arXiv:2301.05375v1 [math.GT] 13 Jan 2023

曲面上圆丛的映射类群

LEI CHEN 和 BENA TSHISHIKU

Abstract. 本文研究三维流形 X 的映射类群 Mod(X) 的代数结构；这些流形可纤维化为以曲面 $S^1 \to X \to S_g$为底空间的圆丛。存在一个正合列 $1 \to H^1(S_g) \to \text{Mod}(X) \to \text{Mod}(S_g) \to 1$。我们将其与 Birman 正合列联系起来，并确定该正合列何时分裂。

1. Introduction

对于 $g \geq 1$，令 S_g 表示亏格为 g的闭定向曲面；对于 $k \in \mathbb{Z}$，令 X_g^k表示可纤维化的闭三维流形

$$S^1 \to X_g^k \to S_g$$

其纤维为欧拉数 k的定向圆丛。假设 $(g,k) \neq (1,0)$，映射类群 $\text{Mod}(X_g^k) := \pi_0\big(\text{Homeo}^+(X_g^k)\big)$ 构成一个短正合列

$$1 \to H^1(S_g;\mathbb{Z}) \to \text{Mod}(X_g^k) \to \text{Mod}(S_g) \to 1. \tag{1}$$

本文受以下问题的启发。

问题 1.1。对于哪些 g，k 式 (1) 中的扩张是分裂的?

有趣的是，当 $k = 2-2g$ 时，该扩张确实分裂；此时 X_g^k是单位切丛 US_g。事实上，Mod(S_g) 在 US_g 上有一个通过同胚给出的自然作用，取同伦类后便得到式 (1) 的一个分裂。对于 $g \geq 2$，这一作用来自带 puncture 的映射类群 Mod($S_{g,\,1}$) 对双曲空间 $\mathbb{H}^2$ 边界上的三元点组的作用。这一构造可追溯至 Nielsen 的工作。参见 [FM12, §5.5.4, §8.2.6] 以及 [Sou10, §1]。

一般而言，问题 1.1 可归结为一个关于群上同调的问题。扩张 (1) 分裂，当且仅当其欧拉类 $eu_k \in H^2\big(\text{Mod}(S_g);\, H^1(S_g;\mathbb{Z})\big)$ 消失 [Bro82, §IV.3]。这里的系数通过 Mod(S_g) 在 $H^1(S_g;\mathbb{Z})$ 上的自然作用进行扭曲。然而，文献中似乎尚未出现对 $H^2\big(\text{Mod}(S_g);\, H^1(S_g;\mathbb{Z})\big)$ 的计算。

扩张 (1) 与 Birman 正合列有关

$$1 \to \pi_1(S_g) \to \text{Mod}(S_{g,1}) \to \text{Mod}(S_g) \to 1.$$

对换位子子群 $\pi' \equiv [\pi_1(S_g)\ \pi_1(S_g)]$，取商后，我们得到以下扩张

$$1 \to H_1(S_g) \to \text{Mod}(S_{g,1})/\pi' \to \text{Mod}(S_g) \to 1. \tag{2}$$

我们的主要结果关联了正合列 (1) 和 (2)。

Date: 2023年1月16日。

定理 A。 固定 $g \geq 1$ 和 $k \in \mathbb{Z}$。假设 $(g,k) \neq (1,0)$。存在一个从短正合列 (1)到短正合列 (2) 的映射

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & H_1(S_g) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(S_{g,1})/\pi' & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(S_g) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle k\delta} & & \downarrow & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & H^1(S_g;\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(X_g^k) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(S_g) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

同态 $k\delta$ 是 *Poincar´e* 对偶同构 δ 与乘以 k的映射复合而成。特别地，当 $k = 1$时，正合列 (1) 和 (2) 同构。

定理 A 蕴含，对于固定的g，扩张 (1) 的欧拉类满足 $eu_k = k\, eu_1$ 。接下来，我们确定由 eu_1 在 $H^2\big(\mathrm{Mod}(S_g);\, H^1(S_g;\mathbb{Z})\big)$ 中生成的子群。

定理 1.2. 固定 $g \geq 1$，并令 eu_1 为扩张 (1) 的欧拉类。那么， eu_1在 $H^2\big(\mathrm{Mod}(S_g); H_1(S_g;\, \mathbb{Z})\big)$ 中的阶为 $2g-2$。此外，若 $g \geq 8$，则 eu_1 生成此群，即

$$H^2\big(\mathrm{Mod}(S_g); H^1(S_g;\mathbb{Z})\big) \cong \mathbb{Z}/(2g-2)\mathbb{Z}.$$

结合定理 A 和定理 1.2，我们得到问题 1.1 的如下答案。

推论 1.3. 对于 $g \geq 2$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，扩张 (1) 分裂，当且仅当 k 可被整除$2g-2$。对于 $g = 1$，该扩张对每个 k 都分裂。

当分裂存在时，在 $H^1(S_g;\mathbb{Z})$ 对 $\mathrm{Mod}(X_g^k)$ 的共轭作用下（视为等价）的不同分裂，由 $H^1\big(\mathrm{Mod}(S_g); H^1(S_g;\, \mathbb{Z})\big)$[Bro82, 第 IV 章，命题 2.3] 中的元素参数化。该群为零 $g \geq 1$ [Mor85, 命题 4.1], ，因此分裂若存在便是唯一的。

与尼尔森实现的联系。 我们可以不问问题 1.1，而改为询问复合满射是否存在分裂：

$$\mathrm{Homeo}(X_g^k) \to \mathrm{Mod}(X_g^k) \to \mathrm{Mod}(S_g).$$

这是尼尔森实现问题的一个实例。当然，如果 $\mathrm{Mod}(X_g^k) \to \mathrm{Mod}(S_g)$ 不分裂，那么 $\mathrm{Homeo}(X_g^k) \to \mathrm{Mod}(S_g)$ 也不分裂，而推论 1.3 给出了这样的例子。由于 $\mathrm{Mod}(S_g)$ 在 US_g 上有自然作用，满射 $\mathrm{Homeo}(X_g^k) \to \mathrm{Mod}(S_g)$ 对 $k = \pm(2g-2)$ 确实分裂。这多少有些出人意料，因为映射类群很少能实现为曲面同胚群 [Mar07, Che19, CS22]。我们想知道这一分裂是否唯一，或者对于其他可被 $2g-2$ 整除的 k 值（例如 $k = 0$）是否也存在分裂。我们计划在未来的论文中研究这一问题。

前人的工作与证明技巧。Waldhausen [Wal68, §7]证明了群$\pi_0\big(\mathrm{Homeo}(X_g^k)\big)$ 同构于外自同构群 $\mathrm{Out}\,(\pi_1(X_g^k))$。由此，正合列 (1) 可根据 Conner–Raymond [CR77] 的工作和 Dehn–Nielsen–Baer 定理推导得出；或者参见 McCullough [McC91, §3]。Dehn–Nielsen–Baer 定理在定理 A 中也起着核心作用，因为它使我们能够在拓扑与群论之间来回转换。定理 A 在 §3 中的证明兼有这两方面的内容。

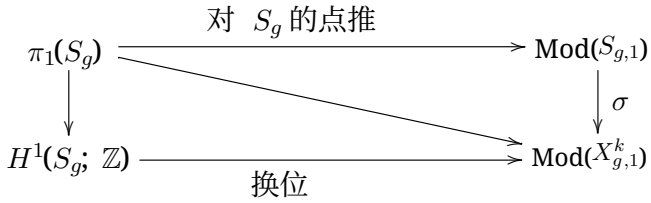
为证明定理 A，我们考虑问题 1.1 的一个版本，其中 X_g^k 和 S_g 都被挖孔。对于挖孔流形，与 (1) 类似，存在一个短正合列

$$1 \to H^1(S_g;\mathbb{Z}) \to \mathrm{Mod}(X_{g,1}^k) \to \mathrm{Mod}(S_{g,1}) \to 1,$$

并且我们构造了一个分裂

$$\sigma : \mathrm{Mod}(S_{g,1}) \to \mathrm{Mod}(X_{g,1}^k).$$

参见推论 3.1。我们证明定理 A 的一个关键部分，是确定点推动子群 $\pi_1(S_g)$ $\mathrm{Mod}(S_{g,\,1})$ 在 σ 下的像。为此，我们联系以下交换图中出现的三个自然的曲面群表示 $\pi_1(S_g)$ $\mathrm{Mod}(X_{g,\,1}^k)$，其中对角映射是对 X_g^k 的点推（这不是交换图）。



精确陈述见命题 3.4。

为推出推论 1.3，我们使用谱序列论证证明，eu_1生成了 $H^2\big(\mathrm{Mod}(S_g);\,H^1(S_g;\mathbb{Z})\big)$ 的一个子群，该子群同构于 $\mathbb{Z}/(2g-2)\mathbb{Z}$。另一项谱序列计算证明，当$g$ 较大时，eu_1 生成 $H^2\big(\mathrm{Mod}(S_g);\,H^1(S_g;\mathbb{Z})\big)$。这些计算用到了若干已知的计算结果，包括 Morita[Mor85] 的工作。

章节安排。 在 §2 中，我们汇集了关于流形 X_g^k 及其映射类群所需的结果，其中包括 Waldhausen 的工作。定理 A 在 §3 中证明；这一节是本文的核心。在 §4 中，我们进行两项谱序列计算，以证明定理 1.2。

致谢。 感谢 B. Farb 分享参考文献 [McC91]，并感谢 D. Margalit 对论文草稿提出意见。作者获得了 NSF 项目资助 DMS- 2203178、DMS-2104346 和 DMS-2005409。

2. Circle bundles over surfaces

在这里，我们回顾一些关于曲面上的圆丛的结果，这些结果将在后续章节中用到。

2.1. 分类。

我们所说的定向圆丛，是指一个纤维丛

$$S^1 \to E \to B$$

其结构群为 $\mathrm{Homeo}^+(S^1)$，即 S^1 的保向同胚群。旋转群 SO(2) 到 $\mathrm{Homeo}^+(S^1)$ 的包含映射是同伦等价，因此圆丛与秩二实向量丛一一对应。分类空间 $B\,\mathrm{SO}(2)$ 与 $\mathbb{C}P^\infty$ 同伦等价，而后者是一个 Eilenberg–Maclane 空间$K(\mathbb{Z},\,2)$。因此，每个圆丛在同构意义下都由其欧拉类 $eu(E) \in H^2(B;\mathbb{Z})$ 唯一确定；该欧拉类是丛存在截面的首要障碍。

当 $B = S_g$ 是闭合定向曲面时， $H^2(S_g;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$，我们可以谈论欧拉数。我们用 X_g^k 表示圆丛的全空间

$$S^1 \to X_g^k \to S_g$$

其欧拉数为 k。例如，对于单位切丛 $eu(US_g) = 2-2g$ （欧拉示性数），因此 $US_g \cong X_g^{2-2g}$。我们还注意到， X_g^k 和 X_g^{-k} 是同胚的三维流形，因为圆丛在 S_g 上的欧拉数符号取决于 S_g 的定向选择。

2.2. **基本群 $\pi_1(X_g^k)$ 及其自同构**。 由纤维化的长正合列可得正合列

$$1 \to \mathbb{Z} \to \pi_1(X_g^k) \to \pi_1(S_g) \to 1.$$

群 $\pi_1(X_g^k)$ 有一个表示

$$\pi_1(X_g^k) = \left\langle A_1, B_1, \dots, A_g, B_g, z \mid z \text{ central}, [A_1, B_1] \cdots [A_g, B_g] = z^k \right\rangle. \tag{3}$$

利用这一点可得，只要 $(g,k) \neq (1,0)$， $\langle z \rangle \cong \mathbb{Z}$ 就是 $\pi_1(X_g^k)$ 的中心。当 $g \geq 2$ 时，这可由群 $\pi_1(S_g)$ 的中心平凡这一事实推出； $g = 1$ 的情形可直接处理。

根据对中心的这一计算， $\pi_1(X_g^k)$的任意自同构都会诱导出$\langle z \rangle \cong \mathbb{Z}$ 的一个自同构，并下降为 $\pi_1(S_g)$的一个自同构。后者给出一个同态

$$\mathrm{Aut}\left(\pi_1(X_g^k)\right) \to \mathrm{Aut}\left(\pi_1(S_g)\right)$$

该同态在内自同构群之间的限制是一个同构

$$\mathrm{Inn}\left(\pi_1(X_g^k)\right) \cong \pi_1(S_g) \cong \mathrm{Inn}\left(\pi_1(S_g)\right) \tag{4}$$

因此下降为一个同态

$$\mathrm{Out}\left(\pi_1(X_g^k)\right) \to \mathrm{Out}\left(\pi_1(S_g)\right). \tag{5}$$

定向。定义如下对象将很方便

$$\mathcal{AUT}\left(\pi_1(S_g)\right) < \mathrm{Aut}\left(\pi_1(S_g)\right)$$

为在 $H_2(\pi_1(S_g);\mathbb{Z})$上作用平凡的子群 $\cong \mathbb{Z}$ （即“保定向”子群）。我们定义

$$\mathcal{AUT}\left(\pi_1(X_g^k)\right) < \mathrm{Aut}\left(\pi_1(X_g^k)\right)$$

为投影到 $\mathcal{AUT}\left(\pi_1(S_g)\right)$ 且在中心 $\langle z \rangle \cong \mathbb{Z}$上作用平凡的自同构所成的群。特别地， $\mathcal{AUT}\left(\pi_1(X_g^k)\right)$ 在$\mathrm{Aut}\left(\pi_1(X_g^k)\right)$中的指数为4。

这些保定向子群包含（相应的）内自同构群，我们将商群记为 $\mathcal{OUT}\left(\pi_1(X_g^k)\right)$ 和 $\mathcal{OUT}\left(\pi_1(S_g)\right)$。

2.3. 映射类群 $\mathbf{Mod}(X_g^k)$。 固定 $g \geq 1$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，并假设 $(g,k) \neq (1,0)$。令 $\mathrm{Homeo}^+(X_g^k)$ 表示这样一个同胚群：其在 $\mathrm{Out}\left(\pi_1(X_g^k)\right)$ 中的像包含于 $\mathcal{OUT}\left(\pi_1(S_g)\right)$。定义

$$\mathrm{Mod}(X_g^k) := \pi_0\big(\mathrm{Homeo}^+(X_g^k)\big).$$

Waldhausen [Wal68, 推论 7.5]证明，自然同态

$$\pi_0\big(\mathrm{Homeo}(X_g^k)\big) \to \mathrm{Out}\left(\pi_1(X_g^k)\right)$$

是一个同构。于是，根据定义，该同态限制为一个同构 $\mathbf{Mod}(X_g^k) \cong \mathcal{OUT}\left(\pi_1(X_g^k)\right)$。Waldhausen 还证明，$\pi_0\,\mathbf{Homeo}(X_g^k)$ 同构于保纤维同胚群对那些可通过保纤维同伦同伦至恒等映射的同胚取商所得的群；参见 [Wal68, 推论 7.5] 后的注记。因此，存在一个同态

$$\mathrm{Mod}(X_g^k) \to \mathrm{Mod}(S_g). \tag{6}$$

总之，我们得到以下交换图，它关联了映射 (5) 和 (6)。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mod}(X_g^k) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(S_g) \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ \mathcal{OUT}\left(\pi_1(X_g^k)\right) & \longrightarrow & \mathcal{OUT}\left(\pi_1(S_g)\right) \end{array} \tag{7}$$

根据德恩–尼尔森–贝尔定理 [FM12, 定理 8.1]，右侧的竖直映射是一个同构。此外，根据 Conner–Raymond [CR77, 定理 8]，存在一个短正合列

$$1 \to \mathrm{Hom}(\pi_1(S_g), \mathbb{Z}) \to \mathcal{OUT}\left(\pi_1(X_g^k)\right) \to \mathcal{OUT}\left(\pi_1(S_g)\right) \to 1. \tag{8}$$

这就证明了引言中的短正合列 (1)。我们将在下文的推论 3.1 中具体推导这一正合列。

3. Relating $\mathbf{Mod}(X_g^k)$ to the Birman exact sequence

本节中，我们证明定理 A。为了构造定理 A 中短正合列之间的映射，我们的主要任务是先定义一个同态 $\mathbf{Mod}(S_{g,\,1}) \to \mathbf{Mod}(X_g^k)$，然后证明其核是 $\pi_1(S_g)$ <$\mathbf{Mod}(S_{g,\,1})$ 的换位子子群（点推动子群）。我们将在 §3.1 和 §3.2 中完成这项工作。

3.1. 一个同态 $\Psi : \mathbf{Mod}(S_{g,\,1}) \to \mathbf{Mod}(X_g^k)$. 固定一个基点 $* \in S_g$，并令 $S_{g,\,1} = S_g \backslash \{*\}$。根据德恩–尼尔森–贝尔定理，$\mathbf{Mod}(S_{g,\,1})$ 同构于 $\mathbf{Out}^*(F_{2g})$，其中 F_{2g} 是秩为 $2g$ 的自由群，而 $\mathbf{Out}^*(F_{2g}) < \mathbf{Out}(F_{2g})$ 是保持与 $S_{g,\,1}$ 中绕尖点的曲线的自由同伦类相对应的共轭类的子群。我们将 Ψ 构造为以下复合

$$\Psi:\ \mathbf{Mod}(S_{g,\,1}) \cong \text{外自同构群}^*(F_{2g}) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{AUT}\left(\pi_1(X_g^k)\right) \to \mathcal{OUT}\left(\pi_1(X_g^k)\right) \cong \mathbf{Mod}(X_g^k)\text{。} \tag{9}$$

为定义 σ，取生成集 α_1，β_1、……、α_g，β_g 使得 $c = \prod_{i=1}^{g}[\alpha_i, \beta_i]$ 表示绕穿孔的曲线的共轭类。令

$$\iota : F_{2g} \to \pi_1(X_g^k) \tag{10}$$

是由 $\alpha_i \mapsto A_i$ 和 $\beta_i \mapsto B_i$ 定义的同态。给定 $f \in$ 外自同构群$^*(F_{2g})$，固定一个自同构 $f:\ F_{2g} \to F_{2g}$，使其表示 f，并假设 $f(c) = c$（这总是可以

通过将任意提升与 F_{2g}的一个内自同构复合来实现）。接下来，我们在 $\pi_1(X_g^k)$的生成元上定义$\sigma(f)$，如下：

$$\sigma(f)(A_i) = \iota\tilde{f}(\alpha_i),\ \ \sigma(f)(B_i) = \iota\tilde{f}(\beta_i),\ \ \sigma(f)(z) = z. \tag{11}$$

为了证明 $\sigma(f)$ 可扩张为 $\pi_1(X_g^k)$ 的一个同态，我们检查关系$[A_1, B_1]\cdots[A_g, B_g] = z^k$ 在 $\sigma(f)$ 下是否保持不变：

$$\prod_i [\sigma(f)(A_i), \sigma(f)(B_i)] = \prod_i [\iota\tilde{f}(\alpha_i), \iota\tilde{f}(\beta_i)] = \iota(c) = z^k = \sigma(f)(z^k).$$

~第二个等式利用了这样一个事实：$f(c) = c$。映射 $\sigma(f)$ 与 ~所选取的 f 无关，因为不同的 f 只相差一个由 c 的幂所作的共轭（因为 c 在 F_{2g} 中的中心化子是循环子群 $\langle c\rangle$）[1]，并且 $\iota(c) = z^k$ 在$\pi_1(X_g^k)$中是中心元。同态 $\sigma(f)$：$\pi_1(X_g^k) \to \pi_1(X_g^k)$ 是一个自同构，且根据定义属于$\mathcal{AUT}\left(\pi_1(X_g^k)\right)$。此外，$f \mapsto \sigma(f)$ 是一个同态，利用如下观察即可轻松验证：若 $w = \iota w'$，则 $\sigma(f)(w) = \iota f(w')$。

将 σ 与 $\mathcal{AUT} \to \mathcal{OUT}$ 合成，即得到所需的同态 Ψ。作为这一构造的推论，我们证明了以下结论。

推论 3.1。固定 $g \geq 1$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，并假设 $(g,k) \neq (1,0)$。自然映射$\Phi\colon \mathcal{AUT}\left(\pi_1(X_g^k)\right) \to \mathcal{AUT}\left(\pi_1(S_g)\right)$（见 §2.2）构成一个正合列

$$1 \to \mathrm{Hom}(\pi_1(S_g), \mathbb{Z}) \to \mathcal{AUT}\left(\pi_1(X_g^k)\right) \xrightarrow{\Phi} \mathcal{AUT}\left(\pi_1(S_g)\right) \to 1, \tag{12}$$

并且该正合列分裂。

证明。首先计算 Φ 的核。利用 (3) 中 $\pi_1(X_g^k)$ 的表示，若$f \in \ker(\Phi)$，则

$$f(A_i) = A_i z^{m_i} \quad \text{and} \quad f(B_i) = B_i z^{n_i}$$

对于某些 $m_1, n_1, \ldots, m_g, n_g \in \mathbb{Z}$。映射 $a_i \mapsto m_i$, $b_i \mapsto n_i$可扩展为同态$\tau(f)\colon \pi_1(S_g) \to \mathbb{Z}$。容易验证，由 $f \mapsto \tau(f)$ 定义的映射 $\ker(\Phi) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(S_g), \mathbb{Z})$ 是一个同构。

上面定义的同态 σ 表明，Φ 是一个裂满射。注意，$\mathrm{Mod}(S_g, *) \cong \mathrm{Mod}(S_g \setminus \{*\})$（基点与穿孔），因此根据德恩–尼尔森–贝尔，有一个同构 $\mathcal{AUT}\left(\pi_1(S_g)\right) \cong$ 外自同构群 $^*(F_{2g})$，我们利用这个同构将 σ 视为 Φ 的一个分裂。□

注 3.2。我们将 $\ker(\Phi) \cong H^1(S_g; \mathbb{Z})$ 中的元素称为换位。

注 3.3. 同态 Ψ 可在拓扑层面按如下方式构造。固定$S_{g,1}$ 上穿孔处的一个正则邻域 D（因此 D 是一个一次穿孔圆盘）。给定一个映射类 $f \in \mathrm{Mod}(S_{g,1})$，选取一个代表同胚 $\mathfrak{f}$。不失一般性，可以假设 $\mathfrak{f}$ 在 D上是恒等映射。丛 $X_g^k \to S_g$ 可在 $S \setminus D$ 上平凡化（因为分类空间 $B\,\mathrm{SO}(2)$是单连通的）。固定 $S \setminus D$上的一个平凡化 $(S \setminus D) \times S^1$，我们将 $\mathfrak{f}$ 提升为乘积同胚 $\mathfrak{f} \times \mathrm{id}_{S^1}$。这个同胚在边界 $\partial(S \setminus D) \times S^1$上是恒等映射，因此可以用恒等映射延拓，从而得到 X_g^k的一个同胚 $\tilde{\mathfrak{f}}$。将 $f \in \mathrm{Mod}(S_{g,1})$映射到

[1]注意，中心化子同构于 $\mathbb{Z}$，并且包含 $\langle c\rangle$。只有当对某些 $u \in F_{2g}$ 和 $i \geq 2$ 而言 $c = u^i$ 时，它才会更大。反设对于 $i \geq 2$ 有 $c = u^i$，那么 u 是循环约化的，因为 c 也是如此。这意味着 u 是 $c = \prod[\alpha_i, \beta_i]$ 的子词，这是荒谬的。

同伦类 $\left[\tilde{\mathfrak{f}}\right] \in \mathrm{Mod}(X_g^k)$是同态 Ψ的拓扑版本。注意，同伦类 $[\mathfrak{f}]$ 仅在相差绕 ∂D 的德恩扭转时才确定，其中 ∂D 是绕穿孔的一条环路。这类似于定义σ时遇到的歧义，而这种歧义最终不会影响 Ψ的定义。

推论 3.1 与等式 (4) 合起来给出了外自同构群的短正合列 (8)。

警告。 短正合列 (12) 的分裂并不意味着短正合列 (8) 分裂。事实上，我们将证明后一个正合列并不总是分裂（推论 1.3）。微妙之处在于，内自同构群 $\mathrm{Inn}\left(\pi_1(X_g^k)\right) \cong \pi_1(S_g)$ 与 $\pi_1(S_g) \cong \mathrm{Inn}\left(\pi_1(S_g)\right) < \mathrm{Aut}\left(\pi_1(S_g)\right)$ 在截面 σ 下的像并不相同。下文的命题 3.4 将说明它们之间的确切关系。

3.2. **的核：** Ψ **：** $\mathbf{Mod}(S_{g,\,1}) \to \mathbf{Mod}(X_g^k)$。注意， Ψ 的核包含在点推动子群 $\pi_1(S_g) < \mathrm{Mod}(S_{g,\,1})$ 中。这是因为 Ψ 与自然映射 $\mathrm{Mod}(X_g^k) \to \mathrm{Mod}(S_g)$ 复合后，得到自然映射 $\mathrm{Mod}(S_{g,\,1}) \to \mathrm{Mod}(S_g)$，其核就是点推动子群。因此，我们希望理解点推动子群在用于定义 Ψ 的截面 σ 下的像。我们发现，三个曲面群表示之间存在一个简单的关系：

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \pi_1(S_g) \\ & & & & \Big\downarrow \sigma \quad \textit{inner auts of } \pi_1(S_g)\textit{, lifted} \\ \pi_1(S_g) & \xrightarrow[\textit{inner auts of } \pi_1(X_g^k)]{} & \mathcal{AUT}\left(\pi_1(X_g^k)\right) & \xleftarrow[\textit{transvections}]{} & \pi_1(S_g) \end{array}$$

下面的命题 3.4 和推论 3.5 是主要结果。为了陈述命题 3.4，我们需要以下记号。令

$$\delta : H_1(S_g;\mathbb{Z}) \to H^1(S_g;\mathbb{Z})$$

为庞加莱对偶映射，其显式表达式为 $\gamma \mapsto \langle -, \gamma\rangle$，其中

$$\langle -,-\rangle : H_1(S_g;\mathbb{Z}) \times H_1(S_g;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

$\hat{}$ 是代数交形式。我们用 δ 表示复合

$$\hat{\delta} : H_1(S_g;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H^1(S_g;\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathcal{AUT}\left(\pi_1(X_g^k)\right).$$

该映射的显式表达式为 $\hat{}\delta(\gamma)(w) = w \cdot z^{\langle[\bar{w}],\gamma\rangle}$，其中 $\bar{w}$ 是 w 在 $\pi_1(X_g^k) \to \pi_1(S_g)$ 下的像，而 $[\bar{w}] \in H_1(S_g;\mathbb{Z})$ 是相应的同调类。

固定一个基点 $\star \in S_{g,\,1}$。回想一下，我们已经固定了 $\pi_1(S_{g,\,1},\ \star) \cong F_{2g}$ 的一个标准生成集 $\{\alpha_i, \beta_i\}$，使得 $c := \prod_i [\alpha_i, \beta_i]$ 是绕着 $S_{g,\,1} = S_g \setminus \{*\}$ 中的穿孔 $*$ 的环路。定义

$$\Pi : \pi_1(S_{g,1}, \star) \to \pi_1(S_g, *) \tag{13}$$

由 $\gamma \mapsto \epsilon.\gamma.\bar{\epsilon}$ 给出，其中 ϵ 是从 $*$ 到 $\star$ 的一条固定弧。

命题 3.4. 固定 $t \in \pi_1(S_g, *)$，并令 点推(t) $\in$ 映射类群($S_{g,1}$) $\cong$ 外自同构群$^*(F_{2g})$ 为点推动映射类。若 $\tilde{t} \in \pi_1(S_{g,1}, \star)$ 是 t 的任意一个提升（即 $\Pi(\tilde{t}) = t$），则

$$\sigma\big(\mathrm{Push}(t)\big) = C_{\iota\tilde{t}} \circ \hat{\delta}([kt]), \tag{14}$$

这里，C_x 表示由 x进行共轭，而映射 ι： $F_{2g} \to \pi_1(X_g^k)$ 和 σ： 外自同构群$^*(F_{2g}) \to \mathcal{AUT}\left(\pi_1(X_g^k)\right)$ 在(10)和(11)中定义。

作为合理性检验，注意到 $C_{\iota\tilde{t}}$ 不依赖于提升 $\tilde{t}$ 的选择，因为任意两个提升之差都是 $\pi_1(S_{g,1}, \star) = F_{2g}$中 c 的正规闭包里的一个元素，而由任何此类元素进行的共轭在 $\pi_1(X_g^k)$上都是平凡的。

命题 *3.4* 的证明。 只需证明该引理适用于由非分离简单闭曲线所表示的 $t \in \pi_1(S_g, *)$。为此，首先注意到 $\pi_1(S_g, *)$由这些曲线生成。此外，群 $\mathrm{Inn}\left(\pi_1(X_g^k)\right)$ 与 $H^1(S_g; \mathbb{Z})$在自同构群 $\mathrm{Aut}\left(\pi_1(X_g^k)\right)$中交换，因此

$$\left[C_{\iota\tilde{t}_1} \circ \hat{\delta}([t_1])\right] \circ \left[C_{\iota\tilde{t}_2} \circ \hat{\delta}([t_2])\right] = C_{\iota(\tilde{t}_1 * \tilde{t}_2)} \circ \hat{\delta}([t_1 * t_2]).$$

现在假设 $t \in \pi_1(S_g, *)$ 由一条非分离简单闭曲线表示。˜经过一次同伦后，我们可以假设 t 包含 ϵ 作为一条子弧。按图 1 所示选择 $\tilde{t}$ 。

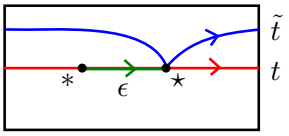


FIGURE 1.表示 $t \in \pi_1(S_g, *)$ 的环路及其提升 $\tilde{t} \in \pi_1(S_{g,1}, \star)$ 的一个小正则邻域。

我们要证明

$$\sigma\big(\mathrm{Push}(t)\big)(w) = \left[C_{\iota\tilde{t}} \circ \hat{\delta}([t])\right](w)$$

对每个 $w \in \pi_1(X_g^k)$ 都成立。由于对 $w = z$ 显然成立，只需对 $s \in \pi_1(S_{g,1}, \star)$ 中的 $w = \iota(s)$ 证明这一等式；此外，只需在 $\pi_1(S_{g,1}, \star)$ 的任意生成集上证明该等式。我们使用由图 2 所示形式之一的曲线组成的（无限）生成集（这些曲线与 t 周围环带的交集只有一个连通分支）。

注意，Push(t) 固定基点 $\star$，因此我们可以计算 Push(t) 在$s \in \pi_1(S_{g,1}, \star)$ 上的作用。我们按如下方式计算 Push(t) 对图 2 中各元素的作用。图 3 展示了相关示意图。

$$s_1 \mapsto (\tilde{t})^{-1} s_1 \tilde{t} c^{-1} \quad \text{and} \quad s_2 \mapsto (\tilde{t})^{-1} s_2 \tilde{t} \quad \text{and} \quad s_3 \mapsto c(\tilde{t})^{-1} s_3 \tilde{t} c^{-1} \quad \text{and} \quad c \mapsto c.$$

这就证明了，例如，

$$\sigma\big(\mathrm{Push}(t)\big)(\iota s_1) = (\iota\tilde{t})^{-1}(\iota s_1)(\iota\tilde{t}) z^{-k} = \left[C_{\iota\tilde{t}} \circ \hat{\delta}([kt])\right](\iota s_1).$$

我们对生成元 s_2, s_3 同样得出结论。这就证明了所需的公式：$\sigma\big(\mathrm{Push}(t)\big)$。□

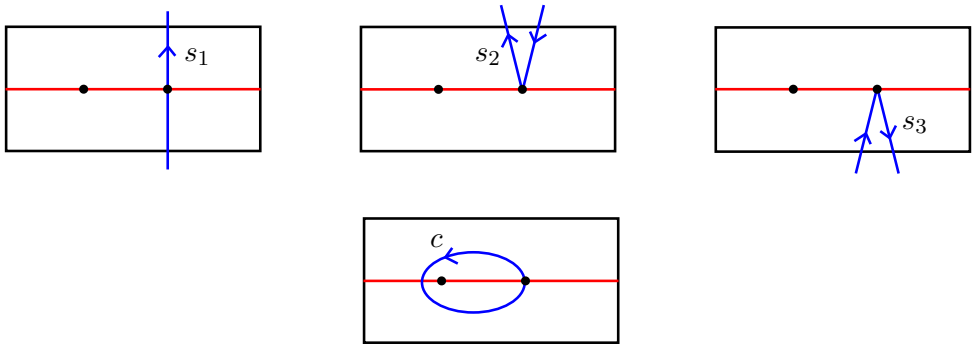


FIGURE 2. 群 $\pi_1(S_{g,\ 1},\ \star)$ 由 $\tilde{t}$ 以及上图所示形式的环路生成。

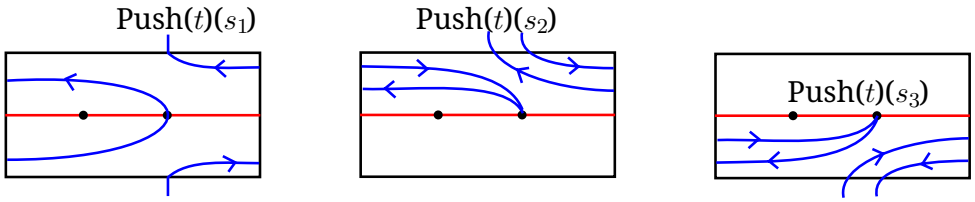


FIGURE 3. 点推 t 对图 2 中环路的作用。曲线 c 在同伦意义下保持不变（在同伦意义下，Push(t) 在包含 c 的 t 邻域上是恒等映射）。

下面的推论是命题 3.4 的直接结果。

推论 3.5。 考虑复合

$$\Psi : \mathcal{AUT}\left(\pi_1(S_g)\right) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{AUT}\left(\pi_1(X_g^k)\right) \to \mathcal{OUT}\left(\pi_1(X_g^k)\right). \tag{15}$$

Ψ 到 $\pi_1(S_g) \cong \mathrm{Inn}\left(\pi_1(S_g)\right)$ 的限制分解如下。

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S_g) & \xrightarrow{\text{conjugation}} & \mathcal{AUT}\left(\pi_1(S_g)\right) \\ \downarrow{\scriptstyle k\delta \circ \mathrm{ab}} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi} \\ H^1(S_g;\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\text{transvections}]{} & \mathcal{OUT}\left(\pi_1(X_g^k)\right) \end{array}$$

这里ab 表示阿贝尔化映射 $\pi_1(S_g, *) \to H_1(S_g;\mathbb{Z})$。

3.3. 定理 A 的证明。 利用映射类群与自同构群之间的同构，所需的交换图等价于下面这个交换图。

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1(S_g)^{\mathrm{ab}} & \longrightarrow & \mathcal{AUT}\left(\pi_1(S_g)\right)/\pi' & \longrightarrow & \mathcal{OUT}\left(\pi_1(S_g)\right) & \to & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle k\delta} & & \downarrow & & \| & & \\ 1 & \to & \mathrm{Hom}(\pi_1(S_g),\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathcal{OUT}\left(\pi_1(X_g^k)\right) & \longrightarrow & \mathcal{OUT}\left(\pi_1(S_g)\right) & \to & 1 \end{array}$$

推论 3.5 表明，式 (15) 中的映射 Ψ 下降为中间的垂直映射，并限制为左侧的垂直映射。σ 是一个截面（推论 3.1）这一事实意味着中间的

垂直映射下降为 $\mathcal{OUT}\left(\pi_1(S_g)\right)$ 上的恒等映射。当 $k = 1$ 时，由五引理可知，中间的垂直映射是一个同构。定理 A 的证明至此完成。

4. 谱序列计算

本节将证明定理 1.2。我们通过使用 Lyndon–Hochschild–Serre（LHS）谱序列进行两种不同的计算来实现这一点。回顾一下，该谱序列以群的短正合列 $1 \to N \to G \to Q \to 1$ 和一个 G-模 A 作为输入，其 E_2 页为

$$E_2^{p,q} = H^p\big(Q; H^q(N; A)\big),$$

并收敛到 $H^{p+q}(G; A)$。在这两种计算中，我们都使用 Birman 正合列，但对模 A 作出了不同的选择。

记号说明。 为简化记号，除非另有说明，我们约定上同调群取 $\mathbb{Z}$ 系数。

4.1. 欧拉类计算。

本节的目标是证明下面的命题 4.1，该命题蕴含推论 1.3。

命题 4.1. 取定 $g \geq 1$。令 eu_k 为扩张(1)的欧拉类。则$eu_k = k\, eu_1$，且 eu_1 在 $H^2\big(\mathrm{Mod}(S_g); H^1(S_g)\big)$中的阶为 $2g-2$。

证明。 关系 $eu_k = k\, eu_1$ 已可由定理 A 得出。事实上，选取定理 A 中交换图顶行正合列的一个集合论截面，可得到 eu_k 的一个余循环代表元，它是 e_1的余循环代表元的 k 倍。

现在证明 eu_1 生成一个与$H^2\big(\mathrm{Mod}(S_g); H^1(S_g)\big)$中的 $\mathbb{Z}/(2g-2)\mathbb{Z}$ 同构的循环子群。我们的方法是对模 $A = H^1(S_g)$使用 Birman 正合列的 LHS 谱序列。这里

$$E_2^{p,q} \cong H^p\big(\mathrm{Mod}(S_g); H^q(S_g; A)\big).$$

相应五项正合列的一部分如下。

$$0 \to H^1\big(\mathrm{Mod}(S_g); H^1(S_g)\big) \to H^1\big(\mathrm{Mod}(S_{g,1}); H^1(S_g)\big) \xrightarrow{A} \mathrm{Hom}\left(H_1(S_g), H^1(S_g)\right)^{\mathrm{Mod}(S_g)} \xrightarrow{d_2^{0,1}} H^2\big(\mathrm{Mod}(S_g); H^1(S_g)\big)$$

Morita 曾研究过这个序列。Morita [Mor85，命题 4.1] 证明第一项为零，因此映射 A 是单射。群 $\mathrm{Hom}\left(H_1(S_g)\ H^1(S_g)\right)^{\mathrm{Mod}(S_g)}$ 同构于 $\mathbb{Z}$，并由 Poincar´e 对偶同构 δ生成。Morita [Mor85，命题 6.4] 的证明表明， A 的像为 $(2g-2)\mathbb{Z}$。因此，微分 $d^{0,1}_2$下降为单射 $\mathbb{Z}/(2g-2)\mathbb{Z} \to H^2\big(\mathrm{Mod}(S_g); H^1(S_g)\big)$。

还需证明 $d^{0,1}_2$ 将一个生成元映到 eu_1。微分 $d^{0,1}_2$ 即传递；例如参见 [NSW08，命题 1.6.6、定理 2.4.3]。根据传递在本情形下应用的标准知识，我们得到 $d^{0,1}_2$ 将一个生成元映到 $\delta_*(eu)$，其中 eu 是扩张 (2) 的欧拉类，并且

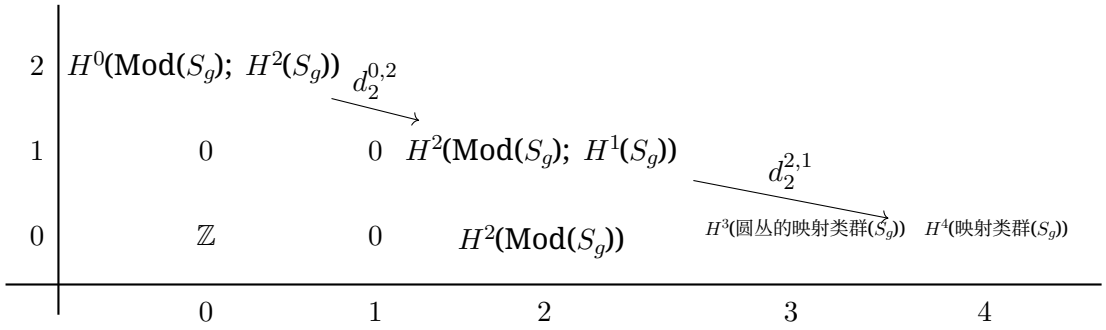
$$\delta_* : H^2\big(\mathrm{Mod}(S_g); H_1(S_g)\big) \to H^2\big(\mathrm{Mod}(S_g); H^1(S_g)\big)$$

是由 Poincaré 对偶同构 δ 诱导的同构。（关于传递的这一性质，参见 [NSW08, §I.6, 习题 1-2]。尽管该参考文献主要讨论有限群或拟有限群，但其中对传递所作的分析更具一般性。）最后，我们注意到，根据定理 A， $\delta_*(eu) = eu_1$。□

4.2. 计算 $H^2\big(\mathrm{Mod}(S_g); H^1(S_g)\big)$。对平凡模 $A=\mathbb{Z}$ 运行 LHS 谱序列，我们证明，若 $g\geq 8$，则

$$H^2\big(\mathrm{Mod}(S_g); H^1(S_g)\big)\cong \mathbb{Z}/(2g-2)\mathbb{Z}. \tag{16}$$

结合命题 4.1 即可证明定理 1.2。相关的谱序列部分如下所示。



第一列中的计算很简单。在第二列中，Morita [Mor85, 命题 4.1] 计算得出 $H^1\big(\mathrm{Mod}(S_g); H^1(S_g)\big)=0$，适用于 $g\geq 1$。另一个计算$H^1\big(\mathrm{Mod}(S_g)\big)=0$ 适用于 $g\geq 1$，因为 $\mathrm{Mod}(S_g)$ 的阿贝尔化是有限的 [FM12, §5.1.2-3]。

根据 [BT01, 推论 1.2],

$$H_*\big(\mathrm{Mod}(S_{g,1})\big)\cong H_*\big(\mathrm{Mod}(S_g)\big)\otimes\mathbb{Z}[x]$$

在次数 $g\geq 2*$。这里 x 的次数为 2。应用这一点并利用泛系数定理，我们得出

$$H^i\big(\mathrm{Mod}(S_g)\big)\to H^i\big(\mathrm{Mod}(S_{g,1})\big)$$

当 $i=3$ 且 $g\geq 6$时，这是一个同构；当 $i=4$ 且 $g\geq 8$时，这是单射。

由于映射 $H^4\big(\mathrm{Mod}(S_g)\big)\to H^4\big(\mathrm{Mod}(S_{g,1})\big)$ 是单射，微分 $d^2_{,1\,2}$ 为零。由于映射 $H^3\big(\mathrm{Mod}(S_g)\big)\to H^3\big(\mathrm{Mod}(S_{g,1})\big)$ 是同构，微分 $d^0_{,2\,2}$ 是满射。

因此，由 E_∞ 页得到的 $H^2\big(\mathrm{Mod}(S_{g,\ 1})\big)$ 的滤过给出了一个正合序列 e

$$\begin{aligned} 0\to H^2\big(\mathrm{Mod}(S_g)\big)\to H^2\big(\mathrm{Mod}(S_{g,1})\big) &\xrightarrow{F} H^0\big(\mathrm{Mod}(S_g); H^2(S_g)\big)\cong\mathbb{Z}\\ &\xrightarrow{d_2^{0,2}} H^2\big(\mathrm{Mod}(S_g); H^1(S_g)\big)\to 0. \end{aligned}$$

对于 $g\geq 4$,

$$H^2\big(\mathrm{Mod}(S_g)\big)\cong\mathbb{Z}[e_1]\quad\text{and}\quad H^2\big(\mathrm{Mod}(S_{g,1})\big)\cong\mathbb{Z}[e,e_1]$$

而映射 $\mathbb{Z}[e_1]\to\mathbb{Z}[e,e_1]$ 是显然的映射 $e_1\mapsto e_1$。我们声称 $F(e)=2-2g$。由此我们推出所需的同构 (16)。这一断言源于这样一个事实：定义 e 的扩张，限制到点推动子群 $\pi_1(S_g)$ <Mod($S_{g,\ 1}$) 后，得到扩张

$$1\to\mathbb{Z}\to\pi_1(US_g)\to\pi_1(S_g)\to 1$$

其中 US_g 是单位切丛。参见 [FM12, §5.5.5]。此扩张的欧拉类为$2-2g$，因此结论成立。

References

[Bro82] K. S. Brown. *Cohomology of groups*，第 87 卷，收录于 *Graduate Texts in Mathematics*。施普林格出版社，纽约—柏林，1982 年。[BT01] C.-F. B¨odigheimer 和 U. Tillmann。《剥离与分裂装饰映射类群》。载于 *Cohomological methods in homotopy theory (Bellaterra, 1998)*，第 196 卷，页码 47–57。Birkh¨auser，巴塞尔，2001 年。[Che19] L. Chen。《关于辫群无法由同胚实现》。 *Geom. Topol.*，23(7):3735–3749，2019 年。[CR77] P. E. Conner 和 F. Raymond。《在渐近流形中将同伦等价变形为同胚》。 *Bull. Amer. Math. Soc.*，83(1):36–85，1977 年。[CS22] L. Chen 和 N. Salter。《映射类群作用的全局不动点与 Markovic 定理》。 *J. Topol.*，15(3):1311–1324，2022 年。[FM12] B. Farb 和 D. Margalit。《 *A primer on mapping class groups* 49 *Princeton Mathematical*》，第 卷，*Series* 收录于 2012 。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，。[Mar07] V. Markovic。《映射类群由同胚实现》。 *Invent. Math.*，168 3 523( ): –566，2007 年。[McC91] D. McCullough。《 3 *J. Differential* 流形的虚 *Geom.* 33 1 1 65, 1991 几何有限映射类群》。 ，( ): – 。[Mor85] S. Morita。《雅可比流形族与曲面丛的特征类。II》。 *Proc.* ，( ): – 。[*Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 61 4 112 115, 1985 NSW08] J. Neukirch、A. Schmidt 和 K. Wingberg。《*Cohomology of number fields*》，第 323 卷，收录于*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sci- ences]* 2008 。施普林格出版社，柏林，第二版，。[Sou10] J. Souto。《关于映射类群在单位切丛上作用的一则评论》。 *Ann.* ，(-): – 。 *Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* 19 3 4 589 601, 2010 [Wal68] F. Waldhausen。《关于充分大的不可约三维流形》。 *Ann. of Math. (2)*，87:56– 88，1968 年。

Lei Chen Department of Mathematics University of Maryland 4176 Campus Drive Col- ,,,,,„ lege Park MD 20742 USA chenlei@umd.edu

Bena Tshishiku Department of Mathematics Brown University Provi- ,,, 151 Thayer St.,„,, dence RI 02912 USA bena tshishiku@brown.edu.