arXiv:2301.05289v2 [math.DG] 8 May 2024

布拉施克轨迹中的协方差度量

XIAN DAI 和 NIKOLAS EPTAMINITAKIS

Abstract. 我们证明，布拉施克轨迹除 Teichm¨uller 空间外具有有限维光滑流形结构，并研究其相对于 Guillarmou、Knieper 和 Lefeuvre 引入的协方差度量的黎曼流形结构，见 [GKL21]。我们还确定了布拉施克轨迹中若干源自轨形的 Hitchin 表示的测地线族，并证明它们相对于协方差度量具有无限长度。

1. Introduction

经典 Teichm¨uller 理论是一个丰富的领域，涉及分析、几何和拓扑工具之间的相互作用。一个可追溯至二十世纪初的优美定理指出，Teichm¨uller 空间是有限维光滑可缩流形（例如参见 [Tei43], [Ahl60], [Wol89]）。关于这一事实的诸多不同证明中，一种由 Fischer 和 Tromba 提出的方法（[FT84]）基于整体分析和黎曼几何，将 Teichm¨uller 空间视为闭连通定向曲面上双曲度量同痕类构成的空间；该曲面的亏格为 S。从这一黎曼几何刻画还可以得到许多其他有趣的结果：例如，Teichm¨uller 空间上的 Weil-Petersson 度量是 K¨ahler 度量，且具有负截面曲率（例如参见 [Tro92，第 5]节）。

在本文中，我们将采用这种黎曼几何方法，探讨包含 Teichm¨uller 空间的负曲率度量同痕类空间中一个有限维子空间的性质。给定 S 上的一个复结构 J 以及相对于 J的一个全纯三次微分，我们可以将它们提升到 S 的万有覆盖 $\tilde{S}$ 上，并由此得到一个参数化 $f:\ \tilde{S} \to \mathbb{R}^3$，它对应于仿射微分几何中一种特殊类型的超曲面，称为双曲仿射球（参见 [Lof10], ，以及第 5.1 节）。$\mathbb{R}^3$ 中的双曲仿射球是一种仿射平均曲率为常负值的曲面（参见第 5.1 节）。它天然带有一个仿射不变黎曼度量，该度量下降为 S 上共形类 J 中的一个唯一确定的负曲率度量，称为布拉施克度量。我们用 $\mathcal{M}^B$ 表示 S 上的布拉施克度量空间，用 $\mathcal{M}_{-1}$表示 S 上的光滑双曲度量空间。S 上的双曲度量 $\sigma \in \mathcal{M}_{-1}$ 是布拉施克度量的一种特殊情形：此时，由对应于 σ 的复结构和零三次微分所确定的双曲仿射球，可以取为双曲空间的双曲面模型；下降得到的布拉施克度量恰好就是双曲度量 σ. 。因此，对与恒等映射同伦的光滑微分同胚空间 $\mathcal{D}_0$取商后，Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(S) = \mathcal{M}_{-1}/\mathcal{D}_0$ 包含于空间 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$中，我们称后者为布拉施克轨迹。

我们的研究分为两个方向：第一，理解有限维布拉施克轨迹的拓扑与正则性。第二，研究它的一些黎曼几何性质；所用的黎曼度量构造于 [GKL21] 在负曲率度量的同痕类空间上，并且在 $\mathcal{T}(S)$上限制为 Weil-Petersson度量。

1.1. 布拉施克轨迹的结构及其与高阶 Teichm¨üller 理论的关系。

我们的第一个结果关注 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$的拓扑与光滑结构。证明遵循 Tromba 对 Teichm¨üller 空间是光滑流形这一事实的证明思路（[Tro92，推论 2.4。6]）。

定理A （定理5.20，定理 5.17）。 Blaschke轨迹 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 是一个可缩空间。此外，它具有光滑流形结构，其维数为 $16\mathfrak{g} - 17$，但不包括 Teichm ¨üller 空间 $\mathcal{T}$（S）。

为了说明我们为何关注布拉施克轨迹，以及定理 A 证明背后的思路，我们现在从另一个角度进一步阐释布拉施克轨迹与 Teichm¨uller 空间之间的关系。为此，我们先简要介绍密切相关的对象——希钦分支。传统上，除了将 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(S)$ 视为由

在 S 上具有常负曲率（或双曲结构）的黎曼度量（或其等价类）所构成的空间外，也可以将其视为 S 上的黎曼曲面结构（复结构）（或其等价类）所构成的空间，或者视为从 $\pi_1(S)$ 到 PGL(2, $\mathbb{R}$) 的表示（或共轭类）空间的一个连通分支。从表示论的角度看，希钦分支 $\mathcal{H}_n(S)$ 是高秩 Teichm¨uller 空间的重要例子（综述见 [Wie18] ），它推广了 $\mathcal{T}(S)$，并且是从 $\pi_1(S)$ 到 PGL($n, \mathbb{R}$) 的表示（或共轭类）空间的一个连通分支，其中 $n \geq 2$。当 $n = 2$ 时，Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(S)$ 与 $\mathcal{H}_2(S)$ 重合，并嵌入所有其他希钦分支 $\mathcal{H}_n(S)$ 中。当 $n = 3$ 时，Loftin [Lof01] 和 Labourie [Lab07] 独立发现了 $\mathcal{H}_3(S)$ 的一个复解析对应物，这与将 $\mathcal{T}(S)$ 视为黎曼曲面空间的观点相类似。令 $Q_3(S)$ 为 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(S)$ 上的向量丛，其在一个复结构（或更准确地说，一个复结构等价类）上的纤维，是 S 上全纯三次微分构成的向量空间；根据黎曼-罗赫定理，该空间是有限维的（参见 (2.2)）。他们证明，希钦分支 $\mathcal{H}_3(S)$ 与全纯三次微分向量丛 $Q_3(S)$ 之间存在映射类群等变同胚。由此可以进一步追问，Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(S)$ 是否存在自然的黎曼几何推广。正如前文所暗示的，作为负曲率黎曼度量空间的布拉施克轨迹 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$，尽管与 $\mathcal{H}_3(S)$ 并非双射，却发挥着这一作用。对向量丛 $Q_3(S)$ 施加 S^1 作用（该作用将全纯三次微分 q 与任意 $\theta \in [0, 1$ 的 $e^{2\pi i\theta}q$ 等同）后，以全纯数据 $Q_3(S)$ 为桥梁，可以得到以下映射类群等变同胚

$$\mathcal{H}_3(S)/S^1 \overset{\text{homeo}}{\simeq} Q_3(S)/S^1 \overset{\text{homeo}}{\simeq} \mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0, \tag{1.1}$$

其中， S^1 对 $\mathcal{H}_3(S)$的作用，只需通过拉回 S^1 对 $Q_3($ $S)$.

上述三个对象分别从不同视角（表示论、复解析和黎曼几何）对 $\mathcal{T}(S)$进行了推广。我们将在第 5 节中更详细地刻画它们及其关系。特别地，第一个同胚由 [Lof01] 和 [Lab07]证明并推得。第二个双射最早见于 [OT21]。我们将在命题5.19中解释第二个同胚。这些对应关系对于定理A的证明至关重要。

1.2. 布拉施克轨迹中的协方差度量。如前所述，我们还研究布拉施克轨迹 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 关于Guillarmou、Knieper和Lefeuvre（[GKL21]）引入的协方差度量 $G(\cdot, \cdot)$[1]下的黎曼几何。该度量将Weil-Petersson度量从Teichm¨üller空间（视为双曲度量的同痕类空间）延拓为变负曲率度量的同痕类空间上的黎曼度量；这一延拓运用了源自研究闭安诺索夫流形上的X射线变换的技巧（[Gui17], [GL19]）。在我们的情形中，从扩展映射类群是协方差度量的等距变换群的子群这一简单观察出发（命题 4.12），(1.1) 中从 $\mathcal{H}_3(S)/S^1$到 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 的映射类群等变同胚，使我们能够辨认出 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 中由特殊欧比弗尔德欣钦表示产生的某些协方差度量测地线族（第 2.3 节）。简而言之，给定一个二维欧比弗尔德 Y，它是黎曼曲面 X_J（其底层光滑曲面结构为 S）对有限微分同胚群 Σ取商所得。由此可将一个特殊的单参数表示族与 Y 关联起来，该族位于 $\mathcal{H}_3(S)$中，记为 $\mathcal{H}_3(Y)$；它是群 Σ 在 $\mathcal{H}_3(S)$上的群作用的不动点集，其中 Σ 被视为扩展映射类群的子群（见第 3.2 节）。我们证明

定理 B（引理 6.5，定理 6.7）。设 Y 是一个负欧拉示性数的不可定向轨形，其定向双覆盖 Y^+ 是一个带有三个锥点的球面，这些锥点的阶分别为 $m_1 \geq 3$、$m_2 \geq 3$ 和 $m_3 \geq 4$。那么 $\mathcal{H}_3(Y)/\mathbb{Z}_2$ 同胚于一条半直线，并且相对于协方差度量 $G(\cdot, \cdot)$，它作为一条（未参数化的）测地线嵌入于 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 中，其中 $\mathcal{H}_3(Y)$ 上的 $\mathbb{Z}_2$ 作用由 $\mathcal{H}_3(S)$ 上的 S^1 作用诱导而来。

这些同胚于半直线的测地线，其起点位于 Teichm¨üller 空间 $\mathcal{T}(S)$ 中，并最终离开 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 的所有紧集（见定理 6.11）。我们还将在第 6.2 节估计它们的协方差度量长度。我们在推论 6.5 中表明，

定理 C （推论 6.5）。与定理 B 中给出的 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 对应于 $\mathcal{H}_3$（Y）$/\mathbb{Z}_2$ 的协变度量测地线长度无限。

[1]这个黎曼 度量在 [G中称为压力度量 KL21]。

事实上，对于丛 $Q_3(S)/S^1$，在利用识别（1.1）后，我们的证明对 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 中的任意曲线都更一般地成立：该曲线由丛 $\mathcal{T}(S)$ 的一个固定纤维中、从 $\mathcal{T}(S)$ 出发的一条射线参数化。

推论 D (定理6.12)。 设 σ 是定义在 S 上的双曲度量，且 q 是一个非零三次微分，相对于由 σ确定的复结构全纯。则曲线 $\{[g_t]\}_{t\geq 0}\subset \mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$，其中 $g_t\subset \mathcal{M}^B$ 满足王氏方程 (5.4) ，且三次微分为 $\sqrt{t}q$，相对于协方差度量具有无限长度。

是否存在其他协方差度量长度有限的路径，在 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 中逃离所有紧集，但不属于 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(S)$，仍是一个悬而未决的问题。一般而言，模空间中的不完备路径意味着存在重要的几何现象。例如，在 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(S)$ 中，Wolpert 展示了若干条相对于 Weil-Petersson度量不完备的路径，见 [Wol75]。这些路径对应于“夹挤黎曼曲面”。

在附录 A 中，我们最后给出关于 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 上协方差度量的一些进一步估计。协方差度量 $G(\cdot,\cdot)$ 在 $\mathcal{T}(S$ 中一点处、由与 $Q_3(S)/S^1$ 纤维的切向方向相对应的切向量所确定的显式公式，可直接由 [GM17、引理 A.1 和注 A.2] 得出。我们希望今后能够进一步简化这一公式。

1.3. 证明概要。 下面简要讨论主要定理的证明。无论是正则性结果，还是对 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 上协方差度量的研究，我们采用的一个重要工具都是一个称为王氏方程的偏微分方程（5.4）。它是第二个识别（1.1）的基础，并且与布拉施克度量及仿射微分几何理论有着天然的联系。

关于正则性结果，思路如下：

- 布拉施克轨迹光滑性的证明 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 依赖于构造它在远离 $\mathcal{T}(S)$ 处的光滑坐标图，其构造以 ¨中概述的 Teichm[Tro92第 2 节4]所述的图册构造为蓝本。在那里，关键观察是，相对于固定双曲度量的有限维横向无迹（= 无散且无迹）对称二阶张量空间，可以局部识别为固定索伯列夫正则性的双曲度量希尔伯特流形中光滑双曲度量的一个切片。该切片局部参数化 $\mathcal{T}(S)$，从而为其提供自然的局部坐标。对我们而言，布拉施克轨迹的坐标是通过将其局部识别为这些切片上方的全纯三次微分向量丛来构造的，针对的是 $\mathcal{T}(S)$。

- 全纯三次微分丛的局部切片与布拉施克度量空间的局部切片之间的联系——后者被视为 C^k 的负曲率度量巴拿赫流形的子集$^\alpha$ 正则性，是由王氏方程（5.4）给出的。借助隐函数定理和巴拿赫空间上的反函数定理，我们可以据此在这些切片之间构造光滑微分同胚。

为了研究 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 中的协方差度量，我们结合运用映射类群作用的整体几何与借助偏微分方程工具得到的局部估计：

- 同胚在（1.1）中的等变性使其能够保留某些子群在不同空间上的作用的不动点集。通过证明协方差度量在扩展映射类群作用下不变，希钦分支中由几何对称性产生的一些一维不动点集，经由（1.1）的原像成为布拉施克轨迹中的测地线。随后便可应用分析工具。

- 为了估计上述测地线的长度，王氏方程再次成为关键，同时还需运用偏微分方程理论中的一些标准技巧。这些技巧包括 Loftin（命题6.9）此前得到的王氏方程的上解和下解的存在性，以及一些最大值原理论证。

1.4. 文章结构。 本文组织如下。在第 2 节中，我们回顾 Teichm¨uller 理论和魏尔-彼得森几何中的一些基本结果。随后介绍 Higgs 丛、希钦分支和 Hitchin 映射，并简要讨论轨形及轨形表示。第 3 节旨在说明扩展映射类群在不同数学领域的各种数学对象上的作用。这将在第 6 节的证明中发挥重要作用。第 4 节包含

对 [GKL21] 中引入的负曲率度量空间上的协方差度量进行阐述。本节还证明，协方差度量在扩展映射类群作用下保持不变。第5节中，我们介绍布拉施克度量和布拉施克轨迹，并解释识别（1.1）。我们还讨论了有关布拉施克轨迹正则性和拓扑的一些重要结果。第 6节中，我们证明了关于布拉施克轨迹中相对于协方差度量的测地线的一些结果，并估算其长度。最后，我们在附录 A 中进一步估算 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(S)$ 附近布拉施克轨迹上的协方差度量。

致谢。作者谨向 Kiril Datchev、Dan Fox、Gerhard Knieper、李琼玲和 Gabriele Viaggi 致谢，感谢他们提供的有益讨论，并感谢 Alex Nolte 提供参考文献 [Ber61]。我们也感谢审稿人仔细阅读稿件并提出建设性意见。X. Dai 获得了德国研究联合会（DFG）资助，资助项目为 Project-ID 281071066 – TRR 191；此外还获得了德国研究联合会在德国卓越战略下的资助，项目为 exc 2181/1 - 390900948（海德堡结构卓越集群）。

2. Preliminaries

本节将介绍后续章节所需的背景材料。熟悉这些内容的读者可以跳过本节。我们先在第 2.1 节介绍经典 Teichm¨uller 空间和 Weil-Petersson 度量。然后在第 2.2 节介绍 Higgs 丛和希钦分支的一些基础知识。最后，我们将在第 2.3 节讨论轨形及其表示。

2.1. Teichm¨uller空间与Weil-Petersson度量。

本小节将从黎曼几何的视角讨论Teichm¨uller空间；这一研究由Tromba和Fischer发起 [FT84]。

设 S 为亏格为 $\mathfrak{g} \geq 2$的闭定向光滑曲面。我们用 $\mathcal{M}$ 表示 S上的光滑黎曼度量空间，用 $\mathcal{M}_-$ 表示负曲率光滑黎曼度量的子空间，用$\mathcal{M}_{-1}$ 表示 S上的双曲度量子空间。我们还用 $\mathcal{D}$ 表示 S的微分同胚群，用 $\mathcal{D}^+$ 表示 S 上的保定向微分同胚群（当 S 具有定向时），并用 $\mathcal{D}_0$表示 $\mathcal{D}$ 的正规子群，该子群由与恒等映射同伦的光滑微分同胚组成。

定义2.1. Teichm¨uller空间记为 $\mathcal{T}(S)$，是商空间 $\mathcal{M}_{-1}/\mathcal{D}_0$，其中 $\mathcal{D}_0$ 在 $\mathcal{M}_{-1}$ 上的右作用定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{-1} \times \mathcal{D}_0 &\to \mathcal{M}_{-1}, \\ (\sigma, \psi) &\mapsto \psi^* \sigma. \end{aligned}$$

我们用 $[\sigma] \in \mathcal{M}_{-1}/\mathcal{D}_0$ 表示 $\sigma \in \mathcal{M}_{-1}$ 的等价类。

等价地，Teichm¨üller 空间 $\mathcal{T}(S)$ 是 S 模去$\mathcal{D}_0$-作用后的（定向）复结构空间。从另一种观点来看，Teichm¨üller 空间 $\mathcal{T}(S)$ 是表示空间 $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PGL}(2,\mathbb{R}))/\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ 的一个连通分支。这将在第 2.2 节讨论。

注2.2. 我们指出，根据上面的定义2.1，Teichm ¨üller 空间并不“感知” S上的定向，也就是说，如果 ψ 是度量 σ 的一个反定向等距变换，那么 $[\psi^*\sigma] = [\sigma] \in \mathcal{T}(S)$。当将 $\mathcal{T}(S)$ 视为模去 $\mathcal{D}_0$ 后的定向双曲结构空间时（这是文献中常采用的一种观点，参见例如 *[MW02]*），如果 $\psi\colon S \to S$ 是双曲度量 σ 的一个反定向等距变换，且 $\mathfrak{G}$ 是 σ 所确定的正向定向双曲结构，那么通过 ψ 拉回 $\mathfrak{G}$ 的坐标图，并模去 $\mathcal{D}_0$ 后得到的双曲结构，是 $\overline{S}$ 的 Teichm ¨üller 空间中的一个元素，其中 $\overline{S}$ 的定向与 S 相反。

给定具有复结构 J 的黎曼曲面 X_J，我们用 K_J 表示与 X_J 相关联的典范线丛，它是复化余切丛 $T^*X_J^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T^*X_J$ 的 $(1,0)$ 部分。此外，我们用 $H^0(X_J, K_J^d)$ 表示 J 阶全纯微分的空间，用 $H^0(X_{[J]}, K_{[J]}^d)$ 表示它们的 $\mathcal{D}_0$ 等价类空间。具体而言，若 $\psi \in \mathcal{D}_0$，则全纯微分 J（$q \in H^0(X_J, K_J^q)$）与全纯微分 ψ^*J（$\psi^*q \in H^0(X_{\psi^*J}, K_{\psi^*J}^d)$）在 $H^0(X_{[J]}, K_{[J]}^d)$ 中表示同一点，记作 $[q]$。群 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}_0$ 对复结构及全纯微分的作用将在第 3 节中详细说明。众所周知，Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(S)$ 在 $[\sigma]$ 处的余切空间可以与黎曼曲面上的二次微分空间 $H^0(X_{[J]}, K_{[J]}^2)$ 等同

$X_{[J]} = (S, [J])$，其中 $[J]$ 与双曲度量 $[\sigma]$ 的（$\mathcal{D}_0$ 等价类）相关联。Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(S)$ 上一种利用全纯二次微分定义、经过广泛研究的黎曼度量如下，称为 Weil-Petersson度量。

定义 2.3。Weil-Petersson度量是定义在 $\mathcal{T}(S)$ 上的余度量，其定义为

$$\langle [q_1], [q_2] \rangle_{WP}([\sigma]) = \mathrm{Re} \int_{X_J} \frac{q_1 \overline{q_2}}{\sigma^2} dv_\sigma,$$

其中，$[\sigma] \in \mathcal{T}(S)$ 和 $[q_1], [q_2]$ 是相对于 $[J]$ 的全纯二次微分，而 σ, J, q_1, q_2 是从其等价类中选取的代表，使得 q_1, q_2 相对于 J是全纯的。

众所周知，Weil-Petersson度量是 K¨ahler（[Ahl61]），并且具有负曲率（[Ahl62], [Tro92], [Wol86]）。Weil-Petersson度量的等距变换群是映射类群 [MW02]。此外，尽管 Weil-Petersson度量并不完备（[Chu76], [Wol75]），它仍展现出许多完备负曲率度量的良好性质（见 [Wol75], [Wol87]）。第 4.6 节将讨论对 Weil-Petersson度量的一种不同诠释（定理 4.16）。

2.2. 希钦分支与 Hitchin 映射。本小节中，我们运用 Higgs 丛方法介绍希钦分支，它是表示空间的一个连通分支

$$\mathrm{Rep}(\pi_1 S, \mathrm{PGL}(n, \mathbb{R})) := \mathrm{Hom}(\pi_1 S, \mathrm{PGL}(n, \mathbb{R}))/\mathrm{PGL}(n, \mathbb{R}),$$

对于 $n \geq 2$，作为经典 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(S)$ 的推广。

2.2.1. Higgs 丛、希钦分支与 Hitchin截面。本小节中，$n \geq 2$ 是一个整数。这里的讨论适用于范围广泛得多的群，但就本文而言，我们将讨论范围限定为群$G =$ 射影一般线性群$(n, \mathbb{R})$。

设 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \oplus sym^0(n, \mathbb{R})$ 是 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ 的 Cartan分解，其中 $sym^0(n, \mathbb{R})$ 是迹为零的 $n \times n$ 对称矩阵集合。记 $sym^0(n, \mathbb{C}) = sym^0(n, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$。下述定义是 [ALS22，定义 3.14] 的一个特例。

定义 2.4. 黎曼曲面 X_J 上的 PGL$(n, \mathbb{R})$-Higgs 丛是一个对 $(\mathcal{E}, \varphi)$，其 *re*

- $\mathcal{E}$ 是一个全纯李代数丛，其典型纤维为 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$，结构群为 PO$(n, \mathbb{C})$，
- $\varphi \in H^0(X_J; K_J \otimes ad_{sym^0(n,\ \mathbb{C})}(\mathcal{E}))$ 是一个全纯截面，称为 Higgs 场。

这里，$ad_{sym^0(n,\ \mathbb{C})}(\mathcal{E})$ 表示 $\mathcal{E}$ 的对称伴随端omorphism丛，即 $\mathcal{E}$ 的端omorphism，它们局部具有如下形式：对于某个 $\xi \in sym^0(n, \mathbb{C})$，$ad_\xi \colon \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \to \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$。

满足某些“良好”条件的 PGL$(n,\ \mathbb{R})$-Higgs 丛的规范等价类空间构成PGL$(n,\ \mathbb{R})$-Higgs 丛的模空间，记作 $\mathcal{M}_{Higgs}$(PGL$(n,\ \mathbb{R})$)。（这里的“良好”条件是针对 Higgs 丛的多项稳定性条件。例如，[Bar09], 中有相关介绍。）

假设全纯向量丛 $\mathcal{E}$ 具有全纯结构 $\bar{\partial}_\mathcal{E}$，则在给定厄米度量 H 下，$\mathcal{E}$ 的 Chern联络 A_H 是唯一一个与 $\bar{\partial}_\mathcal{E}$ 相容并满足 $A^{0,1}_H = \bar{\partial}_\mathcal{E}$ 的联络。下面的结果很重要。

定理 2.5 (Hitchin[Hit87], Simpson [Sim88])。设 $(\mathcal{E}, \varphi)$ 是一个多稳的 PGL$(n, \mathbb{R})$-Higgs 丛，且设 H 是定义在 $\mathcal{E}$上的厄米度量。连接 $D = A_H + \varphi + \varphi^{*H}$ 在 $(\mathcal{E}, \varphi, H)$ 平坦，当且仅当满足以下 Hitchin方程：

$$F_{A_H} + [\varphi, \varphi^{*H}] = 0, \tag{2.1}$$

其中 F_{A_H} 是连接 A_H的曲率。此外，全纯向量丛 $\mathcal{E}$ 存在满足 Hitchin方程的厄米度量 H，当且仅当 $(\mathcal{E}, \varphi)$ 是多稳的。

我们将在第 5.1 节回到 Hitchin方程的一个特殊情形（方程（5.4））；该情形对本文至关重要。

Hitchin [Hit92] 进一步通过 Higgs 丛和 Hitchin 截面引入了 Hitchin 分支。我们在此简要讨论 Hitchin 分支和 Hitchin 截面，并请读者参阅 [Bar09] 的第 2 节，以了解更全面的论述。设 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 为 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$，并设 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$，它是由一个反线性李代数对合 τ 固定的 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$分裂实形式。给定一个主三维子代数

$\mathfrak{s} = \mathrm{span}\{x, e, \tilde{e}\}$ 由 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ 构成，其中包含一个半单元 x 以及正则幂零元 e 和 $\tilde{e}$，它们满足对易关系

$$[x, e] = e, \qquad [x, \tilde{e}] = -\tilde{e}, \qquad [e, \tilde{e}] = x,$$

李代数 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ 在 $\mathfrak{s}$ 的伴随表示下分解为不可约子空间的直和：

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i=1}^{n-1} V_i.$$

我们取 $e_1, \cdots, e_{n-1}$ 作为 $V_1, \cdots, V_{n-1}$ 的最高权元素，其中 $e_1 = e$。另一种分解为

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \bigoplus_{d=-n+1}^{n-1} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{(d)},$$

其中，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{(d)}$ 是 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ 的子空间，ad_x 在该子空间上的作用对应特征值 d。与此分解相关联的是一个自然的李代数丛

$$\mathcal{E}_{can} := \bigoplus_{d=-n+1}^{n-1} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{(d)} \otimes K_J^d.$$

这是定义 $\mathcal{E}$ 2.4 中全纯丛 的一种常见选取。定义好该丛后，我们便可在 $\mathcal{M}_{Higgs}(\mathrm{PGL}(n, \mathbb{R}))$ 的情形下引入 Hitchin 截面。

$_n$定义 2.6。Hitchin 截面 s_J 是一个从 $\bigoplus_{i=2} H^0(X_J, K_J^i)$ 到 $\mathcal{M}_{Higgs}$(PGL$(n, \mathbb{R})$) 的映射，定义如下：$_n$对于 $q = (q_2, q_3, \cdots, q_n) \in \bigoplus_{i=2} H^0(X_J, K_J^i)$，其像 $s_J(q)$ 是一个 Higgs 丛 $\mathcal{E}_{can}$，其 Higgs 场 $\varphi(q) \in H^0(X, K_J \otimes ad_{sym^0(n,\mathbb{C})}(\mathcal{E}_{can}))$ 由下式给出

$$\varphi(q) = \tilde{e} + q_2 e_1 + q_3 e_2 + \cdots q_n e_{n-1}.$$

Hitchin 在 [Hit92] 表明，Hitchin 截面的像中的任意 Higgs 丛 s_J 都有相应的平坦联络 D （定理 2.5），其整体单值化落在 PGL$(n, \mathbb{R})$ 中（参见 [ALS22，第 3] 节）。由此引出以下重要定义，即 希钦分支：

定义 2.7 ([Hit92])。 当 $n \geq 2$时，Hitchin 截面的像中的 Higgs 丛 s_J 是稳定的，且其整体单值化属于 $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{R})$。此外，相应的表示构成表示空间 $\mathrm{Rep}(\pi_1 S, \mathrm{PGL}(,))$ 的一个连通分支。这个连通分支同胚于维数为 ()() 的欧几里得空间，称为 希钦分支，记作 ()。

$\mathcal{H}_n(S)$ 中的元素是表示的一个共轭类，称为 Hitchin 表示（的共轭类）。给定一个表示 ρ，我们用 $[\rho]$ 表示它的共轭类。当 $n = 2$ 时，Hitchin 截面恰好参数化 Teichm¨uller 空间，即有 $\mathcal{H}_2(S) = \mathcal{T}(S)$。当 $n > 2$ 时，可以选取一个形如 $\mathfrak{s} = \mathrm{span}\{x, e, \tilde{e}\}$ 的主三维子代数 $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$，它在 τ 下保持不变，并诱导出嵌入 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$。这诱导出一个群同态 $\kappa_{\mathbb{C}}$，从 PGL$(2, \mathbb{C}) \simeq$Int$(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ 到 PGL$(n, \mathbb{C}) \simeq$ Int$(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}))$（参见 [ALS22，第 2.2] 节）。分别将群限制为 PGL$(2, \mathbb{R})$ 和 PGL$(n, \mathbb{R})$，即可得到主表示 κ: PGL$(2, \mathbb{R}) \to$ PGL$(n, \mathbb{R})$，以及 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(S)$ 到希钦分支 $\mathcal{H}_n(S)$ 的一个嵌入。换言之，主表示 κ 将 $[\rho_0] \in \mathcal{T}(S)$ 映到 $[\rho] = [\kappa \circ \rho_0] \in \mathcal{H}_n(S)$。我们通常将 $[\rho] = [\kappa \circ \rho_0]$ 称为 $\mathcal{H}_n(S)$ 的（共轭类）Fuchsian 表示，而 Fuchsian 表示共轭类的空间则称为 $\mathcal{H}_n(S)$ 的 Fuchsian 轨迹。

注 2.8. 我们注意到，在文献中，希钦分支通常定义为 同态集$(\pi_1 S, \mathrm{PSL}(n, \mathbb{R}))/\mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$ *([Hit92], [Lab07])* 的一个分支。本文将 $\mathcal{H}_n(S)$ 定义为模去 射影一般线性群$(n, \mathbb{R})$共轭（以便处理轨形和反定向映射）。这些定义之间的差异将在注 *2.15*中进一步讨论。

2.2.2. Hitchin 映射。与 Hitchin 截面像$_n$中 Higgs 丛对应的平坦联络的整体单值化映射 D 诱导出一个同胚 H_J: $\bigoplus H^0(X_J, K_J^i) \to \mathcal{H}_n(S)$。此映射给出了通过全纯微分对希钦分支 $\mathcal{H}_n(S)$ 的$_{i=2}$参数化，通常称为 Hitchin 参数化。然而，Hitchin 参数化的一个缺点是它依赖于特定复结构 J 的选择。特别是，它破坏了对映射类群作用的不变性，这一点将在第 3 节中详述。以下是 Labourie [Lab08]提出的一种构造映射类群等变对象的尝试。令 $Q_n(S)$ 表示 Teichmüller 空间$\mathcal{T}(S)$上的向量丛，其在 $X_{[J]}$ 上方的纤维为

$$Q_n(S)\big|_{[J]} = H^0(X_{[J]}, K^3_{[J]}) \oplus \cdots \oplus H^0(X_{[J]}, K^n_{[J]}). \tag{2.2}$$

接下来考虑 Hitchin 映射 H，定义如下

$$\mathbf{H} : Q_n(S) \longrightarrow \mathcal{H}_n(S)$$
$$([J, q_3, \cdots, q_n]) \mapsto H_J(0, q_3, \cdots, q_n).$$

这里 J 是等价类 $[J]$ 的一个代表，且 q_i 是关于 i全纯的 J 阶微分，它们是 $[q_i]$中 H_J 的代表。取与 Higgs 丛 D 相关联的平坦联络 $s_J(0, q_3, \cdots q_n)$ 的整体单值化，即可得到 2.6 的像。（回忆定义 。）

备注 2.9。向量空间 $H^0(X_J, K_J^i)$ 可与空间 $H^0(X_{[J]}, K^i_{[J]})$ 等同。通过映射H_J，利用与 $([J, q_3, \cdots, q_n])$ 相关联的平坦联络定义的整体单值化会诱导出表示，这些表示在共轭意义下定义良好。

Hitchin 映射总是一个满射映射类群等变映射。一个自然的问题是，Hitchin 映射是否为同胚。Sagman 和 Smille 最近的一项结果（[SS22]）表明，当 $n \geq 4$ 时，它不是单射，因此也不是同胚。不过，本文只关注 $n = 3$ 的情形，在这种情况下，同胚性结论众所周知。

定理 2.10 ([Lof01，定理 2], [Lab07，定理 1.0。2])。 Hitchin 映射

$$\mathbf{H} : Q_3(S) \to \mathcal{H}_3(S)$$

是映射类群等变同胚，其中映射类群在 $Q_3(S)$ 和 $\mathcal{H}_3(S)$ 上的作用（作为外自同构群作用）都是左作用，具体将在第 3节说明。

注 2.11. 后文会用到以下说明：丛 $Q_n(S)$ 位于 $\mathcal{T}(S)$ 之上，后者视为$\mathcal{M}_{-1}/\mathcal{D}_0$；每个 $[\sigma]$ 上的纤维由相对于由 $[\sigma]$ 确定的正向复结构的全纯微分组成。该丛具有自然的 C^∞ 拓扑（这是从未对 $\mathcal{D}_0$ 作用取商的对象的 C^∞ 拓扑继承而来的商拓扑）。对于全纯微分，由于魏尔斯特拉斯定理， C^∞ 拓扑等价于紧开拓扑。因此，若双曲度量 σ_k 在C^∞ 拓扑下收敛到 σ，且全纯微分 q_k 在万有覆盖 $\mathbb{D}$ 上于 $\mathbb{D}$ 的紧子集上一致收敛到 q 的提升，则一列双曲度量与全纯微分组成的对 $\{(\sigma_k, q_k)\}_{k\geq 0}$ 收敛到双曲度量与全纯微分组成的对(σ, q)。

2.3. 轨形及轨形表示。

2.3.1. 轨形。 轨形是局部可建模为 $\mathbb{R}^n$ 除以有限群作用所得的空间。若所有这些有限群都是平凡群，则得到一个流形。否则，轨形具有奇点。关于轨形的一般介绍，请参阅 [Thu，第 13]章。本小节的许多内容遵循 [ALS22，第 2]节。我们将讨论范围限定为 $n = 2$。设 Y 是一个维数为 2 的闭连通光滑轨形。 Y有三种奇点：

(1) p 是一个阶为 m的锥点：存在 p 的一个邻域，它与 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_m$ 同构，其中 $\mathbb{Z}_m$通过旋转作用于 $\mathbb{R}^2$ 。
(2) p 是一个镜点：存在 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_2$ 的一个邻域，其中 $\mathbb{Z}_2$ 通过关于 y轴的反射作用。(3) p 是一个阶为 n 的角反射点：存在 p 的一个邻域，它与 $\mathbb{R}^2/D_n$ 同构，其中D_n 是阶为 $2n$的二面体群，其表示为

$$\langle a, b : a^2 = b^2 = (ab)^n = 1\rangle.$$

对于二维轨形 Y，我们用 k 表示锥点的数量（其阶分别为m_1、$\cdots$、m_k），用 l表示角反射点的数量（其阶分别为 n_1、$\cdots$、n_l）。我们还用 Y 表示 Y的轨形万有覆盖。轨形基本群记作 $\pi_1(Y)$，其定义为万有覆盖 Y的甲板变换群。如果其底层拓扑空间 $|Y|$ 是可定向的，且 Y的奇点只有锥点，我们就称 Y 是可定向的。轨形 Y 的欧拉示性数定义为

$$\chi(Y) = \chi(|Y|) - \sum_{i=1}^{k}(1 - \frac{1}{m_i}) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}(1 - \frac{1}{n_j}).$$

本文中假设 Y具有负欧拉示性数： $\chi(Y) < 0$。如果某个二维轨形存在一个覆盖轨形，且该覆盖轨形是曲面，则称它为良轨形。每个具有负欧拉示性数的轨形都是良轨形。它可以看作一个闭可定向曲面的商空间，其表示定义如下：

定义2.12。闭连通轨形 Y的一个表示是一个三元组（S, Σ, φ），其中 S是光滑闭连通可定向曲面， Σ 是 $\mathcal{D}$ 的有限子群，且 φ 是一个轨形同构 φ: $Y \to S/\Sigma$。于是我们记作 $Y \simeq [S/\Sigma]$，其中忽略 φ 。

注 2.13。 若 $X_J = (S, J)$ 是黎曼曲面，且 Σ 通过全纯映射或反全纯映射作用于 X_J，那么 $Y = Y_J$ 继承自 X_J 的“复结构”，我们将其记为 $Y \simeq [X_J/\Sigma]$。对于不可定向轨形，这些结构称为 轨形二解析结构。准确地说， Y 上的轨形二解析结构，是其可定向双覆盖上的轨形复结构 Y^+，其中 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的作用由一个反全纯对合给出，参见*[ALS22，第5节。1]*。

2.3.2. 轨形的 Hitchin 表示。 Thurston 研究了负欧拉示性数的闭二维轨形 Y 的双曲结构 [Thurston，第13]。这被称为 $Teichm\ddot{u}ller$ 空间 Y，记作 $\mathcal{T}(Y)$。类似于闭曲面的情形，通过取 Y上的双曲结构的整体单值表示，该 Y双曲结构空间可识别为表示空间的一个连通分支

$$\mathrm{Rep}(\pi_1 Y, \mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})) := \mathrm{Hom}(\pi_1 Y, \mathrm{PGL}(2,\mathbb{R}))/\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R}).$$

类似于闭曲面的情形，可以利用主表示 κ： PGL(2, $\mathbb{R}$) $\to$ PGL($n, \mathbb{R}$)，为轨形定义 Fuchsian 表示和 Fuchsian 轨迹。若表示的一个（共轭类）$[\rho]$： $\pi_1 Y \to$ PGL($n, \mathbb{R}$) 是 Fuchsian 表示的一个（共轭类），则存在 $[\rho_0] \in \mathcal{T}(Y)$ 使得 $[\rho] = [\kappa \circ \rho_0]$。Fuchsian 表示的空间称为 Rep($\pi_1 Y$, PGL($n, \mathbb{R}$)) 的 Fuchsian 轨迹。

轨形 Y 的希钦分支是利用 Fuchsian 表示定义的。

定义2.14。 Y 的希钦分支记为 Hit($\pi_1 Y$, PGL($n, \mathbb{R}$))，它是 Rep($\pi_1 Y$, PGL($n, \mathbb{R}$)) := Hom($\pi_1 Y$, PGL($n, \mathbb{R}$))/ PGL($n, \mathbb{R}$) 中包含 Fuchsian 轨迹的连通分支。Hit($\pi_1 Y$, PGL($n, \mathbb{R}$)) 中的元素称为 Hitchin 表示。

注2.15（[ALS22，注2.5]）。如果 Y 可定向（例如，如果 $Y = S$ 是闭可定向曲面），那么 $\pi_1(Y)$ 的任意 Fuchsian 表示实际上都包含在 Hom($\pi_1 Y$, PSL($n, \mathbb{R}$)) 中。若考虑这些表示在 PSL($n, \mathbb{R}$) 共轭意义下的等价类，则可能存在两个希钦分支（例如，当 n 为偶数时）。这两个连通分支中的表示通过 PGL($n, \mathbb{R}$) 的一个内自同构相联系。因此，PGL($n, \mathbb{R}$) 共轭会将这两个分支识别起来。另一方面，当 Y 不可定向时， $\pi_1(Y)$ 的 Fuchsian 表示的像属于 PGL($n, \mathbb{R}$)（且可能无法限制在 PSL($n, \mathbb{R}$) 中）。

3. Mapping class group actions

我们介绍 关于扩展映射类群如何作用于各种数学对象的讨论 .

3.1. 扩展映射类群对黎曼度量的作用。设 S 是第 2.1 节中的一个亏格为 $\mathfrak{g} \geq 2$ 的闭定向光滑曲面。回顾一下， $\mathcal{M}_-$ 表示 S 上负曲率光滑黎曼度量所成的空间，微分同胚群 $\mathcal{D}$、 $\mathcal{D}^+$ （当 S 可定向时）以及 $\mathcal{D}_0$ 通过拉回作用于该空间。扩展映射类群定义为商群 $\mathrm{Mod}^{\pm}(S) := \mathcal{D}/\mathcal{D}_0$。两个光滑微分同胚 f_1 和 f_2 在 $\mathrm{Mod}^{\pm}(S)$ 中代表同一点，当且仅当 f_1 与 f_2 光滑同伦。换言之，扩展映射类群 $\mathrm{Mod}^{\pm}(S)$ 是 $\mathcal{D}$ 中元素的同痕类所成的群。当 S 带有定向时，我们也用 $\mathrm{Mod}(S) = \mathcal{D}^+/\mathcal{D}_0$ 表示映射类群，它是 S 的所有保向光滑微分同胚的同痕类所成的群。映射类群 $\mathrm{Mod}(S)$ 是 $\mathrm{Mod}^{\pm}(S)$ 的指数为 2 的子群。给定 $\psi \in \mathcal{D}$，我们用 $[\psi]$ 表示它在 $\mathrm{Mod}^{\pm}(S)$ 中所诱导的元素。 $\mathcal{D}$ 通过拉回对 $\mathcal{M}_-$ 的作用，诱导出 $\mathrm{Mod}^{\pm}(S)$ 对商空间 $\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$ 的作用。我们将在第 4.4 节进一步讨论该空间。注意， $\mathrm{Mod}^{\pm}(S)$ 的这一作用是对 $\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$ 的右作用。为了与下一小节中介绍的外自同构群作用保持一致，人们也常使用 $\mathrm{Mod}^{\pm}(S)$ 对 $\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$ 的诱导左作用，其定义为 $[\psi] \cdot [g] = [(\psi^{-1})^* g]$。

3.2. 扩展映射类群对 Hitchin 希钦分支的作用。

3.2.1. 外自同构群。外自同构群 $\mathrm{Out}(\pi_1 S)$ 定义为商空间

$$\mathrm{Out}(\pi_1 S) = \mathrm{Aut}(\pi_1 S)/\mathrm{Inn}(\pi_1 S),$$

其中 $\mathrm{Aut}(\pi_1 S)$ 是 $\pi_1 S$ 的自同构群，而 $\mathrm{Inn}(\pi_1 S)$ 表示所有内自同构组成的群：对任意 $h \in \pi_1 S$，相应的内自同构定义为

$$\begin{aligned} I_h : \pi_1 S &\to \pi_1 S \\ g &\mapsto hgh^{-1}. \end{aligned}$$

根据德恩-尼尔森-贝尔定理 [FM12，定理 8，1], 扩展映射类群 $\mathrm{Mod}^{\pm}(S)$ 与外自同构群 $\mathrm{Out}(\pi_1 S)$ 同构。 $\mathrm{Out}(\pi_1 S)$ 对 $\mathcal{H}_n($$S$有一个自然的左作用。给定一个表示 $\rho \in \mathcal{H}_n(S)$ 以及任意 $\psi \in \mathrm{Out}(\pi_1 S$，定义

$$\psi \cdot \rho = \rho \circ \psi^{-1}.$$

该作用保持希钦分支 $\mathcal{H}_n($$S$（参见 [ALS22] 中引理 2.8 后的段落）。由于扩展映射类群 $\mathrm{Mod}^{\pm}(S)$ 与群 $\mathrm{Out}(\pi_1 S)$ 等同，我们得到 $\mathrm{Mod}^{\pm}(S)$ 对希钦分支 $\mathcal{H}_n($$S$的自然作用。特别地， $\mathcal{H}_2(S) = \mathcal{T}($$S$上的这一作用，对应于第 3.1 节中定义的由（逆）拉回给出的扩展映射类群左作用。

3.2.2. 外自同构群与轨形。 在第 2.3 节中，我们将一个负欧拉示性数的二维闭连通光滑轨形 Y 表示为闭可定向曲面 S 除以有限子群 $\Sigma \leq \mathcal{D}$。这意味着存在如下短正合列：

$$1 \to \pi_1 S \to \pi_1 Y \to \Sigma \to 1.$$

特别地， $\pi_1 S$ 是 $\pi_1 Y$的正规子群，且指数有限， $\Sigma \simeq \pi_1 Y/\pi_1 S$。

有限群 $\Sigma \leq \mathcal{D}$ 给出子群 $\Sigma \leq \mathrm{Mod}^{\pm}(S)$，根据德恩-尼尔森-贝尔定理，该子群同构于外自同构群 $\mathrm{Out}($$\pi_1 S)$ 的一个子群。由于 $\mathrm{Out}(\pi_1 S)$ 通过（逆）复合前置作用于希钦分支 $\mathcal{H}_n(S)$ 的左侧，因此得到 Σ 在 $\mathcal{H}_n$ (S) 上的作用。我们将作用 $_\Sigma\mathcal{H}_n($$S$的不动点集记为 $\mathrm{Fix}\ \Sigma$。以下来自 [ALS22] 的定理，讨论轨形的 Hitchin 表示与外自同构群在 $\mathcal{H}_n(S)$ 上的作用之间的关系，后文将会用到：

定理 3.1（[ALS22，定理 2.12]）。给定一个负欧拉示性数的闭连通二维轨形Y及其表示 $Y \simeq [S/\Sigma]$，映射 $\rho \mapsto \rho|_{\pi_1 S}$ 诱导出同胚 j： $\mathrm{Hit}(\pi_1 Y, \mathrm{PGL}(n,\mathbb{R})) \to \mathrm{Fix}_\Sigma \mathcal{H}_n(S)$，它建立了 $\mathrm{Hit}(\pi_1 Y, \mathrm{PGL}(n,\mathbb{R}))$ 与 $\mathcal{H}_n(S)$ 中的 Σ-不动点集之间的对应。

3.3. 扩展映射类群对全纯微分的作用。 本小节首先说明扩展映射类群一般如何作用于全纯微分的截面空间。随后，我们聚焦于相对于某个复结构为全纯或反全纯的曲面微分同胚，并讨论它们所诱导的扩展映射类群作用。这将自然引出对希钦纤维化等变结构的阐述，内容来自 [ALS22，第4节。1]。

给定一个复结构 $J \in C^\infty(S; \mathrm{End}(TS))$，微分同胚 $\psi \in \mathcal{D}$ 从右侧作用于 J，形式如下： $(\psi^* J)_x = (d\psi^{-1})_{\psi(x)} \circ J_{\psi(x)} \circ d\psi_x$。特别地，若 $\psi^* J = J$，我们称 ψ 关于 J 是全纯的；我们

称若 $\psi^*J=-J$，则 ψ 关于 J 是反全纯的。对 $\mathcal{D}_0$ 的作用取商后，便得到扩展映射类群 $\mathrm{Mod}^{\pm}(S)=\mathcal{D}/\mathcal{D}_0$ 在复结构的同痕类上的作用。

$\psi\in\mathcal{D}$ 的作用自然诱导出 ψ 在典范丛 K_J^d的所有幂上的左作用，记作 κ_ψ。设 $X_J=(S,J)$为带有复结构 J的黎曼曲面。我们可以按如下图表所示，定义 ψ在全纯截面 $s\in H^0(X_J,K_J^d)$上的作用： $\psi^*s:=\kappa_\psi{}^{-1}\circ s\circ\psi$

$$\begin{array}{ccc} K^d_{\psi^*J} & \xrightarrow{\kappa_\psi} & K^d_J \\ \uparrow{\scriptstyle \psi^*s} & & \uparrow{\scriptstyle s} \\ (S,\psi^*J) & \xrightarrow{\psi} & (S,J) \end{array}$$

更明确地，对于 $p\in S$和 $v\in(TX^{\mathbb{C}}_{\psi^*J})^{(1,0)}$，我们有

$$(\psi^*s)(p)\big(v,\cdots,v\big)=s(\psi(p))\big(d\psi(v),\cdots,d\psi(v)\big).$$

这里， $d\psi$表示复化微分 $d\psi$: $T_pX^{\mathbb{C}}_{\psi^*J}\to T_{\psi(p)}X^{\mathbb{C}}_J$。拉回 ψ^*s是 $H^0(X_{\psi^*J},K^d_{\psi^*J})$上的全纯截面。取 $\mathcal{D}_0$商空间后，我们得到 $\mathrm{Mod}^{\pm}(S)$在（$\mathcal{D}_0$-等价类的）全纯 d-微分上的右作用。我们也常使用由逆拉回给出的诱导左作用 $[\psi]\cdot[s]=[(\psi^{-1})^*s]$。

现在我们聚焦于相对于固定复结构 J 而言，或为全纯或为反全纯的微分同胚，并说明它们对全纯微分的作用。设 Σ 是 $\mathcal{D}$ 的有限子群。我们为 S 固定一个定向，并在 S 上取一个 Σ-不变的黎曼度量 g 。用 $J=J_g$ 表示与 g 相关联的复结构。于是，映射 $\psi\in\Sigma$ 相对于 J 是全纯的，当且仅当它保持 S 的定向；否则，它是反全纯的。前面定义的从 K_{ψ^*J} 到 K_J 的丛同构 κ_ψ 诱导出一个丛自同构 $\tau_\psi:K_J\to K_J$。更具体地说，当 ψ 保持定向时，我们令 $\tau_\psi=\kappa_\psi$，这显然是一个丛自同构。当 ψ 反转定向时，给定 $\xi=(p,w)\in K_J^d|_p$，我们令 $\tau_\psi\xi:=\overline{\kappa_\psi\xi}$。由于 κ_ψ 将丛 $K_{\psi^*(-J)}$ 映到 K_{-J}，并且 $\psi^*(-J)=J$，显然在这种情况下 $\tau_\psi:K_J\to K_J$ 也是一个丛自同构。由此得到 τ_ψ 在所有张量幂 K_J^d 上的作用。这里 τ_ψ 的作用定义与 ALS22 第4节中的 τ_ψ 作用一致。[1]

族 $\tau=(\tau_\psi)_{\psi\in\Sigma}$ 以如下意义构成全纯丛 K_J^d 的 Σ-等变结构:

(1) 对所有 $\psi\in\Sigma$，下图交换（即 $\pi\circ\tau_\psi=\psi\circ\pi$），

$$\begin{array}{ccc} K^d_J & \xrightarrow{\tau_\psi} & K^d_J \\ {\scriptstyle s}\uparrow\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi}\uparrow{\scriptstyle \psi^A\cdot s} \\ (S,J) & \xrightarrow{\psi} & (S,J) \end{array},$$

其中 $\pi:K_J^d\to(S,J)$ 是投影。（映射 ψ^A 将在下一段中解释。）

(2) 若 ψ 相对于 J 是全纯的，则丛映射 τ_ψ 在每个纤维上都是 $\mathbb{C}$-线性的；若 $\psi:X\to X$ 相对于 J 是反全纯的，则它在每个纤维上都是 $\mathbb{C}$-反线性的。(3) $\tau_{id}=\mathrm{Id}^{K_J^d}$和 $\tau_{\psi_1\psi_2}=\tau_{\psi_1}\tau_{\psi_2}$。

注意，由于 ψ和 τ_ψ同时是全纯或反全纯的，复合映射 $\tau_\psi\circ s\circ\psi^{-1}$仍是 $H^0(X_J,K_J^d)$中的全纯截面。我们将此（左）作用记为 $\psi^A\cdot s:=\tau_\psi\circ s\circ\psi^{-1}$，以强调这是一个自同构，并将其与拉回作用 ψ^*s 及其由逆拉回诱导的左作用 $\psi\cdot s=(\psi^{-1})^*s$ 区分开来。

一般而言，设 X_J 是一个复结构为 J 的黎曼曲面，使得有限群 Σ 作用于 X_J，且作用由全纯映射或反全纯映射给出。则 $\psi\in\Sigma$作用于 $H^0(X_J,K_J^d)$ 上，成为一个自同构ψ^A： $H^0(X_J,K_J^d)\to H^0(X_J,K_J^d)$。以下 ALS[中的命题22]将在后文发挥重要作用。

命题 3.2 ([ALS22，引理 4。3])。 在上述假设下，Hitchin 参数化 $H_J : {}_n\bigoplus H^0(X_J, K_J^i) \to \mathcal{H}_n(S)$ 是 Σ 等变的，并诱导出一个同胚$_{i=2}$

$$\mathrm{Fix}_\Sigma\big(\bigoplus_{i=2}^{n} H^0(X_J, K_J^i)\big) \simeq \mathrm{Fix}_\Sigma \mathcal{H}_n(S)$$

对任意整数 $n \geq 2$。

4. Covariance metric on the space of negatively curved Riemannian Metrics

本节将紧接着[GKL21第 2], 节的内容，在负曲率度量空间上定义其中引入的协方差度量。这里的内容适用于具有 Anosov 测地流的 n维黎曼流形，不过我们只讨论我们感兴趣的情形，即亏格至少为 S 的闭定向光滑曲面 $\mathfrak{S}$ 2。

4.1. 函数空间。如果 M 是闭流形，我们将用 $\mathcal{D}'(M) := (C^\infty(M))'$ 表示分布空间，并用 $\mathcal{H}^s(M)$ 表示阶数为 $s \in \mathbb{R}$的 Sobolev 空间。后者可定义为

$$\mathcal{H}^s(M) := \{u \in \mathcal{D}'(M) \mid (1 - \Delta_{g_0})^{s/2} u \in L^2_{g_0}(M)\},$$

其中 Δ_{g_0}表示固定黎曼度量 g_0的负拉普拉斯–贝尔特拉米算子，而 $L^2_{g_0}(M)$ 是关于由 g_0的体积密度 $\mathrm{d}v_{g_0}$ 诱导的概率测度的平方可积函数空间，即相对于 $\frac{\mathrm{d}v_{g_0}}{\mathrm{Vol}(M,\ g_0)}$。对于整数$k \geq 0$， $\mathcal{H}^k(M)$ 的另一种有用刻画为

$$\mathcal{H}^k(M) = \{u \in \mathcal{D}'(M) | V_1 \cdots V_m u \in L^2_{g_0}(M), \quad 0 \leq m \leq k, \quad \text{for any } V_j \in \mathfrak{X}(M)\},$$

where $\mathfrak{X}(M)$ 表示 M上的光滑向量场。选择 g_0会诱导出一个内积

$$\langle u, v\rangle_{\mathcal{H}^s_{g_0}(M)} = \langle (1 - \Delta_{g_0})^{s/2} u, (1 - \Delta_{g_0})^{s/2} v\rangle_{L^2_{g_0}(M)} = \langle (1 - \Delta_{g_0})^{s} u, v\rangle_{L^2_{g_0}(M)},$$

使 $\mathcal{H}^s(M)$ 成为希尔伯特空间（最后一个等式由自伴性得出）。在我们的应用中， M通常是 S或 T^1S_g, 其中 T^1S_g是相对于 S上的黎曼度量 g 定义的单位切丛。每当我们写 $L^2(T^1S_g)$ 时，约定用于定义L^2 内积和范数的测度是将总质量归一化为 1 的 g 上的刘维尔测度，记作 μ_g^L。注意，如果 $f \in C^\infty(S)$ 且 $\pi_0 : T^1S_g \to S$ 是自然投影，则有

$$\int_{T^1S_g} \pi_0^* f \mathrm{d}\mu_g^L = \frac{1}{\mathrm{Area}(S, g)} \int_S f \mathrm{d}v_g.$$

对于 $k \in \mathbb{N}_0$ 和 $\alpha \in (0, 1)$，我们还将使用 H¨older 空间

$$C^{k,\alpha}(M) := \{u \in C^k(M) | V_1 \cdots V_k u \in C^\alpha(M), \text{ for any } V_j \in \mathfrak{X}(M)\}$$

其中

$$C^\alpha(M) = C^{0,\alpha}(M) = \big\{u \in C^0(M) \mid \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{\mathrm{dist}_{g_0}(x, y)^\alpha} < \infty\big\}.$$

固定一个范数后， $C^{k,\ \alpha}(M)$ 成为一个巴拿赫空间。利用局部平凡化定义具有 Sobolev 或 H¨older 正则性的光滑向量丛截面空间。需要指出的是，对于 Sobolev 空间和 H¨older 空间，背景度量 g_0 的不同选择不会改变空间本身，而度量的不同选择会得到等价范数。

4.2. **The** Π^g 与方差算子。 在接下来的讨论中，固定一个负曲率度量 g于 S。在 [Gui17],算子 Π^g: $\mathcal{H}^s(T^1S_g)$ $\to \mathcal{H}^{-s}(T^1S_g)$ 是借助微局部工具构造的。将其限制在满足零均值性质的 $f \in C^\infty(T^1S_g)$ 上（即 $\langle f, 1\rangle_{L^2(T^1S_g)}$ $= 0$），它可表示为

$$\Pi^g : C^\infty(T^1S_g) \to \mathcal{D}'(T^1S_g),$$

$$\langle \Pi^g f, f'\rangle = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \langle f \circ \phi_t, f'\rangle_{L^2(T^1S_g)} \mathrm{d}t.$$

这里 ϕ_t 是 g 在 T^1S_g 上定义的测地流；右侧积分的收敛性由 ϕ_t 的相关性的指数衰减保证（参见 [Liv04]）。

从另一个角度来看， Π^g 与热力学形式体系中的方差和协方差有关。

定义 4.1。 $f \in C^\infty(T^1S_g)$相对于 μ_g^L 为零均值，其方差定义为

$$\mathrm{Var}(f, \mu_g^L) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{T^1S_g} \left(\int_0^T f(\phi_t(x))\mathrm{d}t \right)^2 \mathrm{d}\mu_g^L(x)$$

两个相对于 μ_g^L为零均值的函数 f_1、 $f_2 \in C^\infty(T^1S_g)$的协方差定义为

$$\mathrm{Cov}(f_1, f_2, \mu_g^L) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{T^1S_g} \left(\int_0^T f_1(\phi_t(x))\mathrm{d}t \right) \left(\int_0^T f_2(\phi_t(x))\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\mu_g^L(x).$$

一个关键事实是，如果 $f \in C^\infty(T^1S_g)$ 是零均值的，则可利用刘维尔测度的 ϕ_t-不变性μ_g^L 得到

$$\langle \Pi^g f, f\rangle = \mathrm{Var}(f, \mu_g^L); \tag{4.1}$$

证明见 [Pol94，命题 4]。注意，(4.1) 总是非负的。类似地，可以验证 $\langle \Pi^g f_1,\ f_2\rangle = \mathrm{Cov}(f_1,\ f_2,\ \mu_g^L)$ 若 f_1, f_2 均为零均值。

以下定理由 Guillarmou 在 [Gui17] 中证明。我们在本文的设定中陈述该定理 g:

定理 4.2 ([Gui17，定理 1.1], [GL21，第4节A])。 对于所有 $s > 0$，算子 Π^g： $\mathcal{H}^s(T^1S_g)$ $\to \mathcal{H}^{-s}(T^1S_g)$ 有界且自伴，并满足以下性质：

(1) Π^g是正的，即 $\langle \Pi^g f, f\rangle \geq 0$对所有实值 $f \in \mathcal{H}^s(T^1S_g)$ 均成立。(2) 若 f和 $X^g f$属于 $\mathcal{H}^s(T^1S_g)$，则 $\Pi^g X^g f = 0$，其中 X^g是 T^1S_g上的测地向量场。(3) 若 $f \in \mathcal{H}^s(T^1S_g)$，且 $\langle f, 1\rangle_{L^2(T^1S_g)} = 0$，则 $\Pi^g f = 0$当且仅当上同调方程 $X^g w = f$存在一个解 $w \in \mathcal{H}^s(T^1S_g)$，且 w在相差常数的意义下唯一。(4) $\Pi^g 1 = 0$。(5) 若 $f \in \mathcal{H}^s(T^1S_g)$，则 $\langle \Pi^g f, 1\rangle = 0$。

这些 Π^g 的性质对于从 [GKL21第 2]节引入协方差度量 $\Pi^g 1 = 0$ 非常重要。特别是， $\Pi^g 1 = 0$ 这一事实使得可以使用（4.2）来定义对所有 $C^\infty(T^1S_g)$ 的 Π^g： 一旦注意到 $\Pi^g f = \Pi^g(f - \langle f, 1\rangle_{L^2\ (T^1S_g)}$ ），以下结论便显而易见。

引理 4.3。算子 Π^g: $C^\infty(T^1S_g) \to \mathcal{D}'(T^1S_g)$ 由下式给出

$$\langle \Pi^g f, f'\rangle := \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \langle P_g(f) \circ \phi_t, f'\rangle_{L^2(T^1S_g)} \mathrm{d}t,$$

其中， P_g: $C^\infty(T^1S_g) \to C^\infty(T^1S_g)$ 是由下式定义的投影算子

$$P_g(f) := f - \langle f, 1\rangle_{L^2(T^1S_g)}.$$

4.3. 曲面上的对称张量 S。我们用 $\mathsf{S}_m(S)$ 表示 S 上光滑对称 m 阶张量的空间（需要 C^k、$^\alpha$ 正则性时，我们使用 S^k,$_m{}^\alpha(S)$）。若 $f \in \mathsf{S}_m(S)$ 且 $m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$，则用 $\pi_m^* f \in C^\infty(TS)$ 表示映射 $\pi_m^* f(x,$ $v) := f_x(v, \cdots, v)$。因此， π_m^* 将对称 m 阶张量转化为切丛 TS 上的函数。黎曼度量 g 自然在 $\mathsf{S}_m(S)$ 上诱导出标量积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$（例如参见 [GL21，第 2A 节1]）。 π_m^* 的形式伴随算子定义如下：

$$\langle f, \pi_{m*} h\rangle_{L^2_g(S)} = \langle \pi_m^* f, h\rangle_{L^2(T^1S_g)},$$

其中 $f \in \mathsf{S}_m(S)$ 且 $h \in C^\infty(T^1S_g)$。

在本讨论的余下部分，固定一个光滑的黎曼度量 g 于 S。我们将 D_g 表示为关于列维-奇维塔联络的协变导数的对称化 ∇_g。根据 [GL21，引理 23]，测地向量场 X^g 在 T^1S_g 上与算子 D_g之间满足以下关系：

$$X^g\pi_m^* = \pi_{m+1}^* D_g. \tag{4.2}$$

D_g 的形式伴随算子是对称 m张量上的散度算子的相反数，即 $D_g^* := -\mathrm{tr}_g \circ \nabla_g : \mathsf{S}_m(S) \to \mathsf{S}_{m-1}(S)$。注意，函数上的负拉普拉斯–贝尔特拉米算子由$\Delta_g = -D_g^* D_g$给出。

我们主要关注对称二阶张量，无论是光滑的还是具有 H¨older 正则性的；对于这些张量，以下 L^2-正交分解很有用。任意张量 $f \in \mathsf{S}^{k,\alpha}_2(S)$ 都可以唯一地分解为以下各项之和

$$f = D_g\chi + v, \tag{4.3}$$

其中 $\chi \in \mathsf{S}^{k+1,\alpha}_1(S)$ 和 $v \in \mathsf{S}^{k,\alpha}_2(S)$ 满足 $D_g^* v = 0$。分量 $D_g\chi$ 通常称为 f 的势部分，而无散分量 v 称为无散的。另一个有用的 $f \in \mathsf{S}^{k,\alpha}_2(S)$ 分解方式，是相对于 g将其分解为共形部分和无迹部分：

$$f = f_1 + f_2,$$

其中 $f_1 = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_g f)g$与 g共形，而 $f_2 = f - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_g f)g$无迹。

4.4. 空间 $\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$。这里我们总结 GKL21 第 2 节 3] 中的一些有用事实。回顾一下，在第 2.1 节中，我们将 $\mathcal{M}$ 定义为闭定向光滑曲面 S 上光滑黎曼度量的空间，该曲面的亏格为 $\mathfrak{g} \geq 2$；并将 $\mathcal{M}_-$ 定义为负曲率黎曼度量构成的开子空间（取 C^∞ 拓扑）。空间 $\mathcal{M}$ 是一个光滑 Fr´echet 流形，其在 $g \in \mathcal{M}$ 处的切空间可自然地识别为光滑对称二阶张量空间 $\mathsf{S}_2(S)$。由于 $\mathcal{M}_-$ 是 $\mathcal{M}$ 在 C^∞拓扑下的开子集，因此二者具有相同的切空间。与恒等映射同伦的光滑微分同胚群 $\mathcal{D}_0$ 是一个 Fr´echet 李群（[Ham82，第 4.6] 节），并通过拉回作用于 $\mathcal{M}$ 的右侧。此作用在 $\mathcal{M}$ 上是光滑且适当的（[Ebi68], [Ebi70]）。此外，对于负曲率度量，此作用是自由的 [Fra66]。根据 Ebin切片定理（见 [Ebi70], [CK21]），对于任意 $g_0 \in \mathcal{M}_-$，存在 $\mathcal{M}_-$中 g_0 的一个邻域 $\mathcal{U}$、Id $\in \mathcal{D}_0$的一个邻域 $\mathcal{V}$，以及一个包含 g_0 的 Fr´echet 子流形 $\mathcal{W}$，它是 $\mathcal{M}_-$ 的子流形，使得

$$\begin{aligned} \mathcal{W} \times \mathcal{V} &\to \mathcal{U} \\ (g, \psi) &\mapsto \psi^* g \end{aligned} \tag{4.4}$$

是光滑 Fr´echet 流形之间的微分同胚，并且满足

$$T_{g_0}\mathcal{W} = \{v \in \mathsf{S}_2(S) | D_{g_0}^* v = 0\}. \tag{4.5}$$

由于轨道空间 $g \cdot \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{M}_-$ 在 g 处的切空间由形如 $\mathcal{L}_Y g$ for$Y \in \mathfrak{X}(S)$ 的元素组成，而 $\frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g = D_g(Y^\flat)$ 这一事实意味着它恰好由势对称二阶张量组成。因此，$T_{g_0}\mathcal{W}$ 和 $T_{g_0}(g \cdot \mathcal{D}_0)$ 关于 $L^2_{g_0}$ 内积彼此正交。对于靠近 g_0 的 g，有 $T_g\mathcal{W} \cap T_g(g \cdot \mathcal{D}_0) = \{0\}$。由于 $\mathcal{D}_0$ 在 $\mathcal{M}_-$ 上的作用是适当且自由的，再结合 (4.4) 的微分同胚性质，$\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$ 中 $[g]$ 的一个邻域可与 $\mathcal{W}$中 g 的一个邻域相识别。因此，集合 $\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$ 继承了 $\mathcal{W}$ 的 Fr´echet 流形结构，其在 $[g_0]$ 处的切空间可识别为 (4.5)。

我们还将用到 $\mathcal{M}^{k,\alpha}_-$ 空间，其中包含 $C^{k,\alpha}$ 负曲率度量，$k \in \mathbb{N}$ 较大且$\alpha \in (0,1)$；这是一个巴拿赫流形，在每个 g处的 $T_g\mathcal{M}^{k,\alpha}_- = \mathsf{S}^{k,\alpha}_2(S)$。群 $\mathcal{D}^{k+1,\alpha}_0$ 由与恒等映射同伦的 $C^{k+1,\alpha}$微分同胚组成，它在 $\mathcal{M}^{k,\alpha}_-$ 上连续、自由且适当地作用，但并非光滑作用（见 [Tro92]）。因此，我们无法使用商流形定理赋予 $\mathcal{M}^{k,\alpha}_-/\mathcal{D}^{k+1,\alpha}_0$ 光滑流形结构。不过，我们注意到，$\mathcal{M}^{k,\alpha}_-$ 中任意 C^∞ 度量的 $\mathcal{D}^{k+1,\alpha}_0$ 轨道都是后者的光滑子流形，其在 g_0 处的切空间由相对于 g_0的 $C^{k,\alpha}$ 势对称二阶张量组成。

理解了上述内容后，我们可以在下一小节中介绍负曲率度量空间上的协方差度量。

4.5. 上的协方差度量 $\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$。为了构造 [GKL21] 上的协方差度量（$\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$），我们首先在 G 上以及 $\mathcal{M}_-$ 上构造一个双线性形式 $\mathcal{M}^{k,\_^\alpha}$。人们可能会倾向于认为，$\pi_{2*}\circ\Pi^g\circ\pi_2^*$ 根据定理 $T_g(\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0)$ 在 4.2 上诱导出一个正定对称双线性形式。然而，尽管Π^g 是正的（定理 4.2），与 $\pi_{2*}\circ\Pi^g\circ\pi_2^*$ 相关的双线性形式的正定性并不能由此推出（见注 4.11）。为了解决这一问题，[GKL21] 中的作者考虑算子

$$\begin{aligned}\Pi_m^g :&\mathsf{S}_m(S)\to\mathsf{S}_m^{-\infty}(S),\\ \Pi_m^g :&=\pi_{m*}(\Pi^g+\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\pi_m^*,\end{aligned}$$

其中算子 $\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$：$C^\infty(T^1S_g)\to C^\infty(T^1S_g)$ 将函数 $f\in C^\infty(T^1S_g)$ 投影到其均值$\langle f,1\rangle_{L^2(T^1S_g)}$，且 $\mathsf{S}_m^{-\infty}(S):=(\mathsf{S}_m(S))'$。算子 Π_m^g 可以视为 X 射线变换正规算子的类比。该正规算子定义在几何性质足够良好的带边界紧流形上，它对所有经过某一点的测地线上的张量场 X射线变换取平均（例如参见 [PSU23]）。在闭曲面 (S,g) 上，X 射线变换定义为

$$I_m^g:\mathsf{S}_m(S)\to\ell^\infty(\mathcal{C}),\quad f\mapsto I_m^gf(c)=\frac{1}{L(c)}\int_0^{L(c)}\pi_m^*f(\phi_t(z))\mathrm{d}t, \tag{4.6}$$

其中 $\mathcal{C}$ 表示测地流的闭轨道集合，并且在 (4.6) 中，一个原始长度为 c 的闭轨道$L(c$可参数化为 $\phi_t(z)$，其中 $t\in[0,L(c)]$ 且 $z\in c$。在 S 上，所有测地线组成的空间不具有流形结构，因此，相较于正规算子，Π_m^g 的构造更为复杂。

现在可以在 $T_g\mathcal{M}_-$ 上定义一个双线性形式如下：

定义 4.4. 在 $T_g\mathcal{M}_-$ 上定义双线性形式 $G_g(\cdot,\cdot)$，如下所示：

$$G_g(h_1,h_2):=\langle\Pi_2^gh_1,h_2\rangle_{L^2_g(S)}$$

对于 $h_j\in T_g\mathcal{M}_-\simeq\mathsf{S}_2(S)$ 和 $j=1,2$。

引理 4.5. 双线性形式 $G_g(\cdot,\cdot)$ 满足

$$G_g(h,h)=\mathrm{Var}(P_g(\pi_2^*h),\mu_g^L)+\langle\pi_2^*h,1\rangle^2_{L^2(T^1S_g)},$$

对于 $g\in\mathcal{M}_-$ 和 $h\in T_g\mathcal{M}_-$，其中 Var 是定义 *4.1* 中定义的方差。

证明。我们有

$$\begin{aligned}G_g(h,h)&=\langle\Pi_2^gh,h\rangle_{L^2_g(S)}\\&=\langle\Pi^g\pi_2^*h,\pi_2^*h\rangle+\langle\pi_2^*h,1\rangle_{L^2(T^1S_g)}\langle\pi_2^*h,1\rangle_{L^2(T^1S_g)}\\&=\langle\Pi^g\big(P_g(\pi_2^*h)\big),\pi_2^*h\rangle+\langle\pi_2^*h,1\rangle_{L^2(T^1S_g)}\langle\pi_2^*h,1\rangle_{L^2(T^1S_g)}&&\text{(by Lemma 4.3)}\\&=\langle\Pi^g\big(P_g(\pi_2^*h)\big),P_g(\pi_2^*h)\rangle+\langle\pi_2^*h,1\rangle_{L^2(T^1S_g)}\langle\pi_2^*h,1\rangle_{L^2(T^1S_g)}.&&\text{(By Theorem 4.2(5).)}\end{aligned}$$

该结果立即成立，因为第一项与 $\mathrm{Var}(P_g(\pi_2^*h)\ \mu_g^L)$ 相同。 □

推论 4.6. 双线性形式 $G_g(\cdot,\cdot)$ 也满足

$$\begin{aligned}G_g(h_1,h_2)&=\mathrm{Cov}(P_g(\pi_2^*h_1),P_g(\pi_2^*h_2),\mu_g^L)+\langle\pi_2^*h_1,1\rangle_{L^2(T^1S_g)}\langle\pi_2^*h_2,1\rangle_{L^2(T^1S_g)}\\&=\mathrm{Cov}(P_g(\pi_2^*h_1),\pi_2^*h_2,\mu_g^L)+\langle\pi_2^*h_1,1\rangle_{L^2(T^1S_g)}\langle\pi_2^*h_2,1\rangle_{L^2(T^1S_g)}.\end{aligned}$$

证明. 证明见 [Dai23，推论 2.21 和定义 2。22]。 □

命题 4.7. 双线性形式 $G_g(\cdot,\cdot)$ 定义在巴拿赫流形 $\mathcal{M}^{k,\_^\alpha}$ 上，其中固定较大的 k 和$\alpha\in(0,1)$，并且在此处是 C^{k-3}的，即对于任意光滑局部截面 $h_1,h_2\in C^\infty(\mathcal{U};\mathsf{S}^{k,}{}_2{}^\alpha(S))$，其中$\mathcal{U}\subset\mathcal{M}^{k,_^\alpha}$ 是度量 g_0 的一个开邻域，该函数

$$\mathcal{U}\to\mathbb{R},\qquad g\mapsto G_g(h_1(g),h_2(g)) \tag{4.7}$$

是 C^{k-3}。类似地，如果 $\mathcal{U}\subset\mathcal{M}_-$ 且 h_1，$h_2\in C^\infty(\mathcal{U};\mathsf{S}_2(S))$ 满足 h_1，h_2：$\mathcal{M}^{k,\_^\alpha}\to\mathsf{S}^{k,}{}_2{}^\alpha(S)$ 对所有 k均光滑，则 (4.7) 在 $\mathcal{U}$上光滑。

证明。 我们将使用推论4.6中的表达式，该表达式在 $\mathcal{M}^{k,\alpha}$ 上也有意义，以下证明将说明这一点。对于 $\mathcal{U}\subset\mathcal{M}^{k,\alpha}$ 以及对于 $i=1,2$，考虑映射（最后一个等式见 [GKL21，第 1 节。2] ）

$$F_i(g):\mathcal{U}\to\mathbb{R},\quad g\mapsto\langle\pi_2^*h_i(g),1\rangle_{L^2(T^1S_g)}=\int_{T^1S_g}\pi_2^*h_i(g)\mathrm{d}\mu_g^L=\frac{1}{\mathrm{Area}(S,g)}\int_S\mathrm{tr}_g h_i(g)\mathrm{d}v_g.$$

积分因子可在坐标 x^1,x^2 中局部写为 $\int\sum_{s,t=1}^{2}(h_i(g))_{st}\sqrt{\det(g)}dx$。由于

对所有 $s,t=1,2$，映射 $g\mapsto g^{st}$ 和 $g\mapsto\sqrt{\det(g)}$ 光滑地映入 $C^{k,\alpha}(S)$，因此被积函数也光滑。于是该积分定义了一个从 $C^{k,\alpha}(S)$（实际上甚至从 $C^0(S)$）到 $\mathbb{R}$ 的有界线性映射，因此复合映射是光滑的。面积局部表示为 $\int\sqrt{\det(g)}dx$，因此它关于 g 也是光滑的。所以映射 F_i 及其乘积都是光滑的。

接下来我们证明 $g\mapsto$ 协方差$(P_g(\pi_2^*h_1(g))\ P_g(\pi_2^*h_2(g))\ \mu_g^L)$ 是 C^{k-3}。根据热力学形式主义，我们知道（例如参见[PP90，命题 4。11] ,[Dai23，注 2。25])

$$\mathrm{Cov}(P_g(\pi_2^*h_1(g)),P_g(\pi_2^*h_2(g)),\mu_g^L)=\frac{\partial^2\mathbf{P}(-J_g^u+s\pi_2^*h_1(g)+t\pi_2^*h_2(g),X^g)}{\partial t\partial s}\Big|_{s=t=0}.\tag{4.8}$$

这里，$\mathrm{P}(\cdot,X^g)$ 是相对于 g 的测地流的压强函数（例如参见 [PP90]），它由测地向量场 $X^g\in\mathfrak{X}^{k-1,\alpha}(TS)\subset\mathfrak{X}^{k-1}(TS)$ 确定（注意，这个嵌入是光滑的）。Liouville 测度 μ_g^L 是 $-J_g^u$ 的平衡态，其中 J_g^u 是由 X^g 生成的测地流的不稳定雅可比（[BR75，第4节和第 5] 节）。压强关于第一个分量是实解析的（参见 [PP90，命题 4.8]，[McM08，第 377] 页）。由 (4.8) 和极化，要证明 $g\mapsto\partial_1^2\mathrm{P}(0,X^g)(\pi_2^*h_1(g)\ \pi_2^*h_2(g))$ 是 C^{k-3}，只需证明

$$f(t,g):=\mathbf{P}(t\pi_2^*h_2(g),X^g):\mathbb{R}\times\mathcal{M}_-^{k,\alpha}\to\mathbb{R}$$

是 C^{k-1}。由于我们知道

$$\mathcal{U}\ni g\mapsto\pi_2^*h_j(g)\in C^{k,\alpha}(TS)\quad\text{and}\quad\mathcal{U}\ni g\mapsto X^g\in\mathfrak{X}^{k-1}(TS)$$

是光滑的，根据 [Con92, Theorem C(a)]，我们知道，固定 $t=t_0$ 后，映射 $\mathrm{P}(t_0\pi_2^*h_2(g)\ X^g)$ 关于 g 是 C^{k-1}。由于改变 t 不会改变背景流及相应的有限型子移位 [Con92, Lemma 5.1]，，因此可以调整 [Con92, Theorem C] （第 110 页）的证明，利用压强对第一分量的实解析依赖性，证明 $\mathrm{P}(t\pi_2^*h_2(g)\ X^g)$ 关于两个参数 t 和 g 联合 C^{k-1}。□

对我们的目的而言，双线性形式 $G_g(\cdot,\cdot)$ 在 $T_g\mathcal{M}_-\cap\ker D_g^*$ 上正定这一点很重要：

引理 4.8 ([GKL21, 引理 2.1]). 给定 $h\in T_g\mathcal{M}_-\cap\ker D_g^*$，则

$$G_g(h,h)\geq 0.$$

此外，$G_g(h,h)=0$ 当且仅当 $h=0$。

另一个重要 的判据是以下引理，它说明双线性形式 $G(\cdot,\cdot)$ 能够下降到 $\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$ a

引理 4.9。设 $h_1=D_gp\in T_g\mathcal{M}^-$ 是一个势张量，且满足 $p\in\mathrm{S}_1(S)$。 n

$$G_g(h_1,h_2)=0$$

对任意 $h_2\in\mathrm{S}_2(S)$，均成立。

证明。记 $\langle\Pi_2^gh_1,h_2\rangle_{L_g^2(S)}=\langle\Pi^g\pi_2^*(D_gp)\ \pi_2^*h_2\rangle+\langle\pi_2^*(D_gp)\,1\rangle_{L^2(T^1S_g)}\langle\pi_2^*h_2,1\rangle_{L^2(T^1S_g)}$。由公式 (4.2) 和定理 4.2 可知，$\pi_2^*D_gp=X^g\pi_1^*p$，且 $X^g\pi_1^*p$ 属于 Π^g 算子的核。此外，$\langle\pi_2^*D_gp,1\rangle_{L^2(T^1S_g)}=\langle p,D_g^*\pi_{2*}1\rangle_{L_g^2(S)}$，因此，由于 $\pi_{2*}1=\frac{1}{2}g$ 且 $D_g^*=-\mathrm{Tr}_g\nabla_g$，我们得出$G_g(h_1,h_2)=0$。□

现在我们可以引入黎曼度量，其形式为 [GKL21]。

命题 4.10 ([GKL21, 命题 3.9])。 双线性形式 G 在商空间上诱导出一个黎曼度量 $\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$，称为协方差度量。给定 $[g]\in\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$，我们用 $[g]$ 处的协方差度量表示为 $G_{[g]}(\cdot,\cdot)$。

证明。该命题的证明见 [GKL21, 命题 3.9]，鉴于其重要性，我们在此重述。固定 $g_0 \in \mathcal{M}_-$，我们用切片 $\mathcal{W} \subset \mathcal{M}_-$（一个 Fr´echet 子流形）来识别 $[g_0] \in \mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$ 的一个邻域，该切片经过 g_0。我们验证正定性。对于靠近 g_0 的 $g \in \mathcal{W}$，令$h \in T_g\mathcal{W}$。由于我们可以将 $h = \mathcal{L}_Y g + h'$ 分解为 $Y \in \mathfrak{X}(S)$ 和 $D_g^* h' = 0$，由引理 4.9 可得 $G_g(h,h) = G_g(h',h') \geq 0$；根据引理 4.8，当且仅当 $h' = 0$ 时等号成立。若 $h' = 0$，由 $T_g\mathcal{W} \cap \{\mathcal{L}_Y g | Y \in \mathfrak{X}(S)\} = \{0\}$ 这一事实可得 $h = 0$。我们注意到，根据引理 4.9，该论证与我们用来识别 $\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$ 的切片 $\mathcal{W}$ 无关。因此，$G_{[g]}(\cdot,\cdot)$ 是商空间 $\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$上的良定义黎曼度量。□

备注 4.11. 从引理 4.9 的证明中，我们注意到 $\langle \Pi^g \pi_2^* h, \pi_2^* h\rangle = \mathrm{Var}(P_g(\pi_2^* h)\ \mu_g^L)$ 也下降为 $\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$ 上的一个双线性形式。然而，它不是正定的，因此不能在 $\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$ 上给出黎曼度量。例如，考虑由 $g_t = tg$ 给出的共形度量族 $\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}} \in \mathcal{M}_-$，其中 $g \in \mathcal{M}_-$。由于 $h = \dot{g}_0 = g$ 无散（因此不是势张量），我们有 $d\pi_{\mathcal{M}_-} h = d\pi_{\mathcal{M}_-} g \in T_{[g_0]}(\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0)$ 非零（其中 $\pi_{\mathcal{M}_-}\colon \mathcal{M}_- \to \mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$ 是商映射）。但是 $P_g(\pi_2^* h) = P_g(\pi_2^* g) = 0$，因此 $\langle \Pi^g \pi_2^* h, \pi_2^* h\rangle = 0$。

接下来我们证明，扩展映射类群是协方差度量的一个等距子群。回想一下，$\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{M}_-$ 上的作用通过拉回诱导出扩展映射类群 $\mathrm{Mod}^{\pm}(S)$ 在空间 $\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$上的右作用。在下面的命题中，若 $[\psi] \in \mathrm{Mod}^{\pm}(S)$，我们将此作用记为$\theta_{[\psi]}\colon \mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0 \to \mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0,\ [g] \mapsto \theta_{[\psi]}([g]) = [\psi^* g]$。于是，$\theta_{[\psi]}$ 是光滑的，且其逆映射也光滑（注意，$\mathrm{Mod}^{\pm}(S)$ 是离散的，而 $[g] \mapsto [\psi^* g]$ 是光滑的；将 $[g]$ 和 $[\psi^* g]$ 按照 (4.4) 中的方式用切片 $\mathcal{W}$和 $\psi^*\mathcal{W}$ 表示即可看出这一点）。实际上，相对于协方差度量 $G_{[g]}(\cdot,\cdot)$，它是一个等距变换。

命题 4.12（等距子群）。协方差度量在扩展映射类群对 $\mathcal{M}^-/\mathcal{D}_0$ 的作用下保持不变。换言之，扩展映射类群是$\widehat{}$上协方差度量的等距子群。具体而言，给定 $[g] \in \mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$ 和 $h_j \in T_{[g]}(\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0)$，对于 $j = 1、2$ 以及元素$[\psi] \in \mathrm{Mod}^{\pm}(S)$，我们有

$$G_{\theta_{[\psi]}([g])}(d\theta_{[\psi]}\widehat{h}_1, d\theta_{[\psi]}\widehat{h}_2) = G_{[g]}(\widehat{h}_1, \widehat{h}_2).$$

$\widehat{}$证明。首先注意，若 $h \in T_{[g]}(\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0)$ 且 $h \in T_g\mathcal{M}_-$ 满足 $d\pi_{\mathcal{M}_-} h = h$，其中某个 $g \in [g]$，则对于任意 $\psi \in [\psi]$，$d\theta_{[\psi]}\widehat{h} = d\pi_{\mathcal{M}_-}(\psi^* h)$。事实上，取一条满足 $h = \frac{d}{dt} g_t\big|_{t=0}$的曲线 $g_t \in \mathcal{M}_-$，使得$\frac{d}{dt}[g_t]\big|_{t=0} = \widehat{h}$。那么

$$d\theta_{[\psi]}\widehat{h} = \frac{d}{dt}\big(\theta_{[\psi]}([g_t])\big)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\pi_{\mathcal{M}_-}(\psi^* g_t)\big|_{t=0} = d\pi_{\mathcal{M}_-}(\psi^* h).$$

由此以及协方差度量的定义可知，只需证明

$$G_{\psi^* g}(\psi^* h_1, \psi^* h_2) = G_g(h_1, h_2) \tag{4.9}$$

$\widehat{}$对于满足 $d\pi_{\mathcal{M}_-} h_j = h_j$ 和 $\psi \in \mathcal{D}$的 $h_j \in T_g\mathcal{M}_-$，因为在这种情况下，我们有

$$G_{[g]}(\widehat{h}_1, \widehat{h}_2) = G_g(h_1, h_2) = G_{\psi^* g}(\psi^* h_1, \psi^* h_2) = G_{\theta_{[\psi]}([g])}(d\theta_{[\psi]}\widehat{h}_1, d\theta_{[\psi]}\widehat{h}_2). \tag{4.10}$$

$\widehat{}$注意，此处 h_j 由 h_j 确定，且只相差一个相对于商映射竖直的张量场，即一个势张量。(4.10) 的成立与 h_j 的选取无关，这由引理 4.9可知。

为证明 (4.9)，回顾一下

$$G_g(h_1,h_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} \langle P_g(\pi_2^* h_1)\circ\phi_t, \pi_2^* h_2\rangle_{L^2(T^1 S_g)} \mathrm{d}t + \langle \pi_2^* h_1, 1\rangle_{L^2(T^1 S_g)} \langle \pi_2^* h_2, 1\rangle_{L^2(T^1 S_g)},$$

其中 $P_g(\pi_2^* h_1)(x) = \pi_2^* h_1(x) - \langle \pi_2^* h_1, 1\rangle_{L^2(T^1 S_g)}$。$g$和 $\psi^* g$的刘维尔概率测度通过推前相关联，即 $\mu^L_{\psi^* g} = (\psi_*^{-1})_* \mu_g^L$，其中 $\psi_*^{-1}\colon T^1 S_g \to T^1 S_{\psi^* g}$是由 ψ诱导的微分同胚。此外，根据列维-奇维塔联络的自然性，g 和 $\psi^* g$各自的测地流 ϕ_t^g 和 $\phi_t^{\psi^* g}$ 通过 ψ共轭相关联，即 $\phi_t^{\psi^* g} = \psi_*^{-1}\circ\phi_t^g\circ\psi_*\colon T^1 S_{\psi^* g} \to T^1 S_{\psi^* g}$。简单地作变量替换即可得到 (4.9)。□

注 4.13. 虽然我们只证明了上述定理适用于扩展映射类群在 $\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$上的右拉回作用，但该定理自然也适用于第 *3.1* 节中引入的其诱导左作用。

4.6. $\mathcal{T}(S)$ 的特殊情形。 Fischer 和 Tromba [FT84], 运用黎曼几何和非线性分析，重新证明了经典结果：$\mathcal{T}(S) = \mathcal{M}_{-1}/\mathcal{D}_0$ 是一个 C^∞ 有限维可缩流形。其在 $[\sigma] \in \mathcal{M}_{-1}/\mathcal{D}_0$ 处的切空间同构于

$$\mathsf{S}_2^{\sigma,TT}(S) = \{h \in \mathsf{S}_2(S) | \operatorname{tr}_\sigma h = 0, D_\sigma^* h = 0\}, \tag{4.11}$$

其中 $\sigma \in [\sigma]$。更具体地说，给定 $\sigma_0 \in \mathcal{M}_{-1}$ 和 $k \gg 1$, $\alpha \in (0,1)$，可以构造一个经过 σ_0的局部切片 $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_{-1} \subset \mathcal{M}^{k,\alpha}_{-1}$，并将其识别为 $[\sigma_0] \in \mathcal{M}_{-1}/\mathcal{D}_0$ 的一个邻域，使得 $T_{\sigma_0}\mathcal{S} = \mathsf{S}_2^{\sigma_0\,TT}(S)$ （参见 [Tro92，定理 2.4.2] 和第 5.3 节）[2]。此外，对于 $h \in T_\sigma\mathcal{S}$，分解式 (4.3) 在 $v \in \mathsf{S}_2^{\sigma\,TT}(S)$ 的情形下成立。空间 $\mathsf{S}_2^{\sigma\,TT}(S)$ 与黎曼曲面X_J上的全纯数据有关，其中 J 是由 σ 和一个定向选择所确定的复结构：

定理 4.14 ([FT84, 定理 8.9])。对于 $\sigma \in \mathcal{M}_{-1}$，空间$H^0(X_J, K_J^2)$ 与 $\mathsf{S}_2^{\sigma\,TT}(S)$ 之间存在典范同构，由 $q \mapsto \operatorname{Re}(q)$ 给出。因此，根据黎曼-罗赫定理，空间 $\mathsf{S}_2^{\sigma\,TT}(S)$ 的实维数为 $6\mathfrak{G} - 6$。

将协方差度量的公式限制在 Teichmüller 空间 $\mathcal{T}(S) = \mathcal{M}_{-1}/\mathcal{D}_0$ 上后，可以对其进行简化，并证明它在该空间上的限制是 Weil-Petersson度量的一个倍数。

推论 4.15。在 Teichmüller 空间 $\mathcal{T}(S)$ 上，$[\sigma] \in \mathcal{T}(S)$ 处的协方差度量满足

$$G_{[\sigma]}(\widehat{h}, \widehat{h}) = \operatorname{Var}(\pi_2^* h, \mu_\sigma^L),$$

其中 $\widehat{h} \in T_{[\sigma]}\mathcal{T}(S)$、$\sigma \in [\sigma]$ 和 h 是 $\widehat{h}$ 在 $\mathsf{S}_2^{\sigma\,TT}(S)$ 中的提升。

证明。我们有 $\langle \pi_2^* h, 1\rangle_{L^2(T^1 S_\sigma)} = \text{面积}(S,\sigma)^{-1} \int_S \operatorname{tr}_\sigma h \, \mathrm{d}v_\sigma = 0$（参见 [GKL21，第 1.2] 节）。由于 $h \in \mathsf{S}_2^{\sigma\,TT}(S)$，可得 $\pi_2^* h$为零均值。□

结合以上讨论，我们得到：

定理 4.16 ([McM08，定理 1。5], [BT08], [LW18，定理 6.3。1])。给定 $h \in T_{[\sigma]}\mathcal{T}(S)$，考虑提升 $h \in \mathsf{S}_2^{\sigma\,TT}(S)$ 由全纯二次微分的实部给出 q （定理 4.14）。那么

$$G_{[\sigma]}(\widehat{h}, \widehat{h}) = \operatorname{Var}(\mathfrak{R}(q), \mu_\sigma^L) = C\langle [q], [q]\rangle_{WP}([\sigma])$$

Here $\mathfrak{R}(q) := \pi_2^*(\operatorname{Re}(q)) \in C^\infty(T^1 S_\sigma, \mathbb{R})$。常数 C 仅取决于 S 的拓扑。

5. The Blaschke locus in $\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$

本节讨论布拉施克轨迹 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$。在小节5.1中，我们介绍仿射微分几何的一些基本概念。接着在小节5.2中，我们介绍布拉施克轨迹，并讨论它与全纯向量丛 $Q_3(S)$（小节2.2）之间的关系。随后，我们按照 Tromba $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 的思路，在小节5.3 中研究布拉施克轨迹的正则性 [Tro92], ，最后在小节5.4中讨论布拉施克轨迹的拓扑。王氏方程（5.4）将是我们在本节及下一节研究中的关键。

5.1. 仿射微分几何与布拉施克度量。 本小节简要介绍仿射球面和布拉施克度量。这些对象源自仿射微分几何，该领域研究仿射微分不变量，即 $\mathbb{R}^{n+1}$ 在所有保体积仿射变换下保持不变的超曲面的微分性质。关于仿射微分几何的标准参考文献有 [Lof10] 和 [NS94]。布拉施克度量空间（其中包括作为特例的双曲度量）将是下文研究的对象。

仿射微分几何中的一个基本构造，是为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的超曲面 L 指定一个横截向量场 $\xi \pitchfork L$，即仿射法向量场；它是一个仿射微分不变量。仿射球面是指其仿射法向直线共点于一点（即中心）的超曲面 L。这里我们概述 $\mathbb{R}^3$ 的特殊情形下仿射球面的构造及其相关的仿射微分不变量。设 L 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个超曲面。选取一个横截向量场 $\xi : L \to \mathbb{R}^3$，可得到如下分解

[2]在 [Tro92], 切片 $\mathcal{S}$ 是希尔伯特流形的一个子流形 $\mathcal{M}^s_{-1}$ 其由具有固定索伯列夫正则性的双曲度量构成，不过这些证明在 H¨较老的情形下也同样适用。

$\mathbb{R}^3 = T_pL \oplus \langle \xi(p) \rangle$ 对任意 $p \in L$ 均成立，其中 $\langle \xi(p) \rangle$ 表示由 $\xi(p)$ 张成的直线。由此可将 $\mathbb{R}^3$ 上的标准平坦仿射联络 D 分解为切向部分 ∇ 和法向部分，如下所示，

$$D_X Y = \nabla_X Y + g(X,Y)\xi, \tag{5.1}$$

$$D_X \xi = -B(X) + \tau(X)\xi, \tag{5.2}$$

其中， X 和 Y 是 L 上的切向量场， $B = B_\xi$ 是 TL的端omorphism。注意， ∇是 TL上的无挠联络，因此 g 是一个对称二阶张量。将情形限制为 L 严格凸且 ξ 指向曲面 L的凸侧，我们可以假定 g 是正定的。此外，通过施加条件 $\tau \equiv 0$ 以及对任意 g-标准正交标架(X_1, X_2)都有 $\det(\xi, X_1, X_2)^2 \equiv 1$，可以确定 L上唯一的横截向量场 ξ。它是一个仿射微分不变量，称为 L的仿射法向量。此时，端omorphism B 称为仿射形算子。此外，可以验证，向量场 ξ 与某一点共点，等价于仿射形算子 B 是恒等映射的非零倍数：$B = HI$，其中 $H \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$是某个常数，即仿射平均曲率。我们将关注 $H = -1$的情形，此时 L 是一个双曲仿射球[3]。

我们还需要两个与仿射球面 L 相关的其他仿射微分不变量。其中之一是仿射第二基本形式 g，它是对称且正定的。它给出一个黎曼度量，是定义在 L 上的仿射微分不变量，称为布拉施克度量。第二个是定义在 TL 上的三次型 A，称为皮克型：它由取差 $\nabla - \nabla^g$ 得到，其中 ∇^g 表示布拉施克度量的列维-奇维塔联络，并通过 g 降低一个指标。若利用布拉施克度量的共形类将 L 视为黎曼曲面，那么皮克型 A 就是定义在 L 上的三次微分 $q = \tilde{q}(z)dz^3$ 的实部，该三次微分称为皮克微分。

映射 $f = \xi : L \to \mathbb{R}^3$ 在结构方程 (5.1) 和 (5.2) 满足可积条件时，给出从 L 到 $\mathbb{R}^3$ 的一个浸入[4]。在由布拉施克度量 g的共形类所确定的复坐标 z 下，Lof10第 5] 节中给出的 f 可积条件如下列偏微分方程所示：

$$\tilde{q}_{\bar{z}} = 0, \tag{5.3}$$

$$K(g) = -1 + 2|q|_g^2. \tag{5.4}$$

第一个方程（5.3）只要求皮克微分 q 是全纯的。第二个方程（5.4）是关于 g 的二阶偏微分方程，其中 $K(g)$ 表示 g 的高斯曲率，而$|q|_g^2 = \frac{|q|^2}{g^3}$ 是全纯三次微分 q的逐点范数。它在仿射球面文献中称为 王氏方程 [Wan91]。这个方程在本文中至关重要。

命题 5.1 ([Lof99])。 王氏方程（*5.4*）在紧黎曼曲面上给定全纯三次微分 q 时存在唯一的光滑解。

仿射球面理论一个有趣的方面是它与第2.2节介绍的 Higgs丛理论之间的联系。王氏方程可以看作是射影一般线性群$(3, \mathbb{R})$ Higgs 丛的 Hitchin方程的一个特例：设 J 是 S 上的一个复结构，并用 σ 表示与 J相关的双曲度量。设 q 是关于复结构 J的全纯三次微分。Higgs 丛 $s_J(0, 2q)$ 的 Hitchin方程 (2.1) 实际上可化为一个标量方程，即与(J, q)相关的 S上的王氏方程 (5.4)（例如参见 [Lab07，第 9] 节和 [Li19，第 6.2]节）。

S 到我们最初覆盖的整个讨论的要点是以下重要定理。

$\tilde{S}$ 为其万有覆盖，记

定理5.2（[Wan91，定理 3.1，定理 3.5]）。给定 S上的复结构 J，任意定义在 $X_J = (S, J)$上的全纯三次微分 q 都会确定一个完备双曲仿射球面 $f : \tilde{S} \to \mathbb{R}^3$，它允许 $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ 中离散且适当不连续的子群作用，使得其商空间在拓扑上为 S。其布拉施克度量由 S 上的王氏方程的解给出，并下降到 S。反过来，任意完备双曲仿射球面 $f : \tilde{S} \to \mathbb{R}^3$，若允许 $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ 中离散且适当不连续的子群作用，且商空间在拓扑上为 S，则会定义一个复结构 J，该复结构由其布拉施克度量的共形

[3] 通过平移，我们总可以假设双曲仿射球面的中心是原点。[4] 虽然 f（L）是通过这一构造得到的浸入仿射球面，但我们常滥用记号，将 L 称为仿射球面。

类给出，并在该复结构下于S上定义一个全纯三次微分 q 。

注释 5.3. 关于仿射球面理论，我们最后想指出它与双曲几何和 Teichmüller 理论的关系。在全纯三次微分 $q \equiv 0$ 的特殊情形下，王氏方程化为常曲率 -1 度量的经典曲率方程。因此，双曲度量是布拉施克度量的一个特例。在这些情形下，得到的仿射球面是双曲曲面的万有覆盖，并如引言中所述，可在双曲面模型中观察。

5.2. 布拉施克轨迹 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$。本节先将布拉施克轨迹定义为一个集合，然后研究其流形结构。

定义 5.4. 我们将 $\mathcal{M}^B$ 定义为 S 上的布拉施克度量空间。 $\mathcal{M}^B$ 关于 $\mathcal{D}_0$ 作用的商空间记为 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$，称为布拉施克轨迹。

根据以下命题，布拉施克轨迹 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 是空间 $\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$ 的子集：

命题 5.5 ([DW15, 定理 5.1], [OT21, 引理 3.3])。 任意布拉施克度量 g 都具有严格负曲率，即 $K(g) < 0$。

在 S 上固定一个定向选择。用 $J(\sigma)$ 表示由 σ 和该定向确定的复结构。令

$$\tilde{Q}_3(S) := \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{M}_{-1}} H^0(X_{J(\sigma)}, K^3_{J(\sigma)}), \tag{5.5}$$

将其视为 $\mathcal{M}_{-1} \times \mathsf{S}_3(S)^{\mathbb{C}}$ 的子集，其中上标 $\mathbb{C}$ 表示复化，而 $X_{J(\sigma)} = (S, J(\sigma))$ 是带有复结构 $J(\sigma)$ 的黎曼曲面。令

$$\tilde{\mathbf{g}} : \tilde{Q}_3(S) \to \mathcal{M}^B \subset \mathcal{M}_- \tag{5.6}$$

设该映射将一对 (σ, q) 对应到黎曼曲面 $X_{J(\sigma)}$ 上王氏方程 (5.4) 的解。现在， $\mathcal{D}_0$ （或 $\mathcal{D}^+$）以自然方式从右侧通过拉回作用于 $\tilde{Q}_3(S)$ 和 $\mathcal{M}_{-1}$ （类似地，从左侧通过逆拉回作用）。考虑 $Q_3(S)$ 上由下式给出的等价关系：$(\sigma, q) \sim (\sigma', q')$ 当且仅当存在某个 $\psi \in \mathcal{D}_0$，使得 $\sigma' = \psi^*\sigma$ 且 $q' = \psi^* q$。因此，对于固定的定向选择，我们将 $Q_3(S)$ 与 $Q_3(S)/\mathcal{D}_0$ 等同，方法是将$Q_3(S)$ 视为 $\mathcal{M}_{-1}/\mathcal{D}_0$ 上的丛。稍微滥用一下记号，我们将 $Q_3(S)$ 中的元素记作 (σ, q) 或 $(J, q) = (J(\sigma)\ q)$。这是允许的，因为正向定向的复结构与双曲度量一一对应。

命题 5.6。映射 $\mathbf{g}$ 关于 $\psi \in \mathcal{D}^+$ 通过拉回给出的作用是等变的： $\psi^*(\mathbf{g}(J, q)) = \mathbf{g}(\psi^*(J, q))$。类似地，它关于 $\mathcal{D}^+$ 在 $\tilde{Q}_3(S)$ 和 $\mathcal{M}^B$ 上的左作用（通过逆拉回）也是等变的。因此，对 $\mathcal{D}_0$ 作用取商空间后，我们得到一个良定义的映射类群等变映射

$$\mathbf{g} : Q_3(S) \to \mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0.$$

证明。 记 $g = \mathbf{g}(J, q)$，我们需要验证 $K(\psi^* g) = -1 + 2|\psi^* q|^2_{\psi^* g}$。根据唯一性，这将意味着 $\psi^* g$ 是与该对 $\psi^*(J, q)$ 相关联的王氏方程（5.4）的解。由于 ψ 是 $\psi^* g$ 与 g之间的等距变换，我们知道

$$K(\psi^* g) = \psi^* K(g) = \psi^*(-1 + 2|q|^2_g).$$

现在只需证明 $|\psi^* q|^2_{\psi^* g} = \psi^* |q|^2_g$ 在 S上。设 z 是相对于 J 的共形坐标，并写作 $z = \psi(w)$，其中 w 是相对于 $\psi^* J$的共形坐标。那么，如果 $g = e^{u(z)} dz d\bar{z}$ 且 $q = f(z) dz^3$，则有 $\psi^* g = e^{u(\psi(w))} |dz/dw|^2 dw d\bar{w}$ 和 $\psi^* q = f(\psi(w))(dz/dw)^3 dw^3$，因此局部地

$$|\psi^* q|^2_{\psi^* g} = |f(\psi(w))|^2 / e^{3u(\psi(w))} = \psi^* |q|^2_g.$$

这是一个局部计算，但两边的全局对象都是不变地定义的，因此结论成立。□

注 5.7. 由于与 (J, q) 对应的王氏方程解与和 $(-J, \bar{q})$对应的解相同，命题 5.6 的证明表明，若将 $\mathbf{g}$ 视为定义在所有复结构（不一定定向为正）上的全纯三次微分丛上的映射，那么它也是

关于 $\mathcal{D}$ 在拉回和逆拉回作用下等变的，因此取 $\mathcal{D}_0$ 商空间后，它下降为一个关于扩展映射类群等变的映射。除引理 6.6 的证明中简要提及外，后文不需要也不会用到这一观点。

除了 $\mathcal{D}_0$ 在 $\tilde{Q}_3(S)$ 上的作用外，S^1 在 $\tilde{Q}_3(S)$ 上也有一个自然作用，其定义为 $e^{2\pi i\theta}\cdot(\sigma,q) = (\sigma, e^{2\pi i\theta}q)$。从现在起，我们将 $\tilde{Q}_3(S)/S^1$ 中的元素写作 $(\sigma,\langle q\rangle)$，表示 $(\sigma,q)\in\tilde{Q}_3(S)$ 的等价类。由于 S^1 在 $\tilde{Q}_3(S)$ 上的作用与 $\mathcal{D}_0$ 在 $\tilde{Q}_3(S)$ 上的作用可交换，因此它诱导出 $Q_3(S)$ 上的一个作用。此外，从 (5.4) 可知，映射 $\tilde{\mathsf{g}}$ 在该作用的轨道上为常值。因此，根据命题 5.6，映射 $\tilde{\mathsf{g}}$ 和 g 可下降为一个映射

$$\mathsf{g}_0 : Q_3(S)/S^1 \to \mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0.$$

下面的命题说明映射 g_0 是双射；鉴于其重要性，我们将给出证明。

命题 5.8（[OT21，命题 4.1]）。设 $[(\sigma_j,q_j)]\in Q_3(S)$，其中 $j=1$ 为 2，且 $[g_j]=\mathsf{g}([(\sigma_j,q_j)])$ 是相应的布拉施克度量。那么 $[g_2]=[g_1]$ 当且仅当 $[(\sigma_2,q_2)]=[(\sigma_1,e^{2\pi i\theta}q_1)]$ 对某个 $\theta\in[0,1)$ 成立。

证明。“若”方向由命题 5.1 和 5.6 得出。对于逆向，设 $[g_1]=[g_2]$，这意味着 $g_1=\psi^*g_2$ 对某个 $\psi\in\mathcal{D}_0$ 成立。对于 $j=1,2$，令 $g_j=e^{u_j}\sigma_j$ 其中 u_j 是适当的光滑函数。于是

$$e^{u_1}\sigma_1=\psi^*(e^{u_2}\sigma_2)=e^{\psi^*u_2}\psi^*\sigma_2,$$

这表明 σ_1 和 $\psi^*\sigma_2$ 是同一共形类中的双曲度量，因而相等。现在我们证明，对某个 $\theta\in[0,1)$，有 $q_1=e^{2\pi i\theta}\psi^*q_2$，由此即可推出结论。由于 $g_1=\psi^*g_2$，由王氏方程可得

$$|q_1|^2_{g_1}=\psi^*(|q_2|^2_{g_2})=|\psi^*q_2|^2_{\psi^*g_2}=|\psi^*q_2|^2_{g_1}.$$

因此，若我们用复结构 $J(g_1)$下的共形坐标表示 $q_1=f_1(z)dz^3$ 和 $\psi^*q_2=f_2(z)dz^3$，其中 f_j 对于 $j=1,2$ 是全纯的，那么可以看出 $|f_1|=|f_2|$ 逐点成立。若 f_1 或 f_2 恒等于零，则二者都恒等于零，结论得证。否则，写作 $f_2=\lambda f_1$，其中 $\lambda\colon S\to S^1$ 是一个亚纯函数，由此可知 $\lambda\in S^1$ 必为常数。因此，对于某个 $\theta\in[0,1)$，有 $q_1=e^{2\pi i\theta}\psi^*q_2$，从而得到所要证明的结论。□

5.3. 布拉施克轨迹的光滑性 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$。本小节的目标是证明定理5.17，即布拉施克轨迹 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 在 Teichm¨uller 空间 $\mathcal{T}(S)=\mathcal{M}_{-1}/\mathcal{D}_0$之外具有有限维光滑流形结构。我们的策略基于为 $\mathcal{T}(S)$ 构造光滑坐标图，如[Tro92] 所述（另见小节4.6）。简而言之，可以利用 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 的光滑流形结构，为布拉施克轨迹 $Q_3(S)$ 构造局部相容的光滑坐标图。

在全文中，k 是一个较大的整数，$\alpha\in(0,1)$。上标 k，α 表示相关的函数空间或丛截面具有此阶的 H¨older 正则性。下面的定理汇总了 [Tro92 第 2] 章中关于 Teichmüller 空间的光滑流形结构的结果。定理以 $C^{k,\alpha}$ 而非索伯列夫正则性的形式陈述，证明与索伯列夫情形相同。

定理 5.9。设 $\sigma_0\in\mathcal{M}_{-1}$。存在一个光滑局部子流形 $\mathcal{S}$，它属于 $\mathcal{M}^{k,\alpha}_{-1}$ 维数为 $6\mathfrak{G}-6$，经过 σ_0，且其中仅包含 C^∞度量，并满足 $T_{\sigma_0}\mathcal{S}=\mathsf{S}_2^{\sigma_0\,TT,}(S)$（见 (4.11)）。此外，当 $\mathcal{S}$ 充分小时，映射

$$\Theta_{\mathcal{S}}:\mathcal{S}\times\mathcal{D}_0^{k+1,\alpha}\to\mathcal{M}^{k,\alpha}_{-1},\quad(\sigma,\psi)\mapsto\psi^*\sigma, \tag{5.7}$$

是到其像上的微分同胚。切片 $\mathcal{S}$ 在局部参数化 $\mathcal{T}(S)=\mathcal{M}_{-1}/\mathcal{D}_0$（也就是说，每个 $\mathcal{S}$ 都不包含同一 $\mathcal{D}_0$ 轨道中的两个不同度量），并定义光滑相容的图册，从而赋予 $\mathcal{T}(S)$ 维数为 $6\mathfrak{G}-6$、与 $\mathbb{R}^{6\mathfrak{G}-6}$ 同胚的光滑流形结构。

针对 $\mathcal{T}(S)$，穿过度量 $\sigma_0\in\mathcal{M}_{-1}$ 定理5.9 中通过庞加莱˙映射构造了一个局部切片

$$\lambda:\mathcal{M}^{k,\alpha}_{-}\to\mathcal{M}^{k,\alpha}_{-1},$$

它将一个度量映射为其共形类中唯一的双曲度量。更具体地说，λ 定义了从 $\mathsf{S}_2^{\sigma_0\,TT,}(S)$ 中 0 的一个邻域到 $\mathcal{S}$ 的光滑微分同胚，方法是写作 $\mathcal{S}\ni\sigma=\lambda(\sigma_0+h)$，其中 $h\in\mathsf{S}_2^{\sigma_0\,TT,}(S)$ 足够小。由于 $\mathsf{S}_2^{\sigma_0\,TT,}(S)$ 是由光滑张量场构成的一个 $6\mathfrak{G}-6$维向量空间

我们可以用一组基 $\{h_j\}_{j=1}^{6\mathfrak{G}-6}$ 表示 h。 $h=\sum_{j=1}^{6\mathfrak{G}-6}a^jh_j$ 足够小，恰好意味着系数 a^j 足够小。

注5.10. 我们指出，选取不同的 k,α （当 k 充分大时），会得到由定理 5.9 中的切片所诱导的光滑结构所对应的等价拓扑。为此，可以通过庞加莱映射，将 $\sigma\in\mathcal{S}$ 表示为 $\mathsf{S}_2^{\sigma_0\,TT}$ 的一组基 (S) 的线性组合。具体而言，若在 $\mathcal{S}$ 中有$\sigma_n=\lambda(\sigma_0+\sum_{j=1}^{6\mathfrak{G}-6}a_n^jh_j)\overset{n\to\infty}{\to}\sigma=\lambda(\sigma_0+\sum_{j=1}^{6\mathfrak{G}-6}a^jh_j)$，并且关于 $C^{k,\alpha}$ 拓扑成立，则对所有 j，都有 $a_n^j\overset{n\to\infty}{\to}a^j$，因此在 C^∞ 拓扑下，$\sigma_n\overset{n\to\infty}{\to}\sigma$ 也成立。此外，由于 $\mathcal{T}(S)$ 关于任意 $\mathcal{M}^{k,\alpha}_{-1}$ 所诱导的拓扑都与 $\mathbb{R}^{6\mathfrak{G}-6}$ 同胚，且当 $d\neq4$时，$\mathbb{R}^d$ 上不存在奇异光滑结构，因此，对于所有 k,α，通过定理 5.9 为 $\mathcal{T}(S)$ 得到的光滑结构都是等价的。

~回想一下，我们在 $Q_3(S)$中将5.5中的空间定义为与变化的黎曼曲面相对应的全纯三次微分空间。由于投影~ $Q_3(S)\to\mathcal{M}_{-1}$ 是 $\mathcal{D}_0$-等变的，我们得到一个定义良好的满射

$$p:Q_3(S)\to\mathcal{T}(S).$$

的每个纤维 p 自然带有一个复向量空间的结构，其维数为 $5(\mathfrak{G}-1)$。已知 $Q_3(S)$是一个光滑向量丛（实际上是全纯的，例见[Ber61]），底空间可缩，因此它是整体平凡的。其拓扑已在注2.11中讨论。下面我们讨论将~ $Q_3(S)$ 与 $Q_3(S)$ 中的切片相对应

引理 5.11。 设 $\sigma_0\in\mathcal{M}_{-1}$，并设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{M}^{k,\alpha}_{-1}$中的一个切片，它经过 σ_0，如定理5.9所述。我们可以在点 $Q_3(S)$ 附近局部地将 $[(\sigma_0,q)]$ 与一个切片相对应

$$\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}:=\bigsqcup_{\sigma\in\mathcal{S}}H^0(X_{J(\sigma)},K^3_{J(\sigma)}) \tag{5.8}$$

在 $\mathcal{S}$ 上。

证明。给定 $[(\sigma,q)]\in Q_3(S)$，它位于 $[(\sigma_0,q_0)]$ 附近，且唯一的 $\sigma\in[\sigma]$ 位于 $\mathcal{S}$ 中，则存在唯一的 $q\in H^0(X_{J(\sigma)},K^3_{J(\sigma)})$，使得 $(\sigma,q)\in[(\sigma,q)]$。事实上，若对于 $\psi\in\mathcal{D}_0$，有 $(\sigma,q)=\psi^*(\sigma,q')$，那么由于 $\mathcal{D}_0$-作用在 $\mathcal{M}_{-1}$ 上是自由的，我们有 $\sigma=\psi^*\sigma$ 蕴含 $\psi=id$。□

利用引理 5.11 中所述的识别，我们可以通过 $\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}$ 的光滑整体平凡化 ϕ_0 得到 $Q_3(S$的平凡化，从而使每个切片 $\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}$ 具有光滑丛结构，使得投影 $(\sigma,q)\mapsto\sigma$ 是光滑的。也就是说，令

$$\pi_{\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}}:\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}\to\pi_{\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}}(\mathcal{S}^{\mathcal{Q}})\subset Q_3(S)\quad\text{ and }\quad\pi_{\mathcal{S}}:\mathcal{S}\to\pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})\subset\mathcal{T}(S) \tag{5.9}$$

分别为 $\mathcal{D}_0$ 商映射，并令 $\phi_0\colon Q_3(S)\to\mathcal{T}(S)\times\mathbb{C}^{5\mathfrak{G}-5}$ 为 $Q_3(S)$ 的光滑整体平凡化，则

$$\tilde{\phi}_{\mathcal{S}}=(\pi_{\mathcal{S}}^{-1}\times id)\circ\phi_0\circ\pi_{\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}}:\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}\to\mathcal{S}\times\mathbb{C}^{5\mathfrak{G}-5}$$

是 $\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}$ 的一个（全局）光滑平凡化。利用它，我们可以为 $\tilde{Q}_3(S)$ 在 $\sigma\in\mathcal{S}$ 上的纤维写出一个光滑局部标架 $\{(\sigma,q_\ell(\sigma))\}_{\ell=1}^{5\mathfrak{G}-5}$：方法是选取丛 $Q_3(S)$ 的一个标架 $\{[(\sigma,q_\ell(\sigma))]\}_{\ell=1}^{5\mathfrak{G}-5}$，并考虑 $[(\sigma,q_\ell(\sigma))]$ 在切片 $\mathcal{S}$ 上的唯一代表。于是，我们可以将 $\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}$ 的一个元素 $q(\sigma)$ 表示为 $q(\sigma)=\sum_{\ell=1}^{5\mathfrak{G}-5}b^\ell q_\ell(\sigma)$，$b^\ell\in\mathbb{C}$。此外，对于任意 $k\geq0$，这样的截面 $q(\sigma)$ 作为映射到 $\mathsf{S}^k_3(S)^{\mathbb{C}}$ 时是光滑的。这由 [Ber61, Theorem II]，中的构造可知：该文证明，对于提升到万有覆盖 $\mathbb{D}$（单位圆盘）上的每个元素 $f(z)dz^3\in Q_3(S)\big|_{\tau_0}$，其中 $\tau_0\in\mathcal{T}(S)$，都有 $f(z)=F(z,\tau_0)$，其中 $F(z,\tau)$ 是关于 $\mathbb{D}\times\mathcal{T}(S)$ 上复结构的联合全纯函数；再结合 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{T}(S)$ 的光滑坐标图这一事实即可得出结论。

由定理 5.9 可知，对于满足 $U:=\pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})\cap\pi_{\mathcal{S}'}(\mathcal{S}')\neq\emptyset$ 的两个切片 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$，存在一个光滑映射 $\Psi_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}:\pi_{\mathcal{S}}^{-1}(U)\to\pi_{\mathcal{S}'}^{-1}(U)$，它将 $\sigma\in\mathcal{S}$ 映射到满足 $[\sigma]=[\sigma']$ 的唯一 $\sigma'\in\mathcal{S}'$。有 $\Psi_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(\sigma)=\psi_\sigma^*\sigma$，其中 $\psi_\sigma=\pi_2\circ\Theta_{\mathcal{S}'}^{-1}(\sigma)$ 如 (5.7) 所示，π_2 是到第二个因子的投影。（先验地，$\psi_\sigma\in\mathcal{D}^{k+1,\alpha}_0$，但由于切片 $\mathcal{S}$，$\mathcal{S}'$ 由光滑度量构成，它实际上是光滑的，参见 Tro92 定理 2.3 的证明。1]）因此，我们类似地得到一个映射

$$\tilde{\Psi}_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}:\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}\to\mathcal{S}'^{\mathcal{Q}},\quad(\sigma,q)\mapsto(\psi_\sigma^*\sigma,\psi_\sigma^*q), \tag{5.10}$$

and 可以验证，$\tilde{\phi}_{S'} \circ \tilde{\Psi}_{S,\ S'} \circ \tilde{\phi}_{S}^{-1}(\sigma, b) = (\Psi_{S,\ S'}(\sigma)\ b)$，因此 $\tilde{\Psi}_{S,\ S'}$ 是光滑的 .

接下来，我们将利用式 (5.6) 中的映射 $\tilde{}$g，在 Teichm¨uller 空间$\mathcal{T}(S)$之外为布拉施克轨迹 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 构造坐标图。与 [Tro92]，的方法类似，我们将采用 $C^{k,\alpha}$ 拓扑$\mathcal{M}_B/\mathcal{D}_0$ 来赋予它光滑结构，尽管我们感兴趣的度量实际上是光滑的。构造的关键是王氏方程 (5.4)。现在我们将以稍有不同的形式来写这个方程。考虑由 $g = \tilde{}\mathrm{g}(\sigma, q) = e^{u(\sigma,q)}\sigma$ 给出的布拉施克度量 g 的对数密度 u 。那么，王氏方程 (5.4) 等价于关于 u 的以下半线性椭圆偏微分方程：

$$\Delta_\sigma u = 2e^u - 4e^{-2u}\frac{|q|^2}{\sigma^3} - 2. \tag{5.11}$$

方程（5.11 $\tilde{}$）存在唯一的光滑解 u，对于任意给定的（σ， q） $\in Q_3$（S）（回顾命题 5.1）.

引理 5.12. 设 $\mathcal{S}^{\mathcal{Q}} \subset \tilde{Q}_3(S)$ 是 (5.8) 中的切片。那么映射 $\tilde{}\mathrm{g}|_{\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}} : \mathcal{S}^{\mathcal{Q}} \to \mathcal{M}^{k,\ \alpha}$ 是光滑的。

证明. 记 $g = e^u\sigma$，其中 u 满足 (5.11)，只需证明映射 $(\sigma, q) \mapsto u(\sigma, q) \in C^{k,\alpha}(S)$ 在 $\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}$ 上是光滑的。定义映射 $F: \mathcal{S}^{\mathcal{Q}} \times C^{k,\alpha}(S) \to C^{k-2,\alpha}(S)$ 如下：

$$F((\sigma, q), u) = \Delta_\sigma u - 2e^u + 4e^{-2u}\frac{|q|^2}{\sigma^3} + 2.$$

于是 $u(\sigma, q)$ 由 $F((\sigma, q)\ u(\sigma, q)) = 0$ 隐式给出

我们断言映射 F 是光滑的。映射 $\mathcal{S} \times C^{k,\alpha}(S) \ni (\sigma, u) \mapsto \Delta_\sigma u \in C^{k-2,\alpha}(S)$ 的光滑性可由坐标表达式（采用求和约定）得出

$$\Delta_\sigma u = \sigma^{k\ell}\partial^2_{k\ell}u + \partial_k\sigma^{k\ell}\partial_\ell u + \frac{\sigma^{k\ell}}{2\det\sigma}\partial_k(\det\sigma)\partial_\ell u.$$

映射 $C^{k,\ \alpha}(S) \ni u \mapsto e^u \in C^{k,\ \alpha}(S)$ 是光滑的，因为指数映射是光滑的。最后，通过将 $q(\sigma) = \sum_{k=1}^{5\mathfrak{G}-5} b^k q_k(\sigma)$ 用一个标准正交标架表示，可以看出映射 $(\sigma, q) \mapsto \frac{|q|^2}{\sigma^3}$ 是光滑的，其中 $b^k \in \mathbb{C}$，并注意到 $\frac{|q|^2}{\sigma^3} = \sum_{k,\ \ell} b^k\bar{b}^\ell\, q_k(\sigma)q_\ell(\sigma)\,\sigma^3$ 。

接下来我们证明偏导数 $\partial_u F|_{((\sigma,q),u)} : C^{k,\ \alpha}(S) \to C^{k-2,\ \alpha}(S)$ 是一个同构。在固定 (σ, q) 的情况下，计算 F 关于 u 的导数可得

$$\partial_u F|_{((\sigma,q),u)}v = \Delta_\sigma v - 2e^u v - 8e^{-2u}\frac{|q|^2}{\sigma^3}v = (\Delta_\sigma - 2e^u - 8e^{-2u}\frac{|q|^2}{\sigma^3})v.$$

我们注意到 $P := \partial_u F|_{((\sigma,q),u)} = \Delta_\sigma - 2e^u - 8e^{-2u}\frac{|q|^2}{\sigma^3} : C^{k,\ \alpha}(S) \to C^{k-2,\ \alpha}(S)$ 是一个有界线性算子。它的核是平凡的：如果 $v \in C^{k,\ \alpha}(S)$ 满足 $Pv = 0$，根据散度定理，我们有

$$0 = \langle Pv, v\rangle_{L^2_\sigma(S)} = -\|dv\|^2_{L^2_\sigma(S)} - \big\|\big(2e^u + 8e^{-2u}\frac{|q|^2}{\sigma^3}\big)^{1/2}v\big\|^2_{L^2_\sigma(S)},$$

这意味着 $v = 0$。为证明其为满射，考虑 $w \in C^{k-2,\alpha}(S) \subset \mathcal{H}^{k-2}(S)$。由于 P 相对于 L^2_σ 内积是自伴的，它作为算子 $P: \mathcal{H}^k(S) \to \mathcal{H}^{k-2}(S)$ 的指标为零（见 [SA01，定理 8.1]），因此由于它是单射，故为满射。因此存在 $v \in \mathcal{H}^k(S)$，使得 $Pv = w \in C^{k-2,\alpha}(S)$，并且由椭圆正则性可知 $v \in C^{k,\alpha}(S)$。由于 $\partial_u F|_{((\sigma,q),u)} = P: C^{k,\alpha}(S) \mapsto C^{k-2,\alpha}(S)$ 是巴拿赫空间之间的连续双射，根据开映射定理，它是同构。由于$\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}$ 是有限维流形，根据巴拿赫流形隐函数定理（例如参见 [Lan12，定理 I.5.9]），函数 $u = u(\sigma, q)$ 是光滑的，因此 $\tilde{}\mathrm{g}(\sigma, q) = e^{u(\sigma,q)}\sigma$ 是光滑的。□

现在我们继续讨论第 5.2 节中提到的 S^1 在 $\tilde{Q}_3(S)$ 和 $Q_3(S)$ 上的作用。 S^1 在 $\tilde{Q}_3(S)$ 上的作用限制为对每个切片 $\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}$ 的作用，而识别映射 $\pi_{\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}}$ 关于此作用是等变的。此外，它在 $\mathcal{S}^{\mathcal{Q}*} = \mathcal{S}^{\mathcal{Q}} \setminus \mathcal{O}$ 和 $Q^*_3(S)$ 上光滑、适当且自由：$= Q_3(S) \setminus \mathcal{O}$（其中 $\mathcal{O}$ 是零截面，它与 $\mathcal{T}(S)$ 有典范的识别）。我们得到

推论5.13。相应的商空间 $Q^*_3(S)/S^1$ 和 $\mathcal{S}^{\mathcal{Q}*}/S^1$ 是实维数为$16\mathfrak{G} - 17$的光滑流形。

在后续证明中将使用关于 $Q^*_3(S)/S^1$ 的以下观点。

备注 5.14. 由于 $\mathcal{D}_0$ 和 S^1 在 $\tilde{Q}_3(S)$ 上的作用彼此可交换，我们可以将 $Q_3^*(S)/S^1 \cong (\tilde{Q}_3(S) \setminus \mathcal{O})/S^1)/\mathcal{D}_0$ 视为同一对象，也就是说，先取 S^1 商空间，再取 $\mathcal{D}_0$ 商空间。

接下来，我们将在下文的引理 5.15 中证明，$\tilde{\mathrm{g}}|_{\mathcal{S}^{\mathcal{Q}^*}}$ 可下降为 $\mathcal{S}^{\mathcal{Q}^*}/S^1$ 上的映射，并且该映射是到 $\mathcal{M}^k$ 中的浸入 $\_^\alpha$。回想一下，与有限维情形一样，若一个 C^k 映射 $f\colon E_1 \to E_2$（其中 C^k 是巴拿赫流形）满足：对所有 $z \in E_1$，都存在 z 的一个开邻域 Z，使得 $f|_Z$ 将 Z 微分同胚地映到 E_2 的一个子流形上，那么它就是浸入；等价地，对每个 $z \in E_1$，它的微分都是单射，且其像是直和项（参见[Lan12]）。后一条件意味着 $df|_z$ 的值域 $\mathrm{Ran}(df|_z)$ 是闭的，并且存在一个与 $\mathrm{Ran}(df|_z)$ 互补的闭巴拿赫空间 $B \subset T_{f(z)}E_2$；当 E_1 为有限维时，该条件自动满足。

提醒读者注意我们不同的记号 $\tilde{\mathrm{g}}$, $\tilde{\mathrm{g}}_0$, g, g_0：波浪号用于表示取 $\mathcal{D}_0$ 商空间之前的映射，下标 0 用于表示取 S^1 商空间之后的映射。

引理 5.15 (单射微分). 设 $(\sigma_0, q_0) \in \tilde{Q}_3^*(S) = \tilde{Q}_3(S) \setminus \mathcal{O}$ 并考虑包含它的切片 $\mathcal{S}^{\mathcal{Q}_*} := \mathcal{S}^{\mathcal{Q}} \cap \tilde{Q}_3^*(S)$，其中 $\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}$ 如 (5.8) 中所述，且 $\mathcal{S}$ 是如定理 5.9 中所述、围绕 σ_0 的切片。假设对于 $X \in T_{(\sigma_0,q_0)}\mathcal{S}^{\mathcal{Q}_*}$，有

$$d\tilde{\mathrm{g}}\big|_{(\sigma_0,q_0)} X = D_{g_0}\chi, \quad \chi \in \mathsf{S}_1^{k+1,\alpha}(S), \quad g_0 := \tilde{\mathrm{g}}(\sigma_0, q_0)$$

其中 $\tilde{\mathrm{g}}$ 被视为一个映射到 $\mathcal{M}^k$ 中的映射，$\_^\alpha$ 是对称微分（见第 4.3 节）。那么 X 与 S^1 中经过 (σ_0, q_0) 的轨道相切，因此它在商映射下映到 $T_{(\sigma_0,\langle q_0\rangle)}(\mathcal{S}^{\mathcal{Q}_*}/S^1)$ 中的零向量。因此，下降映射 $\tilde{\mathrm{g}}_0\colon \mathcal{S}^{\mathcal{Q}_*}/S^1 \to \mathcal{M}^k$, $\_^\alpha$ 在 $(\sigma_0, \langle q_0\rangle)$ 处具有单射微分，且其像为直和。映射 $\tilde{\mathrm{g}}_0$ 是从 $(\sigma_0, \langle q_0\rangle)$ 的一个充分小邻域 $\mathcal{U} \in \mathcal{S}^{\mathcal{Q}_*}/S^1$ 到 $\mathcal{M}^k,\_^\alpha$ 的浸入。像 $\mathcal{V} := \tilde{\mathrm{g}}_0(\mathcal{U})$ 是 $\mathcal{M}^k,\_^\alpha$ 中一个 $16\mathfrak{g} - 17$ 维子流形，由光滑布拉施克度量组成，并满足 $T_g\mathcal{V} \cap T_g\mathsf{O}_g^{k+1\,\alpha} = \{0\}$，其中 $g \in \mathcal{V}$，$\mathsf{O}^{k+1},_g{}^\alpha$ 是经过 g 的 $\mathcal{D}^{k+1},_0{}^\alpha$-轨道。

证明。通过对 $\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}$ 进行平凡化，我们可以将 $X \in T_{(\sigma_0,q_0)}\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}$ 识别为一对 (h^{TT}, v)，其中 $h^{TT} \in T_{\sigma_0}\mathcal{S} = \mathsf{S}_2^{\sigma_0\,TT}$、$(S)$ 以及 $v \in \mathbb{R}^{10\mathfrak{g}-10}$。考虑曲线 $\alpha_t = (\sigma_t, q_t)\colon (-\epsilon, \epsilon) \to \mathcal{S}^{\mathcal{Q}*}$，满足 $\alpha_0 = (\sigma_0, q_0)$ 和 $\dot{\alpha}_0 = (h^{TT}, v)$。对于给定的 $(\sigma, q) \in \mathcal{S}^{\mathcal{Q}*}$，我们将 (5.11) 的光滑解记作 $u(\sigma, q)$，并且还记 $u_t = u(\alpha_t)$、$\dot{u}_t = \frac{d}{dt}u_t$，使得 $g_0 = \tilde{\mathrm{g}}(\sigma_0, q_0) = e^{u_0}\sigma_0$。根据我们的假设，

$$D_{g_0}\chi = \frac{d}{dt}\tilde{\mathrm{g}}(\sigma_t, q_t)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(e^{u(\sigma_t,q_t)}\sigma_t)\big|_{t=0} = e^{u_0}h^{TT} + e^{u_0}\dot{u}_0\sigma_0. \tag{5.12}$$

取 $L^2_{g_0}(S)$ 与方程（5.12）的内积，其中 h^{TT}，

$$\frac{1}{\mathrm{Area}(S, g_0)}\int_S e^{u_0}|h^{TT}|^2_{g_0}dv_{g_0} + \langle g_0\dot{u}_0, h^{TT}\rangle_{L^2_{g_0}(S)} - \langle D_{g_0}\chi, h^{TT}\rangle_{L^2_{g_0}(S)} = 0. \tag{5.13}$$

由于我们处于二维情形，张量 h^{TT} 对于任何与 σ_0 共形的度量 g_0，特别是对于，都是无迹且无散的。因此，(5.13) 的第二项和第三项均为零。由此得到 $h^{TT} = 0$，因此 $\dot{u}_0 g_0 = D_{g_0}\chi$。

现在，我们在方程 $\dot{u}_0 g_0 = D_{g_0}\chi$ 两边应用 X 射线变换 $I_2^{g_0}$。由于 $I_2^{g_0}(D_{g_0}\chi)(c) =$ 对每个 $\chi \in \mathsf{S}^{k+1}$ 都等于 0, $_1{}^\alpha(S)$，且对于 c 的测地流的每条闭轨道 g_0（参见 [GKL21]），我们有

$$0 = \frac{1}{L(c)}\int_0^{L(c)} \dot{u}_0(\gamma(s))g(\gamma'(s), \gamma'(s))\mathrm{d}s = \frac{1}{L(c)}\int_0^{L(c)} \dot{u}_0(\gamma(s))\mathrm{d}s = I_0^{g_0}(\dot{u}_0)(c),$$

其中，轨道 c 的参数化形式为 $(\gamma(s)\ \gamma'(s))\colon [0, L(c)] \to T^1_{g_0}S$。根据 [GK80，定理 3。6]，$I_0^{g_0}$ 在带有 S 的紧黎曼曲面 $(g_0, g_0 \in \mathcal{M}_-)$ 上是单射（另见 [CS98] 关于高维情形的讨论），因此 $\dot{u}_0 = 0$。

总之，$(h^{TT}, v) = (0, v)$ 且 $du|_{(\sigma_0,q_0)}(h^{TT}, v) = du|_{(\sigma_0,q_0)}(0, v) = 0$。因此 $\dot{\alpha}_0 = \dot{\tilde{\alpha}}_0$，其中 $\tilde{\alpha}_t$ 具有 $\tilde{\alpha}_t = (\sigma_0, \tilde{q}_t)$ 的形式，且 $\frac{d}{dt}u(\tilde{\alpha}_t)\big|_{t=0} = 0$。沿着 $\tilde{\alpha}_t$ 对王氏方程 (5.4) 求导，并利用 $\dot{u}_0 = 0$，我们得到

$$0 = \frac{d}{dt}|\tilde{q}_t|^2_{g_0}\Big|_{t=0} = \frac{\tilde{q}_t\overline{\partial_t\tilde{q}_t} + \overline{\tilde{q}_t}\partial_t\tilde{q}_t}{g_0^3}\Big|_{t=0} = |\tilde{q}_0|^2_{g_0}\left(\frac{\partial_t\tilde{q}_t}{\tilde{q}_t} + \frac{\overline{\partial_t\tilde{q}_t}}{\overline{\tilde{q}_t}}\right)\Big|_{t=0}.$$

˜注意到，关于 $J = J(\sigma_0)$， $\tilde{q}_t$ 都是全纯三次微分，因此 $\frac{q_t}{\tilde{q}_0}$ 是关于 J的一族亚纯函数。因此，上述方程意味着， $\partial_t(\frac{\tilde{q}_t}{\tilde{q}_0})|_{t=0}$ 在S 上是纯虚数，因而为常数。我们得出 $\partial_t\tilde{q}_t|_{t=0} = \lambda i\tilde{q}_0$, $\lambda \in \mathbb{R}$，这恰好刻画了经过 $\tilde{q}_0 = q_0$的 S^1 轨道的切空间中的元素。因此结论成立。现在显然， $d\tilde{\mathsf{g}}0|_{T_{(\sigma_0,q_0)}(\mathcal{S}^{\mathcal{Q}^*}/S^1)}$是单射。此外，其像是直和因$T_{(\sigma_0,q_0)}(\mathcal{S}^{\mathcal{Q}^*}/S^1)$是有限维的。因此， $\tilde{\mathsf{g}}_0$ 在 $(\sigma_0, \langle q_0\rangle)$ 处是浸入；根据浸入的定义，它在该点的某个充分小邻域内也如此，其像是 $\mathcal{M}^{k,\alpha}$ 的一个子流形，由光滑布拉施克度量组成。

对于最后一个结论，回忆一下， $T_g\mathsf{O}^{k+1,\alpha}_g$恰好由势对称二阶张量组成。因此

$$T_{g_0}\mathcal{V} \cap T_{g_0}\mathsf{O}^{k+1,\alpha}_{g_0} = \{0\}, \tag{5.14}$$

根据引理的第一个结论。这意味着，对于 g_0 的一个充分小的邻域，同样的结论也成立。为此，考虑 $T\mathcal{V} \subset T\mathcal{M}^k$ 上的一个光滑非零截面 $Y(g)$， $\mathsf{S}^{k,\alpha}_2(S)$。由 (5.14) 可得 $\|\pi_{\ker D^*_{g_0}} Y(g_0)\|_{C^k,\alpha} > 0$，其中 $\pi_{\ker D^*_g}$ 表示关于分解 (4.3) 的正交投影。这是因为势张量场恰好是被 $\pi_{\ker D^*_{g_0}}$ 消去的那些张量。作为一个 0 阶伪微分算子，算子 $\pi_{\ker D^*_g}$ 是 $\mathsf{S}^{k,\alpha}_2(S)$ 上的有界算子，并且它关于度量 g 在 C^∞ 的邻域内连续变化（例如参见 GKL21 引理 2.2] 的证明）。因此，在 g_0 的一个邻域内， $\|\pi_{\ker D^*_g} Y(g)\|_{C^k,\alpha}$ 对 g 非零，这意味着在 g_0 附近有 $T_g\mathcal{V} \cap T_g\mathsf{O}^{k+1,\alpha}_g = \{0\}$。□

回想一下，我们的最终目标是为布拉施克轨迹构造光滑坐标图 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$，远离 $\mathcal{T}(S)$。在引理 5.15 中，我们在 $\mathcal{M}^B \subset \mathcal{M}^{k,\alpha}$ 中构造了切片 $\mathcal{V}$。在下面的引理中，我们证明，若 $\mathcal{V}$ 取得足够小，则它们局部参数化 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$。

引理 5.16。 若引理 $\mathcal{V}$ 中的切片 *5.15* 取得足够小，则 $\mathcal{V}$ 中的每个点恰好对应于 $\mathcal{D}_0$ 的一个轨道。

证明。设 $g_i = e^{u(\sigma_i,\langle q_i\rangle)})\sigma_i \in \mathcal{V}$, $i = 1,2$ 是同一 $\mathcal{D}_0$ 轨道中的两个度量，也就是说，对某个$\psi \in \mathcal{D}_0$有 $g_2 = \psi^* g_1$。由 $e^{u(\sigma_2,\langle q_2\rangle)}\sigma_2 = \psi^*(e^{u(\sigma_1,\langle q_1\rangle)}\sigma_1)$ 可知， σ_2 和 $\psi^*\sigma_1$ 都是同一共形类中的双曲度量，因此必有 $\sigma_2 = \psi^*\sigma_1$。由于 $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}$ 且二者都处于同一 $\mathcal{D}_0$ 轨道中，根据定理 5.9，我们得出 $\sigma_1 = \sigma_2$。因此，由于 $\mathcal{D}_0$ 作用是自由的，故有 $\psi = id$。于是$g_1 = g_2$。□

现在我们陈述本节的主要定理。

定理 5.17. 在 Teichm ¨uller 空间 $\mathcal{T}(S) = \mathcal{M}_{-1}/\mathcal{D}_0$之外，布拉施克轨迹 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 具有实维数为 $16\mathfrak{G} - 17$的光滑流形结构。此外，映射 $\mathsf{g}_0 : Q_3^*(S)/S^1 \to (\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0) \setminus \mathcal{T}(S)$ 是一个微分同胚。

证明. 到目前为止，对于每个度量 $g_0 \in \mathcal{M}^B$，我们都构造了一个包含它且由光滑布拉施克度量组成的局部切片 $\mathcal{V}$。与 g_0 对应的切片，是将 $\tilde{\mathsf{g}}_0^{-1}(g_0)$ 的一个邻域 $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}^{\mathcal{Q}^*}/S^1$ 通过 $\tilde{\mathsf{g}}_0$ 映射所得的像；借助 $\mathcal{S}^{\mathcal{Q}^*}$ 的平凡化，我们有 $\mathcal{U} \cong \mathcal{S} \times \mathbb{R}^{10\mathfrak{G}-11}$。我们还证明，若 $\mathcal{V}$ 足够小，它与经过该点的 $\mathcal{D}_0$ 轨道之间存在双射对应。因此， $\mathcal{V}$ 在 $[g_0]$附近参数化了 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$。为了证明切片 $\mathcal{V}$ 与相应映射 $\tilde{\mathsf{g}}_0^{-1}$: $\mathcal{V} \to \mathcal{U}$ 共同构成光滑坐标图，我们必须证明它们光滑相容。

记 π_B： $\mathcal{M}^B \to \mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 为关于 $\mathcal{D}_0$ 商空间的自然投影。注意，将此映射限制在每个切片 $\mathcal{V}$上时，它是到其像的双射。因此我们可以设

$$\mathcal{F}_\mathcal{V} : \pi_B(\mathcal{V}) \to \mathcal{U} \cong \mathcal{S} \times \mathbb{R}^{10\mathfrak{G}-11}, \quad [g] \mapsto \tilde{\mathsf{g}}_0^{-1}(g),$$

其中， g 是 $\mathcal{V}$ 中满足 $g \in [g]$的唯一元素。我们要证明，若 $\mathcal{V} = \tilde{\mathsf{g}}_0(\mathcal{U})$和 $\mathcal{V}' = \tilde{\mathsf{g}}_0(\mathcal{U}')$是不同的切片，且其像 $\pi_B(\mathcal{V})$、 $\pi_B(\mathcal{V}')$有非空交集，则坐标变换 $\mathcal{F}_{\mathcal{V}'} \circ \mathcal{F}_\mathcal{V}^{-1} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$ 在其定义域内是光滑的。这里， $\mathcal{U}' \subset (\mathcal{S}')^{\mathcal{Q}^*}/S^1$ 是另一个切片 $\mathcal{S}'$上的一个坐标图。为此，写作

$$\mathcal{F}_{\mathcal{V}'} \circ \mathcal{F}_\mathcal{V}^{-1}(\sigma, \langle q\rangle) = \mathcal{F}_{\mathcal{V}'}([e^{u(\sigma,\langle q\rangle)}\sigma]).$$

现在，由于 $[g]=[e^{u(\sigma,\langle q\rangle)}\sigma]\in\pi_B(\mathcal{V})\cap\pi_B(\mathcal{V}')$，存在唯一的元素 $e^{u(\sigma',\langle q'\rangle)}\sigma'\in\mathcal{V}'$，使得$[e^{u(\sigma',\langle q'\rangle)}\sigma']=[e^{u(\sigma,\langle q\rangle)}\sigma]$。因此，存在一个元素 $\psi=\psi(\mathcal{V},\mathcal{V}',[g])\in\mathcal{D}_0$，使得 $e^{u(\sigma',\langle q'\rangle)}\sigma'=\psi^*(e^{u(\sigma,\langle q\rangle)}\sigma)$。所以我们有

$$(\sigma',\langle q'\rangle)=\mathcal{F}_{\mathcal{V}'}\circ\mathcal{F}_{\mathcal{V}}^{-1}(\sigma,\langle q\rangle)=\widetilde{\mathbf{g}}_0^{-1}\big(e^{u(\sigma',\langle q'\rangle)}\sigma'\big)=\widetilde{\mathbf{g}}_0^{-1}\big(\psi^*(e^{u(\sigma,\langle q\rangle)}\sigma)\big)\in\mathcal{U}'.$$

换言之，$(\sigma',\langle q'\rangle)$ 是 $\mathcal{U}'$ 中满足以下条件的唯一元素：

$$e^{u(\sigma',\langle q'\rangle)}\sigma'=\psi^*(e^{u(\sigma,\langle q\rangle)}\sigma)=e^{\psi^*(u(\sigma,\langle q\rangle))}\psi^*\sigma.$$

现在，σ' 和 $\psi^*\sigma$ 都是同一共形类中的双曲度量。因此 $\sigma'=\psi^*\sigma$。于是，由于 $\mathcal{D}_0$ 在 $\mathcal{M}_{-1}$ 上的作用是自由的，我们看到 $\psi=\psi_\sigma$ 是唯一的，并且仅由 σ 和 σ' 这一对确定。换言之，它不依赖于 $\langle q\rangle$。这意味着

$$u(\sigma',\langle q'\rangle)=\psi_\sigma^*\big(u(\sigma,\langle q\rangle)\big)\implies u(\sigma',\langle q'\rangle)=u(\psi_\sigma^*(\sigma,\langle q\rangle))=u(\sigma',\psi_\sigma^*\langle q\rangle)\implies\langle q'\rangle=\psi_\sigma^*\langle q\rangle$$

由映射的单射性 $\langle q\rangle\mapsto u(\sigma,\langle q\rangle)$ 对每个 σ成立。因此由 (5.10),

$$(\sigma',\langle q'\rangle)=\mathcal{F}_{\mathcal{V}'}\circ\mathcal{F}_{\mathcal{V}}^{-1}(\sigma,\langle q\rangle)=\psi_\sigma^*(\sigma,\langle q\rangle)=(\psi_\sigma^*\sigma,\langle\psi_\sigma^*q\rangle)=\langle\tilde{\Psi}_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}(\sigma,q)\rangle.$$

因此，$\mathcal{F}_{\mathcal{V}'}\circ\mathcal{F}_{\mathcal{V}}^{-1}$ 是光滑的。

第二个结论由引理5.12和引理5.15得出：取 $\mathcal{U}\subset\mathcal{S}^{\mathcal{Q}^*}/S^1$ 作为 $Q_3^*(S)/S^1$ 在 $[(\sigma_0,\langle q_0\rangle)]$ 附近的坐标图，并取 $\mathcal{V}=\tilde{}\mathbf{g}_0(\mathcal{U})$ 作为 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 在 $[g_0]=[e^{u_0}\sigma_0]=\mathbf{g}_0([(\sigma_0,\langle q_0\rangle)])$ 附近的坐标图。由于 $\tilde{}\mathbf{g}_0$ 在 $(\sigma_0,\langle q_0\rangle)$ 处是浸入，必要时缩小 $\mathcal{U}$ 后，它就是到其像上的微分同胚。因此，$\mathbf{g}_0\colon Q_3^*(S)/S^1\to(\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0)\setminus\mathcal{T}(S)$ 是局部微分同胚。由于它是双射（命题 5.8），实际上它是从 $Q_3^*(S)/S^1$ 到 $(\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0)\setminus\mathcal{T}(S)$ 的全局微分同胚。□

推论5.18. 二次型 $G_g(\cdot,\cdot)$ 在第4 节中定义，C^∞ 在$(\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0)\setminus\mathcal{T}(S)$上定义了一个黎曼度量。

证明。我们在命题4.10 中看到，$G_{[g]}(\cdot,\cdot)$在 $\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$上定义了一个黎曼度量，因此特别地，它在布拉施克轨迹上也定义了一个黎曼度量。由于我们构造的切片 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 的光滑坐标图，而且它们也是 $\mathcal{M}^{k,\alpha}_{-}$ 的有限维光滑子流形，由命题4.7 可知，G_g 限制在每个切片上都是一个C^{k-3} 二次型。因此，它是 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 上的一个 C^{k-3} 度量，除去 $\mathcal{T}(S)$。不过请注意，由于根据定理5.17，无论空间 $\mathcal{M}^{k,\alpha}_{-}$ 是什么（ $\mathcal{M}^B$ 被视为其子集），映射$\mathbf{g}_0\colon Q_3^*(S)/S^1\to(\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0)\setminus\mathcal{T}(S)$都是微分同胚，因此我们可以任意增大 k，由此得出度量 $G_g(\cdot,\cdot)$在 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 上除去 $\mathcal{T}(S)$后是光滑的。□

5.4. 布拉施克轨迹的拓扑。上一节的结果使我们得以进一步阐述布拉施克轨迹的拓扑结构。

命题 5.19. 商空间 $Q_3(S)/S^1$ 与 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$同胚，其中两个空间均赋予由 C^∞ 拓扑导出的商拓扑。

证明. 根据命题5.8，映射 $\mathbf{g}_0\colon Q_3(S)/S^1\to\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 是双射。我们先证明它连续。参数化 $Q_3(S)$的每个切片 $\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}$ 都带有 $Q_3(S)$的光滑结构（以及拓扑结构），见注2.11；引理5.12 中我们证明了映射 $\tilde{}\mathbf{g}\colon\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}\to\mathcal{M}^{k,\alpha}_{-}$ 是光滑的，因而特别是连续的（注意，光滑性在零截面上也成立）。这对任意 k,α都成立，因此 $\tilde{}\mathbf{g}\colon\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}\to\mathcal{M}_-$ 是连续的。因此，将 $\mathbf{g}$ 局部写作

$$\mathbf{g}=\pi_B\circ\widetilde{\mathbf{g}}\circ\pi_{\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}}^{-1}:\pi_{\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}}(\mathcal{S}^{\mathcal{Q}})\subset Q_3(S)\to\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0\subset\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$$

(参见（5.9）），我们看到它是连续的。由于 $\mathbf{g}$ 在 S^1 对 $Q_3(S$ 的作用所产生的轨道上为常数，因此下降映射 $\mathbf{g}_0\colon Q_3(S)/S^1\to\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 是连续的。

接下来我们证明 $\mathbf{g}_0^{-1}\colon\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0\to Q_3(S)/S^1$ 是连续的。假设 $[g_j]\overset{j\to\infty}{\to}[g]\in\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$带有 $\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$的商拓扑。于是我们可以考虑 $[g_j]$ 的提升 $g_j=e^{u_j}\sigma_j$ 到切片 $\mathcal{W}\subset\mathcal{M}_-$，该切片位于 $[g]$ 的一个提升 $g=e^u\sigma\in\mathcal{M}_-$ 附近，如第 4.4 节所述；这些提升收敛到 C^∞中的 g。这里 $\sigma_j,\sigma\in\mathcal{M}_{-1}$。于是我们有 $\sigma_j=\lambda(g_j)\overset{j\to\infty}{\to}\lambda(g)$ C^∞中的 $=\sigma$，其中 λ 是庞加莱映射。现在固定一个较大的整数 k，并取$\alpha\in(0,1)$。这些 σ_j 不一定位于经过 σ 的切片 $\mathcal{S}\subset\mathcal{M}^{k,\alpha}_{-1}$ 中，如定理 5.9 所述；不过对于这样的

切片上存在微分同胚 $\psi_{\sigma_j} \in \mathcal{D}_0$ 使得[5] $\psi^*_{\sigma_j}\sigma_j \in \mathcal{S}$。此外， ψ_{σ_j} 关于 C^{k+1}中的 σ_j连续依赖。因此，由于 $\sigma_j \to \sigma \in \mathcal{S}$，可知 C^{k+1}中的 $\psi_{\sigma_j} \to id$, $^{\alpha}$。因此，C^{k}中的 $\psi^*_{\sigma_j} g_j \to g$ $^{\alpha}$，并且我们有 $\lambda(\psi^*_{\sigma_j} g_j) = \psi^*_{\sigma_j}\lambda(g_j) \in \mathcal{S}$，且

$$\mathbf{g}_0^{-1}([g_j]) = [\widetilde{\mathbf{g}}_0^{-1}(g_j)] = [\psi^*_{\sigma_j}\widetilde{\mathbf{g}}_0^{-1}(g_j)] = [\widetilde{\mathbf{g}}_0^{-1}(\psi^*_{\sigma_j} g_j)].$$

因此，我们可以将假设 $g_j \to g$ in C^∞ 替换为假设 $g_j \to g$ in $C^{k,\alpha}$，其中 $\sigma_j = \lambda(g_j) \in \mathcal{S}$ 收敛到 $\sigma = \lambda(\sigma)$ in $C^{k,\alpha}$，并且我们要证明 $[\tilde{}\mathbf{g}_0^{-1}(g_j)] \to [\tilde{}\mathbf{g}_0^{-1}(g)] =: [(\sigma, \langle q\rangle)]$。如备注 5.10 中所述， $\mathcal{S} \ni \sigma_j \to \sigma$ in $C^{k,\alpha}$ 实际上蕴含 $\sigma_j \to \sigma$ in C^∞。

因此，现在我们想要证明 $\langle q_j\rangle \to \langle q\rangle$ in $\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}/S^1$。注意，根据王氏方程（5.4），对于任意 q_j, q，若满足 $g_j = \tilde{}\mathrm{g}(\sigma_j, q_j)$， $g = \tilde{}\mathrm{g}(\sigma, q)$，则有 $|q_j|^2_{g_j} \to |q|^2_g$in $C^{k-2,\alpha}$，因此特别有 C^0。此外，由于 $g_j = e^{u_j}\sigma_j \to g = e^u\sigma$ 且 $\sigma_j \to \sigma$ in C^0，我们得出 $u_j \to u$ in C^0。因此，$|q_j|^2_{\sigma_j} = e^{3u_j}|q_j|^2_{g_j} \to |q|^2_\sigma = e^{3u}|q|^2_g$in C^0。特别地，$\int_S |q_j|^2_{\sigma_j} dv_{\sigma_j} \to \int_S |q|^2_\sigma dv_\sigma$。现在

$$(q, q') \mapsto \int_S \frac{q\overline{q}'}{\sigma^3} dv_\sigma \tag{5.15}$$

是 $\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}$纤维上的连续厄米内积，因此我们可以选取关于它的局部标准正交标架$\{\hat{}q_\ell(\sigma)\}_{\ell=1}^{5\mathfrak{G}-5}$，并将 $b^\ell, b^\ell_j \in \mathbb{C}$ 写作 $q_j = \sum_\ell b^\ell_j \hat{}q_\ell(\sigma_j)$，$q = \sum_\ell b^\ell \hat{}q_\ell(\sigma)$。于是

$$\sum_\ell |b^\ell_j|^2 = \int_S |q_j|^2_{\sigma_j} dv_{\sigma_j} \overset{j\to\infty}{\to} \int_S |q|^2_\sigma dv_\sigma = \sum_\ell |b^\ell|^2.$$

特别地，序列 $b_j = (b^1_j, \dots, b^{5\mathfrak{G}-5}_j) \in \mathbb{C}^{5\mathfrak{G}-5}$ 有界，并且对于它的任意极限点 $\tilde{b} \in \mathbb{C}^{5\mathfrak{G}-5}$，三次微分 $\tilde{q}(\sigma) = \sum_\ell \tilde{b}^\ell \hat{}q_\ell(\sigma)$ 关于由 σ 确定的共形结构是全纯的，且满足 $|\tilde{q}|^2_\sigma = |q|^2_\sigma$。若 $q \equiv 0$，则有 $\tilde{b} = 0$，从而 $q_j \to q$。若 $q \not\equiv 0$，则比值$\tilde{q}/q$ 在 $(S, J(\sigma))$ 上定义了一个亚纯函数；又由于 $|\tilde{q}/q|^2 = |\tilde{q}|^2_\sigma/|q|^2_\sigma = 1$，它的取值属于 S^1。这意味着它是常数，因此 $\tilde{q} = e^{2\pi i\theta}q$, $\theta \in [0, 1)$。我们得出结论：在由 C^0诱导的S^1 商拓扑下， $\langle q_j\rangle \to \langle q\rangle$ 属于 $\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}$；该拓扑等价于由 C^∞诱导的商拓扑。因此，$[(\sigma_j, \langle q_j\rangle)]$ 在 $Q_3(S)/S^1$中收敛到 $[(\sigma, \langle q\rangle)]$。□

根据命题5.19，我们现在得到：

定理 5.20. $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 是一个 $16\mathfrak{G} - 17$ 维连通可缩空间。

证明. 根据黎曼-罗赫定理， $Q_3(S)/S^1$ 的每个纤维都同构于 $\mathbb{C}^n/S^1$，其中 $n = 5\mathfrak{G} - 5$。从 $\mathbb{C}^n$中去掉0后，我们得到如下同胚（实际上是微分同胚）：

$$(\mathbb{C}^n \setminus \{0\})/S^1 \longrightarrow (0, \infty) \times \mathbb{C}P^{n-1},$$
$$\langle (z_1, \cdots, z_n)\rangle \longmapsto (|(z_1, \cdots, z_n)|, \lfloor z_1, \cdots, z_n \rfloor).$$

这里， $\langle\cdot\rangle$ 表示 S^1 作用下的等价类，该作用将$(z_1, z_2, \cdots, z_n)$与 $e^{2\pi i\theta}(z_1, z_2, \cdots, z_n)$对任意 $\theta \in [0, 1)$识别； $\lfloor\cdot\rfloor$ 表示 $\mathbb{C}^n$中射影直线的等价类。

因此， $\mathbb{C}^n/S^1$ 同胚于由 $\big([0, \infty) \times \mathbb{C}P^{n-1}\big)/\sim$给出的锥。关系“ $\sim$”将$\{0\} \times \mathbb{C}P^{n-1}$粘合为一个点，在其他情况下则是平凡的。将 $\big([0, \infty) \times \mathbb{C}P^{n-1}\big)/\sim$收缩到一点的变形收缩由 $f_t(\{(r, x)\}) = \{((1 - t)r, x)\} \in \big([0, \infty) \times \mathbb{C}P^{n-1}\big)/\sim$给出。这里， $r \in [0, \infty)$、 $x \in \mathbb{C}P^{n-1}$ 以及$\{(r, x)\}$ 表示 $\big([0, \infty) \times \mathbb{C}P^{n-1}\big)/\sim$中$(r, x)$的等价类。由于 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 同胚于$Q_3(S)/S^1$ ， 且 $Q_3(S)$是定义在可缩空间 $\mathcal{T}(S)$上的平凡向量丛，我们 conclude that $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$同胚于 $\mathcal{T}(S)$与$([0, \infty) \times \mathbb{C}P^{n-1})/\sim$的乘积空间。结论得证。□

注 5.21。 定理 *5.20* 的证明 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 表明，在拓扑上它是 $\mathcal{T}(S)$ 与一个以紧流形为底的锥的乘积 $\mathbb{C}P^{n-1}$。这意味着它可以看作是 楔形 或带边的“流形”，其含义见 *[Sch91]*，第 *266]*, 页；不同之处在于，此处的边缘 $\mathcal{T}(S)$ 并非闭流形。值得探究的是，协方差度量在 $\mathcal{T}(S)$ 附近是否确实表现为（共形倍数的）边缘型度量（参见 *[Maz91, §2]*），不过我们尚未对此展开研究。

[5]先验地， ψ_{σ_j} 仅是 $C^{k+1,\alpha}$，但由于σ_j 都是光滑的，且切片 $\mathcal{S}$ 由光滑度量构成，因此它们实际上是光滑的，参见 [Tro92，定理 2.3。1]。

最后，我们讨论布拉施克轨迹 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 与希钦分支 $\mathcal{H}_3(S)$ 之间的关系。以下推论是定理 2.10 和命题 5.19 的直接结果。

推论 5.22. S^1 在 $Q_3(S)$上的作用，通过 Hitchin 映射 H： $Q_3(S)$ $\to\mathcal{H}_3(S)$，诱导出 S^1 在 $\mathcal{H}_3(S)$上的作用。将商空间记为 $\mathcal{H}_3(S)/S^1$ ，将诱导映射记为 H_0： $Q_3(S)/S^1 \to \mathcal{H}_3(S)/S^1$。那么复合映射

$$\Phi := \mathbf{g}_0 \circ \mathbf{H}_0^{-1} : \mathcal{H}_3(S)/S^1 \to \mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$$

是一个映射类群等变同胚，其中映射类群在 $\mathcal{H}_3(S)/S^1$（作为外自同构群作用）以及在 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 上的作用，是第 3节中引入的左作用。

6. Geodesics in $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$

我们将研究相对于布拉施克 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$中的协方差度量的一些测地线族。在第6.1节中，我们利用第 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 节中引入的希钦轨形表示，确定2.3节中离开所有紧集的一些测地线，并在小节6.2中估计它们相对于协方差度量的长度。

6.1. 轨迹中的测地线 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$。在本节中，我们固定一个表示 $Y \simeq [S/\Sigma]$ ，其中 Y是轨形 Σ 的微分同胚群的有限子群 $\mathcal{D}$ ，而该曲面 S。此外，我们假设 $Y = Y_J$来自黎曼曲面 $X_J = (S,\ J)$，使得 $Y \simeq [X_J/\Sigma]$。在 [ALS22], 中，对具有一维希钦分支的负欧拉示性数轨形进行了分类。这些都是不可定向轨形。特别地，对于 Hit$(\pi_1 Y,\ \mathrm{PGL}(3,\ \mathbb{R}))$，有

命题 6.1 ([ALS22，定理 6.5])。设 Y是一个负欧拉示性数的不可定向轨形。那么，$\dim \mathrm{Hit}(\pi_1 Y,\ \mathrm{PGL}(3,\ \mathbb{R}))$ $= 1$ 当且仅当其可定向双覆盖 Y^+ 满足以下条件之一时成立： Y

(1) Y^+ 是一个具有 4 个锥点的球面，其阶数分别为 $m_1 = m_2 = m_3 = 2$ 和 $m_4 \geq 4$.
(2) Y^+ 是一个具有 3 个锥点的球面，其阶数分别为 $m_1 \geq 3$、 $m_2 \geq 3$ 和 $m_3 \geq 4$。

根据定理 3.1，空间 Hit$(\pi_1 Y$,PGL$(3,\mathbb{R}))$ 同胚于一维空间 $\mathcal{H}_3(Y)$：=固定$_\Sigma\mathcal{H}_3(S)$。在命题 $Y \simeq [X_J/\Sigma]$ 6.1 中给出的轨形例子中，有一些是$\mathcal{H}_3(Y) \subset \mathcal{H}_3(S)$，它们由单个全纯三次微分参数化。这些是

命题 6.2 ([ALS22，定理 5.5，定理 6.6])。假设 dim $\mathcal{H}_3(Y)$=*1* 且 $\mathcal{H}_3(Y)$ 由单个处处非零的三次微分参数化，则 Y^+ 必为一个具有 3 个锥点的球面，其阶数分别为$m_1 \geq 3$、 $m_2 \geq 3$ 和 $m_3 \geq 4$。

注 6.3. 对于命题 ¨中的轨形，Teichm $\mathcal{T}(Y^+)$ 上的 Teichmüller 空间 Y^+ 6.2 （具有 3 个锥点的球面）维数为 0 （参见 *[Thu*，推论 13.3。*7]*）。因此 Y^+是 Y的可定向双覆盖，它具有唯一的复结构，而 Y 也继承了唯一的“复结构”，表示为 $Y = Y_J \simeq [X_J/\Sigma]$ （参见注 *2.13*）。

从现在起，我们将兴趣限定于满足以下条件的轨形 $Y = Y_J$： $\mathcal{H}_3(Y)$ 是一维的，并由一个处处非零的全纯三次微分参数化。回想一下， Σ 中的元素作用于 X_J 上时是全纯映射或反全纯映射，且 $Y \simeq [X_J/\Sigma]$。对于由命题 6.2 得到的 Y，向量空间 Fix$_\Sigma H^0(X_J, K_J^2)$ 是平凡的。因此，在这些情形下，由 Hitchin 参数化（回想命题 3.2）可得一个同胚 Fix$_\Sigma H^0(X_J, K_J^3)$ $\overset{H_J}{\simeq}$ $\mathcal{H}_3(Y)$。由于 $\mathcal{H}_3(Y)$ 是 $\mathcal{H}_3(S)$ 的一个一维实子空间，向量空间 Fix$_\Sigma H^0(X_J, K_J^3)$ $= \{q \in H^0(X_J, K_J^3) \mid \psi^A \cdot q = q, \forall \psi \in \Sigma\}$ 也是一维实空间。它由单个全纯三次微分 q 的实线性张成构成。

为了进一步考察 $\mathcal{H}_3(Y)$ 在 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$中的对应对象，我们需要讨论 S^1 在 $\mathcal{H}_3(Y)_3$上的作用以及 Fix$_\Sigma H^0$ $(X_J, K_J^3) \subset \bigoplus H^0(X_J, K_J^i)$（回顾第 5.2节）。首先，我们需要以下引理，它使我们能够$_{i=2}$确定 Hitchin 参数化 H_J 与 Hitchin 映射 $\mathbf{H}$ 在某些特殊纤维上的对应关系：

引理 6.4. 对于任意复结构 J，将 Hitchin 映射 H^{-1} 的逆映射与 Hitchin 参数化 H_J 的复合限制在 $H^0(X_J, K_J^3)$ 上时

$$\mathbf{H}^{-1} \circ H_J : \bigoplus_{i=2}^{3} H^0(X_J, K_J^i) \to \mathcal{H}_3(S) \to Q_3(S)$$

满足

$$\mathbf{H}^{-1}\circ H_J|_{H^0(X_J,K_J^3)}=\mathrm{Id}|_{H^0(X_J,K_J^3)},$$

其中， $H^0(X_J,K_J^3)$ 与 $H^0(X_{[J]},K_{[J]}^3)$ 等同。

证明。Hitchin 映射 H： $Q_3(S)\to\mathcal{H}_3(S)$ 是一个同胚，并且对于 $[(J,q)]\in Q_3(S)$ 中的任意代表元 (J,q)，都有 $\mathrm{H}([(J,q)])=H_J(0,q)$。等价地，有 $\mathrm{H}^{-1}\circ H_J(0,q)=[(J,q)]\in H^0(X_{[J]},K_{[J]}^3)$ 是恒等映射。□

R关于 S^1 在 $\mathcal{H}_3(Y)$ 上的作用，其中 $Y=Y_J$ 由命题 6.2导出，我们有 e

引理 6.5。 S^1 在 $\mathcal{H}_3(S)$ 上的作用在 $\mathcal{H}_3(Y)$ 上诱导一个二对一的等同，唯独在 $H_J(0)$ 处例外。由 S^1 作用诱导的 $\mathbb{Z}_2$ 作用对 $\mathcal{H}_3(Y)$ 取商，记为 $\mathcal{H}_3(Y)/\mathbb{Z}_2$，它与 $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ 同胚。

证明。Hitchin 参数化 H_J 是 Σ-等变的，并且根据命题 3.2，是 $\mathrm{Fix}_\Sigma H^0(X_J,K_J^3)$ 与 $\mathcal{H}_3(Y)$ 之间的同胚。根据前一个引理，将 $\mathrm{Fix}_\Sigma H^0(X_J,K_J^3)$ 与 $\mathrm{Fix}_\Sigma H^0(X_{[J]},K_{[J]}^3)$ 等同起来，并将 H_J 与 H 等同起来后， S^1 在 $Q_3(S)$ 上的作用会在 $\mathrm{Fix}_\Sigma H^0(X_J,K_J^3)=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(q)\subset\bigoplus_3 H^0(X_J,K_J^i)$ 上诱导出一个 $\mathbb{Z}_2$ 作用。此外，对于任意 $t\in\mathbb{R}/\{0\}$，这个 $\mathbb{Z}_2$ 作用将 tq 与 $-tq$ 对应起来。当 $t=0$ 时，这种对应是平凡的。由此可得，商空间 $\mathcal{H}_3(Y)/\mathbb{Z}_2$ 与半直线 $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ 同胚。 □

有了上述结果，我们可以证明下面这个引理。它表明，由 $\mathcal{H}_3(Y)/\mathbb{Z}_2$ 给出的半直线，通过推前参数化的测地线，在 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 中沿映射 $\Phi:\mathcal{H}_3(S)/S^1\to\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$定义于推论5.22。

引理 6.6. 集合 $\Phi(\mathcal{H}_3(Y)/\mathbb{Z}_2)\subset\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 是群作用 Σ的不动点集，其中 $\Sigma\le\mathcal{D}$ 被视为 $\mathrm{Mod}^{\pm}(S)$ 的一个有限子群。

证明. 若 $\psi\in\Sigma$ 是保向的，则根据推论 5.22 和 $\mathcal{H}_3(Y)$ 的定义， $\Phi(\mathcal{H}_3(Y)/\mathbb{Z}_2)$ 中的每个点都被 $[\psi]$ 固定。否则，若 $\psi\in\Sigma$ 是反向的，则相对于 X_J，它是一个反全纯映射。对于 $q\in H^0(X_J,K_J^3)$，有 $\psi^*q\in H^0(X_{-J},K_{-J}^3)$。注意，根据引理 6.4，$\Phi(\mathcal{H}_3(Y)/\mathbb{Z}_2)=\mathrm{g}_0\circ\mathrm{H}_0^{-1}\big(\mathcal{H}_3(Y)/\mathbb{Z}_2\big)=\mathrm{g}_0\Big(\mathrm{Fix}_\Sigma H^0(X_J,K_J^3)/\mathbb{Z}_2\Big)$。对于 $q\in\mathrm{Fix}_\Sigma H^0(X_J,K_J^3)$，由第 3.3 小节中的讨论， $\psi^A\cdot q=q$ 意味着，

$$\psi^*q=\kappa_\psi^{-1}\circ q\circ\psi=\overline{\tau_{\psi^{-1}}\circ q\circ\psi}=\overline{(\psi^A)^{-1}\cdot q}=\overline{q}.$$

结合方程 (5.4) 的解在复共轭$z\to\overline{z}$和 $q\to\overline{q}$下保持不变这一观察，我们得到 $[\psi]^*\mathrm{g}_0([(J,\langle q\rangle)])=\mathrm{g}_0([(-J,\langle\overline{q}\rangle)])=\mathrm{g}_0([(J,\langle q\rangle)])$。这里我们用到了注 5.7。因此， $[\psi]\cdot\mathrm{g}_0([(J,\langle q\rangle)])=[\psi^{-1}]^*\mathrm{g}_0([(J,\langle q\rangle)])=\mathrm{g}_0([(J,\langle q\rangle)])$，且 $\mathrm{g}_0([(J,\langle q\rangle)])$ 是 Σ 所诱导的左作用的不动点。□

进一步有

定理 6.7。 设 Y 是一个负欧拉示性数的不可定向欧比弗尔德，其定向双覆盖为 Y^+ 由命题 6.2 中的情形给出。则 $\mathcal{H}_3(Y)/\mathbb{Z}_2$ 嵌入为 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 中的一条（无参数）测地线，其中采用协方差度量 $G(\cdot,\cdot)$。

证明。由命题 6.2 和引理 6.5，集合 $\Phi(\mathcal{H}_3(Y)/\mathbb{Z}_2)$ 与实数半直线 $\mathbb{R}_+$ in$\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 同胚。由引理 6.6，集合 $\Phi(\mathcal{H}_3(Y)/\mathbb{Z}_2)$ 在群 $\Sigma\le\mathrm{Out}(\pi_1S)\cong\mathrm{Mod}^{\pm}(S)$ 的作用下逐点固定。由于 $\mathrm{Mod}^{\pm}(S)$ 是 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 上协方差度量 $G(\cdot,\cdot)$ 的等距变换群的子群，而由等距变换子群逐点固定的一维连通子集必为测地线（见[Kob95, Theorem 5.1]），因此我们得出 $\mathcal{H}_3(Y)/\mathbb{Z}_2$ 嵌入 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 中成为一条（未参数化的）测地线。□

6.2. 无限长测地线。 本小节估计布拉施克轨迹 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 中某些曲线族相对于协方差度量的长度；如第 6.1 节最后部分所述，其中一些是测地线。具体而言，固定一个复结构 J 在 S 上，并令 $\sigma\in\mathcal{M}_{-1}$ 为相应的双曲度量。令 q 为相对于 J 的非零全纯三次微分，并考虑曲线$\{g_t=e^{u_t}\sigma:\ t\ge0\}\subset\mathcal{M}^B$，其中，如 (5.11) 中所述，对每个 $t\ge0$，对数密度 u_t 满足

$$\Delta_\sigma u_t=2e^{u_t}-4te^{-2u_t}\frac{|q|^2}{\sigma^3}-2. \tag{6.1}$$

当 $g_t = e^{u_t}\sigma$时，(6.1) 等价于王氏方程 (5.4)，即 $K_{g_t} = -1 + 2|\sqrt{t}\,q|^2_{g_t}$。我们的目标是估计曲线 $\{[g_t]\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$的长度。我们先介绍一些预备知识。

6.2.1. 布拉施克度量的一些估计。以下引理得益于与 Michael Wolf 的交流。

引理 6.8. 布拉施克度量 g_t 的对数密度 u_t 关于参数 t 单调递增，当 $t \geq 0$ 时。

证明。 更一般的结论已在 [DL20，命题 4 中证明。1]为完整起见，我们给出所需情形的证明。对 (6.1) 求时间导数，得到

$$\Delta_\sigma \dot{u}_t = 2\Big(e^{u_t} + 4e^{-2u_t}\frac{t|q|^2}{\sigma^3}\Big)\dot{u}_t - 4e^{-2u_t}\frac{|q|^2}{\sigma^3}. \tag{6.2}$$

根据椭圆正则性，方程 (6.2) 蕴含 $\dot{u}_t \in C^\infty(S)$。我们证明，对所有 $\dot{u}_t > 0$， $t \geq 0$均成立。假设对某个 $t \geq 0$并非如此，因此对这个 t 有 $\dot{u}_t(p) \leq 0$，其中 p 在 S 上取到 $\dot{u}_t$ 的最小值。考虑算子 $L = -\Delta_\sigma + 2e^{u_t}$。我们将方程 (6.2) 改写为

$$L\dot{u}_t = 4e^{-2u_t}\frac{|q|^2}{\sigma^3}(1 - 2t\dot{u}_t). \tag{6.3}$$

在一个小邻域内 U的 p，我们有 $(1 - 2t\dot{u}_t) \geq 0$，这意味着 $L\dot{u}_t\big|_U \geq 0$。因此，根据强极大值原理 [Eva10，第 6.4 节，定理 4(ii)]， $\dot{u}_t$在 U上为常数。若 $\dot{u}_t\big|_U \equiv 0$，则 $q = 0$在 U上成立，因而处处成立，这与我们的假设矛盾。另一方面，若 $\dot{u}_t\big|_U < 0$，则（6.3）的左边在 U 上为负，而右边非负，矛盾。□

我们将需要以下由 Loftin 得出的结果：

命题 6.9 ([Lof01，命题 4。02])。 若 u_t 满足关于双曲度量(6.1) 和全纯三次微分 σ，且 q 对于 $t \geq 0$，则

$$0 \leq u_t \leq \log\Big(R\Big(\max_S\Big\{\frac{t|q|^2}{\sigma^3}\Big\}\Big)\Big),$$

其中， $R(a)$ 是多项式 $p_a(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4a$ 的最大正根。

引理 6.10. 多项式 $p_a(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4a$ 有唯一正根，前提是 $a \geq 0$；若令 x_t 为 $x^3 - x^2 - 2\max_S\Big\{\frac{t|q|^2}{\sigma^3}\Big\}$ 的正根，则有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x_t}{t^{1/3}} = \Big(2\max_S\Big\{\frac{|q|^2}{\sigma^3}\Big\}\Big)^{1/3}.$$

证明. 当 $a \geq 0$ 时，多项式 $p_a(x)$ 有唯一正根这一事实显然成立，只要 $a = 0$。若 $a > 0$，我们知道存在一个实根，并且任意实根 x_a 都满足 $x_a^2(x_a - 1) = 2a$。因此，实根 x_a 满足$x_a > 1$。求导可得， $p_a'(x_a) > 0$。因此不可能存在多个正实根，因为在任意两个满足 $p_a' > 0$ 的根之间，至少还必须有一个根，而 p_a 总共至多有三个实根。令 $b = 2\max_S\Big\{\frac{|q|^2}{\sigma^3}\Big\} > 0$；对于较大的 $t > 0$，我们寻找满足 $x^3 - x^2 - bt = 0$ 的 $x > 0$。令 $z = x/t^{1/3}$和 $s = t^{-1/3}$。注意，$(x, t) \mapsto (z, s)$ 是从 $(0,\infty)$ 到 $(0,\infty)$ 的双射，因此 $x^3 - x^2 - bt = 0$ 满足 x 时， $t > 0$ 当且仅当

$$F(z, s) := z^3 - z^2 s - b = 0, \quad z,\ s > 0.$$

函数 F满足 $F(b^{1/3}, 0) = 0$，并且在 $(z, s) = (b^{1/3}, 0)$ 附近光滑。由于 $\partial_z F(b^{1/3}, 0) = 3b^{2/3}$，由隐函数定理可知，在 $(b^{1/3}, 0)$ 的某个邻域内，方程 $F(z, s) = 0$ 成立，当且仅当对于定义在 $s = 0$ 某个邻域内的光滑函数 f，有 $z = f(s)$。将 x_t 记为 $x^3 - x^2 - bt = 0$ 的正解，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x_t}{t^{1/3}} = \lim_{t\to\infty} f(t^{-1/3}) = \lim_{s\to 0} f(s) = b^{1/3}.$$

□

Loftin 证明了关于布拉施克度量渐近行为的以下结果 g_t 当$t \to \infty$ (另见 [Tho17，定理 3。8])。

定理 6.11 ([Lof07，命题 1])。 由方程 g_t （6.1） 给出的布拉施克度量族$|q|^{\frac{2}{3}}$ 退化为与三次微分 q 相关联的奇异平坦度量（经过某种缩放），其含义如下：当 $t \to \infty$时，我们有

$$t^{-\frac{1}{3}} g_t \to 2^{\frac{1}{3}} |q|^{\frac{2}{3}},$$

在 S 中 q 的零点补集的每个紧子集上一致成立。

6.2.2. 长度估计。以下命题表明，空间 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 中对应于丛 $Q_3(S)$ 的固定纤维内一条射线的任意曲线，关于协方差度量都具有无限长度。

定理 6.12。 设 σ 是 S 上的双曲度量，并且 q 是一个非零三次微分，它关于由 σ 和一个定向所确定的复结构是全纯的。则曲线 $\{[g_t]\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 的投影 $g_t = \{e^{u_t}\sigma\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{M}^B$，其中 u_t 满足方程 (6.1)，关于协方差度量具有无限长度。

证明。根据引理 4.9，对于给定的类 $[g] \in \mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$，元素 $h \in T_{[g]}(\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0)$ 关于协方差度量的范数由 $G_g(h,h)^{1/2}$ 给出，其中 g 是 $[g]$ 中的一个代表元，$h \in T_g\mathcal{M}_-$ 是 h 的一个提升，而 $G_g(\cdot,\cdot)$ 是定义 4.4 中定义的双线性形式。因此，线段 $\gamma_T := \{[g_t] : t \in [0,T]\} \subset \mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 的长度为

$$L(\gamma_T) = \int_0^T \sqrt{G_{g_t}\big(\partial_t(g_t), \partial_t(g_t)\big)}\, dt.$$

我们将证明

$$\lim_{T\to\infty} L(\gamma_T) = \infty.$$

为简化记号，我们记 $h_t := \partial_t(g_t)$。根据定义 4.4，

$$G_{g_t}(h_t,h_t) = \langle \Pi_2^{g_t} h_t, h_t\rangle_{L^2(T^1S_{g_t})} = \langle \Pi^{g_t}\pi_2^* h_t, \pi_2^* h_t\rangle + |\langle 1, \pi_2^* h_t\rangle_{L^2(T^1S_{g_t})}|^2$$

注意到 $h_t = \dot{u}_t g_t$。由于对于 $v \in T^1S_{g_t}$，$\pi_2^* h_t(v) = \pi_2^*(\dot{u}_t g_t)(v) = \pi_0^*(\dot{u}_t)(v)$，我们有[6]

$$\begin{aligned} G_{g_t}(h_t,h_t) =& \langle \Pi^{g_t}\pi_0^*\dot{u}_t, \pi_0^*\dot{u}_t\rangle + |\langle 1, \pi_0^*\dot{u}_t\rangle_{L^2(T^1S_{g_t})}|^2 \\ \geq& |\langle 1, \pi_0^*\dot{u}_t\rangle_{L^2(T^1S_{g_t})}|^2 = \frac{|\langle 1, \dot{u}_t\rangle_{L^2(S,dv_{g_t})}|^2}{\mathrm{Area}(S,g_t)^2}, \end{aligned}$$

其中，不等式由定理 4.2 得出。注意，上文写作 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{L^2(S,\ dv_{g_t})} =$面积$(S,\ g_t)\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{L^2_{g_t}(S)}$。现在我们更详细地考察 $\dot{u}_t$。由于我们的流形是二维的，因此有 $\Delta_\sigma = e^{u_t}\Delta_{g_t}$，由此可从 (6.2) 得出

$$\Delta_{g_t}\dot{u}_t = \left(2 + 8\frac{t|q|^2}{g_t^3}\right)\dot{u}_t - 4\frac{|q|^2}{g_t^3}. \tag{6.4}$$

现在对 (6.4) 在 S 上积分，所依据的是 g_t 面积形式：根据散度定理，$\int_S \Delta_{g_t}\dot{u}_t dv_{g_t} = 0$因此

$$\left\langle \left(2 + 8\frac{t|q|^2}{g_t^3}\right)\dot{u}_t, 1\right\rangle_{L^2(S,dv_{g_t})} = 4\left\langle \frac{|q|^2}{g_t^3}, 1\right\rangle_{L^2(S,dv_{g_t})}.$$

g_t 的曲率由 $K_{g_t} = 2t\frac{|q|^2}{g_t^3} - 1$ 给出（回顾方程 (5.4)），因此

$$\langle (6 + 4K_{g_t})\dot{u}_t, 1\rangle_{L^2(S,dv_{g_t})} = 4\left\langle \frac{|q|^2}{g_t^3}, 1\right\rangle_{L^2(S,dv_{g_t})}.$$

利用 $\dot{u}_t \geq 0$ （根据引理 6.8）以及 $K_{g_t} < 0$ （根据命题 5.5），我们得到

$$\langle \dot{u}_t, 1\rangle_{L^2(S,dv_{g_t})} \geq \langle (1 + \frac{2}{3}K_{g_t})\dot{u}_t, 1\rangle_{L^2(S,dv_{g_t})} = \frac{2}{3}\left\langle \frac{|q|^2}{g_t^3}, 1\right\rangle_{L^2(S,dv_{g_t})}. \tag{6.5}$$

[6]注意，刘维尔测度的总质量为 1，因此局部有 $d\mu_g^L = \frac{d\theta dv_g}{2\pi S\text{面积}(,\ g)}$。

现在我们来寻找右侧的一个下界。由于 $dv_{g_t} = e^{u_t} dv_\sigma$，我们有 e

$$\left\langle \frac{|q|^2}{g_t^3}, 1 \right\rangle_{L^2(S, dv_{g_t})} = \int_S e^{-2u_t} \frac{|q|^2}{\sigma^3} dv_\sigma \geq \frac{1}{x_t^2} \int_S \frac{|q|^2}{\sigma^3} dv_\sigma;$$

该不等式由命题 6.9给出，其中 x_t 是多项式 $x^3 - x^2 - 2\max_S \left\{ \frac{t|q|^2}{\sigma^3} \right\}$的正根。因此，由引理 6.10可知，存在正常数$C_{q,\,\sigma}$ 和 $T_0 > 0$，它们依赖于 $C_{q,\,\sigma}$，使得对于$t \geq T_0$，有

$$\left\langle \frac{|q|^2}{g_t^3}, 1 \right\rangle_{L^2(S, dv_{g_t})} \geq C_{q,\sigma} t^{-2/3}.$$

另一方面，我们有 面积$(S, g_t) \leq D_q t^{\frac{1}{3}} + 2\pi|\chi(S)|$（见 [OT21，引理 3。4]），其中 D_q是一个只依赖于 q 和 $\chi(S)$ 的正常数，且其为 S的欧拉示性数。结合方程 (6.2.2) 和方程 (6.5)，并在必要时调整 T_0，我们可以找到一个正常数$C'_{q,\,\sigma}$，使得对于 $t \gg T_0$,

$$\sqrt{G_{g_t}(h_t, h_t)} \geq C'_{q,\sigma} t^{-1}.$$

因此，对于 $T \geq T_0$，我们得到

$$L(\gamma_T) \geq L(\gamma_{T_0}) + C'_{q,\sigma} \int_{T_0}^{T} t^{-1} dt \overset{T \to \infty}{\to} \infty.$$

□

推论 6.13。 定理 $\mathcal{H}_3(Y)$ 中给出的测地线 *6.7* 相对于协方差度量具有无限长度。

Appendix A. Some further estimates for the covariance metric in $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$

本附录汇集了关于布拉施克轨迹 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 中协方差度量的一些估计。首先，一个值得探讨的问题是了解协方差度量 $G(\cdot,\cdot)$ 在 Fuchsian 轨迹$\mathcal{T}(S) \subset \mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$上的行为。给定 $[\sigma] \in \mathcal{T}(S)$，我们知道该度量在 $T_{[\sigma]}\mathcal{T}(S)$ 上限制为 Weil-Petersson度量的一个标量倍；然而，协方差度量 $G(\cdot,\cdot)$ 在 $[\sigma]$ 上沿着横截于 Fuchsian 轨迹 $\mathcal{T}(S)$ 的方向，在 $\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 中的行为仍不清楚。

我们的第一个估计针对与布拉施克度量等价类族相切的方向$\{[g_t]\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$，该族提升到由以下内容给出的曲线 $\{g_t = e^{u_t}\sigma : \ t \geq 0\} \subset \mathcal{M}^B$ 由方程 (6.1) 描述，因此 σ 是等价类 $[\sigma]$中的一个代表。这些向量代表丛 $Q_3(S)/S^1$的纤维方向上的切向量。

命题 A.1。 设 σ 是 S上的双曲度量。固定一个全纯三次微分 q，其相对于$\widehat{}$所对应的复结构以及一个定向，σ 设 $h_0 \in T_{[g_0]}\mathcal{M}_-/\mathcal{D}_0$ 是一个可提升到 h_0 的向量：$= \partial_t (g_t)\,|_{t=0} \in T_\sigma \mathcal{M}_-$，其中 $\{g_t\}_{t\geq 0}$ 是方程 （6.1）的解，且 $g_0 = \sigma$。则

$$G_{[\sigma]}(\widehat{h}_0, \widehat{h}_0) \geq \frac{1}{\pi^2 |\chi(S)|^2} \|q\|_\sigma^4.$$

其中 $\|q\|_\sigma$ 是 L^2 相对于内积 （5.15）的范数，而 χ（S）是欧拉示性数。

证明。 根据引理 4.9，计算可以提升到 $\mathcal{M}^B$，因此我们只需估计 G_σ（h_0，h_0）。回顾

$$G_\sigma(h_0, h_0) = \mathrm{Var}(P_\sigma(\pi_2^* h_0), \mu_\sigma^L) + \langle \pi_2^* h_0, 1 \rangle^2_{L^2(T^1 S_\sigma)}.$$

第一部分等于 $\langle \Pi^\sigma \pi_2^* h_0,\ \pi_2^* h_0 \rangle$，它是非负的（定理 4.2）。我们估计第二部分。注意，$g_t = e^{u_t}\sigma$ 并且 $h_0 = \dot{u}_0 \sigma$。由方程 6.4，可得

$$(\Delta_\sigma - 2)\dot{u}_0 = -4|q|^2_\sigma,$$

so

$$\langle \pi_2^* h_0, 1 \rangle_{L^2(T^1 S_\sigma)} = \int_{T^1 S_\sigma} \pi_0^*\big(-4(\Delta_\sigma - 2)^{-1}\big(|q|^2_\sigma\big)\big)\pi_2^* \sigma d\mu_\sigma^L = \int_{T^1 S_\sigma} \pi_0^*\big(-4(\Delta_\sigma - 2)^{-1}\big(|q|^2_\sigma\big)\big) d\mu_\sigma^L.$$

Sin由于 $-(\Delta_\sigma-2)^{-1}$ 是自伴正算子，且 $-(\Delta_\sigma-2)^{-1}(1)=\frac{1}{2}$，我们得到

$$\langle\pi_2^*h_0,1\rangle_{L^2(T^1S_\sigma)}=\frac{1}{\mathrm{Area}(S,\sigma)}\int_S 4|q|_\sigma^2\big(-(\Delta_\sigma-2)^{-1}(1)\big)dv_\sigma=\frac{1}{\pi|\chi(S)|}\int_S|q|_\sigma^2dv_\sigma=\frac{1}{\pi|\chi(S)|}\|q\|_\sigma^2,$$

利用高斯–博内定理，即可得出结论。 □

不等 式可以加强为严格不等式，这是由以下两个引理得到的 s.

引理 A.2. 假设 $g\in\mathcal{M}_-$ 和 $h\in S_2(S)$ 与 g共形，则

$$\langle\Pi^g\pi_2^*h,\pi_2^*h\rangle=0$$

当且仅当 $h=Cg$，其中 C 是一个常数。

证明。设 $h=fg$，其中 $f\in C^\infty(S)$。只需证明

$$\langle\Pi^g\pi_0^*f,\pi_0^*f\rangle=0$$

等价于 f 是一个常值函数。其证明与 GL21 引理 4.6] 的证明类似。令 $\Lambda=(1-\Delta_G)^{1/2}$，其中 Δ_G 是关于 T^1S_g 上 Sasaki度量的（负）拉普拉斯–贝尔特拉米算子；那么对于任意的 $m,s\in\mathbb{R}$, $\Lambda^s:\ \mathcal{H}^m(T^1S_g)\to\mathcal{H}^{m-s}(T^1S_g)$ 是一个可逆有界自伴算子。因此，根据定理 4.2，复合映射 $\Lambda^{-2s}\Pi^g:\ \mathcal{H}^s(T^1S_g)\to\mathcal{H}^s(T^1S_g)$ 对于 $s>0$ 是有界的。此外，由方程 (4.1) 和定理 4.2，我们知道，

$$\langle\Lambda^{-2s}\Pi^g\pi_0^*f',\pi_0^*f'\rangle_{\mathcal{H}^s(T^1S_g)}=\langle\Pi^g\pi_0^*f',\pi_0^*f'\rangle_{L^2(T^1S_g)}\geq 0\qquad\text{for all } f'\in\mathcal{H}^s(S),$$

因此， $\Lambda^{-2s}\Pi^g$ 在 $\mathcal{H}^s(T^1S_g)$上也为正。由此可知， $\Lambda^{-2s}\Pi^g$ 在 $\mathcal{H}^s(T^1S_g)$上是自伴的，因此它有一个自伴平方根 R ，该平方根在 $\mathcal{H}^s(T^1S_g)$上有界，并满足性质 $\Lambda^{2s}\Pi^g=R^2=R^*R$。于是，

$$0=\langle\Pi^g\pi_0^*f,\pi_0^*f\rangle_{L^2(T^1S_g)}=\langle\Lambda^{-2s}\Pi^g\pi_0^*f,\pi_0^*f\rangle_{\mathcal{H}^s(T^1S_g)}=\|R\pi_0^*f\|^2_{\mathcal{H}^s(T^1S_g)}$$

因此，我们的假设意味着 $\Pi^g\pi_0^*f=\Pi^g(P_g(\pi_0^*f))=0$（回顾一下， $\Pi^g1=0$和 $P_g(\pi_0^*f)=\pi_0^*f-\langle\pi_0^*f,1\rangle_{L^2(T^1S_g)}$）。根据定理 4.2，存在 $w\in\mathcal{H}^s(T^1S_g)$使得 $X^gw=P_g(\pi_0^*f)$，其中 X^g是 T^1S_g上的测地向量场。因此，对于流 X^g的每一条闭轨道 c ，将其参数化为$\phi_\cdot(z):\ [0,L(c)]\to T^1S_g$,

$$0=\frac{1}{L(c)}\int_0^{L(c)}(P_g(\pi_0^*f))(\phi_t(z))\mathrm{d}t=\frac{1}{L(c)}\int_0^{L(c)}\pi_0^*\big(f-\langle f,1\rangle_{L^2_g(S)}\big)(\phi_t(z))\mathrm{d}t=I_0^g\big(f-\langle f,1\rangle_{L^2_g(S)}\big)(c).$$

根据负曲率度量的 X射线变换的单射性（[GK80]），即 $f=\langle f,1\rangle_{L^2_g(S)}$，为常数。□

引理 A.3。 方程 $\dot u_t$ 的解（6.2）

$$\Delta_\sigma\dot u_t=\left(2e^{u_t}+8e^{-2u_t}\frac{t|q|^2}{\sigma^3}\right)\dot u_t-4e^{-2u_t}\frac{|q|^2}{\sigma^3}$$

对于任何 $t\geq 0$ 都不可能为常数，除非 $q\equiv 0$。

证明。我们通过反证法证明该结论。假设 $\dot u_t=c_t$ 且 $q\not\equiv 0$。回顾一下， $g_t=e^{u_t}\sigma$ 满足

$$\Delta_{g_t}\dot u_t=\left(2+8t\frac{|q|^2}{g_t^3}\right)\dot u_t-4\frac{|q|^2}{g_t^3}.$$

由此得到:

$$(4-8tc_t)\frac{|q|^2}{g_t^3}=2c_t\implies\frac{|q|^2}{g_t^3}=\frac{2c_t}{(4-8tc_t)}.$$

对于任何 $t\geq 0$，这都是不可能的，因为 q 非零，而左边仅在 q 的有限个零点处为零，右边却是常数。由此得证。
□

推论 A.4. 固定一个全纯三次微分 q，其对应于双曲度量 σ 所对应的复结构，并取一个定向。假设 $[g_t] \in \mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 提升为方程 $\{g_t\}$ 的解(6.1)，且 $\widehat{h}_t \in T_{[g_t]}\mathcal{M}^B/\mathcal{D}_0$ 提升为 $h_t = \partial_t(g_t)$。那么

$$\langle \Pi^{g_t} \pi_2^* h_t, \pi_2^* h_t \rangle > 0.$$

特别地，这意味着

$$G_{[\sigma]}(\widehat{h}_0, \widehat{h}_0) > \frac{1}{\pi^2 |\chi(S)|^2} \|q\|_\sigma^4.$$

证明。由于 $g_t = e^{u_t}\sigma$ 和 $h_t = \dot{u}_t g_t$，第一个结论由引理 A.2 和引理 A.3 得出。第二个结论是在 $t = 0$ 处结合命题 A.1 的特殊情形。□

人们希望能够得到 $G_{[\sigma]}(\widehat{h}_0, \widehat{h}_0)$（上文提到的）的简洁显式公式。我们以一个由 [GM17] 推出的部分答案结束对这一问题的讨论。了解下面的公式是否能够进一步简化将会很有意义。

命题 A.5。在命题 *A.1* 的相同假设下，有

$$G_{[\sigma]}(\widehat{h}_0, \widehat{h}_0) = \left\langle 4\frac{\Gamma(1/4 - \mathcal{L})\Gamma(1/4 + \mathcal{L})}{\Gamma(3/4 - \mathcal{L})\Gamma(3/4 + \mathcal{L})}(-\Delta_\sigma + 2)^{-1} 4\frac{|q|^2}{\sigma^3}, (-\Delta_\sigma + 2)^{-1} 4\frac{|q|^2}{\sigma^3} \right\rangle_{L^2_\sigma(S)} + \frac{1}{\pi^2 |\chi(S)|^2} \|q\|_\sigma^4,$$

其中，$\Gamma(\cdot,\cdot)$ 是欧拉伽马函数，且 $\mathcal{L} = \frac{i}{2}\sqrt{-\Delta_\sigma(1 - P_0) - 1/4}$，其中 P_0 是到 $\ker \Delta_\sigma$ 上的正交投影算子。

证明。证明直接应用 [GM17，引理 A.1、注 A.2] 并结合命题A.1。□

References

[Ahl60] L. V. Ahlfors. 闭黎曼曲面空间的复解析结构。载于《解析函数》，第 45–66 页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1960年。[Ahl61] L. V. Ahlfors. 关于黎曼曲面 Teichmüller 空间的一些评论。《数学年刊》74:171–191，1961年。[Ahl62] L. V. Ahlfors. Teichmüller 空间的曲率性质。《数学分析杂志》9:161–176，1961/62年。[ALS22] D. Alessandrini、G.-S. Lee 和 F. Schaffhauser. 轨形的 Hitchin 分支。《欧洲数学会杂志》，2022年。[Bar09] D. Baraglia. G2 几何与可积系统。博士论文，牛津大学，英国，2009年。[Ber61] L. Bers. 全纯微分作为模的函数。《美国数学学会公报》67:206–210，1961年。[BR75] R. Bowen 和 D. Ruelle. Axiom A 流的遍历理论。数学发明，29(3):181–202，1975年。[BT08] M. J. Bridgeman 和 E. C. Taylor. Weil-Petersson度量向拟 Fuchsian 空间的扩展。《数学年刊》341(4):927–943，2008年。[Chu76] T. Chu. 模空间中的 Weil-Petersson度量。《中国数学杂志》4(2):29–51，1976年。[Con92] G. Contreras. 双曲流的拓扑熵和度量熵的正则性。《数学杂志》210(1):97–111，1992年。[CK21] D. Corro 和 J.-B. Kordaß. 黎曼度量空间切片存在性的简要综述。载于《世界各地的墨西哥数学家——趋势与最新贡献》，第 775 卷，《当代数学》，第 65–84 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2021年。[CS98] C. B. Croke 和 V. A. Sharafutdinov. 紧致负曲率流形的谱刚性。《拓扑学》37(6):1265–1273，1998年。[DL20] S. Dai 和 Q. Li. 关于循环 Higgs 丛。《数学年刊》376(3-4):1225–1260，2020年。[Dai23] X. Dai. Fuchsian 轨迹处压力度量的测地坐标。《几何与拓扑》27(4):1391

1478, 2023年。[DW15] D. Dumas 和 M. Wolf。《射影平面中的多项式三次微分与凸多边形》。《几何与泛函分析》，25(6):1734–1798，2015年。[Ebi68] D. G. Ebin。《关于黎曼度量空间》。《美国数学学会公报》，74:1001–1003，1968年。

[Ebi70] D. G. Ebin。《黎曼度量流形》。载于《整体分析》（1968年伯克利纯数学专题讨论会论文集，第XV卷），第11–40页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1970年。[Eva10] L. C. Evans。《偏微分方程》，数学研究生系列第19卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，第二版，2010年。[FM12] B. Farb 和 D. Margalit。《映射类群入门》，普林斯顿数学丛书第49卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2012年。[FT84] A. E. Fischer 和 A. J. Tromba。《关于紧黎曼曲面无分歧模空间的结构与维数的纯“黎曼”证明》。《数学年刊》，267(3):311–345，1984年。[Fra66] T. Frankel。《关于 Hurwitz 和 Bochner 的定理》。《数学与力学期刊》，15:373–377，1966年。[GL21] S. Gou¨ezel 和 T. Lefeuvre。《Anosov流形上X射线变换的经典与微局部分析》。《分析与偏微分方程》，14(1):301–322，2021年。[Gui17] C. Guillarmou。《Anosov流的不变分布与X射线变换》。《微分几何期刊》，105(2):177–208，2017年。[GKL21] C. Guillarmou、G. Knieper 和 T. Lefeuvre。《测地线伸长、压力度量与标记长度谱刚性》。《遍历理论与动力系统》：1–49，2021年。[GL19] C. Guillarmou 和 T. Lefeuvre。《Anosov流形的标记长度谱》。《数学年刊》（第2辑），190(1):321–344，2019年。[GM17] C. Guillarmou 和 F. Monard。《负曲率下X射线变换的重建公式》。《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔），67(4):1353–1392，2017年。[GK80] V. Guillemin 和 D. Kazhdan。《关于负曲率二维流形的一些逆谱结果》。《拓扑》，19(3):301–312，1980年。[Ham82] R. S. Hamilton。《Nash-Moser反函数定理》。《美国数学学会公报》（新系列），7(1):65–222，1982年。[Hit87] N. J. Hitchin。《黎曼曲面上的自对偶方程》。《伦敦数学会会刊》（第3辑），55(1):59–126，1987年。[Hit92] N. J. Hitchin。《李群与 Teichm¨uller 空间》。《拓扑》，31(3):449–473，1992年。[Kob95] S. Kobayashi。《微分几何中的变换群》。数学经典。Springer，柏林，1995年。1972年版重印。[Lab07] F. Labourie。《曲面上的平坦射影结构与三次全纯微分》。《纯粹与应用数学季刊》，3(4，特刊：致敬 Grigory Margulis，第1部分):1057–1099，2007年。[Lab08] F. Labourie。《Teichm¨uller 空间上的交比、Anosov表示与能量泛函》。《高等师范学校科学年刊》（第4辑），41(3):437–469，2008年。[LW18] F. Labourie 和 R. Wentworth。《沿 Fuchsian 轨迹的变化》。《高等师范学校科学年刊》（第4辑），51(2):487–547，2018年。[Lan12] S. Lang。《微分几何基础》，数学研究生教材第191卷。Springer，2012年。[Li19] Q. Li。《通过调和映射介绍 Higgs 丛》。《SIGMA：对称性、可积性、几何方法及其应用》，15：论文编号035，30页，2019年。[Liv04] C. Liverani。《关于接触Anosov流》。《数学年刊》（第2辑），159(3):1275–1312，2004年。[Lof99] J. C. Loftin。《仿射微分几何在 RP(2)曲面中的应用》。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，1999年。博士论文——哈佛大学。[Lof01] J. C. Loftin。《仿射球面与凸 $\mathbb{RP}^n$-流形》。《美国数学杂志》，123(2):255–274，2001年。[Lof07] J. C. Loftin。《平坦度量、三次微分与射影整体单值化的极限》。《几何专论》，128:97–106，2007年。[Lof10] J. C. Loftin。《仿射球面综述》。载于《几何分析手册》第2册，第13卷，《高等数学讲义》（ALM），第161–191页。国际出版社，萨默维尔，马萨诸塞州，2010年。[MW02] H. Masur 和 M. Wolf。《Weil-Petersson等距群》。《几何专论》，93:177–190，2002年。[Maz91] R. Mazzeo。《微分边算子的椭圆理论 I》。《通讯：偏微分方程》，16(10):1615–1664，1991年。[McM08] C. T. McMullen。《热力学、维数与 Weil-Petersson度量》。《数学发明》，173(2):365–425，2008年。[NS94] K. Nomizu 和 T. Sasaki。《仿射微分几何》，剑桥数学论丛第111卷。剑桥大学出版社，剑桥，1994年。仿射浸入的几何。

[OT21] C. Ouyang 和 A. Tamburelli. 布拉施克度量的极限. Duke数学期刊, 170(8):1683–1722, 2021年.[PP90] W. Parry 和 M. Pollicott. ζ函数与双曲动力学的周期轨道结构. Ast ´erisque, (187-188):268, 1990年.[PSU23] G. P. Paternain, M. Salo 和 G. Uhlmann. 几何逆问题：侧重于二维，剑桥高等数学研究丛书第204卷. 剑桥：剑桥大学出版社，2023.[Pol94] M. Pollicott. Anosov流与测地流的拓扑熵导数. 微分几何期刊, 39(3):457–489, 1994 年 .[SS22] N. Sagman 和 P. Smillie. 非紧型对称空间中的不稳定极小曲面 . arXiv 电子预印本, arXiv:2208.04885, 2022年8月.[Sch91] B.-W. Schulze. 奇异流形上的伪微分算子，数学应用研究丛书第24卷. 阿姆斯特丹等：North-Holland, 1991年.[SA01] M. Shubin 和 S. Andersson. 伪微分算子与谱理论. 伪微分算子与谱理论. Springer Berlin Heidelberg, 2001年.[Sim88] C. T. Simpson. 利用杨-米尔斯理论构造霍奇结构的变分及其在一致化中的应用. 美国数学会期刊, 1(4):867–918, 1988年.[Tei43] O. Teichm¨uller. 闭定向黎曼曲面上极值拟共形映射的确定. Abh. Preuss. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl., 1943(4):42, 1943年.[Tho17] N. Tholozan. Hilbert度量的体积熵与射入 $PSL(3,\mathbb{R})$ 的Hitchin表示的长度谱. Duke数学期刊, 166(7):1377–1403, 2017年.[Thu] W. P. Thurston. 三维流形的几何与拓扑.[Tro92] A. J. Tromba. 黎曼几何中的Teichmüller理论. 苏黎世联邦理工学院数学讲座. Birkhäuser Verlag, 巴塞尔, 1992年. 讲义由Jochen Denzler整理.[Wan91] C. P. Wang. 实数中的若干完备双曲仿射二维球面实例. 载于《整体微分几何与整体分析》（柏林，1990年）. 第1481卷，《数学讲义》. 第271–280页. Springer, 柏林, 1991年.[Wie18] A. Wienhard. 高阶Teichmüller理论导论. 载于《2018年里约热内卢国际数学家大会论文集》，第二卷：特邀报告，第1013–1039页. 世界科学出版社, 哈肯萨克，新泽西州, 2018年.[Wol89] M. Wolf. 调和映射的Teichmüller理论. 微分几何期刊, 29(2):449–479, 1989年.[Wol75] S. Wolpert. Teichmüller空间上Weil-Petersson度量的不完备性. 太平洋数学期刊, 61(2):573–577, 1975年.[Wol86] S. A. Wolpert. 曲线模空间的陈形式与黎曼张量. 数学发明, 85(1):119–145, 1986年.87] S. A. Wolpert. 测地长度函数与Nielsen问题. 微分几何期刊, 25(2):275–296, 1987年。

Xian Dai
Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
e-mail: xian.dai@ruhr-uni-bochum.de

Nikolas EptaminitakisInstitut für Differentialgeometrie
Leibniz Universität HannoverWelfengarten 1,
30167 Hannover, Germany,
e-mail: nikolaos.eptaminitakis@math.uni-hannover.de