arXiv:2301.05283v1 [math.DG] 12 Jan 2023

具有线性周期积分的李代数 e(3)上的可积系统

I. K. Kozlov* 和 A. A. Oshemkov†

摘要

本文研究具有线性周期积分的李代数 e(3)上的可积系统。研究了刘维尔叶状结构的奇异性、动量映射的分岔图、刘维尔环面的变换、等能面的拓扑以及此类系统的其他拓扑性质。

关键词和短语： 可积哈密顿系统、周期积分、分岔图、动量映射、刘维尔环面

1 引言

本文研究了由李代数 e(3) 的欧拉方程给出的、具有 S^1 对称性的可积哈密顿系统的一些拓扑性质。此类系统中最著名的例子或许是经典的拉格朗日陀螺。粗略地说，我们考虑一种“广义”拉格朗日陀螺，其哈密顿量具有任意的势函数和动量线性项，但保留了相同的 S^1 对称性。

我们关注所研究系统所定义的刘维尔叶状结构的局部和整体拓扑性质，具体包括分岔图的结构、动量映射临界值处刘维尔环面的变换、平衡点及其他奇异点的非退化性，以及等能面的拓扑。

需要指出的是，力学和数理物理中有许多具有周期线性积分的可积系统，其相位拓扑已由多位作者研究。特别是，刚体动力学中的拉格朗日可积情形和基尔霍夫可积情形（其拓扑的描述见 [1–3]）、描述超流体 ^{3}He 中自旋动力学的莱格特方程可积情形（该系统的分岔图和福缅科不变量见 [6]），以及重椭球体在光滑水平面上的运动这一可积情形（该系统的拓扑不变量见 [7]）。

*无所属单位，电子邮箱：ikozlov90@gmail.com

†莫斯科国立大学力学与数学系，俄罗斯莫斯科 119991，电子邮箱：a@oshemkov.ru

所有这些系统的拓扑性质相当相似，这是因为它们具有一种 S^1-对称性，该对称性对其奇点结构施加了严格限制。因此，可以采用统一的方案对它们进行研究。本文以一个在 e(3)* 上具有周期线性积分的哈密顿量为例，开展这类研究。需要指出的是，论文 [4]，讨论了具有 S^{1}作用的可积系统的拓扑研究问题，并列举了可积系统理论中的若干开放问题。

除了本文所研究的 e(3)* 上的系统外，还有其他具有 S^1-对称性的可积系统，这些系统也曾被不同作者研究过。例如，最近有人研究了与球面同胚的旋转曲面上的自然力学系统 [5] （另见 [1]）。另一个例子是刚体动力学中的经典欧拉情形，其中 S^1-作用不是由线性积分给出，而是由二次积分给出。本文所得结果特别表明，所研究系统的拓扑性质与其他具有 S^1-对称性的情形之间存在一些差异（例如，在 [5] 中研究的情形或欧拉情形）。

本文的组织如下。在第2节中，我们描述所研究的系统。我们首先在第3节研究秩 0 奇点的非退化性及其类型（推论1）。在第4节中，我们求出秩 1 奇点（定理 3），并描述系统的分岔图（定理4和定理5）。在第5节中，我们确定秩 1 非退化点的类型（定理6），并具体说明相应的刘维尔环面分岔（定理 7）。最后，在第6节中，我们列出系统所有可能的等能面（定理6）。

2 系统描述

回顾一下，李代数 e(3) 的李–泊松括号由以下公式给出

$$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k, \quad \{S_i, R_j\} = \varepsilon_{ijk} R_k, \quad \{R_i, R_j\} = 0, \tag{1}$$

其中 S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3 是李代数 e(3) 的对偶空间 e(3)* 上的线性坐标。我们将使用记号 $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$ 和 $\mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3)$，以及 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\times$，分别表示三维向量的标量积和向量积。

哈密顿量为 H 的哈密顿系统由欧拉方程给出

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\},$$

对于李代数 e(3)，其形式为

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{S}} \times \mathbf{S} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{R}} \times \mathbf{R}, \qquad \dot{\mathbf{R}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{S}} \times \mathbf{R}.$$

括号 (1) 有两个卡西米尔函数:

$$F_1 = \langle \mathbf{R}, \mathbf{R} \rangle, \qquad F_2 = \langle \mathbf{S}, \mathbf{R} \rangle.$$

它们的正则公共水平曲面

$$M^4_{a,g} = \{(\mathbf{S}, \mathbf{R}) \mid F_1(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = a,\, F_2(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = g, \}, \qquad a > 0, \tag{2}$$

是括号 (1) 的辛叶，也是李代数 e(3) 的余伴随表示的轨道。我们关注轨道 $M^4_{a,\ g}$ 上的可积哈密顿系统，其中 e(3) 上的某个线性函数 $*$ 是定义 S^1-作用的第一积分。

下面介绍力学和数学物理中的几个此类系统，它们是李代数 e(3)上具有哈密顿量 H 和积分 K 的欧拉方程的可积情形（这些系统中各参数和变量的物理意义见 [1,2,6,7]）。

1）拉格朗日情形。这是一个两个转动惯量相等的对称陀螺，其重心位于对称轴上：

$$H = \frac{S_1^2}{A} + \frac{S_2^2}{A} + \frac{S_3^2}{B} - pR_3, \quad K = S_3, \quad \text{where } A, B, p = \text{const}.$$

2）基尔霍夫情形。该系统描述了理想流体中一个动力学对称刚体的运动：

$$\begin{aligned} H = {} & AS_1^2 + AS_2^2 + aS_3^2 + 2(BS_1R_1 + 2BS_2R_2 + bS_3R_3) + \\ & + CR_1^2 + CR_2^2 + cR_3^2, \quad K = S_3, \quad \text{where } A, a, B, b, C, c = \text{const}. \end{aligned}$$

3）以下是描述超流体 ^{3}He 中自旋动力学的 Leggett 系统的一个可积情形：

$$H = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - \gamma S_3 - R_3^2, \quad K = S_3, \quad \text{where } \gamma = \text{const}.$$

4）描述一个动力学和几何上均对称的重椭球体在光滑水平面上运动的可积系统：

$$\begin{aligned} H &= \frac{S_1^2 + S_2^2 + A(S_1R_1 + S_2R_2)^2}{2b(1 + A(R_1^2 + R_2^2))} + \frac{S_3^2}{2J} + \sqrt{1 + cR_3^2} + sR_3, \\ K &= S_3 \quad \text{where } A = \frac{cR_3^2}{1 + cR_3^2}, \quad b, c, J, s = \text{const}. \end{aligned}$$

在所有这些例子中，附加积分都是 e(3)*上的函数 S_3。下面说明，如果要求该积分是线性且周期的，这就是一般情形。

断言 1. 设 K 是 $\mathrm{e}(3)^*$ 上的线性函数，其由括号 (1) 定义的哈密顿流 $\operatorname{sgrad} K$是周期的。那么，存在一个保持括号 (1) 不变的线性变量变换，将函数 K 变为 cS_3，其中 c 是某个常数。

证明。设 $K = \alpha_1S_1 + \alpha_2S_2 + \alpha_3S_3 + \beta_1R_1 + \beta_2R_2 + \beta_3R_3$。对于任意正交矩阵 A，变换 $\Phi_A\colon (\mathbf{S},\mathbf{R}) \to (A\mathbf{S}\ A\mathbf{R})$ 保持括号 (1) 不变。若 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, 则可选取矩阵 A，使得 Φ_A将函数 K 变为 λR_3，其中 $\lambda =$ 为常数。显然，函数 λR_3 的哈密顿流不是周期的，因为场 $\operatorname{sgrad} R_3 = (-R_2, R_1, 0, 0, 0, 0)$ 的轨线在 e(3)*中是直线。

若存在非零的 α_i，则应用适当的变换 Φ_A，我们可以将 K 变为如下形式的函数：$cS_3 + \beta_1'R_1 + \beta_2'R_2 + \beta_3'R_3$。容易验证，对于任意向量 $\mathbf{v}$，变换 $\Psi_{\mathbf{v}}\colon (\mathbf{S},\mathbf{R}) \to (\mathbf{S} + \mathbf{v} \times \mathbf{R},\mathbf{R})$

也保持括号 (1) 不变。因此可以将函数 K 化为形式 $cS_3+\lambda R_3$，其中 $c\neq 0$。

现在考虑函数 $K=S_3+\lambda R_3$，并确定对于哪些 λ， K 的哈密顿流是周期性的。场 sgrad K =$(-S_2-\lambda R_2,\ S_1+\lambda R_1,\ 0,\ -R_2,\ R_1,\ 0)$ 的积分轨线可以明确写为:

$$\gamma(t)=((s_1-\lambda r_2 t)\cos t-(s_2+\lambda r_1 t)\sin t,\ (s_2+\lambda r_1 t)\cos t+(s_1-\lambda r_2 t)\sin t,\\ s_3,\ r_1\cos t-r_2\sin t,\ r_2\cos t+r_1\sin t,\ r_3),$$

其中 s_1， s_2， s_3， r_1， r_2， r_3 是常数。从这个公式可以清楚地看出，轨线仅在 $\lambda=0$ 时是周期性的。 □

注 1。 众所周知，任意紧群的作用都可以在不动点处线性化，并且对于圆群 S^1 的作用，相应的切空间可以表示为不变二维子空间之和。因此，在 $\mathrm{e}(3)^*$ 上的所有线性函数中，周期积分的特征是：它们在任意奇点处的线性化相对于切空间上的某个复结构是酉算子。还可以推出，除坐标系的选择以及乘以一个常数之外，$\mathrm{e}(3)^*$ 上的任意周期线性积分都是 S_3。

接下来我们将考虑李代数 e(3) 上具有第一积分 $K=S_3$ 、且哈密顿量 H 关于 S 为二次的哈密顿系统，即

$$H=A_1S_1^2+A_2S_2^2+A_3S_3^2+f_1(\mathbf{R})S_1+f_2(\mathbf{R})S_2+f_3(\mathbf{R})S_3+f_4(\mathbf{R}),\qquad(3)$$

其中 A_1、 A_2、 A_3 为任意正常数，而 f_1、 f_2、 f_3、 f_4 是关于 R_1、 R_2、 R_3的光滑函数。

首先，利用哈密顿量 (3) 与函数 S_3的对易性，将其改写成更方便的形式。

断言 2. 相差一个常数因子，任何与函数 $K=S_3$ 对易的该形式的哈密顿量都具有如下形式 (3)

$$H=\frac{1}{2}\Big(S_1^2+S_2^2+\frac{S_3^2}{\beta}\Big)+g_1(\boldsymbol{R}^2,R_3)(S_1R_2-S_2R_1)+\\ +g_2(\boldsymbol{R}^2,R_3)\langle\boldsymbol{S},\boldsymbol{R}\rangle+g_3(\boldsymbol{R}^2,R_3)S_3+V(\boldsymbol{R}^2,R_3),\qquad(4)$$

其中 $\beta>0$ 以及函数 g_1、 g_2、 g_3、 V 仅依赖于 $\boldsymbol{R}^2$ 和 R_3 ，并且当 $\boldsymbol{R}^2\neq 0$时是光滑的。

证明。 函数 K 对应的哈密顿向量场等于

$$\operatorname{sgrad}K=-R_2\frac{\partial}{\partial R_1}+R_1\frac{\partial}{\partial R_2}-S_2\frac{\partial}{\partial S_1}+S_1\frac{\partial}{\partial S_2}.$$

由于 $\{H,K\}=$(sgrad K)$H=0$，我们得到

$$(\operatorname{sgrad}K)H=2(A_2-A_1)S_1S_2+\\ +\Big(-R_2\frac{\partial f_1}{\partial R_1}+R_1\frac{\partial f_1}{\partial R_2}+f_2(\mathbf{R})\Big)S_1+\Big(-R_2\frac{\partial f_2}{\partial R_1}+R_1\frac{\partial f_2}{\partial R_2}-f_1(\mathbf{R})\Big)S_2+\\ +\Big(-R_2\frac{\partial f_3}{\partial R_1}+R_1\frac{\partial f_3}{\partial R_2}\Big)S_3+\Big(-R_2\frac{\partial f_4}{\partial R_1}+R_1\frac{\partial f_4}{\partial R_2}\Big)=0.$$

因此， $A_1 = A_2$ （乘以一个常数，就可以使这两个常数都等于 1 2），且括号中的四个表达式均为零。

在平面 (R_1, R_2) 上的极坐标 (ρ, φ) 中，向量场 $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ 恰为$-R_2 \frac{\partial}{\partial R_1} + R_1 \frac{\partial}{\partial R_2}$。因此，—— ——

$$\frac{\partial f_3}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial f_4}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = -f_2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = f_1.$$

这组方程中的前两个意味着 f_3 和 f_4 仅依赖于 ρ 和R_3，或者等价地， $f_3(\mathbf{R}) = g_3(\mathbf{R}^2, R_3)$ 以及 $f_4(\mathbf{R}) = V(\mathbf{R}^2, R_3)$。后两个方程可视为一个含参数 ρ 和 R_3的常微分方程组。求解该方程组，得到

$$f_1 = f_{11}(\rho, R_3)\cos\varphi + f_{12}(\rho, R_3)\sin\varphi = \frac{f_{11}(\rho, R_3)}{\rho} R_1 + \frac{f_{12}(\rho, R_3)}{\rho} R_2,$$
$$f_2 = -f_{12}(\rho, R_3)\cos\varphi + f_{11}(\rho, R_3)\sin\varphi = \frac{-f_{12}(\rho, R_3)}{\rho} R_1 + \frac{f_{11}(\rho, R_3)}{\rho} R_2.$$

由于 $\rho = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$，我们得到哈密顿量 H的所需形式。 □

3 零秩奇点

事实证明，具有线性周期积分 K 的 e(3) 上的哈密顿系统的平衡点* 恰好是满足 sgrad $K = 0$的点。这给出了这类可积哈密顿系统（其哈密顿量不一定具有形式 (3)）的零秩奇点的简单描述。

定理 1. 在具有积分 $K = S_3$ 的任意哈密顿量 H 下，*e(3)** 上可积哈密顿系统的秩*0*奇点集合是二维子空间

$$\{(0, 0, S_3, 0, 0, R_3)\} \tag{5}$$

e(3)* 中的二维子空间。特别地，对于每个轨道 $M^4_{a,\ g}$ 恰有两个秩*0*奇点：

$$\Big(0, 0, \pm\frac{g}{\sqrt{a}}, 0, 0, \pm\sqrt{a}\Big).$$

证明。 函数 f 在 e(3)* 上的哈密顿向量场具有如下形式

$$\operatorname{sgrad} f = \Big(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} \times \mathbf{S} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{R}} \times \mathbf{R}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} \times \mathbf{R}\Big), \tag{6}$$

而对于函数 $K = S_3$，我们有 sgrad $K = (-S_2,\ S_1,\ 0,\ -R_2,\ R_1,\ 0)$。因此，sgrad $K = 0$ 恰好在点 (5) 处取值。所以，除 (5) 以外的点不可能是秩0奇点。

我们来证明，sgrad H 在点 (5) 处消失。函数 H 和 K关于括号 (1) 彼此对易，即对于任意点 $y \in$e(3)*，都有 $d_y H(\text{sgrad}_y K) = 0$ （在 $d_y f$ 中，指标 y 表示微分取值的点；sgrad$_y f$ 则表示

或相应地，函数 f 的斜梯度取值的点）。在任意点 $y = (0,\ 0,\ S_3,\ 0,\ 0,\ R_3)$ 处对函数 $d_y H(\mathrm{sgrad}_y K)$ 求微分，得到

$$A_K^*(d_y H) = 0, \tag{7}$$

其中 A_K 是向量场 $\mathrm{sgrad}\, K$ 在点 y处的线性化算子，因为 $\mathrm{sgrad}_y K = 0$。算子 $A_K : \mathrm{e}(3)^* \to \mathrm{e}(3)^*$ 的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此，条件(7)意味着，对于任意点$y = (0,\ 0,\ S_3,\ 0,\ 0,\ R_3)$，$\frac{\partial H}{\partial S_1} = \frac{\partial H}{\partial S_2} = \frac{\partial H}{\partial R_1} = \frac{\partial H}{\partial R_2} = 0$。由此，$\mathrm{sgrad}\ H$在点(5)处消失，因为在点$y = (0,\ 0,\ S_3,\ 0,\ 0,\ R_3)$处，公式(6)变为

$$\mathrm{sgrad}_y f = \Big(S_3 \frac{\partial f}{\partial S_2} + R_3 \frac{\partial f}{\partial R_2}, -S_3 \frac{\partial f}{\partial S_1} - R_3 \frac{\partial f}{\partial R_1}, 0, R_3 \frac{\partial f}{\partial S_2}, -R_3 \frac{\partial f}{\partial S_1}, 0\Big).$$

定理 1 得证。 □

现在，我们来说明这些零秩点何时非退化，并确定它们的类型（有关动量映射奇点非退化性的更多信息，请参见 [1]）。

定理2。 对于具有任意哈密顿量 H 且拥有积分 $K = S_3$的$\mathrm{e}(3)^*$ 上的可积哈密顿系统，秩为0的奇点

$$P_\pm = \Big(0, 0, \pm\frac{g}{\sqrt{a}}, 0, 0, \pm\sqrt{a}\Big)$$

在轨道 $M^4_{a,\ g}$ 非退化当且仅当 $q \neq 0$，其中

$$q = p^2 + R_3^2(H_{11}H_{22} - |H_{12}|^2), \tag{8}$$

$$p = \frac{g}{2R_3}\frac{\partial^2 H}{\partial S_1^2} + R_3 \frac{\partial^2 H}{\partial S_1 \partial R_1} - \frac{\partial H}{\partial S_3}, \tag{9}$$

and

$$H_{11} = \frac{\partial^2 H}{\partial S_1^2}, \qquad H_{12} = \Big(\frac{\partial^2 H}{\partial S_1 \partial R_1} - \frac{1}{R_3}\frac{\partial H}{\partial S_3}\Big) + i\frac{\partial^2 H}{\partial S_2 \partial R_1},$$

$$H_{22} = \frac{\partial^2 H}{\partial R_1^2} + \frac{g}{R_3^3}\frac{\partial H}{\partial S_3} - \frac{1}{R_3}\frac{\partial H}{\partial R_3}.$$

此外，如果点 $P_\pm$ 非退化，那么它的类型为

1. 如果 $q > 0$，则为中心-中心型；
2. 如果 $q < 0$，则为焦点-焦点型。

定理2适用于任何与 $K = S_3$ 对易（且函数独立）的哈密顿量 H 。对于关于**S** 的二次哈密顿量 H ，非退化性条件以及秩0奇点的类型如下。

推论1. 对于哈密顿量(4)，秩0 奇点的类型完全由定理2 中的以下内容确定：

$$q = \frac{g^2}{4R_3^2} - R_3^2 g_1^2(a, R_3) + gR_3 \frac{\partial g_2}{\partial R_3}(a, R_3) - g\frac{\partial g_3}{\partial R_3}(a, R_3) - R_3 \frac{\partial V}{\partial R_3}(a, R_3).$$

证明。 计算定理2中的所有表达式，得到

$$\begin{gathered} H_{11} = 1, \qquad H_{12} = -\frac{1}{R_3}\Big(\frac{g}{\beta R_3} + g_3(a, R_3)\Big) - ig_1(a, R_3), \\ H_{22} = \frac{g}{R_3^3}\Big(\frac{g}{\beta R_3} + g_3(a, R_3)\Big) - \\ -\frac{1}{R_3}\Big(g\frac{\partial g_2}{\partial R_3}(a, R_3) + \frac{g}{R_3}\frac{\partial g_3}{\partial R_3}(a, R_3) + \frac{\partial V}{\partial R_3}(a, R_3)\Big), \end{gathered} \tag{10}$$

and

$$p = \frac{g}{R_3}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta}\Big) - g_3(a, R_3).$$

将它们代入 (8)，即可得到所需的 q 公式。 □

为了证明定理2，我们使用以下非退化性判据（见 [1]），该判据可视为定义。

定义 1。 辛流形 M^4 上，哈密顿量为 H、积分为 K 的可积哈密顿系统中，秩为 0 的点 P 非退化，当且仅当满足以下两个条件：

- 哈密顿向量场 $\operatorname{sgrad} H$ 和 $\operatorname{sgrad} K$ 在点 P 处的线性化 A_H 和 A_K 线性无关，
- 存在一个线性组合 $\lambda A_H + \mu A_K$，其具有四个互不相同的非零特征值。

下面研究秩 0 点处 $\operatorname{sgrad} H$ 的线性化谱。在轨道 $M^4_{a,g}$ 上的秩 0 点 $P_\pm$ 的邻域内，取函数 S_1, S_2, R_1, R_2 作为局部坐标，则有

$$R_3 = \pm\sqrt{a - R_1^2 - R_2^2}, \qquad S_3 = \frac{1}{R_3}(g - S_1R_1 - S_2R_2).$$

记 $\widehat{H}(S_1, S_2, R_1, R_2)$ 为函数 H 在 $M^4_{a,g}$ 上的限制。

引理 1. 对于任意与 $K = S_3$ 对易的函数 H，秩0 奇点 $P_\pm$ 处的线性化算子 $\widehat{A}_{\widehat{H}} = \operatorname{Lin}(\operatorname{sgrad} H)$ 的谱具有如下形式：$\sigma(A_{\widehat{H}}) = \{\pm i(p + \sqrt{q}) \ \pm i(p - \sqrt{q})\}$，其中 p 和 q 分别由(9)和(8)给出。

证明。 在坐标 S_1， S_2， R_1， R_2 中，辛叶$M^4_{a,\ g}$ 上的泊松括号形式为

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & S_3 & 0 & R_3 \\ -S_3 & 0 & -R_3 & 0 \\ 0 & R_3 & 0 & 0 \\ -R_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

容易验证，sgrad K 的线性化在切空间上定义了一个复结构:

$$A_{\widehat{K}} = \mathrm{Lin}(\mathrm{sgrad}\,\widehat{K}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

由于 $[A_{\widehat{H}}, A_{\widehat{K}}] = 0$，算子 $A_{\widehat{H}}$可以复化。泊松结构的矩阵也可以复化，即我们可以将矩阵中的 (2×2)-块$\left(\begin{smallmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ 与复数 $\alpha + i\beta$对应起来。因此，在复坐标 $S_1 + iS_2$, $R_1 + iR_2$ 下，泊松结构的矩阵 $\mathcal{A}$ 具有如下形式

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -iS_3 & -iR_3 \\ -iR_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

在辛流形上，我们有 $A_{\widehat{H}} = \mathcal{A}\, d^2\widehat{H}$，因此 $d^2\widehat{H}$ 也可以复化。通过直接计算可得

$$d^2\widehat{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ \overline{H}_{12} & H_{22} \end{pmatrix},$$

其中 H_{lj} 由公式 (10) 给出。 H_{11} 和 H_{22} 的虚部为零，因为 H 与 K对易。

利用如下事实：若 μ_1, μ_2 是实矩阵 A, B的矩阵 $(A + iB)$ 的特征值，则矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ -B & A \end{smallmatrix}\right)$ 的特征值为 μ_1, μ_2, μ_1, μ_2，由此可得（实）算子 $A_{\widehat{H}}$ 的谱由方程给出

$$\mu^2 - i(S_3H_{11} + R_3H_{12} + R_3\overline{H}_{12})\mu + R_3^2(H_{11}H_{22} - |H_{12}|^2) = 0,$$

哪些解给出了所需的谱。引理 1 得证。 □

注 2. 由(11) 可知，对于积分 $K = S_3$，相应算子 $A_{\widehat{K}}$ 的谱为 $\sigma(A_{\widehat{K}})$ $= \{i, -i, i, -i\}$。这并不能直接证明这些点是非退化的，但表明非退化点只能是中心-中心型或焦点-焦点型。

定理 2 的证明。利用引理 1 和非退化性的定义 1，我们得到定理中的条件，除 $q = 0$ 或 $p^2 = q$ 的情况外。

若 $q = 0$，则 $A_{\widehat{H}}$ 和 $A_{\widehat{K}}$ 的谱成比例，因此该点是退化的（这恰好是焦点-焦点型点的像在变为中心-中心型点的过程中与分岔图的一段弧相交的时刻）。

如果 $p^2 = q$，那么该点是非退化的，只需取另一个具有不同特征值的线性组合即可（因为 $A_{\widehat{H}}$ 和 $A_{\widehat{K}}$ 的谱不成比例，这样的线性组合必然存在）。 □

4 分岔图

为了构造分岔图，我们来描述动量映射的所有临界点。秩0奇点已在第3节中求出。因此，只需描述秩1奇点。接下来的两个引理表明，我们可以使用一些方便的坐标来研究它们。

引理2. 对于哈密顿量为 H 、形式如(4) 且积分为 $K = S_3$的哈密顿系统，子空间 $\{(\boldsymbol{S},\boldsymbol{R}) \mid R_1 = R_2 = 0\}$ 在$\mathrm{e}(3)^*$ 中不包含秩1点。

证明. 由于我们已知所有秩0奇点（它们是满足 $R_1 = R_2 = S_1 = S_2 = 0$ 的点；见定理 1），因此只需证明：若 $y = (S_1, S_2, S_3, 0, 0, R_3) \in \mathrm{e}(3)^*$ 是一个奇点，那么其坐标 S_1 和 S_2 均为零。假设并非如此。那么 $\operatorname{sgrad}_y K = (-S_2, S_1, 0, 0, 0, 0) \neq 0$，因此，对于某个 λ，$\operatorname{sgrad}_y H = \lambda \operatorname{sgrad}_y K$。由此，根据公式(6)（考虑到 $R_3 \neq 0$），我们在点 y处有 $\frac{\partial H}{\partial S_1} = \frac{\partial H}{\partial S_2} = 0$。但是，对于形式如(4)的哈密顿量，这只有在点 y满足 $S_1 = S_2 = 0$ 时才可能。 □

现在，由于我们可以假设 $R_1^2 + R_2^2 \neq 0$，因此在剩余点集 $U = \mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{R}) \setminus \{R_1 = R_2 = 0\}$上选取新的坐标。注意，集合 U与 $\mathbb{R}^5 \times S^1$同胚。

引理3. 公式

$$\begin{gathered} S_1 = \frac{(g - kx)\cos\varphi + m\sin\varphi}{\sqrt{a - x^2}}, \quad S_2 = \frac{(g - kx)\sin\varphi - m\cos\varphi}{\sqrt{a - x^2}}, \\ S_3 = k, \quad R_1 = \sqrt{a - x^2}\,\cos\varphi, \quad R_2 = \sqrt{a - x^2}\,\sin\varphi, \quad R_3 = x \end{gathered} \tag{12}$$

在集合 U上定义正则坐标 (x, m, φ, k, a, g)，其中 $x^2 < a$，而 φ 是角坐标，即模 2π定义。

集合 U上的逆变量变换，即通过 $(\boldsymbol{S},\boldsymbol{R})$ 表示 (x, m, φ, k, a, g)，如下：

$$\begin{gathered} x = R_3, \quad m = M(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}) = S_1R_2 - S_2R_1, \quad \varphi = \arg(R_1 + iR_2), \\ k = S_3, \quad a = F_1(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}) = \langle \boldsymbol{R}, \boldsymbol{R} \rangle, \quad g = F_2(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}) = \langle \boldsymbol{S}, \boldsymbol{R} \rangle. \end{gathered}$$

证明。 通过直接计算，很容易验证给定公式定义了一个双射，并且雅可比行列式在 U 上不为零：

$$\det \frac{\partial(x, m, \varphi, k, a, g)}{\partial(S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3)} = 2(R_1^2 + R_2^2) \neq 0.$$

□

将表达式 (12) 代入 (4)，可得集合 U 上坐标 $(x,\ m,\ \varphi,\ k,\ a,\ g)$ 中的哈密顿量具有如下形式

$$H = \frac{(g - kx)^2 + m^2}{2(a - x^2)} + \frac{k^2}{2\beta} + g_1(a, x)m + g_2(a, x)g + g_3(a, x)k + V(a, x). \tag{13}$$

接下来，我们通常会省略 $g_1,\ g_2,\ g_3,\ V$的自变量，并假设它们是 a 和 x的函数。

下面的陈述描述了秩1奇点的集合。

定理 3. 对于具有哈密顿量(4) 和积分 $K = S_3$ 的$\mathrm{e}(3)^*$ 上的系统，所有秩1 奇点的集合由坐标(x, m, φ, k, a, g):中的以下两个方程给出

$$m = -(a - x^2)g_1, \tag{14}$$

$$\frac{(kx-g)(ka-gx)}{(a-x^2)^2} + xg_1^2 - (a-x^2)g_1\frac{\partial g_1}{\partial x} + g\frac{\partial g_2}{\partial x} + k\frac{\partial g_3}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \tag{15}$$

证明。 在坐标 $(x,\ m,\ \varphi,\ k,\ a,\ g)$ 中计算泊松括号矩阵，得到

$$\begin{pmatrix} 0 & a-x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2-a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，在这些坐标下， H 和 K 的斜梯度为

$$\begin{aligned} &\operatorname{sgrad} H = \Big((a-x^2)\frac{\partial H}{\partial m}, (x^2-a)\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial k}, 0, 0, 0\Big), \\ &\operatorname{sgrad} K = (0, 0, 1, 0, 0, 0). \end{aligned} \tag{16}$$

这里我们考虑到 $\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \{H, K\} \equiv 0$。

因此，在点$y \in \mathrm{e}(3)^*$处，$\operatorname{sgrad} H$和$\operatorname{sgrad}\ K$线性相关的条件

$$\operatorname{sgrad} H = \lambda \operatorname{sgrad} K$$

等价于以下条件

$$\frac{\partial H}{\partial m} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial k} = \lambda \tag{17}$$

在点 y处。对哈密顿量 (13) 关于 m 和 x求导，可知 $\frac{\partial H}{\partial m} = 0$ 等价于 (14)，而将 (14)中的m 代入后， $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$ 等价于 (15)。

□

推论 2. 在每个轨道 $M^4_{a,\ g}$ 秩为 1 的奇异点集合构成一族由参数化曲线上的点 (k, x) 确定的临界圆，其曲线由方程 (15)定义。对于每个满足 (15) 的点 (k, x) ， $M^4_{a,\ g}$ 中的相应临界圆由以下公式给出

$$S_1 = \frac{(g-kx)\cos\varphi - (a-x^2)g_1\sin\varphi}{\sqrt{a-x^2}}, \quad S_2 = \frac{(g-kx)\sin\varphi + (a-x^2)g_1\cos\varphi}{\sqrt{a-x^2}},$$
$$S_3 = k, \quad R_1 = \sqrt{a-x^2}\,\cos\varphi, \quad R_2 = \sqrt{a-x^2}\,\sin\varphi, \quad R_3 = x,$$

其中 φ是圆群上的一个参数。

证明。 如定理 3 的证明所示，$\operatorname{sgrad}\ K = \frac{\partial}{\partial \varphi}$在坐标 (x, m, φ, k, a, g) 下。因此，每个临界圆群都是坐标 φ 的一条坐标线。将 (14) 代入表达式 (12)，即可得到所需公式。

□

现在我们可以描述分岔图。对于每一对参数a, g，其中 $a > 0$，考虑函数

$$W_{a,g}(k,x) = \frac{(g-kx)^2}{2(a-x^2)} + \frac{k^2}{2\beta} - \frac{g_1^2}{2}(a-x^2) + g_2 g + g_3 k + V, \tag{18}$$

它是约化势的一个类似物。回顾一下， g_1、 g_2、 g_3、 V是 a 和 x的函数。

定理 4. 哈密顿量为(4) 、在轨道(2) 上积分为 $K = S_3$ 的可积哈密顿系统，其分岔图在平面 $\mathbb{R}^2(h, k)$:上由以下子集组成:

1) 两个点 $Z_\pm$ (当 $g = 0$) 时它们可以重合，其坐标为

$$h = \frac{g^2}{2\beta a} + g\, g_2(a, \pm\sqrt{a}) \pm \frac{g}{\sqrt{a}}\, g_3(a, \pm\sqrt{a}) + V(a, \pm\sqrt{a}), \quad k = \pm\frac{g}{\sqrt{a}},$$

它们是两个秩0；奇点的像

2) 点$(h(x)\ k(x))$ 是秩1 奇点的像，并由参数 x参数化，其中函数 $k(x)$ 由二次(或一次) 方程$\partial W_{a,\ g}{}^{\ g}{}_{\partial x}\,(k, x) = 0$隐式定义，而 $h(x) = W_{a,\ g}(k(x)\ x)$。

证明。 第一条结论可由描述秩 0 奇点的定理 1 立即得到。同理，考虑哈密顿量 H 的表达式 (13) 以及函数$W_{a,\ g}$的定义 (18)，第二条结论可由定理 3 描述秩1奇点的结果得到。

□

注 3. 对于每个固定的 a, g ，定理 4 中的方程

$$h = W_{a,g}(k,x), \qquad \frac{\partial W_{a,g}}{\partial x}(k,x) = 0 \tag{19}$$

描述属于轨道$M^4_{a,g}$ 的秩1 奇异点集的像，恰好就是抛物线族包络线的方程

$$h = \Big(\frac{x^2}{2(a-x^2)} + \frac{1}{2\beta}\Big)k^2 + B_{a,g}(x)k + C_{a,g}(x)$$

在平面 $\mathbb{R}^2(h, k)$ 上随参数 x 变化，其中

$$\begin{aligned} B_{a,g}(x) &= g_3(a,x) - \frac{gx}{a-x^2}, \\ C_{a,g}(x) &= \frac{g^2}{2(a-x^2)} - \frac{g_1^2(a,x)}{2}(a-x^2) + g_2(a,x)g + V(a,x) \end{aligned} \tag{20}$$

(见公式 (18))。换言之，分岔图(不含点 $Z_\pm$)可视为该抛物线族的包络线。

分岔图 Σ 是 $\Sigma_0 = \{Z_\pm\}$ 与 Σ_1 的并集，后者由秩1奇点的像组成。让我们将描述Σ_1 的条件 (19) 改写为更明确的参数形式。

定理 4 中的关系 $\partial W_{a,\ \partial x}{}^{g}(k,\ x)\ =\ 0$ 正是方程 (15)。用记号 (20) 可将其写为

$$\frac{ax}{(a-x^2)^2}k^2 + B'_{a,g}(x)k + C'_{a,g}(x) = 0, \tag{21}$$

其中

$$B'_{a,g}(x) = \frac{\partial g_3}{\partial x} - \frac{g(a+x^2)}{(a-x^2)^2},$$
$$C'_{a,g}(x) = \frac{g^2 x}{(a-x^2)^2} + xg_1^2 - (a-x^2)g_1\frac{\partial g_1}{\partial x} + g\frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x}.$$

方程 (21) 关于 k 是二次方程，当 $x \neq 0$ 时成立（当 $x = 0$时可化为线性方程）。其判别式为

$$D_{a,g}(x) = (B'_{a,g}(x))^2 - \frac{4ax}{(a-x^2)^2}C'_{a,g}(x) = \frac{1}{(a-x^2)^2}\Big(g - (a+x^2)\frac{\partial g_3}{\partial x}\Big)^2 -$$
$$- \frac{4ax}{(a-x^2)^2}\Big(xg_1^2 - (a-x^2)g_1\frac{\partial g_1}{\partial x} + g\frac{\partial g_2}{\partial x} + x\Big(\frac{\partial g_3}{\partial x}\Big)^2 + \frac{\partial V}{\partial x}\Big).$$

为了描述分岔曲线的参数化，考虑集合

$$\Theta_{a,g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < a,\ x \neq 0,\ D_{a,g}(x) \geq 0\}.$$

它的每个（弧）连通分支都是一个区间，该区间要么是非退化的（即长度非零），要么是退化的（即为一个点）。用 $\mathcal{I}_{a,g}$ 表示所有非退化区间组成的集合，用 $\Theta^0_{a,\ g}$表示退化区间组成的集合。显然，$\Theta_{a,g} \setminus \Theta^0_{a,g} = \bigcup_{I\in\mathcal{I}_{a,g}} I$。

由于 $\Theta_{a,g}$ 显然是 $(-\sqrt{a},0) \cup (0,\sqrt{a})$ 的闭子集，因此，$\mathcal{I}_{a,g}$ 中的区间都包含其端点，除非某个端点是 $\pm\sqrt{a}$ 或 0。

因此，平面 $\mathbb{R}^2(h,k)$ 中的集合 Σ_1 包含定义在 $\mathcal{I}_{a,g}$中区间上的曲线、对应于 $\Theta^0_{a,g}$中各点的“孤立”点，以及可能还有对应于 $x = 0$的其他内容。Σ_1 的明确描述见下述命题。

定理 5。对于哈密顿量(4) 和轨道(2) 上的积分 $K = S_3$ 所对应的可积哈密顿系统，集合 Σ_1 是平面 $\mathbb{R}^2(h,k)$：上的以下参数曲线与点的并集

1) 曲线对 $(h_\pm(x)\ \ k_\pm(x))$，$x \in I$，对每个 $I \in \mathcal{I}_{a,\ g}$，其中

$$h_\pm(x) = \frac{(g-k_\pm(x)x)^2}{2(a-x^2)} + \frac{k_\pm^2(x)}{2\beta} - \frac{(a-x^2)g_1^2}{2} + g_2 g + g_3 k_\pm(x) + V,$$
$$k_\pm(x) = \frac{g(a+x^2)}{2ax} - \frac{(a-x^2)^2}{2ax}\frac{\partial g_3}{\partial x} \pm \frac{(a-x^2)}{2ax}\times \tag{22}$$
$$\times\sqrt{\Big(g-(a+x^2)\frac{\partial g_3}{\partial x}\Big)^2 - 4ax\Big(xg_1^2 - (a-x^2)g_1\frac{\partial g_1}{\partial x} + g\frac{\partial g_2}{\partial x} + x\Big(\frac{\partial g_3}{\partial x}\Big)^2 + \frac{\partial V}{\partial x}\Big)};$$

2) 对于每个 $x_0 \in \Theta^0_{a,g}$，点 $(h(x_0)\ \ k(x_0))$，其中

$$h(x_0) = \frac{(g-k(x_0)x_0)^2}{2(a-x_0^2)} + \frac{k^2(x_0)}{2\beta} - \frac{(a-x_0^2)g_1^2}{2} + g_2 g + g_3 k(x_0) + V,$$
$$k(x_0) = \frac{g(a+x_0^2)}{2ax_0} - \frac{(a-x_0^2)^2}{2ax_0}\frac{\partial g_3}{\partial x}(a,x_0),$$

并且这些公式中的 g_1, g_2, g_3, V 表示相应函数在点 (a, x_0);处的值

3) 对于轨道 $M^4_{a,g}$，其中 $g \neq a\frac{\partial g_3}{\partial x}(a,0)$，点 (h_0, k_0)，其中

$$h_0 = \frac{g^2}{2a} + \frac{k_0^2}{2\beta} - \frac{ag_1^2(a,0)}{2} + g_2(a,0)g + g_3(a,0)k_0 + V(a,0),$$
$$k_0 = \frac{ag_1(a,0)\frac{\partial g_1}{\partial x}(a,0) - g\frac{\partial g_2}{\partial x}(a,0) - \frac{\partial V}{\partial x}(a,0)}{\frac{\partial g_3}{\partial x}(a,0) - \frac{g}{a}};$$

4) 对于轨道 $M^4_{a,g}$，其中 $g = a\frac{\partial g_3}{\partial x}(a,0)$ 且 a 满足关系式

$$ag_1(a,0)\frac{\partial g_1}{\partial x}(a,0) - a\frac{\partial g_3}{\partial x}(a,0)\frac{\partial g_2}{\partial x}(a,0) - \frac{\partial V}{\partial x}(a,0) = 0,$$

抛物线

$$h = \frac{k^2}{2\beta} + g_3(a,0)k + \frac{a}{2}\Big(\frac{\partial g_3}{\partial x}(a,0)\Big)^2 - \frac{a}{2}g_1(a,0) + a\frac{\partial g_3}{\partial x}(a,0)g_2(a,0) + V(a,0).$$

证明。 情形 1)–4) 中的所有公式均由方程 (19) 和表达式 (18) 得出。情形 1) 和 2) 对应于每个参数 x （取自 $\Theta_{a,g}$）时二次方程 (21) 的解；而在情形 2) 中，当 $x \in \Theta^0_{a,g}$ 时，相应的判别式 $D_{a,g}(x)$ 为零，因为 $D_{a,g}$ 是区间 $(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$ 上的连续函数。

情形 3) 对应于方程 (21) 中的 $x = 0$。若 $B'_{a,g}(0) = \frac{\partial g_3}{\partial x}(a,0) - \frac{g}{a} \neq 0$，则 $-C'_{a,g}(0)/B'_{a,g}(0)$ 是关于 $x = 0$ 的线性方程 (21) 的唯一解，因此得到情形 3) 中的点 (h_0, k_0)。注意，若 $B'_{a,g}(0) \neq 0$，则判别式 $D_{a,g}(x)$ 在某个区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上为正，并且存在两条分别定义在 $(-\varepsilon, 0)$ 和 $(0, \varepsilon)$ 上的分岔曲线 (22)；当 $x \to 0$ 时，它们趋于点 (h_0, k_0)，并在该点连接成一条由两条曲线拼接而成的光滑分岔曲线。

情形4)也对应于 $x = 0$，但情形4)中关于 g 和 a 的条件等价于条件$B'_{a,g}(0) = C'_{a,g}(0) = 0$，这意味着任意 k 都是方程(21)在 $x = 0$下的解。因此，我们得到了情形4)中所需的抛物线。

□

请注意，对于任意函数 g_1, g_2, g_3, V，定理 5 中通过显式公式描述的分岔曲线，其行为可能相当复杂。它们可能有许多尖点，彼此相交，或在某些弧段上重合。以下陈述描述了分岔曲线行为的一些一般性质。

推论3。 1) 若$J \subset \Theta_{a,g}$ 是一个开区间，且满足$D_{a,g}|_J > 0$，则由公式$(h_\pm(x)\ k_\pm(x))$ 在 J 上定义的分岔曲线是一条光滑参数曲线，对所有 x均为正则曲线，其中 $\frac{dk_\pm}{dx}(x) \neq 0$。

2) 定理 5 中1) 和4)两项所述的分岔曲线恰有两段弧趋于无穷远，使得 $h(k) \sim \frac{k^2}{2\beta}$ (一段弧对应 $k \to +\infty$，另一段对应 $k \to -\infty$)。对于由公式(22) 定义的曲线，这两段弧对应于 $x \to 0$。

3) 对于每个秩为0 且属于中心-中心型的奇点 $P_\pm$ (根据定理2，这类奇点可能有0、1或2 个)，恰有两条由公式(22) 描述的分岔曲线弧趋向定理4 中作为 $x \to \pm\sqrt{a}$ 描述的相应点 $Z_\pm$。

证明。 由于 $h = h_{\pm}(x)$、 $k = k_{\pm}(x)$ 满足方程 (19)，我们有

$$\frac{dh_{\pm}}{dx}(x) = \frac{\partial W_{a,g}}{\partial k}(k_{\pm}(x), x)\frac{dk_{\pm}}{dx}(x).$$

因此，参数曲线（22）当且仅当 $\frac{dk_{\pm}}{dx}(x) \neq 0$ 时是正则的，并且只有在 $\frac{dk_{\pm}}{dx} = 0$ 的点处才可能存在奇异性（例如尖点）。

考察参数曲线（$h_{\pm}(x)$ $k_{\pm}(x)$) 在 x 趋于 0 或 $\pm\sqrt{a}$ 时的行为，即可由公式（22）得到第 2）和第 3）项。注意，当且仅当推论1中的 q 对于 $R_3 = \pm\sqrt{a}$ 为正时，$D_{a,g}$ 在点 $\pm\sqrt{a}$ 的邻域内为正。 □

5 刘维尔环面分岔

All 关于刘维尔环面分岔的基本定义和事实可见于 [1]。

定理6。 秩为 1 (定理 3 和推论 2) 中描述的奇点是非退化的，当且仅当 $\frac{\partial^2 W_{a,g}}{\partial x^2}(k, x) \neq 0$，其中 $W_{a,g}(k, x)$ 由 (18) 给出。此外，

- 如果 $\frac{\partial^2 W_{a,g}}{\partial x^2}(k,x) > 0$，那么该点的类型为椭圆型;
- 如果 $\frac{\partial^2 W_{a,g}}{\partial x^2}(k,x) < 0$，那么该点的类型为双曲型。

秩 1 奇点 y 的非退化性和类型完全由哈密顿向量场的线性化谱决定；该哈密顿向量场是 sgrad H 和 sgrad K 的一个在 y处消失的（非平凡）线性组合。因此，定理6可由以下命题推出。

引理 4. 定理 3 和推论 2) 中所述的每个秩1 (点 y 都是向量场 $\operatorname{sgrad} F_y$的奇点，其中 $F_y = H - \lambda K$ 和 $\lambda = \frac{\partial H}{\partial k}\big|_y$。点 y 处线性化 $A_{F_y} = \operatorname{Lin}(\operatorname{sgrad} F_y)$ 的谱 $A_{F_y} =$ 由4 个零组成，且

$$\mu_{\pm} = \pm i\sqrt{\frac{\partial^2 W_{a,g}(k,x)}{\partial x^2}}.$$

证明。 证明可通过直接计算得到。引理3中坐标（x， m， φ， k， a， g）下的哈密顿向量场 sgrad H和 sgrad K由（16）给出，而在秩 1 点 $y \in$ e(3)* 处，满足条件（17）。因此，对于函数 $F_y = H - \lambda K$（其中 $\lambda = \frac{\partial H}{\partial k}\big|_y$），有 sgrad $_y F_y = 0$，故该向量场的线性化 A_{F_y}

$$\operatorname{sgrad} F_y = \left((a-x^2)\frac{\partial H}{\partial m}, -(a-x^2)\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial k} - \lambda, 0, 0, 0\right)$$

在点 y 处定义良好。考虑条件 (17)，我们得到关于 A_{F_y} 的谱的下列方程:

$$\det(A_{F_y} - \mu\,\mathrm{Id}) = \mu^4(a-x^2)^2 \det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial m \partial x} - \mu & \frac{\partial^2 H}{\partial m^2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial m} - \mu \end{pmatrix} = 0.$$

因此， A_{F_y} 的非零特征值为

$$\mu_{\pm} = \pm\sqrt{\Big(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial m}\Big)^2 - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\frac{\partial^2 H}{\partial m^2}}. \tag{23}$$

对于式（13）给出的函数 H，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 H}{\partial m^2} = \frac{1}{a-x^2}, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial m} = \frac{\partial g_1}{\partial x}(a,x) + \frac{2mx}{(a-x^2)^2},\\
&\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{(g^2+ak^2+m^2)(a+3x^2) - 2gkx(x^2+3a)}{(a-x^2)^3} +\\
&+m\frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2}(a,x) + g\frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(a,x) + k\frac{\partial^2 g_3}{\partial x^2}(a,x) + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a,x).
\end{aligned} \tag{24}$$

由于根据定理 3，在奇点处有 $m = -(a-x^2)g_1(a,x)$，等式（24）可改写为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 H}{\partial m^2} = \frac{1}{a-x^2}, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial m} = \frac{\partial g_1}{\partial x}(a,x) - \frac{2x g_1(a,x)}{a-x^2},\\
&\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W_{a,g}(k,x)}{\partial x^2} + (a-x^2)\Big(\frac{\partial g_1}{\partial x}(a,x) - \frac{2x g_1(a,x)}{a-x^2}\Big)^2,
\end{aligned} \tag{25}$$

其中 $W_{a,\ g}(k,\ x)$ 由式（18）给出。将表达式（25）代入公式，我们得到所需 (23)
的 $\mu_{\pm}$ 表达式。

引理 4 以及由此得到的定理 6 得证。 □

定理 7。对于具有哈密顿量 （4）和积分 $K = S_3$ 、定义在轨道 （2） 上的可积哈密顿系统，其等能面 Q^3 可能出现的唯一非退化刘维尔环面分岔是所谓的 A 和 V_k 分岔。特别地，如果一个纤维中只有一个奇异圆，那么该分岔要么是 A，要么是 B。

证明。只有一个椭圆分岔（类型为 A），因此我们考虑双曲分岔。由于所有秩 1 临界点都满足条件$R_1^2 + R_2^2 \neq 0$，我们可以在坐标 $(x,\ m,\ \varphi,\ k,\ a,\ g)$ 下进行研究。

考虑动量映射$M^4_{a,g} \to \mathbb{R}^2(h,k)$下点（$h_0, k_0$）的原像。则 φ 任意，而 m 由下式给出

$$\frac{(m + (a-x^2)g_1(a,x))^2}{2(a-x^2)} = h_0 - W_{a,g}(k_0, x), \tag{26}$$

其中 x 满足条件$h_0 \geq W_{a,g}(k_0, x)$。

因此，非退化奇点的奇异纤维的任意连通分支，都是 S^1 与如图 1 所示的 k 个圆群的楔和的乘积。更准确地说，平面（m, x）中由方程（26）给出的集合，与在点$h_0 = W_{a,g}(k_0, x)$处相交的圆群之并同胚。

由于该奇点是非退化的，这正是V_k 原子的分岔。定理 7 得证。

□

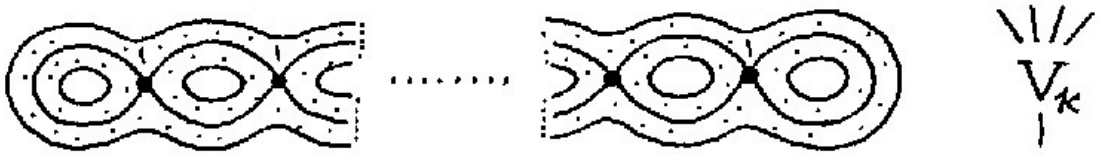


图 1：原子 V_k。

6 等能面

对于 e(3) 上的哈密顿函数 H^*，它关于**S**是正定二次型，等能面的拓扑完全由其在泊松球面上的投影决定（详情见 [1]）。根据定理2，该投影在绕 R_3轴旋转时保持不变。由此直接得到以下结论。

定理 8. 可积哈密顿系统的任意等能面 Q^3，其哈密顿量为(4)，积分为 $K = S_3$，轨道为(2)，要么是 $\mathbb{RP}^3$，要么是由 k 个乘积 $S^1 \times S^2$ 与至多两个球面 S^3 不相交并组成的并集。

证明。如果 Q^3 在泊松球面上的投影是满射，那么 $Q^3 = \mathbb{RP}^3$。否则，投影的像是 l 个环带与至多两个圆盘的并集，这些圆盘的中心位于极点$\mathbf{R} = (0, 0, R_3)$。每个环带对应$S^1 \times S^2$，每个圆盘对应 S^3。

□

致谢 本研究得到俄罗斯科学基金会资助，项目编号：17-11-01303。

参考文献

[1] A.V. Bolsinov 和 A.T. Fomenko，《可积哈密顿系统：几何、拓扑、分类》(CRC，博卡拉顿，佛罗里达州，2004)。[2] A.V. Borisov 和 I.S. Mamaev，《刚体动力学》(NIC Regular Chaotic Dynamics，莫斯科、伊热夫斯克，2001) [（俄文）]。[3] A. A. Oshemkov，“刚体运动方程主要可积情形的福缅科不变量”，载于《可积系统的拓扑分类》，Adv. Sov. Math. **6**，67–146（1991）。[4] A. V. Bolsinov、A. M. Izosimov、A.Yu. Konjaev 和 A. A. Oshemkov，“可积系统的代数与拓扑：研究问题”，Tr. Sem. Vektor. Tenzor. Anal.**28**，119–191（2012）。[5] E.O. Kantonistova，“旋转曲面势场中可积哈密顿系统的拓扑分类”，Mathematics，**207**，358–399（2016）。

[6] B.S. Kruglikov，可积情形下 *He-A* 的 *Leggett* 系统拓扑分类 ^{3}He-A，Uspekhi Mat. Nauk，**46**：179–181（1991）。
[7] M.Yu. Ivochkin, Mat. Sb., 199:6 (2008), 85–104 椭球体在光滑平面上运动的拓扑分析,Mat. Sb., **199**, 871–890 (2008).