arXiv:2301.05280v1 [math.GM] 11 Jan 2023

局部共形凯勒流形中的逐点双斜子流形作为扭曲乘积浸入*

Umar Mohd Khan &Viqar Azam Khan阿里格尔穆斯林大学数学系，阿里格尔-202002，印度 电子邮箱：umar.007.morpheus@gmail.com, viqarster@gmail.com

摘要

我们研究局部共形凯勒流形中的逐点双斜子流形作为扭曲乘积的浸入。特别地，我们建立了局部共形凯勒流形中的逐点双斜子流形可浸入为扭曲乘积的刻画定理，并证明其必要条件是李向量场 B 与第二因子正交，且扭曲函数λ 满足 $\text{grad}(\ln\ \lambda) = \frac{1}{2}B^T$，其中 B^T表示李向量场的切向分量。我们还将关于第二基本形式平方长度的Chen不等式推广到我们的情形，并研究相应的等号情形。

1 引言

Vaisman 将局部共形凯勒（lcK）流形引入为凯勒流形的一种推广 [33, 34, 35, 36, 21, 37, 38]。局部共形凯勒流形是厄米流形，可表示为若干凯勒流形的并，且局部共形凯勒度量与这些凯勒度量局部共形。局部共形凯勒流形的特征是存在一个全局定义的闭1-形式 ω，称为李形式，使得局部共形凯勒度量的基本2-形式满足 $d\Omega\ = \Omega\ \wedge \omega$。李形式及其对应的李向量场在局部共形凯勒流形的几何中发挥着重要作用。

*关键词与短语：扭曲乘积子流形；局部共形 Kähler 流形（lcK）；逐点双斜子流形**2020年美国数学学会学科分类：**53C15, 53C40, 53C42, 53B25

从外在几何的角度来看，在近似厄米流形的研究中，全纯子流形和全实子流形是重要的研究对象。Bejancu[5, 6]将 CR子流形定义为全纯子流形和全实子流形的一种推广；此后 Chen 对其进行了进一步研究 [11, 12]。后来，Chen [13, 14] 通过引入斜子流形的概念，扩展了全纯子流形和全实子流形这一类别。随后，同一作者又将这一概念推广至逐点斜子流形 [20] 。之后，许多作者在各种环境流形中，将 CR子流形和斜子流形的研究推广至半斜子流形、半斜子流形（亦称伪斜子流形）以及双斜子流形。

Papaghiuc[28]研究了近似厄米流形中的半斜子流形。Cabrerizo 等人 [9, 10]研究了萨斯基安流形中的半斜子流形。文献 [2, 24, 29]研究了近似乘积黎曼流形中的斜子流形和半斜子流形。文献[4], 还研究了近似 Kenmotsu 流形中的半斜子流形，文献 [3] 研究了 LCS流形中的半斜子流形，文献 [31]研究了局部乘积黎曼流形中的半斜子流形。

Bishop 和 O'Neill [7] 在研究具有负截面曲率的流形实例时，通过对乘积流形上的乘积度量进行齐次扭曲，定义了扭曲乘积流形。扭曲乘积是黎曼乘积的一种自然推广，并已在相对论中得到广泛应用。最著名的例子是描述特定假设下球形质量外部引力场的施瓦西度量，以及 Robertsen Walker度量（FLRW度量），它们都是扭曲乘积度量。旋转曲面是扭曲乘积流形的一个自然实例。Hiepko [22] 刻画了一个黎曼流形何时可表示为其子流形的扭曲乘积，从而推广了乘积流形的 de Rham分解定理。后来，Nölker [27] 和 Chen [15, 16, 19]开创了扭曲乘积流形外蕴几何的研究。

Chen [17, 18] 开创了对浸入凯勒流形、呈扭曲乘积形式的CR子流形的研究。他证明，对于凯勒流形中的任意全纯子流形 M_T 和全实子流形$M_\perp$ ，凯勒流形中任何形如 $M_T \times_\lambda M_\perp$ 的扭曲乘积都满足不等式

$$||h||^2 \geq 2n_2||\mathrm{grad}(\ln \lambda)||^2 \tag{1.1}$$

其中， λ 是扭曲函数， n_2 是 $M_\perp$的维数， $||h||^2$ 是第二基本形式的平方范数，而grad(ln λ)是ln λ的梯度。Bonanzinga和Matsumoto [8, 26, 25] 继续在局部共形凯勒流形的背景下开展研究。Nargis Ja- mal等人 [23] 研究了局部共形凯勒流形中的一般扭曲乘积。文献 [1, 30, 32]进一步研究了局部共形凯勒流形中的半斜子流形和半斜子流形。文献 [23, 1]研究了浸入局部共形凯勒流形、呈扭曲乘积形式的一般子流形、CR子流形和逐点半斜子流形。

我们继续研究局部共形凯勒流形中的点态双斜子流形。特别地，我们给出了刻画定理，并建立了 Chen不等式

该不等式涉及浸入局部共形凯勒流形中的扭曲乘积形式的点态双斜子流形的第二基本形式的平方范数。

2 预备知识

定义 2.1. 若存在 M^{2n} 的一个开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$，以及一族 C^∞ 函数 $f_i\colon U_i \to \mathbb{R}$，使得对于每个 $i \in I$，度量 g 在 M^{2n}, J, g 上满足以下条件，则厄米流形 M^{2n}, J, g 称为局部共形凯勒（lcK）流形：

$$g_i = e^{-f_i} g|_{U_i} \tag{2.1}$$

在 U_i 上是凯勒度量。

给定一个 lcK 流形 (M^{2n}, J, g)，设 U, V 表示 TM^{2n} 的光滑截面，则局部1-形式 df_i 拼接成一个全局定义的闭1-形式 ω，称为李形式，它满足以下方程：

$$d\Omega = \Omega \wedge \omega \tag{2.2}$$

其中 $\Omega(U, V) = g(JU, V)$ 是与 (J, g) 相关联的基本2-形式。

将相对于 g 与 ω 等价的向量场 B 记为，即 $\omega(U) = g(B, U)$。B 称为李向量场。

令 $\overline{\nabla}$ 表示（M^{2n}, g的 Levi-奇维塔联络），并令 ∇_i 表示对所有 $i \in I$，局部度量 g_i 的 Levi-奇维塔联络。于是，∇_i 拼接成定义在 M^{2n} 上的全局无挠线性联络 ∇，其定义为

$$\widetilde{\nabla}_U V = \overline{\nabla}_U V - \frac{1}{2}\{\omega(U)V + \omega(V)U - g(U, V)B\} \tag{2.3}$$

其中 $U, V \in TM^{2n}$ 且满足

$$\widetilde{\nabla} g = \omega \otimes g \tag{2.4}$$

∇ 称为局部共形凯勒流形（M^{2n}, J, g）的*Weyl* 联络。由于 g_i 是凯勒度量，近复结构 J 关于 Weyl 联络是平行的，即 $\nabla J = 0$。这给出

$$\overline{\nabla}_U JV = J\overline{\nabla}_U V + \frac{1}{2}\{\Theta(V)U - \omega(V)JU - g(U, V)A + \Omega(U, V)B\} \tag{2.5}$$

现在，由于 ω 是 M^{2n}上的闭形式，我们有

$$(\overline{\nabla}_U \omega)V = (\overline{\nabla}_V \omega)U \tag{2.6}$$

设 M^m 是等距浸入局部共形凯勒流形 $(\widetilde{M}^{2n},\ J,\ g)$ 的黎曼流形。设 $U,\ V,\ W$ 表示 TM^m 的光滑截面，而 $\xi,\ \eta$ 表示 $T^\perp M^m$ 的光滑截面。

相对于 $\widetilde{M}^{2n}$ 的黎曼联络，Gauss 公式和魏因加滕公式为

$$\overline{\nabla}_U V = \nabla_U V + h(U,V) \tag{2.7}$$
$$\overline{\nabla}_U \xi = -\mathfrak{A}_\xi U + \nabla^\perp_U \xi \tag{2.8}$$

其中，h 是第二基本形式，$\mathfrak{A}$ 是形算子，而 $\nabla,\ \nabla^\perp$ 分别是关于 ∇、定义在 M^m 的切丛和法丛上的诱导联络。

关于 Weyl 联络的高斯公式和魏因加滕公式Winvalid $\widetilde{M}^{2n}$ 给出如下

$$\widetilde{\nabla}_U V = \hat{\nabla}_U V + \widetilde{h}(U,V) \tag{2.9}$$
$$\widetilde{\nabla}_U \xi = -\widetilde{\mathfrak{A}}_\xi U + \widetilde{\nabla}^\perp_U \xi \tag{2.10}$$

其中，$\widetilde{h}$ 是第二基本形式，$\widetilde{\mathfrak{A}}$ 是形算子，而$\hat{\nabla},\ \widetilde{\nabla}^\perp$ 分别是关于 ∇、定义在 M^m 上的切丛和法丛的诱导联络。

设 H 表示 h的迹，则 H 称为 M^m 在 $\widetilde{M}$（$\widetilde{M}^{2n},\ J,\ g$）中的平均曲率向量，且是 $T^\perp M^m$的光滑截面。若 M^m是（$\widetilde{M}^{2n},\ J,\ g$）中的全脐子流形，则称其为全脐子流形。若 M^m是 $\widetilde{M}$（$\widetilde{M}^{2n},\ J,\ g$）中的全测地子流形，则称其为全测地子流形。

令 $B^T,\ B^N$分别表示李向量场 B的切向分量和法向分量。由（2.3），可得以下关系式

$$\hat{\nabla}_U V = \nabla_U V - \frac{1}{2}\left\{\omega(U)V + \omega(V)U - g(U,V)B^T\right\} \tag{2.11}$$
$$\widetilde{h}(U,V) = h(U,V) + \frac{1}{2}g(U,V)B^N \tag{2.12}$$
$$\widetilde{\mathfrak{A}}_\xi U = \mathfrak{A}_\xi U + \frac{1}{2}\omega(\xi)U \tag{2.13}$$
$$\widetilde{\nabla}^\perp_U \xi = \nabla^\perp_U \xi - \frac{1}{2}\omega(U)\xi \tag{2.14}$$

现在定义

$$JU = PU + FU \qquad\qquad J\xi = t\xi + f\xi \tag{2.15}$$

其中，$PU,\ t\xi$和 $FU,\ f\xi$分别为切向部分和法向部分。于是，我们有

$$\begin{aligned} P^2 + tF &= -I & f^2 + Ft &= -I \\ FP + fF &= 0 & tf + Pt &= 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

定义相对于 M^{2n} 的 Levi-Civita $\widetilde{\ }$联络，对 P、 F、 t和 f的协变微分为

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_U P)V &= \nabla_U PV - P\nabla_U V\\ (\overline{\nabla}_U F)V &= \nabla^{\perp}_U FV - F\nabla_U V\\ (\overline{\nabla}_U t)\xi &= \nabla_u t\xi - t(\nabla^{\perp}_U \xi)\\ (\overline{\nabla}_U f)\xi &= \nabla^{\perp}_U f\xi - f(\nabla^{\perp}_U \xi)\end{aligned} \tag{2.17}$$

$\widetilde{\ }$于是，当 $\nabla J = 0$时，利用（2.11）、（2.12）、（2.13）、（2.14），可得

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_U P)V &= \mathfrak{A}_{FV}U + th(U,V) + \frac{1}{2}\left\{\Theta(V)U - \omega(V)PU + g(PU,V)B^T - g(U,V)A^T\right\}\\ (\overline{\nabla}_U F)V &= fh(U,V) - h(U,PV) + \frac{1}{2}\left\{g(PU,V)B^N - g(U,V)A^N - \omega(V)FU\right\}\\ (\overline{\nabla}_U t)\xi &= \mathfrak{A}_{f\xi}U - P\mathfrak{A}_{\xi}U + \frac{1}{2}\left\{g(FU,\xi)B^T - \omega(\xi)PU + \Theta(\xi)U\right\}\\ (\overline{\nabla}_U f)\xi &= -h(U,t\xi) - F\mathfrak{A}_{\xi}U + \frac{1}{2}\left\{g(FU,\xi)B^N - \omega(\xi)FU\right\}\end{aligned} \tag{2.18}$$

Bishop 和 O'Neill [7] 将扭曲乘积定义为

定义 2.2. 设 $(M_1^{n_1}, g_1)$ 和 $(M_2^{n_2}, g_2)$ 为黎曼流形，并设

$$\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1 \text{ and } \pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$$

为典范投影。设 $\lambda : M_1 \to (0,\infty)$ 是一个光滑函数。则扭曲乘积流形 (M, g) $= M_1 \times {}_\lambda M_2$ 定义为配备黎曼度量的流形 $M_1 \times M_2$

$$g = \pi_1^{\star} g_1 + \lambda^2 \pi_2^{\star} g_2 \tag{2.19}$$

扭曲乘积流形是两个黎曼流形通常乘积的一种推广。事实上，我们有以下刻画定理

定理 2.1 ([22])。 设 (M^m, g) 为一个配备正交、互补、可积分布 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$的连通黎曼流形。此外，设$\mathcal{D}_1$ 的叶为全测地的，且 $\mathcal{D}_2$ 的叶是 M^m中的外球面；这里，外球面指平均曲率向量在法丛中平行的全脐子流形。则(M^m, g) 局部上是一个扭曲乘积(M, g) $= M_1 \times {}_\lambda M_2$，其中 M_1 和 M_2 分别表示 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 的叶，且 $\lambda : M_1 \to (0,\infty)$ 是一个光滑函数，使得 $\boldsymbol{grad}(\ln \lambda)$ 是 M中 M_2 的平均曲率向量。

此外，如果(M^m, g) 是单连通且完备的，那么(M^m, g) 整体上是一个扭曲乘积。

对于 $(M_1^{n_1},\ g_1)$、$(M_2^{n_2},\ g_2)$ 和 $(M,\ g)$，分别以∇^1、 ∇^2 和 ∇表示其 Levi-奇维塔联络。给定任意光滑函数 $\lambda : M_1 \to \mathbb{R}$，令 grad($\lambda$) 表示 λ 的梯度向量场在 $(M,\ g)$上的提升。

定理 2.2 ([22])。 给定一个黎曼流形的扭曲乘积流形 $(M,\ g) = M_1 \times {}_\lambda M_2$，其因子为 $(M_1^{n_1},\ g_1)$和 $(M_2^{n_2},\ g_2)$，则对所有 $X,\ Y \in \mathcal{L}(M_1)$和 $Z,\ W \in \mathcal{L}(M_2)$,

$$\nabla_X Y = \nabla_X^1 Y \tag{2.20}$$
$$\nabla_X Z = \nabla_Z X = X(\ln\lambda)Z \tag{2.21}$$
$$\nabla_Z W = \nabla_Z^2 W - g(Z,W)grad(\ln\lambda) \tag{2.22}$$

由引理2.2 可知， $\mathcal{H} = -\mathrm{grad}(\ln\lambda)$ 是 M_2 在M中的平均曲率向量。

3 局部共形凯勒流形中的逐点双斜子流形

设 M^m是等距浸入局部共形凯勒流形$(\widetilde{M}^{2n},\ J,\ g)$的黎曼流形。$M^m$ 若存在两个正交互补分布 $\mathcal{D}^{\theta_1}$ 和 $\mathcal{D}^{\theta_2}$，使得 $\mathcal{D}^{\theta_1}$ 和 $\mathcal{D}^{\theta_2}$ 分别是逐点斜角为 $\theta_1,\ \theta_2 \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\theta_1 \neq \theta_2$的逐点斜子流形，即对每个光滑向量场$X \in \mathcal{D}^{\theta_1}$， $P^2X = -\cos^2\theta_1 X$成立，且对每个光滑向量场$Z \in \mathcal{D}^{\theta_2}$， $P^2Z = -\cos^2\theta_2 Z$成立，则称其为逐点双斜子流形。

逐点双斜子流形的切丛和法丛具有如下正交分解

$$TM^m = \mathcal{D}^{\theta_1} \oplus \mathcal{D}^{\theta_2} \qquad\qquad T^\perp M^m = F\mathcal{D}^{\theta_1} \oplus F\mathcal{D}^{\theta_2} + \mu \tag{3.1}$$

其中， μ是 $T^\perp M^m$中 $F\mathcal{D}^{\theta_1} \oplus F\mathcal{D}^{\theta_2}$的正交补分布，并且相对于 J是 $T^\perp M^m$的不变子丛。容易看出，对于 $i = 1,\ 2$,

$$\begin{aligned} P\mathcal{D}^{\theta_i} &= \mathcal{D}^{\theta_i} \qquad t(F\mathcal{D}^{\theta_i}) = \mathcal{D}^{\theta_i} \qquad t(\mu) = \{0\} \\ f(F\mathcal{D}^{\theta_i}) &= F\mathcal{D}^{\theta_i} \qquad f(\mu) = \mu \end{aligned} \tag{3.2}$$

设 M^m是等距浸入局部共形凯勒流形$(\widetilde{M}^{2n}, J, g)$中的逐点双斜流形，且分布 $\mathcal{D}^{\theta_1}, \mathcal{D}^{\theta_2}$均可积。分别以$M_{\theta_1}^{2n_1}$和 $M_{\theta_2}^{2n_2}$表示 $\mathcal{D}^{\theta_1}$和 $\mathcal{D}^{\theta_2}$的叶，其中 $2n_1 =$维数为$_{\mathbb{R}}\ \mathcal{D}^{\theta_1}$， $2n_2 =$维数为$_{\mathbb{R}}\ \mathcal{D}^{\theta_2}$。我们称 M^m 为

- 混合全测地逐点双斜子流形，如果 $h(\mathcal{D}^{\theta_1}, \mathcal{D}^{\theta_2}) = \{0\}$。
- 逐点双斜乘积子流形如果 M^m 可以局部表示为 $M_{\theta_1} \times M_{\theta_2}$。
- 点态双斜扭曲积子流形如果 M^m 可以局部表示为$M_{\theta_1} \times {}_\lambda M_{\theta_2}$ 对于某个光滑函数 λ：$M_{\theta_1} \to (0,\ \infty)$。

设 X, Y 是 $\mathcal{D}^{\theta_1}$ 中的光滑向量场， Z, W 是 $\mathcal{D}^{\theta_2}$ 中的光滑向量场。那么，我们有，

Theo $\widetilde{\quad}$**推论 3.1**。设 M^m 是局部共形凯勒流形 M^{2n} 的逐点双斜子流形 .

- 斜分布 $\mathcal{D}^{\theta_1}$ 可积，当且仅当

$$\begin{aligned} g(\mathfrak{A}_{FPX}Z-\mathfrak{A}_{FX}PZ,Y)-g(\mathfrak{A}_{FPY}Z-\mathfrak{A}_{FY}PZ,X) \\ =g(\nabla^{\perp}_{X}FY,FZ)-g(\nabla^{\perp}_{Y}FX,FZ) \end{aligned} \tag{3.3}$$

- t斜分布的叶 $\mathcal{D}^{\theta_1}$ 在 M^m 中全测地，当且仅当 f

$$\omega(\mathcal{D}^{\theta_2})=\{0\}\ and\ g(\mathfrak{A}_{FPX}Z-\mathfrak{A}_{FX}PZ,Y)+g(\nabla^{\perp}_{Y}FX,FZ)=0 \tag{3.4}$$

- 斜分布的叶 $\mathcal{D}^{\theta_1}$ 在 M^m 中全脐，当且仅当

$$\begin{aligned} g(\mathfrak{A}_{FPX}Z-\mathfrak{A}_{FX}PZ,Y)+g(\nabla^{\perp}_{Y}FX,FZ) \\ =\sin^2\theta_1\left(\frac{1}{2}\omega(Z)+g(\mathcal{H},Z)\right)g(X,Y) \end{aligned} \tag{3.5}$$

对于某个光滑向量场 $\mathcal{H}\in\mathcal{D}^{\theta_2}$。

证明。由（2.5）和（2.16），可得

$$\begin{aligned} g(\nabla_XY,Z)&=g(\overline{\nabla}_XPY+\overline{\nabla}_XFY-\frac{1}{2}g(X,Y)JB-\frac{1}{2}g(PX,Y)B,JZ) \\ &=-g(J\overline{\nabla}_XPY,Z)-g(\mathfrak{A}_{FY}X,PZ)+g(\nabla^{\perp}_{X}FY,FZ) \\ &\quad-\frac{1}{2}g(X,Y)g(B,Z)-\frac{1}{2}g(PX,Y)g(B,JZ) \\ &=-g(\overline{\nabla}_XJPY,Z)+\frac{1}{2}g(PX,PY)g(B,Z)-g(\mathfrak{A}_{FY}X,PZ) \\ &\quad-\frac{1}{2}g(X,Y)g(B,Z)+g(\nabla^{\perp}_{X}FY,FZ) \\ &=\cos^2\theta_1g(\nabla_XY,Z)+g(\mathfrak{A}_{FPY}X,Z)+\frac{1}{2}\sin^2\theta_1g(X,Y)g(B,Z) \\ &\quad-g(\mathfrak{A}_{FY}X,PZ)+g(\nabla^{\perp}_{X}FY,FZ) \end{aligned}$$

即我们有

$$\sin^2\theta_1\left(g(\nabla_XY,Z)+\frac{1}{2}g(X,Y)g(B,Z)\right)=g(\mathfrak{A}_{FPY}Z-\mathfrak{A}_{FY}PZ,X)+g(\nabla^{\perp}_{X}FY,FZ)$$

因此，结论得证。 □

同理，我们有

定理 3.2. 设 M^m 是局部共形凯勒流形 M^{2n} 的逐点双斜子流形。则

- 斜分布 $\mathcal{D}^{\theta_2}$ 可积，当且仅当

$$\begin{aligned} g(\mathfrak{A}_{FPZ}X - \mathfrak{A}_{FZ}PX, W) - g(\mathfrak{A}_{FPW}X - \mathfrak{A}_{FW}PX, Z) \\ = g(\nabla^{\perp}_{Z}FW, FX) - g(\nabla^{\perp}_{W}FZ, FX) \end{aligned} \tag{3.6}$$

- 斜分布的叶 $\mathcal{D}^{\theta_2}$ 在 M^m 中全测地，当且仅当

$$\omega(\mathcal{D}^{\theta_1}) = \{0\} \ and \ g(\mathfrak{A}_{FPZ}X - \mathfrak{A}_{FZ}PX, W) + g(\nabla^{\perp}_{W}FZ, FX) = 0 \tag{3.7}$$

- 斜分布的叶 $\mathcal{D}^{\theta_2}$ 在 M^m 中全脐，当且仅当

$$\begin{aligned} g(\mathfrak{A}_{FPZ}X - \mathfrak{A}_{FZ}PX, W) + g(\nabla^{\perp}_{W}FZ, FX) \\ = \sin^2\theta_2 \left(\frac{1}{2}\omega(X) + g(\mathcal{H}, X)\right) g(Z, W) \end{aligned} \tag{3.8}$$

对某个光滑向量场$\mathcal{H} \in \mathcal{D}^{\theta_1}$成立。

记号：设 $\mathcal{D}^{\theta_1}$ 和 $\mathcal{D}^{\theta_2}$ 是局部共形凯勒流形 M^{2n}上的点态双斜子流形$\widetilde{\ }$的斜分布，且两个分布均可积；分别以M_{θ_1} 和M_{θ_2} 表示分布 $\mathcal{D}^{\theta_1}$ 和 $\mathcal{D}^{\theta_2}$ 的叶。则 $\mathcal{D}^{\theta_1}(p,q) = T_{(p,q)}(M_{\theta_1} \times \{q\})$，且 $\mathcal{D}^{\theta_2}(p,q) = T_{(p,q)}(\{p\} \times M_{\theta_2})$。分别以 $\mathcal{L}(M_{\theta_1})$和$\mathcal{L}(M_{\theta_2})$表示从$M_{\theta_1}$ 和M_{θ_2}到 M的向量场提升集合。则$X \in \mathcal{L}(M_{\theta_1})$当且仅当对每个$p \in M_{\theta_1}$，$X|_{\{p\}\times M_{\theta_2}}$为常数。类似地，$Z \in \mathcal{L}(M_{\theta_2})$当且仅当对每个 $q \in M_{\theta_2}$，$Z|_{M_{\theta_1}\times\{q\}}$ 为常数。此外，若 $M_{\theta_1} \times M_{\theta_2} \to M_{\theta_1}$和 $M_{\theta_1} \times M_{\theta_2} \to M_{\theta_2}$ 分别是典范投影 $\pi_{\theta_1}: M_{\theta_1} \times M_{\theta_2} \to M_{\theta_1}$和 $\pi_{\theta_2}: M_{\theta_1} \times M_{\theta_2} \to M_{\theta_2}$，则有 $d\pi_{\theta_1}(\mathcal{L}(M_{\theta_1})) = TM_{\theta_1}$，以及$d\pi_{\theta_2}(\mathcal{L}(M_{\theta_2})) = TM_{\theta_2}$。显然，$\mathcal{D}^{\theta_1}$（分别为 $\mathcal{D}^{\theta_2}$）中的一般向量场未必属于 $\mathcal{L}(M_{\theta_1})$（分别为 $\mathcal{L}(M_{\theta_2})$）。

从这里起，我们用 X, Y 表示 $\mathcal{L}(M_{\theta_1})$ 中的光滑向量场，并用 Z, W 表示 $\mathcal{L}(M_{\theta_2})$ 中的光滑向量场

4 一些引理

我们给出以下引理，用于证明我们的主要结果。

引理 4.1。设点态双斜扭曲积子流形 $M = M_{\theta_1} \times {}_{\lambda}M_{\theta_2}\widetilde{\ }$位于局部共形凯勒流形 (M^{2n}, J, g)中，则对所有 $X, Y \in \mathcal{L}(M_{\theta_1})$ 和 $Z, W \in \mathcal{L}(M_{\theta_2})$，

$$g(h(X,Z), FY) = g(h(Y,Z), FX) \tag{4.1}$$

$$g(h(X,Z),FW)=g(h(X,W),FZ) \tag{4.2}$$

$$g(h(X,Y),FZ)=g(h(X,Z),FY)-\frac{1}{2}g(X,Y)g(B,FZ) \tag{4.3}$$

$$g(h(Z,W),FX)=g(h(X,Z),FW)-\frac{1}{2}g(Z,W)g(B,FX) \tag{4.4}$$

$$X(\ln\lambda)=\frac{1}{2}g(B,X) \tag{4.5}$$

$$g(B,Z)=0 \tag{4.6}$$

*Pro*即。 对于所有 $X,Y\in\mathcal{L}(M_{\theta_1})$和 $Z,W\in\mathcal{L}(M_{\theta_2})$，利用（2.5）和（2.21）可得 ，

$$\begin{aligned}
g(h(X,Z),FW)&=g(\overline{\nabla}_XZ,JW-PW)\\
&=-g(J\overline{\nabla}_XZ,W)-g(\nabla_XZ,PW)\\
&=-g(\overline{\nabla}_XJZ,W)-X(\ln\lambda)g(Z,PW)\\
&=-g(\overline{\nabla}_XPZ,W)-g(\overline{\nabla}_XFZ,W)-X(\ln\lambda)g(Z,PW)\\
&=-X(\ln\lambda)g(PZ,W)+g(\mathfrak{A}_{FZ}X,W)-X(\ln\lambda)g(Z,PW)\\
&=g(h(X,W),FZ)
\end{aligned}$$

从而得到（4.2）。重复上述计算，可得

$$\begin{aligned}
g(h(X,Z),FW)&=g(\overline{\nabla}_ZX,JW-PW)\\
&=-g(J\overline{\nabla}_ZX,W)-g(\nabla_ZX,PW)\\
&=-g(\overline{\nabla}_ZJX,W)-\frac{1}{2}g(JB,X)g(Z,W)-\frac{1}{2}g(B,X)g(JZ,W)\\
&\quad-X(\ln\lambda)g(Z,PW)\\
&=-g(\overline{\nabla}_ZPX,W)-g(\overline{\nabla}_ZFX,W)-\frac{1}{2}g(JB,X)g(Z,W)\\
&\quad-\frac{1}{2}g(B,X)g(JZ,W)-X(\ln\lambda)g(Z,PW)\\
&=-PX(\ln\lambda)g(Z,W)+g(\mathfrak{A}_{FX}Z,W)+\frac{1}{2}g(B,JX)g(Z,W)\\
&\quad-\frac{1}{2}g(B,X)g(PZ,W)-X(\ln\lambda)g(Z,PW)
\end{aligned}$$

利用（4.2），并比较 Z 和 W 中的对称项与斜对称项，得到

$$X(\ln\lambda)=\frac{1}{2}g(B,X)$$

由此得到（4.5）以及

$$g(h(X,Z),FW)=g(h(Z,W),FX)-PX(\ln\lambda)g(Z,W)+\frac{1}{2}g(B,PX+FX)g(Z,W)$$

将（4.5）代入后得到（4.4）。类似地，

$$\begin{aligned} g(h(X,Z),FY) &= g(\overline{\nabla}_Z X, JY - PY) \\ &= -g(J\overline{\nabla}_Z X, Y) - g(\nabla_Z X, PY) \\ &= -g(\overline{\nabla}_Z JX, Y) \\ &= -g(\overline{\nabla}_Z PX, Y) - g(\overline{\nabla}_Z FX, Y) \\ &= g(\mathfrak{A}_{FX} Z, Y) \\ &= g(h(Y,Z), FX) \end{aligned}$$

由此得到（4.1）。重复上述计算，可得

$$\begin{aligned} g(h(X,Z),FY) &= g(\overline{\nabla}_X Z, JY - PY) \\ &= -g(J\overline{\nabla}_X Z, Y) - g(\nabla_X Z, PY) \\ &= -g(\overline{\nabla}_X JZ, Y) - \frac{1}{2}g(JB,Z)g(X,Y) - \frac{1}{2}g(B,Z)g(JX,Y) \\ &= -g(\overline{\nabla}_X PZ, Y) - g(\overline{\nabla}_X FZ, Y) - \frac{1}{2}g(JB,Z)g(X,Y) \\ &\quad - \frac{1}{2}g(B,Z)g(JX,Y) \\ &= g(\mathfrak{A}_{FZ} X, Y) + \frac{1}{2}g(B,JZ)g(X,Y) - \frac{1}{2}g(B,Z)g(PX,Y) \end{aligned}$$

利用（4. 1），并比较 X 和 Y 中的对称项与反对称项，可得 ，

$$\frac{1}{2}g(B,Z) = 0$$

由此得到（4.6），并且

$$g(h(X,Z),FY) = g(h(X,Y),FZ) + \frac{1}{2}g(B,PZ+FZ)g(X,Y)$$

将（4.6）代入后，得到（4.3）。 □

由（4.5）和（4.6）可得

推论 4.2。给定局部共形凯勒流形（M^{2n}、J、g）中的点态双斜扭曲积子流形 $M = M_{\theta_1} \times {}_\lambda M_{\theta_2}$，则李向量场 B 与第二因子正交，且扭曲函数 λ 满足 $grad(\ln \lambda) = \frac{1}{2}B^T$，其中 B^T 表示沿 M 的李向量场的切向分量。

注 4.1。给定局部共形凯勒流形 M^{2n}中的点态双斜扭曲积子流形 $\widetilde{M_{\theta_1} \times {}_\lambda M_{\theta_2}}$，设 $\{X_i, \beta_1 X_i\}_{i=1}^p$和 $\{Z_j, \beta_2 PZ_j\}_{j=1}^q$分别为 TM_{θ_1}和 TM_{θ_2}的局部标准正交标架$\widetilde{\ }$。则 M^{2n}的一个局部标准正交标架为

$$\left\{\widehat{X_i} = X_i, \widehat{PX_i} = \beta_1 PX_i\right\} \cup \left\{\widehat{Z_j} = \frac{Z_j}{\lambda}, \widehat{PZ_j} = \frac{\beta_2 PZ_j}{\lambda}\right\} \cup \left\{\widehat{\xi_k}, \widehat{J\xi_k}\right\}$$
$$\cup \left\{\widehat{FX_i} = \alpha_1 FX_i, \widehat{FPX_i} = \alpha_1\beta_1 FPX_i\right\} \cup \left\{\widehat{FZ_j} = \frac{\alpha_2 FZ_j}{\lambda}, \widehat{FPZ_j} = \frac{\alpha_2\beta_2 FPZ_j}{\lambda}\right\}$$

其中 $\alpha_i = \csc\theta_i$, $\beta_i = \sec\theta_i$对于 $i = 1, 2$，且

$$\left\{\widehat{X_i}\widehat{PX_i} : 1 \le i \le n_1\right\} \text{ is an orthonormal basis of } \mathcal{D}^{\theta_1}$$
$$\left\{\widehat{Z_j}, \widehat{PZ_j} : 1 \le j \le n_2\right\} \text{ is an orthonormal basis of } \mathcal{D}^{\theta_2}$$
$$\left\{\widehat{FX_i}, \widehat{FPX_i} : 1 \le j \le n_1\right\} \text{ is an orthonormal basis of } F\mathcal{D}^{\theta_1}$$
$$\left\{\widehat{FZ_j}, \widehat{FPZ_j} : 1 \le j \le n_2\right\} \text{ is an orthonormal basis of } F\mathcal{D}^{\theta_2}$$
$$\left\{\widehat{\xi_k}, \widehat{J\xi_k} : 1 \le s \le \frac{n - 2n_1 - 2n_2}{2}\right\} \text{ is an orthonormal basis of } \mu$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$然而，虽然 Z_j, $\beta PZ_j \in \mathcal{L}(M_{\theta_2})$，但一般而言我们有 Z_j, $PZ_j \notin \mathcal{L}(M_{\theta_2})$，因为 λ是 M_{θ_1}上的一个函数。另外，请注意

$$J\left(\widehat{Z_j}\right) = J\left(\frac{Z_j}{\lambda}\right) = \frac{PZ_j}{\lambda} + \frac{FZ_j}{\lambda} = \cos\theta_2\widehat{PZ_j} + \sin\theta_2\widehat{FZ_j}$$
$$J\left(\widehat{PZ_j}\right) = J\left(\sec\theta_2\frac{PZ_j}{\lambda}\right) = \frac{\sec\theta_2 P^2 Z_j}{\lambda} + \frac{\sec\theta_2 FPZ_j}{\lambda} = -\cos\theta_2\widehat{Z_j} + \sin\theta_2\widehat{FPZ_j}$$

5 主要结果

我们首先给出局部共形凯勒流形中点态双斜扭曲积子流形的刻画。

$\widetilde{\ }$**定理 5.1.** 设 M^m是局部共形凯勒流形 M^{2n}中的一个逐点双斜子流形。那么，以下条件等价

1. M^m是 M^{2n}的一个点态双斜扭曲积子流形 $\widetilde{M_{\theta_1} \times {}_\lambda M_{\theta_2}}$

2. 对任意 $X, Y \in \mathcal{L}(M_{\theta_1})$和 $Z, W \in \mathcal{L}(M_{\theta_2})$，均有

$$\omega(\mathcal{D}^{\theta_2}) = \{0\} \ and \ g\left(\mathfrak{A}_{FPX}Z - \mathfrak{A}_{FX}PZ, Y\right) + g(\nabla^\perp_Y FX, FZ) = 0$$

$$g(\mathfrak{A}_{FPZ}X - \mathfrak{A}_{FZ}PX, W) + g(\nabla^{\perp}_{W}FZ, FX) \tag{5.1}$$
$$= \sin^2\theta_2 \left(\frac{1}{2}\omega(X) - X(\ln\lambda)\right) g(Z, W)$$

其中 $\lambda: M_{\theta_1} \to (0, \infty)$ 是某个光滑函数。

3. 对于每个 $X \in \mathcal{L}(M_{\theta_1})$ 和 $Z \in \mathcal{L}(M_{\theta_2})$，我们有

$$\omega(\mathcal{D}^{\theta_2}) = \{0\} \ and \ \nabla_X Z = \nabla_Z X = \frac{1}{2}\omega(X)Z \tag{5.2}$$

此外，在这种情况下，M^m 中 M_{θ_2} 的平均曲率向量 $\mathcal{H}$ 为

$$\mathcal{H} = -grad(\ln\lambda) = -\frac{1}{2}B^T \tag{5.3}$$

其中，B^T 是 B 沿 M的切向分量。

证明。 (1)⇔(2) 这由定理 3.1、定理 3.2 以及 $\mathbf{grad}(\ln\lambda) \in \mathcal{L}(M_{\theta_1})$可得

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z(\mathrm{grad}(\ln\lambda)), X) &= ZX(\ln\lambda) - g(\mathrm{grad}(\ln\lambda), \nabla_Z X) \\ &= [Z, X](\ln\lambda) - \nabla_Z X(\ln\lambda) \\ &= -\nabla_X Z(\ln\lambda) \\ &= g(Z, \nabla_X(\mathrm{grad}(\ln\lambda))) \\ &= 0 \end{aligned}$$

由于 $Z(\ln\lambda) = 0$ 且 M_{θ_1} 在 M 中是全测地的。此外，(5.3) 由引理 4.1(4.5) 得出。

(1)⇔(3) 设 $M = M_{\theta_1} \times_{\lambda} M_{\theta_2}$ 是一个点态双斜扭曲积子流形。于是，(5.2) 和 (5.3) 由 (2.21) 和引理 4.1 (4.5) 得出。

反之，设 M^m 是局部共形凯勒流形 M^{2n} 中的逐点双斜子流形，5.2成立。则对所有 X，$Y \in \mathcal{L}(M_{\theta_1})$ 和 Z，$W \in \mathcal{L}(M_{\theta_2})$ 均有

$$\begin{aligned} g([X, Y], Z) &= g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) \\ &= -g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y Z, X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

这意味着 $\mathcal{D}^{\theta_1}$ 是可积的。

$$g(\nabla_X Y, Z) = -g(\nabla_X Z, Y) = 0$$

这意味着 $\mathcal{D}^{\theta_1}$ 的叶在 M 中是全测地的。

$$\begin{aligned} g([Z,W],X) &= g(\nabla_Z W - \nabla_W Z, X) \\ &= -g(\nabla_Z X, W) + g(\nabla_W X, Z) \\ &= -\frac{1}{2}\omega(X)g(Z,W) + \frac{1}{2}\omega(X)g(W,Z) = 0 \end{aligned}$$

这意味着 $\mathcal{D}^{\theta_2}$ 是可积的。

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z W, X) &= -g(\nabla_Z X, W) \\ &= -\frac{1}{2}\omega(X)g(Z,W) \\ &= -\frac{1}{2}g(Z,W)g(B^T,X) \end{aligned}$$

这意味着 $\mathcal{D}^{\theta_2}$的叶在 M中是全脐的，其平均曲率向量为 $-\frac{1}{2}B^T$。

$$g\left(\nabla_Z B^T, X\right) = \frac{1}{2}\omega\left(B^T\right) g(Z,X) = 0$$

这意味着 B^T 在 M中 M_{θ_2} 的法丛内平行。

因此，根据定理 2.1 我们有 $M = M_{\theta_1} \times {}_\lambda M_{\theta_2}$ 是一个点态双斜扭曲乘积子流形。

□

我们通过给出第二基本形式平方范数的不等式，结束对局部共形凯勒流形中点态双斜扭曲乘积子流形的研究。

定理 5.2. 设 $M = M_{\theta_1} \times {}_\lambda M_{\theta_2}$ 是局部共形凯勒流形(M^{2n}, J, g)中的一个点态双斜扭曲乘积子流形$\widetilde{\ }$。则第二基本形式的范数满足不等式

$$\begin{aligned} ||h||^2 \geq \frac{n_1}{2}\sin^2\theta_2 \|B|_{F\mathcal{D}^{\theta_2}}\|^2 + \frac{n_2}{2}\sin^2\theta_1 \|B|_{F\mathcal{D}^{\theta_1}}\|^2 + \sin\theta_2 g\left(H_{\mathcal{D}^{\theta_1}}|_{F\mathcal{D}^{\theta_2}}, B|_{F\mathcal{D}^{\theta_2}}\right) \\ + \sin\theta_1 g\left(H_{\mathcal{D}^{\theta_2}}|_{F\mathcal{D}^{\theta_1}}, B|_{F\mathcal{D}^{\theta_1}}\right) \end{aligned} \tag{5.4}$$

其中，$2n_1 =$维数$_{\mathbb{R}}\,\mathcal{D}^{\theta_1}$、$2n_2 =$维数$_{\mathbb{R}}\,\mathcal{D}^{\theta_2}$，且 $H_{\mathcal{D}^{\theta_1}}$和 $H_{\mathcal{D}^{\theta_2}}$分别是 M 在 M^{2n} 中沿 $\mathcal{D}^{\theta_1}$和 $\mathcal{D}^{\theta_2}$的平均曲率向量 H 的分量。
若等号成立，则有

- 像$(h) \subseteq (F\mathcal{D}^{\theta_1} \oplus F\mathcal{D}^{\theta_2})$，并且
- 当且仅当 M 在 M^{2n} 中是混合全测地的，$\sim$ $\sim M$ 在 M^{2n} 中是极小的。

证明。

$$
\begin{aligned}
||h||^2 =& \left\|h(\mathcal{D}^{\theta_1},\mathcal{D}^{\theta_1})\big|_{F\mathcal{D}^{\theta_1}}\right\|^2 + \left\|h(\mathcal{D}^{\theta_1},\mathcal{D}^{\theta_2})\big|_{F\mathcal{D}^{\theta_1}}\right\|^2 + \left\|h(\mathcal{D}^{\theta_2},\mathcal{D}^{\theta_2})\big|_{F\mathcal{D}^{\theta_1}}\right\|^2 \\
&+ \left\|h(\mathcal{D}^{\theta_1},\mathcal{D}^{\theta_1})\big|_{F\mathcal{D}^{\theta_2}}\right\|^2 + \left\|h(\mathcal{D}^{\theta_1},\mathcal{D}^{\theta_2})\big|_{F\mathcal{D}^{\theta_2}}\right\|^2 + \left\|h(\mathcal{D}^{\theta_2},\mathcal{D}^{\theta_2})\big|_{F\mathcal{D}^{\theta_2}}\right\|^2 \\
&+ \left\|h(\mathcal{D}^{\theta_1},\mathcal{D}^{\theta_1})\big|_{\mu}\right\|^2 + \left\|h(\mathcal{D}^{\theta_1},\mathcal{D}^{\theta_2})\big|_{\mu}\right\|^2 + \left\|h(\mathcal{D}^{\theta_2},\mathcal{D}^{\theta_2})\big|_{\mu}\right\|^2
\end{aligned}
$$

由（4.3）和注释 4.1 可得

$$
\begin{aligned}
g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{Z_p}\right),\widehat{FX_j}\right) =& \frac{\csc\theta_1}{\lambda}\left\{g\left(h\left(X_i,X_j\right),FZ_p\right)+\frac{1}{2}\delta_{ij}g\left(B,FZ_p\right)\right\} \\
\Longrightarrow \sin\theta_1 g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{Z_p}\right),\widehat{FX_j}\right) =& \sin\theta_2 g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{X_j}\right),\widehat{FZ_p}\right)+\frac{1}{2}\sin\theta_2\delta_{ij}g\left(B,\widehat{FZ_p}\right)
\end{aligned}
$$

类似地,

$$
\begin{aligned}
\sin\theta_1 g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{PZ_p}\right),\widehat{FX_j}\right) =& \sin\theta_2 g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{X_j}\right),\widehat{FPZ_p}\right)+\frac{1}{2}\sin\theta_2\delta_{ij}g\left(B,\widehat{FPZ_p}\right) \\
\sin\theta_1 g\left(h\left(\widehat{PX_i},\widehat{Z_p}\right),\widehat{FPX_j}\right) =& \sin\theta_2 g\left(h\left(\widehat{PX_i},\widehat{PX_j}\right),\widehat{FZ_p}\right)+\frac{1}{2}\sin\theta_2\delta_{ij}g\left(B,\widehat{FZ_p}\right) \\
\sin\theta_1 g\left(h\left(\widehat{PX_i},\widehat{PZ_p}\right),\widehat{FPX_j}\right) =& \sin\theta_2 g\left(h\left(\widehat{PX_i},\widehat{PX_j}\right),\widehat{FPZ_p}\right) \\
&+\frac{1}{2}\sin\theta_2\delta_{ij}g\left(B,\widehat{FPZ_p}\right) \\
\sin\theta_1 g\left(h\left(\widehat{PX_i},\widehat{Z_p}\right),\widehat{FX_j}\right) =& \sin\theta_2 g\left(h\left(\widehat{PX_i},\widehat{X_j}\right),\widehat{FZ_p}\right) \\
\sin\theta_1 g\left(h\left(\widehat{PX_i},\widehat{PZ_p}\right),\widehat{FX_j}\right) =& \sin\theta_2 g\left(h\left(\widehat{PX_i},\widehat{X_j}\right),\widehat{FPZ_p}\right) \\
\sin\theta_1 g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{Z_p}\right),\widehat{FPX_j}\right) =& \sin\theta_2 g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{PX_j}\right),\widehat{FZ_p}\right) \\
\sin\theta_1 g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{PZ_p}\right),\widehat{FPX_j}\right) =& \sin\theta_2 g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{PX_j}\right),\widehat{FPZ_p}\right)
\end{aligned}
$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
\left\|h(\mathcal{D}^{\theta_1},\mathcal{D}^{\theta_2})\big|_{F\mathcal{D}^{\theta_1}}\right\|^2 =& \cos^2\theta_1\left\|h(\mathcal{D}^{\theta_1},\mathcal{D}^{\theta_2})\big|_{F\mathcal{D}^{\theta_1}}\right\|^2 + \sin^2\theta_1\left\|h(\mathcal{D}^{\theta_1},\mathcal{D}^{\theta_2})\big|_{F\mathcal{D}^{\theta_1}}\right\|^2 \\
=& \cos^2\theta_1\left\|h(\mathcal{D}^{\theta_1},\mathcal{D}^{\theta_2})\big|_{F\mathcal{D}^{\theta_1}}\right\|^2 + \sin^2\theta_2\left\|h(\mathcal{D}^{\theta_1},\mathcal{D}^{\theta_1})\big|_{F\mathcal{D}^{\theta_2}}\right\|^2 \\
&+\frac{1}{2}\sin^2\theta_2\sum_{i,p}\left\{g\left(B,\widehat{FZ_p}\right)^2+g\left(B,\widehat{FPZ_p}\right)^2\right\} \\
&+\sin\theta_2\sum_{i,p}\left\{g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{X_i}\right),\widehat{FZ_p}\right)g\left(B,\widehat{FZ_p}\right)\right. \\
&\qquad\left.+g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{X_i}\right),\widehat{FPZ_p}\right)g\left(B,\widehat{FPZ_p}\right)\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+g\left(h\left(\widehat{PX_i},\widehat{PX_i}\right),\widehat{FZ_p}\right)g\left(B,\widehat{FZ_p}\right)\\
&+g\left(h\left(\widehat{PX_i},\widehat{PX_i}\right),\widehat{FPZ_p}\right)g\left(B,\widehat{FPZ_p}\right)\Big\}
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
\begin{aligned}
\sin^2\theta_1\left\|h(\mathcal{D}^{\theta_1},\mathcal{D}^{\theta_2})\big|_{F\mathcal{D}^{\theta_1}}\right\|^2 &= \sin^2\theta_2\left\|h(\mathcal{D}^{\theta_1},\mathcal{D}^{\theta_1})\big|_{F\mathcal{D}^{\theta_2}}\right\|^2+\frac{2n_1}{4}\sin^2\theta_2\left\|B\big|_{F\mathcal{D}^{\theta_2}}\right\|^2\\
&+\sin\theta_2 g\left(\sum_i\left\{h\left(\widehat{X_i},\widehat{X_i}\right)+h\left(\widehat{PX_i},\widehat{PX_i}\right)\right\}\Big|_{F\mathcal{D}^{\theta_2}},B|_{F\mathcal{D}^{\theta_2}}\right)\\
&\geq\frac{n_1}{2}\sin^2\theta_2\|B|_{F\mathcal{D}^{\theta_2}}\|^2+\sin\theta_2 g\left(H_{\mathcal{D}^{\theta_1}}|_{F\mathcal{D}^{\theta_2}},B|_{F\mathcal{D}^{\theta_2}}\right)
\end{aligned}
$$

如上所述，我们有

$$
\begin{aligned}
\sin^2\theta_2\left\|h(\mathcal{D}^{\theta_1},\mathcal{D}^{\theta_2})\big|_{F\mathcal{D}^{\theta_2}}\right\|^2 &= \sin^2\theta_1\left\|h(\mathcal{D}^{\theta_2},\mathcal{D}^{\theta_2})\big|_{F\mathcal{D}^{\theta_1}}\right\|^2+\frac{2n_2}{4}\sin^2\theta_1\left\|B\big|_{F\mathcal{D}^{\theta_1}}\right\|^2\\
&+\sin\theta_1 g\left(\sum_p\left\{h\left(\widehat{Z_p},\widehat{Z_p}\right)+h\left(\widehat{PZ_p},\widehat{PZ_p}\right)\right\}\Big|_{F\mathcal{D}^{\theta_1}},B|_{F\mathcal{D}^{\theta_1}}\right)\\
&\geq\frac{n_2}{2}\sin^2\theta_1\|B|_{F\mathcal{D}^{\theta_1}}\|^2+\sin\theta_1 g\left(H_{\mathcal{D}^{\theta_2}}|_{F\mathcal{D}^{\theta_1}},B|_{F\mathcal{D}^{\theta_1}}\right)
\end{aligned}
$$

综上可得（5.4）。

若（5.4）中等号成立，则 $||h||$ 的唯一非零分量为

$$
\begin{aligned}
&\left\|h(\mathcal{D}^{\theta_1},\mathcal{D}^{\theta_1})|_{F\mathcal{D}^{\theta_2}}\right\|^2 \quad , \quad \left\|h(\mathcal{D}^{\theta_1},\mathcal{D}^{\theta_2})|_{F\mathcal{D}^{\theta_1}}\right\|^2,\\
&\left\|h(\mathcal{D}^{\theta_2},\mathcal{D}^{\theta_2})|_{F\mathcal{D}^{\theta_1}}\right\|^2 \text{ and } \left\|h(\mathcal{D}^{\theta_1},\mathcal{D}^{\theta_2})|_{F\mathcal{D}^{\theta_2}}\right\|^2.
\end{aligned}
$$

此外，根据上述计算可得，

$$
\begin{aligned}
&\left\|h(\mathcal{D}^{\theta_1},\mathcal{D}^{\theta_1})|_{F\mathcal{D}^{\theta_2}}\right\|^2=0 \text{ if and only if } \left\|h(\mathcal{D}^{\theta_1},\mathcal{D}^{\theta_2})|_{F\mathcal{D}^{\theta_1}}\right\|^2=0\\
&\qquad\qquad\qquad\text{and}\\
&\left\|h(\mathcal{D}^{\theta_2},\mathcal{D}^{\theta_2})|_{F\mathcal{D}^{\theta_1}}\right\|^2=0 \text{ if and only if } \left\|h(\mathcal{D}^{\theta_1},\mathcal{D}^{\theta_2})|_{F\mathcal{D}^{\theta_2}}\right\|^2=0
\end{aligned}
$$

因此，结论成立。 □

6 示例

考虑 $\mathbb{C}^n=\mathbb{E}^{2n},J,g_0)$，其中 $\mathbb{E}^{2n}$ 是维数为 $2n$ 的欧几里得空间，其坐标为 $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$，并配备标准欧几里得度量 g_0 和典范近复结构

$$
J(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=(-y_1,\ldots,-y_n,x_1,\ldots,x_n) \tag{6.1}
$$

那么 $\mathbb{C}^n = (\mathbb{E}^{2n}, J, g_0)$ 是一个平坦的凯勒流形。

我们使用以下关于逐点斜浸入的结果。

定理 6.1 ([20] (命题 2.2))。 设凯勒流形 $(M^{2n},\ J,\ g_0)$，令 M_θ 是一个逐点斜子流形。则对任意光滑函数 $f\colon M \to (0,\ \infty)$，有 M_θ仍是全局共形凯勒（*gcK*）流形的逐点斜子流形，$(M^{2n},\ J,\ e^{-f}g_0)$ 且斜角保持不变。

例 6.1。 令 $\mathbb{C}^4 = (\mathbb{E}^8,\ J,\ g_0)$ 如上所定义。考虑$\mathbb{E}^4$的一个开子集，其中 $u_1u_2 \neq 1$, $u_3u_4 \neq 1$, $(u_1 - u_2) \in \left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ 以及 $(u_3 - u_4) \in \left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$。定义4 维子流形 M，它由 $\mathbb{C}^4$–给出

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1\cos u_2 \quad , \quad y_1 = u_1 \sin u_2 \\ x_2 &= u_2\cos u_1 \quad , \quad y_2 = u_2 \sin u_1 \\ x_3 &= u_3\cos u_4 \quad , \quad y_3 = u_3 \sin u_4 \\ x_4 &= u_4\cos u_3 \quad , \quad y_4 = u_4 \sin u_3 \end{aligned} \tag{6.2}$$

TM M 的切丛的标准正交标架为

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{\sqrt{1+u_2^2}}\left(\cos u_2\frac{\partial}{\partial x_1} - u_2\sin u_1\frac{\partial}{\partial x_2} + \sin u_2\frac{\partial}{\partial y_1} + u_2\cos u_1\frac{\partial}{\partial y_2}\right) \\ X_2 &= \frac{1}{\sqrt{1+u_1^2}}\left(-u_1\sin u_2\frac{\partial}{\partial x_1} + \cos u_1\frac{\partial}{\partial x_2} + u_1\cos u_2\frac{\partial}{\partial y_1} + \sin u_1\frac{\partial}{\partial y_2}\right) \\ X_3 &= \frac{1}{\sqrt{1+u_4^2}}\left(\cos u_4\frac{\partial}{\partial x_3} - u_4\sin u_3\frac{\partial}{\partial x_4} + \sin u_4\frac{\partial}{\partial y_3} + u_4\cos u_3\frac{\partial}{\partial y_4}\right) \\ X_4 &= \frac{1}{\sqrt{1+u_3^2}}\left(-u_3\sin u_4\frac{\partial}{\partial x_3} + \cos u_3\frac{\partial}{\partial x_4} + u_3\cos u_4\frac{\partial}{\partial y_3} + \sin u_3\frac{\partial}{\partial y_4}\right) \end{aligned}$$

那么， M 是一个适当逐点双斜子流形，其斜分布分别为$\mathcal{D}^{\theta_1} = \mathsf{Span}\{X_1, X_2\}$ 和 $\mathcal{D}^{\theta_2} = \mathsf{Span}\{X_3, X_4\}$。此外，斜角为

$$\cos^2\theta_1 = \frac{(u_1u_2-1)^2\cos^2(u_1-u_2)}{(1+u_1^2)(1+u_2^2)}\ ,\ \text{and}\ ,\ \cos^2\theta_2 = \frac{(u_3u_4-1)^2\cos^2(u_3-u_4)}{(1+u_3^2)(1+u_4^2)}$$

容易验证， $\mathcal{D}^{\theta_1}$ 和 $\mathcal{D}^{\theta_2}$ 在 M中均为可积且全测地。设 M_{θ_1} 和 M_{θ_2} 分别为 $\mathcal{D}^{\theta_1}$ 和 $\mathcal{D}^{\theta_2}$ 的叶。那么， M 是 $M = M_{\theta_1} \times M_{\theta_2}$ 的黎曼乘积，且 M 从 $\mathbb{C}^4$ 诱导的度量 g_M 为

$$g_M = g_1 + g_2 \tag{6.3}$$

其中

$$g_1 = (1+u_2^2)du_1^2 + (1+u_1^2)du_2^2\ ,\ \text{and}\ ,\ g_2 = (1+u_4^2)du_3^2 + (1+u_3^2)du_4^2 \tag{6.4}$$

现在，对于 $\mathbb{C}^4$ 上仅依赖于坐标 x_1、x_2、y_1、y_2 的任意非恒正光滑函数 $f = f(x_1、x_2、y_1、y_2)$，考虑黎曼度量 $\tilde{g} = e^{-f}g_0$，它与标准度量 g_0 共形。于是，$M = (\mathbb{E}^8、J、\tilde{g})$ 是一个全局共形凯勒流形，而由 M 在 M 上诱导的度量是扭曲乘积度量

$$\tilde{g}_M = \tilde{g}_1 + e^{-f}g_2 \tag{6.5}$$

其中

$$\tilde{g}_1 = e^{-f}g_1 \tag{6.6}$$

通过选择 f，与 g_1 共形。

因此，由定理 6.1 可知 $(M, \tilde{g}_M)$ 是 $\widetilde{\ }$的一个真逐点双斜扭曲积子流形 $M = (\mathbb{E}^8, J, \tilde{g})$。

此外，由于 $f = f(x_1, x_2, y_1, y_2)$ 是定义在 $\mathbb{C}^4$上的非恒定正光滑函数，且仅依赖于坐标 x_1, x_2, y_1, y_2，由（6.2）可知，限制在子流形上时$\backsim M$，ω 的李形式 M 为

$$\omega = df = \frac{\partial f}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}du_2 \tag{6.7}$$

因此可知，李向量场 B 与 $\mathcal{D}^{\theta_2}$ 正交，且扭曲函数$\lambda = -e^{-\frac{f}{2}}|_M$满足 grad(ln λ) $= \frac{1}{2}$ grad$(f|_{\bar{M}})$ $= \frac{1}{2}B^T$。

参考文献

[1] Alghamdi, Fatimah；Chen, Bang-Yen 和 Uddin, Siraj.“局部共形凯勒流形中逐点半斜扭曲乘积的几何。” Results Math.**76**（2021），第 4 期，论文编号 204，共 25 页。MR4318461

[2]Atçeken, Mehmet. “黎曼乘积流形的斜子流形。” Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.) **30** (2010), no. 1, 215–224. MR2658956[3] Atçeken, Mehmet and Hui, Shyamal Kumar. “*LCS*流形中的斜子流形与伪斜子流形。” Czechoslovak Math. J.**63**(138) (2013), no. 1, 177–190. MR3035505[4] Atçeken, Mehmet and Dirik, Süleyman. “近*Kenmotsu*流形的伪斜子流形。” Serdica Math. J.**41** (2015), no. 2-3, 243–262. MR3363604[5] Bejancu, Aurel. “凯勒流形的CR子流形 *I*。” Proc. Amer. Math.Soc.**69** (1978), no. 1, 135–142. MR0467630[6] Bejancu, Aurel. “凯勒流形的 *CR*子流形 *II*。” Trans. Amer. Math. Soc. **250** (1979), 333–345. MR0530059

[7] Bishop, R. L. and O'Neill, B. "负曲率流形。" Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969), 1–49. MR0251664[8] Bonanzinga, Vittoria and Matsumoto, Koji. "局部共形凯勒流形中的翘曲积CR子流形。" Period. Math. Hungar. 48 (2004), no. 1-2, 207–221. MR2077697[9]Cabrerizo, J. L.; Carriazo, A.; Fernández, L. M. and Fernández, M. "萨斯基安流形的半斜子流形。" Geom. Dedicata 78 (1999), no. 2, 183–199. MR1722833[10] J. L. Cabrerizo, A. Carriazo, L. M.Fernández and M. Fernández, "萨斯基安流形中的斜子流形。" Glasg. Math. J. 42 (2000), no. 1, 125–138. MR1739684[11] Chen, Bang-Yen. "凯勒流形的CR子流形 I。" J. Differential Geom- etry 16 (1981), no. 2, 305–322. MR0638795[12] Chen, Bang-Yen. "凯勒流形的CR子流形 II。" J. Differential Ge- ometry 16 (1981), no. 3, 493–509 (1982). MR0654640[13] Chen, Bang-Yen. "斜浸入。" Bull. Austral. Math. Soc. 41 (1990), no. 1, 135–147. MR1043974[14] Chen, Bang-Yen. "斜子流形几何。" Katholieke Universiteit Leuven, Louvain, 1990. 123 pp. MR1099374[15] Chen, Bang-Yen. "凯勒流形中的扭曲积CR子流形。" Tamsui Oxf. J. Math. Sci. 16 (2000), no. 2, 105–121. MR1833002[16] Chen, Bang-Yen."复扩张体、翘曲积与拉格朗日浸入。" Soochow J. Math. 26 (2000), no. 1, 1–17. MR1755131[17] Chen, Bang-Yen. "凯勒流形中的翘曲积CR子流形几何。" Monatsh. Math. 133 (2001), no. 3, 177–195. MR1861136[18] Chen, Bang-Yen. "凯勒流形中的翘曲积CR子流形几何 II。" Monatsh. Math. 134 (2001), no. 2, 103–119. MR1878074[19] Chen, Bang-Yen. "作为黎曼子流形的翘曲积几何及相关问题。" Soochow J. Math. 28 (2002), no. 2, 125–156. MR1897183[20] Chen, Bang-Yen. and Garay, Oscar J. "近厄米流形中的逐点斜子流形。" 土耳其数学杂志 36 (2012), no. 4, 630–640. MR2993593

[21] Goldberg, Samuel I. 和 Vaisman, Izu。“具有非负截面曲率的紧局部共形凯勒流形。”图卢兹数学科学学院年刊（5）**2**（1980），第2期，117–123。MR0595194[22] Hiepko, Sönke。“扭曲乘积的一个内在刻画（德语）。”数学年刊**241** （1979），第3期，209–215。MR0535555[23] Jamal, Nargis；Khan, Khalid Ali 和 Khan, Viqar Azam。“局部共形凯勒流形的一般扭曲乘积子流形。”Acta Math. Sci. Ser. B（英文版）**30** （2010），第5期，1457–1468。MR2778614[24] Li, Hongxia 和 Liu, Ximin。“局部乘积流形的半斜子流形。”格鲁吉亚数学杂志**12** （2005），第2期，273–282。MR2174183[25]Matsumoto, Koji 和 Bonanzinga, Vittoria。“局部共形凯勒空间形式中的双扭曲乘积*CR*-子流形。*II*。”亚历山德鲁·Ioan·Cuza大学雅西科学年刊·数学（新系列）**53** （2007），增刊1，235–248。MR2522397

[26]Matsumoto, Koji 和 Bonanzinga, Vittoria. “局部共形凯勒空间形式中的双重扭曲乘积 *CR* 子流形.” 尼赖吉哈佐师范学院数学学报 (N.S.) **24** (2008), 第 1 期, 93–102. MR2430238

[27] Nölker, Stefan.“扭曲乘积的等距浸入.” DifferentialGeom.Appl.**6** (1996), 第 1 期, 1–30. MR1384876

[28] Papaghiuc, Neculai.“凯勒流形的半斜子流形.” An.Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi Secţ. I a Mat. **40** (1994), 第 1 期, 55–61. MR1328947

[29] Sahin, Bayram。“近似乘积黎曼流形的斜子流形。”韩国数学会志**43** (2006)，第4期，717–732。MR2234930[30] Taştan, Hakan Mete and Gerdan, Sibel。“局部共形凯勒流形的半斜子流形。”国际电子几何杂志**8** (2015)，第2期，46–56。MR3418457[31] Taştan, Hakan Meteand Özdemir, Fatma。“局部乘积黎曼流形的半斜子流形几何。”土耳其数学杂志**39** (2015)，第2期，268–284。MR3311690[32] Taştan, H. M. and Tripathi, M. M. “局部共形凯勒流形的半斜子流形。”亚历山德鲁·Ioan·Cuza大学雅西科学年刊·数学 (N.S.) **62** (2016)，第2期，第1卷，337–347。MR3680211[33] Vaisman, Izu。“关于局部共形近似凯勒流形。”以色列数学杂志**24**(1976)，第3–4期，338–351。MR0418003

[34] Vaisman, Izu。“局部共形凯勒流形上的全纯向量场。”An. Ştiinţ. Univ. "Al. I. Cuza” Iaşi Secţ. I a Mat. (N.S.) **24** (1978)，第2期，357–362。MR0533764[35] Vaisman, Izu。“具有平行李形式的局部共形凯勒流形。”Rend. Mat.(6) **12** (1979)，第2期，263–284。MR0557668[36] Vaisman, Izu。“一个关于紧局部共形凯勒流形的定理。”Proc. Amer.Math. Soc. **75** (1979)，第2期，279–283。MR0532151[37] Vaisman, Izu。“关于局部和全局共形凯勒流形。”Trans. Amer. Math. Soc.**262** (1980)，第2期，533–542。MR0586733[38] Vaisman, Izu。“局部共形凯勒流形的某些曲率性质。”Trans. Amer. Math. Soc.**259** (1980)，第2期，439–447。MR0567089