 中的每个元素都恰好包含在一个平坦中，该平坦在严格包含 F 的平坦中是极小的。

我们不对拟阵作全面概述，而只简要介绍一些关键概念。若要了解更完整的内容，请参阅 Oxley 的著作 [Oxl11]。

集合 $S \subseteq E$的**闭包** 记为 cl(S)，是包含 S的最小平坦。若对于任意 $I_1 \subsetneq I_2 \subseteq I$，cl($I_1$) $\subsetneq$ cl(I_2)，则称集合$I \subseteq E$ 是**独立的** 。集合$S \subseteq E$的**秩** 记为 rk(S)，是 S的独立子集的最大大小；而**M 的秩** 记为 rk(M)，定义为 E的秩。虽然我们选择用平坦来刻画拟阵，但需要指出的是，拟阵也可以用其独立集或秩函数来刻画。

一个 **长度为 k 的平坦旗，在**M 中是如下形式的链

$$\mathcal{F} = (F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k) \quad \text{with} \quad F_1, \ldots, F_k \in \mathcal{L}.$$

根据拟阵公理可以验证，每个极大旗都包含秩为 0、.....、rk(M) 的各一个平坦。我们用 Δ_{M} 表示平坦旗的集合，它自然具有维数为 rk(M) $+1$ 的单纯复形结构。由于每个极大旗都包含 $\emptyset$ 和 E，我们通常将注意力限制在研究真平坦上。我们用记号 $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \setminus \{\emptyset, E\}$ 表示真平坦的集合，用 Δ^*_{M} 表示真平坦旗的集合；后者是一个维数为 rk(M) -1 的单纯复形。

给定一个拟阵 M，考虑以 $\{v_e \mid e \in E\}$ 为基的向量空间 $\mathbb{R}^E$。对于每个子集 $S \subseteq E$，定义

$$v_S = \sum_{e \in S} v_e \in \mathbb{R}^E.$$

令 $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^E/\mathbb{R}v_E$，并将 v_S 在商空间 $N_{\mathbb{R}}$ 中的像记为 u_S。对于每个旗 $\mathcal{F} =$(
$F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k$) $\in \Delta^*_{\mathsf{M}}$，定义一个多面锥

$$\sigma_{\mathcal{F}} = \mathbb{R}_{\geq 0}\{u_{F_1}, \ldots, u_{F_k}\} \subseteq N_{\mathbb{R}}.$$

M 的**Bergman 扇**记为 Σ_{M}，它是多面体扇

$$\Sigma_{\mathsf{M}} = \{\sigma_{\mathcal{F}} \mid \mathcal{F} \in \Delta^*_{\mathsf{M}}\}.$$

注意， Σ_{M} 是单纯的，是维数为 $d =$ rk(M) -1 的纯扇，并由向量 u_F 标记。

考虑一个对应于旗的锥 $\sigma_{\mathcal{F}} \in \Sigma_{\mathsf{M}}(d-1)$

$$\mathcal{F} = (F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{k-1} \subsetneq F_{k+1} \subsetneq \cdots \subsetneq F_d) \quad \text{with} \quad \operatorname{rk}(F_i) = i.$$

包含 $\sigma_{\mathcal{F}}$ 的 d 锥由满足 $F_{k-1} \subsetneq F \subsetneq F_{k+1}$ 的平坦 F 编号。若这样的平坦有 ℓ 个，则 (F3) 意味着

$$\sum_{\substack{F \in \mathcal{L} \\ F_{k-1} \subsetneq F \subsetneq F_{k+1}}} u_F = (\ell - 1)u_{F_{k-1}} + u_{F_{k+1}}.$$

由于右侧位于 $N_{\sigma_{\mathcal{F}},\,\mathbb{R}}$ 中，这一观察意味着 Σ_{M} 是平衡的（权重全为 1 的热带对象）。

为了验证 Bergman 扇是亚历山德罗夫–芬切尔的，我们需要深入理解 Bergman 扇的星扇。考虑一个与平坦 $\mathcal{F}=(F_1\subsetneq\cdots\subsetneq F_k)$ 相关联的锥 $\sigma_{\mathcal{F}}$。令$F_0=\emptyset$且 $F_{k+1}=E$，并且对每个 $j=0,\ \ldots,\ k$，考虑拟阵子式 $\mathsf{M}[F_j,F_{j+1}]$。它是基集为 $F_{j+1}\setminus F_j$ 的拟阵，其平坦具有如下形式： $F\setminus F_j$，其中 F 是 M 的一个平坦且满足 $F_j\subseteq F\subseteq F_{j+1}$。注意，星扇 $\Sigma^{\sigma_{\mathcal{F}}}{}_{\mathsf{M}}$ 位于商空间中

$$N_{\mathbb{R}}^{\sigma_{\mathcal{F}}}=\frac{N_{\mathbb{R}}}{\mathbb{R}\{u_{F_1},\ldots,u_{F_k}\}}=\frac{\mathbb{R}^E}{\mathbb{R}\{v_{F_1},\ldots,v_{F_{k+1}}\}}=\bigoplus_{j=0}^{k}\frac{\mathbb{R}^{F_{k+1}\setminus F_k}}{\mathbb{R}v_{F_{k+1}\setminus F_k}},$$

并且容易验证，这个自然的向量空间同构将 Σ_{M} 在 $\sigma_{\mathcal{F}}$ 处的星识别为相应拟阵子式的 Bergman 扇的乘积:

$$\Sigma_{\mathsf{M}}^{\sigma_{\mathcal{F}}}=\prod_{j=0}^{k}\Sigma_{\mathsf{M}[F_j,F_{j+1}]}. \tag{6.1}$$

6.2. **Bergman 扇是亚历山德罗夫–芬切尔的**。现在我们可以运用定理 5.1，证明拟阵的 Bergman 扇是亚历山德罗夫–芬切尔的。

定理6.2。 设M是秩为 $d+1$的拟阵，且 $\Sigma_{\mathsf{M}}\subseteq N_{\mathbb{R}}$是其相关的 ***Bergman*** 扇。若 $*\in\mathrm{Inn}(N_{\mathbb{R}})$ 是任意一个内积，并且$\mathrm{Cub}(\Sigma_{\mathsf{M}},*)\neq\emptyset$，则$(\Sigma_{\mathsf{M}},*)$ 是亚历山德罗夫–芬切尔。

注6.3。 我们假设权函数 ω 等于 1，因为如上一小节所述， Σ_{M} 是平衡的。因此，本节的记号中省略 ω 。

为了证明定理6.2，我们验证定理 5.1 的两个条件。我们通过以下三个引理完成这一点。第一个引理验证 Bergman 扇满足定理6.2的条件 (i)（实际上是其略微加强的形式）。

Lem引理6.4。 $\Sigma^{\sigma_{\mathcal{F}}}{}_{\mathsf{M}}\setminus\{0\}$ 对于任意满足 $k\leq d-2$的锥 $\sigma_{\mathcal{F}}\in\Sigma_{\mathsf{M}}(k)$ 都是连通的。

证明。 我们首先说明，对于秩至少为 3 的任意拟阵， $\Sigma_{\mathsf{M}}\setminus\{0\}$ 都是连通的。只需证明，对于与平坦 F、 $F'\in\mathcal{L}^*$相关联的任意两条射线 ρ_F、 $\rho_{F'}\in\Sigma_{\mathsf{M}}(1)$，存在序列 ρ_1、……、 $\rho_\ell\in\Sigma_{\mathsf{M}}(1)$ 和 τ_1、……、 $\tau_{\ell+1}\in\Sigma_{\mathsf{M}}(2)$，使得

$$\rho_F\prec\tau_1\succ\rho_1\prec\cdots\succ\rho_\ell\prec\tau_{\ell+1}\succ\rho_{F'}.$$

若 $F\cap F'=G\neq\emptyset$，则由 (F2) 可得 $G\in\mathcal{L}^*$，且以下就是这样一个序列

$$\rho_F\prec\tau_{G\subsetneq F}\succ\rho_G\prec\tau_{G\subsetneq F'}\succ\rho_{F'}.$$

另一方面，若 $F\cap F'=\emptyset$，选取秩一平坦 $G\subseteq F$和 $G'\subseteq F'$。根据 (F3)，恰有一个秩二平坦 H 包含 G 和 G'，因此我们可以构造一个序列

$$(\rho_F\prec\tau_{G\subsetneq F}\succ)\rho_G\prec\tau_{G\subsetneq H}\succ\rho_H\prec\tau_{G'\subsetneq H}\succ\rho_{G'}(\prec\tau_{G'\subsetneq F'}\succ\rho_{F'}),$$

其中，若 $G = F$ 或 $G' = F'$，则应省略括号中的部分。

现在考虑任意星扇 $\Sigma^{\sigma_{\mathcal{F}}}{}_{\mathsf{M}}$，其中 $\mathcal{F} = (F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k)$，且 $k \leq d-2$。注意，这样的星扇维数至少为二，并且我们可以将其写成拟阵子式上的 Bergman 扇的乘积

$$\Sigma_{\mathsf{M}}^{\sigma_{\mathcal{F}}} = \prod_{j=0}^{k} \Sigma_{\mathsf{M}[F_j, F_{j+1}]}.$$

考虑两条射线 $\rho, \rho' \in \Sigma^{\sigma_{\mathcal{F}}}{}_{\mathsf{M}}$ (1)。如果这两条射线恰好来自乘积中的不同因子，那么我们可以通过以下序列将它们连接起来

$$\rho \prec \rho \times \rho' \succ \rho'.$$

另一方面，如果它们位于同一个因子中，则需要考虑两种情况。如果这两条射线所在因子的拟阵子式的秩至少为 3，那么可以通过上述论证将这两条射线连接起来。另一方面，如果该拟阵子式的秩为 2，那么另一个拟阵子式的秩必定至少为 2。任取第二个拟阵子式的 Bergman 扇中的一条射线 ρ''，我们便可以通过以下序列连接 ρ 和 ρ'

$$\rho \prec \rho \times \rho'' \succ \rho'' \prec \rho' \times \rho'' \succ \rho'. \qquad \square$$

为了验证定理 5.1 的条件 (ii)，需要考虑两种情况，具体取决于所讨论的二维星扇本身是否为 Bergman 扇，或者是否是两个一维Bergman扇的乘积。在这两种情况下，为了证明二次型 $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 的海森矩阵恰有一个特征值，只需（根据 Sylvester惯性定律）找到一个可逆变量变换 $y_1(x) \ldots, y_n(x)$，使得

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i(x)^2$$

恰有一个正的 a_i。接下来，我们在以下两个引理中分别考虑这两种情况。

引理 6.5。 如果 M 是一个秩为三的拟阵，那么 $\deg^{\Sigma_{\mathsf{M}}}(D(z)^2)$ 恰有一个正特征值。

证明。 对于平坦 $F \in \mathcal{L}^*$，我们使用简写 $X_F = X_{\rho_F}$ 和 $z_F = z_{\rho_F}$。为了计算 $\deg^{\Sigma_{\mathsf{M}}}(D(z)^2)$，我们必须计算任意两个平坦 $F, G \in \mathcal{L}^*$ 的 $\deg^{\Sigma_{\mathsf{M}}}(X_F X_G)$。如果 $F \subsetneq G$，则根据度函数的定义，度为一；如果 F 和 G 不可比，则度为零。因此，剩下的工作是计算平方项的度。利用 $A^\bullet(\Sigma_{\mathsf{M}})$的定义和平坦公理，读者可以验证：当 $\operatorname{rk}(F) = 1$ 时，$\deg^{\Sigma_{\mathsf{M}}}(X_F^2) = 1 - |\{G \in \mathcal{L}^* \mid F \subsetneq G\}|$；当 $\operatorname{rk}(G) = 2$ 时，$\deg^{\Sigma_{\mathsf{M}}}(X_G^2) = -1$。它

因此得到

$$\deg_{\Sigma_{\mathsf{M}}}(D(z)^2) = 2\sum_{\substack{F,G\in\mathcal{L}^*\\ F\subsetneq G}} z_F z_G + \sum_{\substack{F\in\mathcal{L}_*\\ \mathrm{rk}(F)=1}} z_F^2 - \sum_{\substack{F,G\in\mathcal{L}^*\\ F\subsetneq G}} z_F^2 - \sum_{\substack{G\in\mathcal{L}_*\\ \mathrm{rk}(G)=2}} z_G^2.$$

通过巧妙地重新组织各项，我们可以将其改写为

$$\deg_{\Sigma_{\mathsf{M}}}(D(z)^2) = \Big(\sum_{\substack{F\in\mathcal{L}^*\\ \mathrm{rk}(F)=1}} z_F\Big)^2 - \sum_{\substack{G\in\mathcal{L}^*\\ \mathrm{rk}(G)=2}} \Big(z_G - \sum_{\substack{F\in\mathcal{L}^*\\ F\subsetneq G}} z_F\Big)^2,$$

其中，证明这两个公式等价时唯一用到的关键拟阵性质是：任意两个不同的秩一平坦都包含在唯一一个秩二平坦中。Sylvester惯性定律表明，这个二次型的海森矩阵恰有一个正特征值。□

引理 6.6. 若M 和M′ 是秩二拟阵，则$\deg^{\Sigma_{\mathsf{M}}\times\Sigma_{\mathsf{M}'}}(D(z)^2)$ 的海森矩阵恰有一个正特征值。

证明。 根据 $A^\bullet(\Sigma_{\mathsf{M}} \times \Sigma_{\mathsf{M}'})$的定义，读者可以验证

$$\deg_{\Sigma_{\mathsf{M}}\times\Sigma_{\mathsf{M}'}}(X_\rho X_\eta) = \begin{cases} 0 & \rho,\eta \in \Sigma_{\mathsf{M}}(1) \text{ or } \rho,\eta \in \Sigma_{\mathsf{M}'}(1), \\ 1 & \rho \in \Sigma_{\mathsf{M}}(1) \text{ and } \eta \in \Sigma_{\mathsf{M}'}(1). \end{cases}$$

因此,

$$\deg_{\Sigma_{\mathsf{M}}\times\Sigma_{\mathsf{M}'}}(D(z)^2) = \sum_{\rho\in\Sigma_{\mathsf{M}}(1),\, \eta\in\Sigma_{\mathsf{M}'}(1)} 2z_\rho z_\eta,$$

可改写为

$$\deg_{\Sigma_{\mathsf{M}}\times\Sigma_{\mathsf{M}'}}(D(z)^2) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{\rho\in\Sigma_{\mathsf{M}}(1)} z_\rho + \sum_{\eta\in\Sigma_{\mathsf{M}'}(1)} z_\rho\Big)^2 - \frac{1}{2}\Big(\sum_{\rho\in\Sigma_{\mathsf{M}}(1)} z_\rho - \sum_{\eta\in\Sigma_{\mathsf{M}'}(1)} z_\rho\Big)^2.$$

Sylvester惯性定律表明，该二次型的海森矩阵恰有一个正特征值。□

现在，我们已经具备证明定理6.2所需的全部要素。

定理*6.2*的证明。 我们证明伯格曼扇满足定理 5.1 的两个条件。伯格曼扇满足条件 (i)，这正是引理6.4的内容。为证明条件 (ii)，我们首先注意到，由于伯格曼扇是平衡的，其星扇也都是平衡的，因此定理 2.2 表明，条件 (ii) 中的体积多项式与 $*$ 无关，且等于

$$\deg_{\Sigma_{\mathsf{M}}^{\sigma_{\mathcal{F}}}}(D(z)^2).$$

根据式 (6.1) 中给出的星扇乘积分解， $\Sigma^{\sigma_{\mathcal{F}}}{}_{\mathsf{M}}$ 要么是二维Bergman扇，要么是两个一维Bergman扇的乘积；在前一种情况下，

体积多项式的海森矩阵根据引理 6.5 恰有一个正特征值；在后一种情况下，则根据引理 6.6 得出这一结论。□

6.3. **重新审视 Heron–Rota–Welsh 猜想**。拟阵**特征多项式**的拟阵 $= (E, \mathcal{L})$ 可定义为

$$\chi_{\mathsf{M}}(\lambda) = \sum_{S \subseteq E} (-1)^{|S|} \lambda^{\mathrm{rk}(\mathsf{M}) - \mathrm{rk}(S)}.$$

可以验证，对于任何正秩拟阵， $\chi_{\mathsf{M}}(\lambda)$ 在 $\lambda = 1$ 处有一个根，而**约化特征多项式**定义为

$$\overline{\chi}_{\mathsf{M}}(\lambda) = \frac{\chi_{\mathsf{M}}(\lambda)}{\lambda - 1}.$$

我们用 $\mu^a(\mathsf{M})$ 和 $\mu^a(\mathsf{M})$ 表示这些多项式的（无符号）系数：

$$\chi_{\mathsf{M}}(\lambda) = \sum_{a=0}^{\mathrm{rk}(\mathsf{M})} (-1)^a \mu^a(\mathsf{M}) \lambda^{\mathrm{rk}(\mathsf{M}) - a} \quad \text{and} \quad \overline{\chi}_{\mathsf{M}}(\lambda) = \sum_{a=0}^{\mathrm{rk}(\mathsf{M})-1} (-1)^a \overline{\mu}^a(\mathsf{M}) \lambda^{\mathrm{rk}(\mathsf{M}) - 1 - a}.$$

Heron–Rota–Welsh 猜想由 [Rot71, Her72, Wel76]，提出，断言非负整数序列 $\mu^0(\mathsf{M}) \ldots, \mu^{\mathrm{rk}(\mathsf{M})}(\mathsf{M})$ 是单峰且对数凹的：

$$0 \leq \mu^0(\mathsf{M}) \leq \cdots \leq \mu^k(\mathsf{M}) \geq \cdots \geq \mu^{\mathrm{rk}(\mathsf{M})}(\mathsf{M}) \geq 0 \quad \text{for some} \quad k \in \{0, \ldots, \mathrm{rk}(\mathsf{M})\}$$

and

$$\mu^k(\mathsf{M})^2 \geq \mu^{k-1}(\mathsf{M}) \mu^{k+1}(\mathsf{M}) \quad \text{for every} \quad k \in \{1, \ldots, \mathrm{rk}(\mathsf{M}) - 1\}.$$

Heron–Rota–Welsh 猜想最初由 Adiprasito、Huh 和 Katz [AHK18] 证明。本文旨在说明，这一结果也可由本文中的进展推得。

容易验证，若约化特征多项式的系数具有相应的性质，则特征多项式的系数也具有单峰性和对数凹性。因此，将特征多项式与本文内容联系起来的是 Huh 和 Katz [HK12, 命题 5.2]（另见 [AHK18, 命题 9.5] 和 [DR22, 命题 3.11]），该结果断言

$$\overline{\mu}^a(\mathsf{M}) = \deg_{\Sigma_{\mathsf{M}}}(\alpha^{d-a} \beta^a)$$

其中 $\mathrm{rk}(\mathsf{M}) = d + 1$ 和 $\alpha, \beta \in A^1(\Sigma_{\mathsf{M}})$ 的定义如下

$$\alpha = \sum_{e_0 \in F} X_F \quad \text{and} \quad \beta = \sum_{e_0 \notin F} X_F$$

对某个 $e_0 \in E$ （这些 Chow 类与 e_0 的选择无关）).

任取 $e_0 \in E$，并令 $* \in \mathrm{Inn}(N_{\mathbb{R}})$ 表示具有标准正交基 $\{u_e \mid e \neq e_0\} \subseteq N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^E/\mathbb{R}u_E$ 的内积。对于两个平坦 F_1，$F_2 \in \mathcal{L}^*$，我们计算

$$u_{F_1} * u_{F_2} = \begin{cases} |F_1 \cap F_2| & e_0 \notin F_1 \text{ and } e_0 \notin F_2, \\ -|F_1 \cap F_2^c| & e_0 \notin F_1 \text{ and } e_0 \in F_2, \\ |F_1^c \cap F_2^c| & e_0 \in F_1 \text{ and } e_0 \in F_2. \end{cases}$$

定义 $z^\alpha, z^\beta \in \mathbb{R}^{\Sigma_{\mathsf{M}}(1)} = \mathbb{R}^{\mathcal{L}^*}$ 如下：

$$z_F^\alpha = \begin{cases} 1 & e_0 \in F, \\ 0 & e_0 \notin F, \end{cases} \quad \text{and} \quad z_F^\beta = \begin{cases} 1 & e_0 \notin F, \\ 0 & e_0 \in F, \end{cases}$$

使得 $D(z^\alpha) = \alpha$ 且 $D(z^\beta) = \beta$ 属于 $A^1(\Sigma_{\mathsf{M}})$。下面的引理使我们能够将特征多项式与法复形的混合体积联系起来。

引理 6.7. $z^\alpha, z^\beta \in \mathrm{Cub}(\overline{\Sigma_{\mathsf{M}}}, *)$。

证明。我们必须证明，对于每个锥 $\sigma \in \Sigma_{\mathsf{M}}$，都有 $w_{\sigma,*}(z^\alpha)w_{\sigma,*}(z^\beta) \in \sigma$。考虑与锥 $\sigma_{\mathcal{F}} \in \Sigma_{\mathsf{M}}$ 对应的旗 $\mathcal{F} = (F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k)$。只需证明

$$w_{\sigma_{\mathcal{F}},*}(z^\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{|F_k^c|} u_{F_k} & e_0 \in F_k \\ 0 & e_0 \notin F_k, \end{cases} \tag{6.8}$$

and

$$w_{\sigma_{\mathcal{F}},*}(z^\beta) = \begin{cases} \frac{1}{|F_1|} u_{F_1} & e_0 \notin F_1 \\ 0 & e_0 \in F_1, \end{cases} \tag{6.9}$$

我们验证 (6.8)；(6.9) 的验证类似。

为验证 (6.8)，首先假设 $e_0 \in F_k$。那么对于任意 $j = 1, \ldots, k$，根据 $*$ 的定义可得

$$u_{F_k} * u_{F_j} = \begin{cases} |F_k^c| & e_0 \in F_j, \\ 0 & e_0 \notin F_j. \end{cases}$$

利用这一点，我们验证 $\frac{1}{|F_k^c|} u_{F_k}$ 满足 $w_{\sigma_{\mathcal{F}},*}(z^\alpha)$ 的定义方程：

$$\frac{1}{|F_k^c|} u_{F_k} * u_{F_j} = z_{F_j}^\alpha \quad \text{for all} \quad j = 1, \ldots, k.$$

现在假设 $e_0 \notin F_k$。那么对于任意 $j = 1, \ldots, k$，$e_0 \notin F_j$，因此 $z_{F_j}^\alpha = 0$。于是，$w_{\sigma_{\mathcal{F}},*}(z^\alpha)$ 的定义方程变为

$$w_{\sigma_{\mathcal{F}},*}(z^\alpha) * u_{F_j} = 0 \quad \text{for all} \quad j = 1, \ldots, k,$$

这表明 $w_{\sigma_{\mathcal{F}},*}(z^\alpha) = 0$。 □

由定理 3.6 可知，约化特征多项式的系数具有体积理论解释：

$$\overline{\mu}^a(\mathsf{M}) = \mathrm{MVol}_{\Sigma_{\mathsf{M}},*}(\underbrace{z^\alpha,\dots,z^\alpha}_{d-a},\underbrace{z^\beta,\dots,z^\beta}_{a}).$$

根据 [NR21，命题 7.4]，，我们知道 $\mathsf{Cub}(\Sigma_{\mathsf{M}},*) \neq \emptyset$；又由于立方锥是伪立方锥的内部，我们可以用$z_t^\alpha, z_t^\beta \in \mathsf{Cub}(\Sigma_{\mathsf{M}},*)$ 来逼近 $z^\alpha, z^\beta \in \mathsf{Cub}(\Sigma_{\mathsf{M}},*)$，使得

$$\lim_{t\to 0} z_t^\alpha = z^\alpha \quad \text{and} \quad \lim_{t\to 0} z_t^\beta = z^\beta.$$

定义

$$\overline{\mu}_t^a(\mathsf{M}) = \mathrm{MVol}_{\Sigma_{\mathsf{M}},*}(\underbrace{z_t^\alpha,\dots,z_t^\alpha}_{d-a},\underbrace{z_t^\beta,\dots,z_t^\beta}_{a}).$$

根据定理6.2，我们知道 $(\Sigma_{\mathsf{M}},*)$ 是亚历山德罗夫–芬切尔的，并且将 AF 不等式应用于混合体积 $\mu_t^a(\mathsf{M})$，可知序列 $\mu_t^0(\mathsf{M})\dots,\mu_t^d(\mathsf{M})$ 是对数凹的。由于立方值的混合体积为正（命题 3.5），且所有正值的对数凹序列都是单峰的，我们看到序列 $\mu_t^0(\mathsf{M})\dots,\mu_t^d(\mathsf{M})$ 也是单峰的。由于单峰性和对数凹性在取极限时均得以保留，我们得出

$$\overline{\mu}^0(\mathsf{M}),\dots,\overline{\mu}^d(\mathsf{M})$$

是单峰且对数凹的，从而验证了 Heron–Rota–Welsh 猜想。

References

[ADH20] F. Ardila、G. Denham 和 J. Huh。拟阵的拉格朗日几何。预印本：arXiv:2004.13116，2020。[AGV21] N. Anari、S. O. Gharan 和 C. Vinzant。对数凹多项式 I：熵与一种用于计数拟阵基的确定性近似算法。《杜克数学杂志》，170(16):3459–3504，2021。[AHK18] K. Adiprasito、J. Huh 和 E. Katz。组合几何的霍奇理论。《数学年刊》*(2)*，188(2):381–452，2018。[ALGV18] N. Anari、K. Liu、S. O. Gharan 和 C. Vinzant。对数凹多项式 III：拟阵独立集的 Mason 超对数凹猜想。预印本：arXiv:1811.01600，2018。[ALGV19] N. Anari、K. Liu、S. O. Gharan 和 C. Vinzant。对数凹多项式 II：高维游走与一种用于计数拟阵基的完全多项式随机近似方案。在*STOC'19*——第 *51* 届 *ACM SIGACT* 计算理论研讨会论文集，第 1–12 页。ACM，纽约，2019。[AP20] O. Amini 和 M. Piquerez。热带簇的霍奇理论。预印本：arXiv:2007.07826，2020。[AP21] O. Amini 和 M. Piquerez。热带扇的同调。预印本：arXiv:2105.01504，2021。[BES20] S. Backman、C. Eur 和 C. Simpson。拟阵周环的单纯生成。S'《*Lothar* 组合学通讯》，84B：第 52 号文章，11 页，2020。

[BH17] F. Babaee 和 J. Huh。正流的广义霍奇猜想的热带方法。《杜克数学杂志》，166(14):2749–2813，2017。[BH20] P. Br¨and´en 和 J. Huh。洛伦兹多项式。《数学年刊》(2)，192(3):821–891，2020。[BHM+20] T. Braden、J. Huh、J. P. Matherne、N. Proudfoot 和 B. Wang。组合几何的奇异霍奇理论。预印本：arXiv:2010.06088，2020。[BHM+22] T. Braden、J. Huh、J. P. Matherne、N. Proudfoot 和 B. Wang。拟阵周环的半小分解。《数学进展》，409（A 部分）：第 108646 号论文，49 页，2022。[BL21] P. Br¨and´en 和 J. Leake。锥上的洛伦兹型多项式与 Heron-Rota-Welsh 猜想。预印本：arXiv:2110.08647，2021。[CEKMS19] D. Cordero-Erausquin、B. Klartag、Q. Merigot 和 F. Santambrogio。亚历山德罗夫-芬切尔不等式的又一个证明。巴黎科学院数学报告，357(8):676–680，2019。[CP21] S. H. Chan 和 I. Pak。对数凹偏序集不等式。预印本：arXiv:2110.10740，2021。[DR22] J. Dastidar 和 D. Ross。拟阵ψ类。《数学精选》(新系列)，28(3)：第 55 号论文，38 页，2022。[Her72] A. P. Heron。拟阵多项式。载于《组合学》（组合数学会议论文集，数学研究所，牛津，1972），第 164–202 页，1972。[HK12] J. Huh 和 E. Katz。拟阵特征多项式的对数凹性与 Bergman 扇。《数学年刊》，354(3):1103–1116，2012。[Min03] H. Minkowski。体积与表面积。《数学年刊》，57(4):447–495，1903。[NR21] R. Nathanson 和 D. Ross。热带扇与法复形。预印本：arXiv:2110.08647，2021。[Oxl11] J. Oxley。《拟阵理论》，牛津数学研究生教材第 21 卷。牛津大学出版社，牛津，第二版，2011。[Rot71] G.-C. Rota。组合理论：旧与新。载于《国际数学家大会论文集》（尼斯，1970），第 3 卷，第 229–233 页，1971。[Sch14] R. Schneider。《凸体：布伦-闵可夫斯基理论》，数学及其应用百科全书第 151 卷。剑桥大学出版社，剑桥，增订版，2014。[Wel76] D. J. A. Welsh。《拟阵理论》。学术出版社 [Harcourt Brace Jovanovich 出版社],伦敦-纽约，1976。L. M. S. 专著，第 8 号。

Department of Mathematics, University of Washington
电子邮箱地址：lnowak@uw.edu

Department of Mathematics, San Francisco State University
电子邮箱地址：pomelveny@mail.sfsu.edu

Department of Mathematics, San Francisco State University
电子邮箱地址：rossd@sfsu.edu