arXiv:2301.05381v1 [math.AT] 13 Jan 2023

关于 S^2 WITH$\mathbb{Z}_2$ 系数的弦拓扑 BV代数简述

KATE POIRIER 和 THOMAS TRADLER

Abstract. Luc Menichi 指出，源自弦拓扑的 $H_\bullet(LS^2;\mathbb{Z}_2)[-2]$ 上的 BV 代数，与利用 $H^\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2)$ 上的庞加莱对偶，在 $HH^\bullet(H^\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2)\ H^\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2))$ 上构造的 BV 代数并不同构。本文将说明，如何利用带有高阶同伦的庞加莱对偶结构，在霍赫希尔德上同调上得到弦拓扑 BV 代数。这种上同调上的庞加莱对偶（带有高阶同伦）是由上链层面上的局部庞加莱对偶（带有高阶同伦）所诱导的。

1. Main Statements

1.1. 具有 $\mathbb{Z}_2$ 系数的二维球面的 BV 代数。在 [M 中，定理 24]中，Luc Menichi 计算了二维球面 $M = S^2$ 上具有 $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 系数的弦拓扑BV代数（由 Moira Chas 和 Dennis Sullivan 在 [CS]中定义），结果为

$$\mathbb{H}_\bullet(LS^2;\mathbb{Z}_2) \cong \Lambda a \otimes \mathbb{Z}_2[u] \cong \bigoplus_{k\geq 0}\mathbb{Z}_2.\alpha_k \oplus \bigoplus_{k\geq 0}\mathbb{Z}_2.\beta_k, \tag{1.2}$$
$$\text{where } \alpha_k\cdot\alpha_\ell = \alpha_{k+\ell}, \beta_k\cdot\beta_\ell = 0, \text{ and } \alpha_k\cdot\beta_\ell = \beta_\ell\cdot\alpha_k = \beta_{k+\ell},$$
$$\text{and } \Delta_{\mathrm{ST}}(\alpha_k) = 0 \text{ and } \Delta_{\mathrm{ST}}(\beta_k) = k\cdot\alpha_{k-1} + k\cdot\beta_{k+1}.$$

这里，次数由 $|a| = -2$、 $|u| = 1$给出，因此，令 $\alpha_k = 1\otimes u^k$和 $\beta_k = a\otimes u^k$，可得 $|\alpha_k| = k$、 $|\beta_k| = k-2$。

此外，在 [M 中，命题 20], 中，Menichi 计算了 S^2 的上同调的霍赫希尔德上同调的 BV 代数，其中系数为 $\mathbb{Z}_2$ ，结果为

$$HH^\bullet(H^\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2);H^\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2)) \cong \Lambda g\otimes\mathbb{Z}_2[f] \cong \bigoplus_{k\geq 0}\mathbb{Z}_2.\phi_k \oplus \bigoplus_{k\geq 0}\mathbb{Z}_2.\psi_k, \tag{1.3}$$
$$\text{where } \phi_k\cdot\phi_\ell = \phi_{k+\ell}, \psi_k\cdot\psi_\ell = 0, \text{ and } \phi_k\cdot\psi_\ell = \psi_\ell\cdot\phi_k = \psi_{k+\ell},$$
$$\text{and } \Delta(\phi_k) = 0 \text{ and } \Delta(\psi_k) = k\cdot\phi_{k-1}.$$

这些次数的定义类似，由 $|g| = -2$、 $|f| = 1$给出，因此，令 $\phi_k = 1\otimes f^k$ 和$\psi_k = g\otimes f^k$，可得 $|\phi_k| = k$、 $|\psi_k| = k-2$。

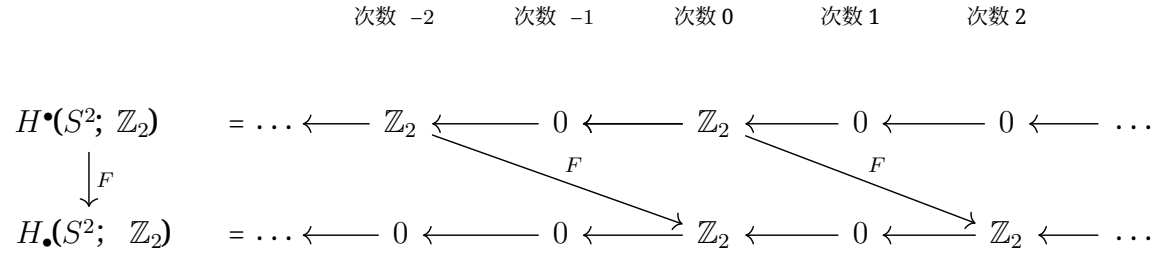
注意，这些 BV代数的 Δ 算子不同；事实上，Menichi 得到了以下结果。

定理1.4. [M，推论 30] $(\mathbb{H}_\bullet(LS^2;\mathbb{Z}_2)\ \cdot,\Delta_{\mathrm{ST}})$ 与 $(HH^\bullet(H^\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2);H^\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2))\ \cdot,\Delta)$ 之间不存在 BV 代数同构。

不过值得注意的是， $\mathbb{H}_\bullet(LS^2;\mathbb{Z}_2)$ 和$HH^\bullet(H^\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2);H^\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2))$ 上诱导的 Gerstenhaber代数同构；参见 [M，推论 23]。

2010年数学主题分类。55P50、16E40（主要），57P10、08A65（次要）。关键词与短语。弦拓扑、霍赫希尔德上同调、BV代数、Poincar´e 对偶。

1.5. 来自局部庞加莱对偶的 BV代数。确定霍赫希尔德上同调上的 Δ算子（1.3）时，一个关键要素是选择一种庞加莱对偶结构，该结构由双模同构 $F : H^\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H_\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2)$ 给出。对于（$\mathbb{Z}_2$-）上同调 $H^\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2)$ 和同调 $H_\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2)$，一个显而易见的选择是将次数为 $+2$ 的同构 F 定义如下：



事实上，这里对 F 的选择，即通过与 S^2 的 $\mathbb{Z}_2$ 基本类作帽积所定义的映射，将导出式（1.3）中的 BV代数；我们将在下文的定理1.6（以及 5.3）中予以确认。

请注意，在上链层面，与基本循环作帽积并不是双模映射；参见观察4.4。本文中，我们使用双模映射的一种推广形式：除 F 外，该形式还允许存在高阶同伦，并据此证明可以在霍赫希尔德上同调上得到弦拓扑BV代数（1.2）。带高阶同伦的双模映射的精确定义已在 [T1] 中研究，下面将在第2节回顾。

运用带高阶同伦的双模映射这一概念，我们将在例 4.20 中，为二维球面 $C^\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2)$ 的局部上链模型构造这样一个映射的具体例子。随后，我们将此映射拉回，从而为上同调 $H^\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2)$ 得到一个带同伦的双模映射 $\sim F$（见命题 4.23）。所得映射 F 记录在例4.2 中；与 F （见式（4.3））相比，它恰好有一个高阶同伦。现在，利用这个 F，我们得到以下主要定理。

定理1.6. 由 F （源自一个局部双模映射，并将高阶同伦传递到上同调）诱导的 $HH^\bullet(H^\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2);H^\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2))$上的BV代数，与 $\mathbb{H}_\bullet(LS^2;\mathbb{Z}_2)$上的弦拓扑BV代数(1.2)同构。

证明. 我们分别计算由 F 和 F得到的两个BV代数。记为$H^\bullet := H^\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2)$和 $H_\bullet := H_\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2)$。那么，双模映射 F和双模映射

$\sim F$ （带有高阶同伦）

分别诱导出Hochschild上同调的（分次模）同构F和F（见5.3和5.4）

$$\mathcal{F}, \widetilde{\mathcal{F}} : HH^\bullet(H^\bullet, H^\bullet) \xrightarrow{\cong} HH^\bullet(H^\bullet, H_\bullet). \tag{1.7}$$

Next，我们使用显式描述（如5.1和5.2中所述），该描述指出 at

$$HH^\bullet(H^\bullet, H^\bullet) \cong \bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{Z}_2.\phi_k \oplus \bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{Z}_2.\psi_k, \quad \text{where } |\phi_k| = k,\ |\psi_k| = k-2,$$
$$HH^\bullet(H^\bullet, H_\bullet) \cong \bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{Z}_2.\theta_k \oplus \bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{Z}_2.\chi_k, \quad \text{where } |\theta_k| = k+2,\ |\chi_k| = k.$$

采用这一记号， F在 (1.7) 中诱导映射 $F(\phi_k) = \theta_k$, $F(\psi_k) = \chi_k$(见 5.3)，而 F $\sim$ 诱导映射 $F(\phi_k) = \theta_k + \chi_{k+2}$, $F(\psi_k) = \chi_k$(在 5.4 中计算得出)。

关于系数为 S^2 的 $\mathbb{Z}_2$ 弦拓扑 BV 代数的注记 3

BV Δ 算子在 $HH^\bullet(H^\bullet, H^\bullet)$ 上的定义，是通过给定的 Poincar´e 对偶双模同构，将 Connes 的 B 算子从$HH^\bullet(H^\bullet, H_\bullet)$ 转移到 $HH^\bullet(H^\bullet, H^\bullet)$，其中，Connes 的 B 算子是如下映射（在 5.2 中计算得出）：

$$\mathcal{B} : HH^\bullet(H^\bullet, H_\bullet) \to HH^\bullet(H^\bullet, H_\bullet), \quad \mathcal{B}(\theta_k) = 0, \mathcal{B}(\chi_k) = k \cdot \theta_{k-1}.$$

因此，分别由 F 和 F 诱导的算子 $\Delta = \mathrm{F}^{-1} \bigcirc \mathrm{B} \bigcirc \mathrm{F}$ 和 $\Delta = \mathrm{F}^{-1} \bigcirc \mathrm{B} \bigcirc \mathrm{F}$ 为:

$$\Delta(\phi_k) = 0, \qquad \Delta(\psi_k) = \mathcal{F}^{-1}(k \cdot \theta_{k-1}) = k \cdot \phi_{k-1}, \tag{1.8}$$

$$\widetilde{\Delta}(\phi_{k-2}) = \widetilde{\Delta}(\psi_k) = \widetilde{\mathcal{F}}^{-1}(k \cdot \theta_{k-1}) = k \cdot (\phi_{k-1} + \psi_{k+1}), \tag{1.9}$$

这里我们用到了 F^{-1} 由 $\mathrm{F}^{-1}(\theta_k) = \phi_k + \psi_{k+2}$ 和 $\mathrm{F}^{-1}(\chi_k) = \psi_k$ 给出。

注意，(1.8) 中的 Δ 算子与 (1.3) 中的 Δ 一致。为了证明带有 Δ 的 BV 代数 与弦拓扑 BV 代数 (1.2) 同构，我们使用一个在 M 的引理 21] 最后一段中基本上已经描述过的同构：映射 $\Theta : HH^\bullet(H^\bullet, H^\bullet) \to \mathbb{H}_\bullet(LS^2; \mathbb{Z}_2)$，其中 $\Theta(\phi_k) = \alpha_k + k \cdot \beta_{k+2}$ 且 $\Theta(\psi_k) = \beta_k$，是一个代数同构，满足$\sim\Delta_{\mathrm{ST}} \bigcirc \Theta = \Theta \bigcirc \Delta$。□

1.10. 论文结构。第2节中，我们回顾 Hochschild 上链复形的基础知识，以及由双模映射在高阶同伦意义下诱导的复形间态射。第3节中，我们回顾由选定的 Poincar´e 对偶结构诱导的 BV代数。第4节中，我们给出双模映射的若干计算（包括有高阶同伦和没有高阶同伦的情形）。特别是，针对由局部性得到的 2-单形构造双模映射（在某些受控结构意义下；见例 4.9），构成了本文计算工作的主要部分，其证明详见附录 A。第5节中，我们计算第4节中二维球面上同调的 Poincar´e 对偶结构所诱导的 BV 代数，并由此完成定理1.6的证明。

致谢。我们感谢 Mahmoud Zeinalian 就这一主题与我们进行讨论。第二作者获得了 PSC-CUNY 研究奖的部分资助。

2. Bimodule maps with higher homotopies

本节回顾双模映射、在高阶同伦意义下的双模映射以及同伦内积；另请参见 [T1]。此外，我们还回顾这些映射在霍赫希尔德上同调上诱导的映射。

2.1. 基本设定。记 R 为带单位元的交换环；我们主要感兴趣的例子是 $R = \mathbb{Z}_2$。设 A 是定义在 R 上的含幺微分分次代数；注意，本文中的所有微分始终都向下作用，即 $d : A_j \to A_{j-1}$。我们将 A 记作空间 A 向上移一位后的空间，即 $\underline{A}_j := A_{j-1}$。

设 M 是 A 上的微分分次双模。若要强调相应的代数 A，我们也会写作 M/A，而非 M。从现在起，所有模及模映射都将用粗体表示。

注意，若 M 是 A 上的微分分次双模，则其对偶空间 $\mathbf{M}^*$ 也是如此，其中 $\mathbf{M}^*_j := (\mathbf{M}\text{-}j)^* = Hom_R(\mathbf{M}\text{-}j, R)$ 的微分为 $d : \mathbf{M}^*_j \to \mathbf{M}^*_{j-1}, d(n)(m) := (-1)^{|n|+1} n(d(m))$，而模映射为 $(n.a)(m) := n(a.m)$ 和 $(a.n)(m) := (-1)^{|a|\cdot(|n|+|m|)} n(m.a)$，其中 $n \in \mathbf{M}^*, m \in \mathbf{M}$ $a \in A$,

其中 $|.|$ 表示次数。此外，微分分次代数 A 本身也是一个微分分次模 $\mathrm{A} := A$，它是A上的模（其模结构由代数乘法给出），因此 A^* 也是 A上的微分分次模。

定义 A 的 Hochschild 上链复形以 M 为系数为 $CH^\bullet(A, \mathrm{M}) := \prod_{r\geq 0} Hom(A^{\otimes r}, \mathrm{M})$，其中微分 $\mathrm{D} = \mathrm{D}_0 + \mathrm{D}_1$, 且 $\mathrm{D}^2 = 0$，对 $\varphi \in Hom(A^{\otimes r}, \mathrm{M})$ 的定义如下：

$$\mathcal{D}_0(\varphi)(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_r}) := d(\varphi(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_r})) + \sum_{j=1}^{r} (-1)^{|\varphi|+|\underline{a_1}|+\cdots+|\underline{a_{j-1}}|} \cdot \varphi(\underline{a_1}, \dots, \underline{da_j}, \dots, \underline{a_r}),$$

$$\mathcal{D}_1(\varphi)(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_{r+1}}) := (-1)^{|\varphi|\cdot|\underline{a_1}|} \cdot a_1.\varphi(\underline{a_2}, \dots, \underline{a_{r+1}})$$
$$+ \sum_{j=1}^{r} (-1)^{|\varphi|+|\underline{a_1}|+\cdots+|\underline{a_j}|} \cdot \varphi(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_j \cdot a_{j+1}}, \dots, \underline{a_{r+1}}) + (-1)^{|\varphi|+1+|\underline{a_1}|+\cdots+|\underline{a_r}|} \cdot \varphi(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_r}).a_{r+1}.$$

我们主要使用归一化 Hochschild 上链复形 $\overline{CH}^\bullet(A, \mathrm{M})$，它是 $CH^\bullet(A, \mathrm{M})$ 的子复形，由那些在任一输入为单位元 $1 \in A$时取值为零的 $\varphi \in CH^\bullet(A, \mathrm{M})$ 构成。包含映射 $\overline{CH}^\bullet(A, \mathrm{M}) \hookrightarrow CH^\bullet(A, \mathrm{M})$是一个拟同构；参见 [L, 1.5.7]。

2.2. 内积与同伦内积。设 M 和 N 是 A 上的微分分次双模，且 $\mathrm{F} : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ 是一个微分分次双模映射。那么，由此诱导出一个上链映射$CH(\mathrm{F}) : \overline{CH}^\bullet(A, \mathrm{M}) \to \overline{CH}^\bullet(A, \mathrm{N})$，$\varphi \mapsto \mathrm{F} \bigcirc \varphi$。M 上的一个内积是一个微分分次双模映射 $\mathrm{F} : \mathrm{M} \to \mathrm{M}^*$。

我们需要一个更一般的内积概念 $\mathrm{F} : \mathrm{M} \to \mathrm{M}^*$，它也允许高阶同伦。为此，考虑一个映射序列 $\mathrm{F} = \{\mathrm{F}_{p,\,q} : \underline{A}^{\otimes p} \otimes \mathrm{M} \otimes A^{\otimes q} \to \mathrm{M}^*\}_{p,\,q\geq 0}$，并定义其微分如下：令 $\mathrm{DF} = \{(\mathrm{DF})_{p,\,q}\}_{p,\,q\geq 0}$ 为 $(\mathrm{DF})_{p,\,q} = (\mathrm{D}_0\mathrm{F})_{p,\,q} + (\mathrm{D}_1\mathrm{F})_{p,\,q}$，其中 $\forall a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q, \in A$ 以及 $m, n \in \mathrm{M}$：

$$\begin{aligned}
(2.3)\qquad & (\mathcal{D}_0\boldsymbol{F})_{p,q}(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_p}; m; \underline{b_1}, \dots, \underline{b_q})(n) \\
&:= \sum_{j=1}^{p} (-1)^{|\boldsymbol{F}|+|\underline{a_1}|+\cdots+|\underline{a_{j-1}}|} \cdot \boldsymbol{F}_{p,q}(\underline{a_1}, \dots, \underline{da_j}, \dots, \underline{a_p}; m; \underline{b_1}, \dots, \underline{b_q})(n) \\
&\quad + (-1)^{|\boldsymbol{F}|+|\underline{a_1}|+\cdots+|\underline{a_p}|+1} \cdot \boldsymbol{F}_{p,q}(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_p}; dm; \underline{b_1}, \dots, \underline{b_q})(n) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{q} (-1)^{|\boldsymbol{F}|+|\underline{a_1}|+\cdots+|\underline{a_p}|+|m|+|\underline{b_1}|+\cdots+|\underline{b_{j-1}}|} \cdot \boldsymbol{F}_{p,q}(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_p}; m; \underline{b_1}, \dots, \underline{db_j}, \dots, \underline{b_q})(n) \\
&\quad + (-1)^{|\boldsymbol{F}|+|\underline{a_1}|+\cdots+|\underline{a_p}|+|m|+|\underline{b_1}|+\cdots+|\underline{b_q}|+1} \cdot \boldsymbol{F}_{p,q}(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_p}; m; \underline{b_1}, \dots, \underline{b_q})(dn)
\end{aligned}$$

并使用记号 $\mathrm{F}_{-1,\,q} = \mathrm{F}_{p,\,-1} = 0$：

$$\begin{aligned}
(2.4)\qquad & (\mathcal{D}_1\boldsymbol{F})_{p,q}(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_p}; m; \underline{b_1}, \dots, \underline{b_q})(n) \\
&:= (-1)^{|\boldsymbol{F}|+|a_1|\cdot(|\underline{a_2}|+\cdots+|\underline{a_p}|+|m|+|\underline{b_1}|+\cdots+|\underline{b_q}|+|n|)} \cdot \boldsymbol{F}_{p-1,q}(\underline{a_2}, \dots, \underline{a_p}; m; \underline{b_1}, \dots, \underline{b_q})(n.a_1) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{|\boldsymbol{F}|+|\underline{a_1}|+\cdots+|\underline{a_j}|} \cdot \boldsymbol{F}_{p-1,q}(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_j \cdot a_{j+1}}, \dots, \underline{a_p}; m; \underline{b_1}, \dots, \underline{b_q})(n) \\
&\quad + (-1)^{|\boldsymbol{F}|+|\underline{a_1}|+\cdots+|\underline{a_{p-1}}|+1} \cdot \boldsymbol{F}_{p-1,q}(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_{p-1}}; a_p.m; \underline{b_1}, \dots, \underline{b_q})(n)
\end{aligned}$$

$$+(-1)^{|\boldsymbol{F}|+|\underline{a_1}|+\cdots+|\underline{a_p}|+|m|}\cdot\boldsymbol{F}_{p,q-1}(\underline{a_1},\dots,\underline{a_p};m.b_1;\underline{b_2},\dots,\underline{b_q})(n)$$

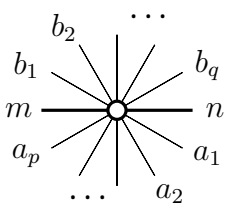
$$+\sum_{j=1}^{q-1}(-1)^{|\boldsymbol{F}|+|\underline{a_1}|+\cdots+|\underline{a_p}|+|m|+|\underline{b_1}|+\cdots+|\underline{b_j}|}\cdot\boldsymbol{F}_{p,q-1}(\underline{a_1},\dots,\underline{a_p};m;\underline{b_1},\dots,\underline{b_j\cdot b_{j+1}},\dots,\underline{b_q})(n)$$

$$+(-1)^{|\boldsymbol{F}|+|\underline{a_1}|+\cdots+|\underline{a_p}|+|m|+|\underline{b_1}|+\cdots+|\underline{b_{q-1}}|+1}\cdot\boldsymbol{F}_{p,q-1}(\underline{a_1},\dots,\underline{a_p};m;\underline{b_1},\dots,\underline{b_{q-1}})(b_q.n)$$

那么，如果 $\mathrm{DF}=0$，我们称 F 为 M 的同伦内积。稍微滥用一下记号，我们仍将使用记号 $\mathrm{F}:\mathrm{M}\to\mathrm{M}^*$ 来表示 $\mathrm{F}=\{\mathrm{F}_{p,\ q}\}_{p,\ q}$ 及其所有同伦。

我们有时会如下表示 F 的取值：

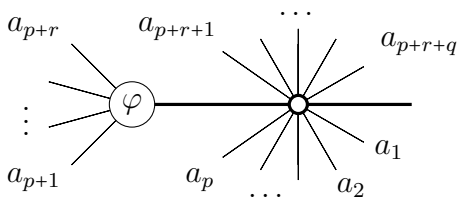
$$\boldsymbol{F}_{p,q}(\underline{a_1},\dots,\underline{a_p};m;\underline{b_1},\dots,\underline{b_q})(n)\tag{2.5}$$



注意，对于 $p+q>0$，同伦内积 $\mathrm{F}=\{\mathrm{F}_{p,q}\}_{p,q}$，其中 $\mathrm{F}_{p,q}=0$，恰好就是一个内积，即一个微分分次双模映射 $\mathrm{F}_{0,0}:\mathrm{M}\to\mathrm{M}^*$。

设 F 是 M 的一个同伦内积。我们始终假设，当任意一个代数输入为单位元 $1\in A$ 时，F 的取值为零。于是可定义诱导映射 $\mathrm{F}:=CH(\mathrm{F}):\overline{CH}^\bullet(A,\mathrm{M})\to\overline{CH}^\bullet(A,\mathrm{M}^*)$，其定义为 $\mathrm{F}=CH(\mathrm{F})=\sum_{p,q\geq0}CH(\mathrm{F})_{p,q}$，其中 $CH(\mathrm{F})_{p,q}:Hom(A^{\otimes r},\mathrm{M})\to Hom(A^{\otimes p+r+q},\mathrm{M}^*)$ 是

$$\begin{aligned}&(CH(\boldsymbol{F})_{p,q}(\varphi))(\underline{a_1},\dots,\underline{a_{p+r+q}})\\&:=(-1)^{|\varphi|\cdot(|\underline{a_1}|+\cdots+|\underline{a_p}|)}\cdot\boldsymbol{F}_{p,q}(\underline{a_1},\dots,\underline{a_p};\varphi(\underline{a_{p+1}},\dots,\underline{a_{p+r}});\underline{a_{p+r+1}},\dots,\underline{a_{p+r+q}}).\end{aligned}\tag{2.6}$$



直接但较为冗长的计算表明

$$CH(\mathcal{D}\boldsymbol{F})(\varphi)=\mathcal{D}\circ CH(\boldsymbol{F})(\varphi)-(-1)^{|\boldsymbol{F}|}\cdot CH(\boldsymbol{F})\circ\mathcal{D}(\varphi),\qquad\forall\varphi\in CH^\bullet(A,\boldsymbol{M}).\tag{2.7}$$

推论 2.8。如果 F 是一个同伦内积，即 $\mathrm{DF}=0$，那么 $\mathrm{F}=CH(\mathrm{F}):\overline{CH}^\bullet(A,\mathrm{M})\to\overline{CH}^\bullet(A,\mathrm{M}^*)$ 是一个上链映射。为简化记号，我们通常仍将诱导于霍赫希尔德上同调上的映射记作 F。如果 $\mathrm{F}=\mathrm{DF}'$ 对某个 F' 成立，那么诱导于霍赫希尔德上同调上的映射为零，即 $HH(\mathrm{F})=0$。

2.9. 微分分次态射下的拉回。设 A 和 B 是两个含幺微分分次代数，且 $f:B\to A$ 是一个微分分次代数映射（其次数必为 0）。那么，任意定义在 A 上的微分分次双模 $\mathrm{M}=\mathrm{M}_{/A}$，都通过模结构 $b.m:=f(b).m$ 和 $m.b:=m.f(b)$，在 B 上诱导出一个微分分次双模 $\mathrm{M}_{/B}:=\mathrm{M}$，其中 $m\in\mathrm{M}$ $b\in B$ 任意。此外，任意微分分次双模映射 $\mathrm{F}_{/A}:\mathrm{M}_{/A}\to\mathrm{N}_{/A}$ 也会诱导出一个微分分次双模映射 $\mathrm{F}_{/B}:\mathrm{M}_{/B}\to\mathrm{N}_{/B}$。此外，$\mathrm{M}_{/B}$ 的同伦内积 $\mathrm{F}_{/A}$ for $\mathrm{M}_{/A}$ 也会通过以下方式诱导出一个同伦内积

$$(\boldsymbol{F}_{/B})_{p,q}(\underline{b_1},\dots,\underline{b_p};m;\underline{c_1},\dots,\underline{c_q})(n):=(\boldsymbol{F}_{/A})_{p,q}(\underline{f(b_1)},\dots,\underline{f(b_p)};m;\underline{f(c_1)},\dots,\underline{f(c_q)})(n)$$

对所有 $b_1,\dots,b_p,c_1,\dots,c_q \in B$ 以及 $m,n \in \mathrm{M}_{/B}$。

此外，对于微分分次代数映射 $f: B \to A$，我们有微分分次模 $\mathrm{B}_{/B}$ 和 $\mathrm{B}^*{}_{/B}$；并且，由 $\mathrm{A}_{/A}$ 和 $\mathrm{A}^*{}_{/A}$，我们也得到 $\mathrm{A}_{/B}$ 和 $\mathrm{A}^*{}_{/B}$。微分分次代数映射 f 随即诱导出微分分次双模映射 $\mathrm{f}_{/B}: \mathrm{B}_{/B} \to \mathrm{A}_{/B}$，而通过取对偶，得到微分分次双模映射 $\mathrm{f}^*{}_{/B}: \mathrm{A}^*{}_{/B} \to \mathrm{B}^*{}_{/B}$。

结合前面最后两段，假设 $f: B \to A$ 是一个微分分次代数映射，并且 $\mathrm{F}_{/A}: \mathrm{A}_{/A} \to \mathrm{A}^*{}_{/A}$ 是 A 的一个同伦内积。那么，我们得到一个转移的同伦内积 $f(\mathrm{F})_{/B}: \mathrm{B}_{/B} \to \mathrm{B}^*{}_{/B}$，它属于 B，由 $f(\mathrm{F})_{/B} := \mathrm{f}^*{}_{/B} \bigcirc \mathrm{F}_{/B} \bigcirc \mathrm{f}_{/B}$ 给出，

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{B}_{/B} & \xrightarrow{f_{/B}} & \boldsymbol{A}_{/B} \\ {\scriptstyle f(\boldsymbol{F})_{/B}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{F}_{/B}} \\ \boldsymbol{B}^*_{/B} & \xleftarrow{f^*_{/B}} & \boldsymbol{A}^*_{/B} \end{array}$$

$$(f(\boldsymbol{F})_{/B})_{p,q}(\underline{b_1},\dots,\underline{b_p};m;\underline{c_1},\dots,\underline{c_q})(n) = (\boldsymbol{F}_{/A})_{p,q}(\underline{f(b_1)},\dots,\underline{f(b_p)};f(m);\underline{f(c_1)},\dots,\underline{f(c_q)})(f(n)), \tag{2.10}$$

其中 $b_1,\dots,b_p,m,c_1,\dots,c_q,n \in B$。

最后，对于微分分次代数映射 $f: B \to A$ 和微分分次双模 $\mathrm{M}_{/A}$，霍赫希尔德上链上存在一个诱导的上链映射，$CH(f,\mathrm{M}): \overline{CH}^\bullet(A,\mathrm{M}_{/A}) \to \overline{CH}^\bullet(B,\mathrm{M}_{/B})$，(2.11)

$$CH(f;\boldsymbol{M})(\varphi)(\underline{b_1},\dots,\underline{b_r}) := \varphi(\underline{f(b_1)},\dots,\underline{f(b_r)}), \qquad \forall \varphi \in \overline{CH}^\bullet(A,\boldsymbol{M}_{/A}), b_1,\dots,b_r \in B.$$

由此我们得到以下引理。

引理 2.12。如果 $f: B \to A$ 是微分分次代数映射，且 $\mathrm{F}_{/A}: \mathrm{A}_{/A} \to \mathrm{A}^*{}_{/A}$ 是 $\mathrm{A}_{/A}$ 的一个同伦内积，那么下图交换。

$$\begin{array}{ccccc} \overline{CH}^\bullet(B,\boldsymbol{B}_{/B}) & \xrightarrow{CH(\boldsymbol{f}_{/B})} & \overline{CH}^\bullet(B,\boldsymbol{A}_{/B}) & \xleftarrow{CH(f,\boldsymbol{A})} & \overline{CH}^\bullet(A,\boldsymbol{A}_{/A}) \\ {\scriptstyle CH(f(\boldsymbol{F})_{/B})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle CH(\boldsymbol{F}_{/B})} & & \downarrow{\scriptstyle CH(\boldsymbol{F}_{/A})} \\ \overline{CH}^\bullet(B,\boldsymbol{B}^*_{/B}) & \xleftarrow{CH(\boldsymbol{f}^*_{/B})} & \overline{CH}^\bullet(B,\boldsymbol{A}^*_{/B}) & \xleftarrow{CH(f,\boldsymbol{A}^*)} & \overline{CH}^\bullet(A,\boldsymbol{A}^*_{/A}) \end{array} \tag{2.13}$$

2.14. 霍赫希尔德上同调上的同构。一个值得关注的特殊情形是，同伦内积 $\mathrm{F}: \mathrm{A} \to \mathrm{A}^*$ 诱导了霍赫希尔德上同调上的同构 $\mathrm{F} := HH(\mathrm{F}): HH^\bullet(A,\mathrm{A}) \to HH^\bullet(A,\mathrm{A}^*)$。在这种情况下，我们可以在这些霍赫希尔德上同调之间传递任意结构，尤其可以像定理1.6中那样传递 B 算子。

注意，在方程 (2.13) 中，如果四个水平映射都是拟同构，那么显然，右侧垂直映射 $CH(\mathrm{F}_{/A})$ 是拟同构，当且仅当左侧垂直映射 $CH(f(\mathrm{F})_{/B})$ 是拟同构。

3. BV algebra on Hochschild cohomology

现在我们回顾同伦内积如何在 Hochschild 链同调上诱导出一个 BV代数；参见定理 3.7。关于这一点，我们主要参考 [T2]。我们先定义两个算子 B 和 $\Delta^{\boldsymbol{F}}$。

定义3.1。考虑一个含幺微分分次代数 A。

(1) 我们将 Connes 的 B 算子（更准确地说，Connes 的 B 算子的对偶）定义为 $B : \overline{CH}^\bullet(A, A^*) \to \overline{CH}^\bullet(A, A^*)$，对于 $\varphi \in Hom(A^{\otimes r}, A^*)$，其定义为 $B(\varphi) \in Hom(A^{\otimes r-1}, A^*)$，其中

$$(3.2)\quad (\mathcal{B}(\varphi))(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_{r-1}})(a_r) := \sum_{j=1}^{r} (-1)^{(|\underline{a_j}|+\cdots+|\underline{a_r}|)\cdot(|\underline{a_1}|+\cdots+|\underline{a_{j-1}}|)+|\underline{a_r}|} \cdot \varphi(\underline{a_j}, \dots, \underline{a_r}, \underline{a_1}, \dots, \underline{a_{j-1}})(1),$$

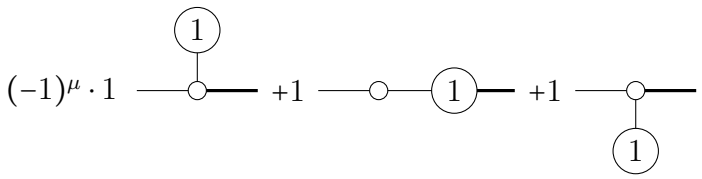
直接但冗长的计算表明，$D \circ B(\varphi) = -B \circ D(\varphi)$。为避免记号上的混淆，我们也将诱导的霍赫希尔德上同调上的映射记作 $B : HH^\bullet(A, A^*) \to HH^\bullet(A, A^*)$。

(2) 接下来，假设我们还存在一个同伦内积 $F = \{F_{p,q} : \underline{A}^{\otimes p} \otimes A \otimes A^{\otimes q} \to A^*\}_{p,q\geq 0}$。然后，我们定义算子 $Z^F := \sum_{p,q\geq 0} Z_p^{F,q} : \overline{CH}^\bullet(A, A) \to \overline{CH}^\bullet(A, A^*)$，其中，对于 $\varphi \in Hom(A^{\otimes r}, A)$，我们令 $Z_p^{F,q}(\varphi) \in \underline{Hom}(A^{\otimes p+r+q-1}, A^*)$ 定义为

$$(3.3)\quad (\mathcal{Z}_{p,q}^{F}(\varphi))(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_{p+r+q-1}})(a_{p+r+q})$$
$$:= \sum_{j=p+1}^{p+q} (-1)^{|F|+(|\varphi|+1)\cdot(|\underline{a_1}|+\cdots+|\underline{a_{j-1}}|)+1} \cdot F_{p,q}\Big(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_p}; 1; \underline{a_{p+1}}, \dots, \underline{a_{j-1}}, \underline{\varphi(a_j, \dots, a_{j+r-1})}, \underline{a_{j+r}}, \dots, \underline{a_{p+r+q-1}}\Big)\Big(a_{p+r+q}\Big)$$
$$+ \sum_{j=1}^{r} (-1)^{(|\underline{a_j}|+\cdots+|\underline{a_{p+r+q}}|)\cdot(|\underline{a_1}|+\cdots+|\underline{a_{j-1}}|)+|\underline{a_{p+r+q}}|+|\varphi|\cdot(|\underline{a_j}|+\cdots+|\underline{a_{j+p+q-1}}|)} \cdot F_{p,q}\Big(\underline{a_j}, \dots, \underline{a_{j+p-1}}; 1; \underline{a_{j+p}}, \dots, \underline{a_{j+p+q-1}}\Big)\Big(\varphi(\underline{a_{p+j+q}}, \dots, \underline{a_{p+r+q}}, \underline{a_1}, \dots, \underline{a_{j-1}})\Big)$$
$$+ \sum_{j=1}^{p} (-1)^{|F|+(|\varphi|+1)\cdot(|\underline{a_1}|+\cdots+|\underline{a_{j-1}}|)+1} \cdot F_{p,q}\Big(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_{j-1}}, \underline{\varphi(a_j, \dots, a_{j+r-1})}, \underline{a_{j+r}}, \dots, \underline{a_{p+r-1}}; 1; \underline{a_{p+r}}, \dots, \underline{a_{p+r+q-1}}\Big)\Big(a_{p+r+q}\Big)$$

可以再次验证，$D \circ Z^F(\varphi) = -(-1)^{|F|} \cdot Z^F \circ D(\varphi)$。为滥用记号起见，我们也将诱导出的霍赫希尔德上同调上的映射记为 $Z^F : HH^\bullet(A, A) \to HH^\bullet(A, A^*)$。

我们指出，Z^F 已在 [T2, 引理 17] 中作为与该符号相关联的运算出现



(3) 设 F 是 A 的一个同伦内积。此外，假设 $F : A \to A^*$ 在霍赫希尔德上同调上诱导一个同构，$F := HH(F) : HH^\bullet(A, A) \to$

$HH^\bullet(A, A^*)$。于是将 $\Delta^F : HH^\bullet(A, A) \to HH^\bullet(A, A)$ 记为复合$\Delta^F := F^{-1} \circ Z^F$,

$$HH^\bullet(A, \boldsymbol{A}) \xrightarrow{\mathcal{Z}^F} HH^\bullet(A, \boldsymbol{A}^*) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} HH^\bullet(A, \boldsymbol{A})$$

引理 3.4. 设 A 是一个含幺微分分次代数。

(1) 在霍赫希尔德上链 $HH^\bullet(A, A^*)$ 上，我们有 $B^2 = 0$。 (2) 假设 $F : A \to A^*$ 是一个同伦内积，并且它在霍赫希尔德上同调上诱导一个同构 $F : HH^\bullet(A, A) \to HH^\bullet(A, A^*)$。那么，$\Delta^F$ 偏离杯积导子的部分就是通常的 Gerstenhaber括号。这里，霍赫希尔德上同调上的杯积定义如下：对于霍赫希尔德上链$\varphi \in Hom(A^{\otimes r}, A)$ 和 $\rho \in Hom(A^{\otimes s}, A)$，其杯积为 $\varphi \smile \rho \in Hom(A^{\otimes r+s}, A)$，其中

$$(\varphi \smile \rho)(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_{r+s}}) := (-1)^{|\rho| \cdot (|\underline{a_1}| + \cdots + |\underline{a_r}|)} \cdot \varphi(\underline{a_1}, \dots, \underline{a_r}) \cdot \rho(\underline{a_{r+1}}, \dots, \underline{a_{r+s}}). \tag{3.5}$$

证明. 对于 (1)，注意到 $B^2 = 0$ 成立，因为归一化霍赫希尔德上链在任意输入为单位元 1 时均为零。(2) 已在 [T2 第 3.3] 节中证明。□

由于引理 3.4 的 (1) 和 (2) 是 BV代数所需的条件，即一个平方为零的算子（此处为 B），其偏离导子的部分构成 Gerstenhaber括号（此处为Δ^F），因此我们作如下定义。

定义 3.6. 设 A 是一个微分分次代数，并设 $F : A \to A^*$ 是 A 的一个同伦内积。若 F 满足以下两个条件，则称 F 为 A的 Poincar´e 对偶结构:

(1) F 在霍赫希尔德上同调上诱导一个分次模的同构 $F_* = HH(F) : HH^\bullet(A, A) \xrightarrow{\simeq} HH^\bullet(A, A^*)$。(2) 经由 F 将 B 从 $HH^\bullet(A, A^*)$ 转移到 $HH^\bullet(A, A)$ 后得到的算子等于 Δ^F，即,

$$\begin{array}{c} HH^\bullet(A, \boldsymbol{A}) \\ \mathcal{F}\left(\quad \overset{\mathcal{B}}{\curvearrowright} \quad \right)\mathcal{F}^{-1} \\ HH^\bullet(A, \boldsymbol{A}^*) \end{array} \qquad \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{B} \circ \mathcal{F} = \Delta^F = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{Z}^F \qquad \begin{array}{c} HH^\bullet(A, \boldsymbol{A}) \\ \overset{\Delta^F}{\smile} \\ \quad \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c} HH^\bullet(A, \boldsymbol{A}) \\ \left(\mathcal{Z}^F \quad \mathcal{F}^{-1} \right) \\ HH^\bullet(A, \boldsymbol{A}^*) \end{array}$$

由此，我们得到以下定理，即 [T2，定理 2]。

定理 3.7. 设 A 是一个微分分次代数，并且设 $F : A \to A^*$ 是 A的庞加莱对偶结构。那么，$HH^\bullet(A, A)$连同杯积和 Δ^F 构成一个 BV代数。

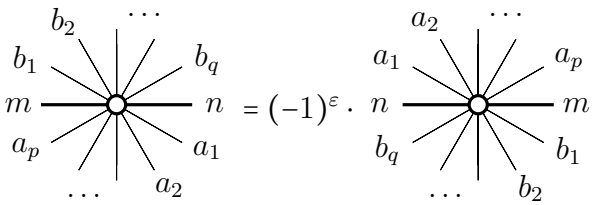
例 3.8. 现在给出几个例子，说明如何判断一个同伦内积是否为庞加莱对偶结构。

(1) 设 F 是微分分次代数 A 的一个内积（即唯一非零的分量是 $F_{0,0}$），并假设 F 在霍赫希尔德上同调上诱导一个同构。那么 F 是一个庞加莱对偶结构。

(为说明这一点，我们注意到这是下面例（2）的一个特例，因为条件 $(D_1F)_{0,\,1} = 0$（利用（2.4））给出 $F(mb)(n) = F(m)(bn)$，而 $(D_{1\quad 1\,0} = 0 \qquad am \quad n \quad = \quad -1 \qquad m \quad na \qquad m\ n\ a\ b \in F)$, 给出 $A_{m,\ n} = 1 \cdot m,\ n = 1\ m \cdot n = -1^{|m| \cdot |n|}\ n \cdot 1,\ m =$ 对所有 , , , , 都有 $F(\ )(\ )\ (\ )^{|a| \cdot (|m| + |n|)} F(\ )(\ )$, 因此 $F(\ )(\ )\ F(\ )(\ )\ F(\ )(\ )\ (\ )\ F(\ )(\ )\ (-1)^{|m| \cdot |n|} F(n)(m)$。)

(2) 设 F 是微分分次代数 A 上的同伦内积，并假设 F 在霍赫希尔德上同调上诱导一个同构。进一步假设 F 在前 $p+1$ 个输入与最后 $q+1$ 个输入的循环旋转下保持不变，即 $\forall p,q \geq 0, \forall a_1,\dots,a_p,m,b_1,\dots,b_q,n \in A$:

$$\boldsymbol{F}_{p,q}(\underline{a_1},\dots,\underline{a_p};m;\underline{b_1},\dots,\underline{b_q})(n) = (-1)^{\varepsilon}\cdot \boldsymbol{F}_{q,p}(\underline{b_1},\dots,\underline{b_q};n;\underline{a_1},\dots,\underline{a_p})(m)$$



其中 $(-1)^{\varepsilon} = (-1)^{(|\underline{a_1}|+\cdots+|\underline{a_p}|+|m|)\cdot(|\underline{b_1}|+\cdots+|\underline{b_q}|+|n|)}$。那么 F 是一个庞加莱对偶结构。此结论已在 [T2，引理 17] 中证明。

(3) 在本文第 5 节的例子中，我们将通过显式计算 F、B 和 $\mathsf{Z}^{\boldsymbol{F}}$，来检验给定的同伦内积 F 是否为庞加莱对偶结构；参见 5.3、5.4 和 5.5 中的例子。

特别值得注意的是，存在一些同伦内积 F，使得 F 是一个同构，但 $\mathsf{F}^{-1}\bigcirc \mathsf{B}\bigcirc \mathsf{F} \neq \Delta^{\boldsymbol{F}}$。我们在 5.5 中给出了这类同伦内积的一个具体例子。

4. Computations of bimodule maps with higher homotopies

本节将针对特定的微分分次代数，给出明确的双模映射以及带有高阶同伦的双模映射。特别地，我们将计算 $H^{\bullet}(S^2;\mathbb{Z}_2)$ 上的同伦内积，它由局部同伦内积的拉回得到。本文其余部分——观察4.4除外——基环始终为 $R = \mathbb{Z}_2$。

例 4.1（$H^{\bullet}(S^2;\mathbb{Z}_2)$ 上不带同伦的内积）。考虑微分分次代数$A := H^{\bullet}(S^2;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2.e \oplus \mathbb{Z}_2.s$，其微分为零，次数为 $|e| = 0$ 和 $|s| = -2$，其中 e 是单位元，且 $s\cdot s = 0$。对于 A 的微分分次模及其对偶微分分次模，我们分别记作 $\mathsf{A} \cong \mathbb{Z}_2.e \oplus \mathbb{Z}_2.s$ 和 $\mathsf{A}^* \cong \mathbb{Z}_2.e^* \oplus \mathbb{Z}_2.s^*$，其中 e^* 和 s^* 分别是 e 和 s 的对偶，满足 $|e^*| = 0$ 和 $|s^*| = 2$，其模结构由$e.e^* = e^*.e = e^*$、$e.s^* = s^*.e = s^*$、$s.e^* = e^*.s = 0$、$s.s^* = s^*.s = e^*$ 给出（见 2.1）。

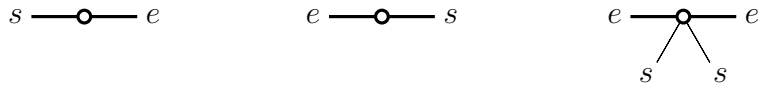
定义微分分次双模映射 $\mathsf{F}:\mathsf{A}\to\mathsf{A}^*$，使得 $\mathsf{F}(s) = e^*$ 且 $\mathsf{F}(e) = s^*$,

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\boldsymbol{A} & = \dots & \longleftarrow & \langle s\rangle & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \langle e\rangle & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow \dots \\
\downarrow \boldsymbol{F} & & & & \searrow^{\boldsymbol{F}} & & & & \searrow^{\boldsymbol{F}} & & & & \\
\boldsymbol{A}^* & = \dots & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \langle e^*\rangle & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \langle s^*\rangle & \longleftarrow \dots
\end{array}$$

因此，$\mathsf{F}:\mathsf{A}\to\mathsf{A}^*$ 是映射 $\mathsf{F}(s)(e) = 1$、$\mathsf{F}(s)(s) = 0$、$\mathsf{F}(e)(e) = 0$、$\mathsf{F}(e)(s) = 1$（换言之，F 由与 s^* 作帽积给出）。可以直接验证，F 是一个微分分次双模映射。注意，将 F 解释为内积 $<,>= \mathsf{F}:\mathsf{A}\otimes\mathsf{A}\to\mathbb{Z}_2$时，唯一非零的内积是 $<s,e>= 1$ 和 $<e,s>= 1$。

例4.2（$H^\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2)$ 内积与同伦）。接下来，我们考虑例 4.1 中相同的代数 A 和模结构 A 与 A^*，但我们为 A 定义一个带有高阶同伦的内积 F（按 2.2 中的意义）。事实上，F 唯一的非零分量为 $F_{0,0}:A\to A^*$ 和 $F_{2,0}:\underline{A}\otimes\underline{A}\otimes A\to A^*$（见 2.2），其定义如下

$$\widetilde{F}_{0,0}(s)(e)=1, \qquad \widetilde{F}_{0,0}(e)(s)=1, \qquad \widetilde{F}_{2,0}(\underline{s},\underline{s};e)(e)=1.$$



再次可以直接验证，F 是一个同伦内积，即它满足由（2.4）给出的 $0=DF=D_1F$ 所要求的所有方程（因为 d，因此 D_0 为零）。具体而言，这些方程为：

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_{0,0}(a\cdot a_1)(\widetilde{a}) &= \widetilde{F}_{0,0}(a)(a_1\cdot\widetilde{a}),\\
\widetilde{F}_{0,0}(a_1\cdot a)(\widetilde{a}) &= \widetilde{F}_{0,0}(a)(\widetilde{a}\cdot a_1),\\
\widetilde{F}_{2,0}(\underline{a_1},\underline{a_2};a\cdot a_3)(\widetilde{a}) &= \widetilde{F}_{2,0}(\underline{a_1},\underline{a_2};a)(a_3\cdot\widetilde{a}),\\
0 &= \widetilde{F}_{2,0}(\underline{a_1},\underline{a_2};a_3\cdot a)(\widetilde{a}) + \widetilde{F}_{2,0}(\underline{a_1},\underline{a_2\cdot a_3};a)(\widetilde{a})\\
&\quad + \widetilde{F}_{2,0}(\underline{a_1\cdot a_2},\underline{a_3};a)(\widetilde{a}) + \widetilde{F}_{2,0}(\underline{a_2},\underline{a_3};a)(\widetilde{a}\cdot a_1)
\end{aligned}$$

对所有 a、$\widetilde{a}\in A$ 以及 a_1、a_2、$a_3\in A$ 均成立。

接下来，我们给出在上链层面计算（三角化）二维空间的同伦内积（在 $\mathbb{Z}_2$ 上）的公式。下面的观察指出，在上链层面定义内积时，高阶同伦会自然出现。

观察4.4. 设 A 是任意交换环 R 上的含幺微分分次代数，使得 $A := A$ 和 A^* 都是 A 上的微分分次模（见 2.1）。现在，取一个固定的闭元 $x\in A^*$，$d(x)=0$。对 $a\in A$，定义 $F:A\to A^*$：令 $F(a)\in A^*$ 在某个 $\widetilde{a}\in A$ 上取值为 $F(a)(\widetilde{a}) := (x\frown a)(\widetilde{a}) = x(a\cdot\widetilde{a})$。

断言：F 是链映射，也是分次右模映射。一般来说，F 不是分次左模映射。若 A 是分次交换的，则 F 是分次左模映射的一个充分条件成立。

证明。首先，F 是链映射，因为对于 $a,\widetilde{a}\in A$ 和 $dx=0$，我们有 $F(da)(\widetilde{a}) = x(da\cdot\widetilde{a}) = x(d(a\cdot\widetilde{a}) - (-1)^{|a|}a\cdot d\widetilde{a}) = (-1)^{|x|+1}dx(a\cdot\widetilde{a}) - (-1)^{|a|}\cdot F(a)(d\widetilde{a}) = -(-1)^{|a|}\cdot(-1)^{|F(a)|+1}\cdot d(F(a))(\widetilde{a}) = (-1)^{|F|}\cdot d(F(a))(\widetilde{a})$。其次，F 是分次右模映射，因为对于 $a,\widetilde{a}\in A, a_1\in A$，我们有 $(F(a).a_1)(\widetilde{a}) = F(a)(a_1\cdot\widetilde{a}) = x(a\cdot a_1\cdot\widetilde{a}) = F(a.a_1)(\widetilde{a})$。为检验 F 何时是分次左模映射，计算 $F(a_1.a)(\widetilde{a}) = x(a_1\cdot a\cdot\widetilde{a})$ 和 $(a_1.F(a))(\widetilde{a}) = (-1)^{|a_1|\cdot(|F(a)|+|\widetilde{a}|)}\cdot F(a)(\widetilde{a}\cdot a_1) = (-1)^{|a_1|\cdot(|F|+|a|+|\widetilde{a}|)}\cdot x(a\cdot\widetilde{a}\cdot a_1)$。因此，F 一般不是分次左模映射。此外，如果 $a_1\cdot a\cdot\widetilde{a} = (-1)^{|a_1|\cdot(|a|+|\widetilde{a}|)}a\cdot\widetilde{a}\cdot a_1$ 对所有 $a,\widetilde{a},a_1$ 都成立，那么 $(a_1.F(a))(\widetilde{a}) = (-1)^{|a_1|\cdot|F|}\cdot F(a_1.a)(\widetilde{a})$，于是 F 将是分次左模映射。□

特别地，假设 X 是一个闭合定向流形，且 R 是一个交换环。为了计算 $HH^\bullet(C^\bullet(X;R);(C^\bullet(X;R))^*)$上的BV代数，可以尝试将余链与 X 的基本循环 x 配对，以构造适当的微分分次双模映射$F = x\frown -: C^\bullet(X;R)\to C_\bullet(X;R)\overset{incl}{\hookrightarrow}(C^\bullet(X;R))^*$。然而，上述观察表明，在链（余链）级上进行配对一般并不是微分分次双模映射，因此

无法在霍赫希尔德上链上诱导出链映射。解决这一问题的一种方法是为左模结构提供高阶同伦，也就是说，提供一个同伦内积，这样便能在霍赫希尔德上链上得到相应的链映射。本文针对 S^2 在系数为 $\mathbb{Z}_2$ 的情形下采用了这种方法。

例 4.5（0-单形）。设 $A^{[0]} := \mathbb{Z}_2.e_0$，其中 e_0 是单位元。一个同伦内积 $\mathrm{F}^{[0]} : \mathrm{A}^{[0]} \to (\mathrm{A}^{[0]})^*$ 由 $\mathrm{F}^{[0]}(e_0)(e_0) = 1$给出。

我们也会以显而易见的方式改变上标，即，微分分次代数 $A^{[1]} := \mathbb{Z}_2.e_1$ 具有同伦内积 $\mathrm{F}^{[1]} : \mathrm{A}^{[1]} \to (\mathrm{A}^{[1]})^*$，$\mathrm{F}^{[1]}(e_1)(e_1) = 1$，等等。

例 4.6（1-单形）。设 $A^{[01]} := \mathbb{Z}_2.e_0 \oplus \mathbb{Z}_2.e_1 \oplus \mathbb{Z}_2.b_{01}$，其中 $|e_0| = |e_1| = 0$ 和$|b_{01}| = -1$，微分为 $d(e_0) = d(e_1) = b_{01}$。乘积是单纯上链的通常杯积，即 $e_0 \cdot e_0 = e_0$、$e_1 \cdot e_1 = e_1$和 $e_0 \cdot b_{01} = b_{01} \cdot e_1 = b_{01}$。注意，$A^{[01]}$ 的单位元是 $e_0 + e_1$。

我们想定义一个内积 F，其最低阶分量仅在 $\mathrm{F}(e_0)(b_{01}) = \mathrm{F}(b_{01})(e_1) = 1$ 时非零。注意，F 不是链映射，但对所有 $a, \widetilde{a} \in A^{[01]}$，$\mathrm{F}(d(a))(\widetilde{a}) + \mathrm{F}(a)(d(\widetilde{a})) = \mathrm{F}^{[0]}(a)(\widetilde{a}) + \mathrm{F}^{[1]}(a)(\widetilde{a})$。此外，F 是分次右模映射，即对所有 $a, \widetilde{a}, a_1 \in A^{[01]}$，$\mathrm{F}(a \cdot a_1)(\widetilde{a}) = \mathrm{F}(a)(a_1 \cdot \widetilde{a})$；但 F 不是分次左模映射，因为 $\mathrm{F}(e_0 \cdot e_0)(b_{01}) = 1 \neq 0 = \mathrm{F}(e_0)(b_{01} \cdot e_0)$。

存在一个归纳过程（每一步都需要作出选择），可以得到高阶同伦，为 F 配备左模同伦，使其成为一个同伦内积，除去 $\mathrm{F}^{[0]}$ 和 $\mathrm{F}^{[1]}$ 以外（它们取自例 4.5，并被解释为映射 $\mathrm{A}^{[01]} \to (\mathrm{A}^{[01]})^*$）。这一过程见 [TZS，命题 3.1.2]。进行归纳可得到一个映射序列，最早发表于 [TZS，命题 B.2]:

$$(4.7) \qquad \forall k \geq 0 : \quad \boldsymbol{F}^{[01]}_{k,0}(\underline{b_{01}}, \ldots, \underline{b_{01}}; e_0)(b_{01}) = 1, \qquad \boldsymbol{F}^{[01]}_{k,0}(\underline{b_{01}}, \ldots, \underline{b_{01}}; b_{01})(e_1) = 1,$$



所有其他内积均为零。注意，这解决了上述 $\mathrm{F}^{[01]}_{0,0}$ 不是分次左模映射的问题，因为现在 $\mathrm{F}^{[01]}_{0,0}$ 在同伦 $\mathrm{F}^{[01]}_{1,0}$ 下是一个分次左模映射；例如：

$$(\mathcal{D}\boldsymbol{F}^{[01]})_{1,0}(\underline{e_0}; e_0)(b_{01}) = \boldsymbol{F}^{[01]}_{1,0}(\underline{d(e_0)}; e_0)(b_{01}) + \boldsymbol{F}^{[01]}_{1,0}(\underline{e_0}; d(e_0))(b_{01}) + \boldsymbol{F}^{[01]}_{0,0}(e_0 \cdot e_0)(b_{01}) + \boldsymbol{F}^{[01]}_{0,0}(e_0)(b_{01} \cdot e_0) = 1 + 0 + 1 + 0 = 0.$$

来自 [TZS，命题 B.2]，我们也将在附录 A中证明，有：

$$(4.8) \qquad \mathcal{D}\boldsymbol{F}^{[01]} = \boldsymbol{F}^{[0]} + \boldsymbol{F}^{[1]}$$

同样，我们需要以显而易见的方式改变上标，即，对于微分分次代数$A^{[12]}$，存在映射 $\mathrm{F}^{[12]}$，其定义为将上述式子中的 0 和 1 分别替换为 1 和 2，依此类推。

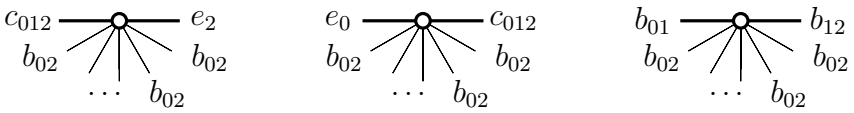
例 4.9（2-单形）。现在我们描述 2-单形的内积映射，它扩展了前面关于 0-单形和 1-单形的两个例子。令 $A^{[012]} := \mathbb{Z}_2.e_0 \oplus \mathbb{Z}_2.e_1 \oplus \mathbb{Z}_2.e_2 \oplus \mathbb{Z}_2.b_{01} \oplus \mathbb{Z}_2.b_{02} \oplus \mathbb{Z}_2.b_{12} \oplus \mathbb{Z}_2.c_{012}$ with $|e_j| = 0$, $|b_{ij}| = -1$ and $|c_{012}| = -2$, 且

微分 $d(e_0) = b_{01} + b_{02}$, $d(e_1) = b_{01} + b_{12}$, $d(e_2) = b_{02} + b_{12}$ and $d(b_{ij}) = c_{012}$ 对所有$0 \le i < j \le 2$成立。乘法仅在以下情况下非零:

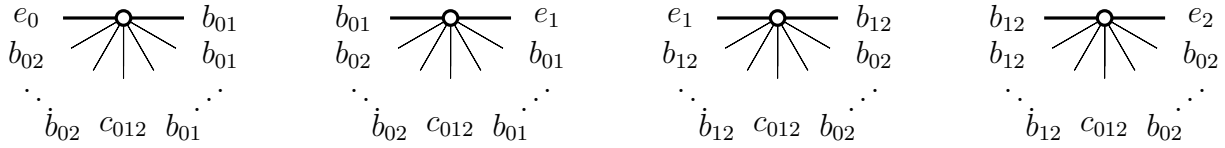
$$\forall j: \quad e_j \cdot e_j = e_j, \quad \forall i < j: \quad e_i \cdot b_{ij} = b_{ij}, \quad b_{ij} \cdot e_j = b_{ij}, \tag{4.10}$$
$$e_0 \cdot c_{012} = c_{012}, \quad c_{012} \cdot e_2 = c_{012}, \quad b_{01} \cdot b_{12} = c_{012}.$$

现在，按照 [TZS 的命题 3.1.2], 中的步骤（该步骤使用了局部性），我们定义映射 $\mathrm{F}^{[012]}_{k\,0}$，其唯一的非零映射由以下方程（ 4.11 ） - （ 4.18 ）给出:

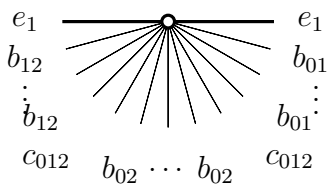
$$\forall k \ge 0: \quad \boldsymbol{F}^{[012]}_{k,0}(\underline{b_{02}}, \dots, \underline{b_{02}}; c_{012})(e_2) = 1, \tag{4.11}$$
$$\boldsymbol{F}^{[012]}_{k,0}(\underline{b_{02}}, \dots, \underline{b_{02}}; e_0)(c_{012}) = 1, \tag{4.12}$$
$$\boldsymbol{F}^{[012]}_{k,0}(\underline{b_{02}}, \dots, \underline{b_{02}}; b_{01})(b_{12}) = 1, \tag{4.13}$$



$$\forall k \ge 0: \forall 1 \le \ell \le k+1: \quad \boldsymbol{F}^{[012]}_{k+1,0}(\underline{b_{01}}, \dots, \underline{b_{01}}, \underbrace{\underline{c_{012}}}_{\ell\text{th}}, \underline{b_{02}}, \dots, \underline{b_{02}}; e_0)(b_{01}) = 1, \tag{4.14}$$
$$\boldsymbol{F}^{[012]}_{k+1,0}(\underline{b_{01}}, \dots, \underline{b_{01}}, \underbrace{\underline{c_{012}}}_{\ell\text{th}}, \underline{b_{02}}, \dots, \underline{b_{02}}; b_{01})(e_1) = 1, \tag{4.15}$$
$$\boldsymbol{F}^{[012]}_{k+1,0}(\underline{b_{02}}, \dots, \underline{b_{02}}, \underbrace{\underline{c_{012}}}_{\ell\text{th}}, \underline{b_{12}}, \dots, \underline{b_{12}}; e_1)(b_{12}) = 1, \tag{4.16}$$
$$\boldsymbol{F}^{[012]}_{k+1,0}(\underline{b_{02}}, \dots, \underline{b_{02}}, \underbrace{\underline{c_{012}}}_{\ell\text{th}}, \underline{b_{12}}, \dots, \underline{b_{12}}; b_{12})(e_2) = 1, \tag{4.17}$$



$$\forall k \ge 0: \forall 1 \le \ell_1 < \ell_2 \le k+2: \tag{4.18}$$
$$\boldsymbol{F}^{[012]}_{k+2,0}(\underline{b_{01}}, \dots, \underline{b_{01}}, \underbrace{\underline{c_{012}}}_{\ell_1\text{th}}, \underline{b_{02}}, \dots, \underline{b_{02}}, \underbrace{\underline{c_{012}}}_{\ell_2\text{th}}, \underline{b_{12}}, \dots, \underline{b_{12}}; e_1)(e_1) = 1.$$



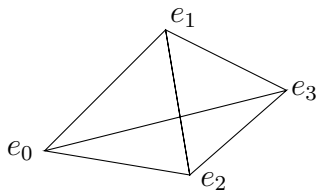
我们声称 m，使得下列方程成立，证明见附录 A:

$$\mathcal{D}\boldsymbol{F}^{[012]} = \boldsymbol{F}^{[01]} + \boldsymbol{F}^{[02]} + \boldsymbol{F}^{[12]} \tag{4.19}$$

与前面一样，上述结论也适用于上标的显然变体，例如， $A^{[123]}$ 其中映射 $\mathbf{F}^{[123]}$ 由将上述内容中的 0、1 和 2 分别替换为 1、2 和 3 得到，等等。

例 4.20（带有同伦的 $C^\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2)$ 内积）。现在我们使用二维球面的四面体剖分。更确切地说，我们设

$$A = \bigoplus_{0\le j\le 3} \mathbb{Z}_2.e_j \oplus \bigoplus_{0\le i<j\le 3} \mathbb{Z}_2.b_{ij} \oplus \bigoplus_{0\le i<j<l\le 3} \mathbb{Z}_2.c_{ijl}$$



其中 $|e_j| = 0$、$|b_{ij}| = -1$ 和 $|c_{ijl}| = -2$ 以及微分 $d(e_j) = \sum_{i\neq j} b_{\{ij\}}$、$d(b_{ij}) = \sum_{l\neq i,\ j} c_{\{ijl\}}$，还有 $d(c_{ijl}) = 0$，其中括号“{}”表示按升序排列的指标，即 $b_{\{ij\}} = \begin{cases} b_{ij} & i<j \\ b_{ji} & j<i \end{cases}$，对于，对于，$c_{\{ijl\}}$ 也类似。乘法类似于（4.10），其中指标“012”替换为任意 $0 \le i < j < l \le 3$:

$$\begin{aligned} &\forall j: \quad e_j \cdot e_j = e_j, \quad \forall i<j: \quad e_i \cdot b_{ij} = b_{ij}, \quad b_{ij}\cdot e_j = b_{ij}, \\ &\forall i<j<l: \quad e_i \cdot c_{ijl} = c_{ijl}, \quad c_{ijl}\cdot e_l = c_{ijl}, \quad b_{ij}\cdot b_{jl} = c_{ijl}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

且所有其他乘法均为零。特别注意， A 的单位元是 $e_0+e_1+e_2+e_3$。我们将 $\mathsf{A} := A$ 上的同伦内积 F 定义为：将 (4.11)-(4.18) 中的“012”替换为任意 $0 \le i < j < l \le 3$，即

$$\boldsymbol{F} := \boldsymbol{F}^{[012]} + \boldsymbol{F}^{[013]} + \boldsymbol{F}^{[023]} + \boldsymbol{F}^{[123]}. \tag{4.22}$$

断言：F 是一个同伦内积，即 $\mathsf{DF} = 0$。

证明。我们计算 $\mathsf{DF} = \mathsf{DF}^{[012]} + \mathsf{DF}^{[013]} + \mathsf{DF}^{[023]} + \mathsf{DF}^{[123]}$。我们断言，可以用方程 (4.19) 来计算这个表达式。此点并非显然，因为 (4.19) 中的 D 对应微分分次代数 $A^{[012]}$，而我们需要应用对应于 A 的 D。

要说明 (4.19) 对微分分次代数 A 成立，请注意，例如，$\mathsf{DF}^{[012]}(a_1,\dots)(a_r)$ 会对输入 $a_j \in A$ 施加微分或乘法（如 (2.3) 和 (2.4) 所述）。现在，如果任一输入 a_j 是 A 的生成元，且其指标中含有 3（例如$b_{13} \in A$），那么施加微分或乘法后得到的将是指标中含有 3 的生成元之和，因此对其应用 $\mathsf{DF}^{[012]}$ 会得到零。另一方面，如果应用于 $\mathsf{DF}^{[012]}$ 的所有输入 a_j 都仅由指标为 0、1 和 2 的生成元给出，那么对其应用 $\mathsf{DF}^{[012]}$ 所得结果与对 $A^{[012]}$所得结果一致，因为 A 中的乘法与 $A^{[012]}$中的乘法相同，而 A 中的微分与 $A^{[012]}$ 中的微分相同，至多相差指标为 3 的生成元。（例如，在 $\mathsf{DF}^{[012]}$ 中应用 $d(b_{12}) = c_{012} + c_{123}$，作用于 c_{123} 时会得到零，而作用于$c_{012} = d_{A^{[012]}}(b_{12})$ =时则与 (4.19) 一致（$A^{[012]}$中 b_{12} 的微分）。）

因此，$\mathsf{DF} = \mathsf{DF}^{[012]} + \mathsf{DF}^{[013]} + \mathsf{DF}^{[023]} + \mathsf{DF}^{[123]} = (\mathsf{F}^{[01]} + \mathsf{F}^{[02]} + \mathsf{F}^{[12]}) + (\mathsf{F}^{[01]} + \mathsf{F}^{[03]} + \mathsf{F}^{[13]}) + (\mathsf{F}^{[02]} + \mathsf{F}^{[03]} + \mathsf{F}^{[23]}) + (\mathsf{F}^{[12]} + \mathsf{F}^{[13]} + \mathsf{F}^{[23]}) = 0$. □

命题 4.23. 设 A 是例 4.20 中的微分分次代数，并设 $B = H^\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2.e \oplus \mathbb{Z}_2.s$ 是例4.1和例4.2中的微分分次代数。那么，映射 $f : B \to A, f(e) := e_0 + e_1 + e_2 + e_3$ 和 $f(s) := c_{012}$ 是微分分次代数拟同构。

通过映射 f，将 (4.22) 中定义的同伦内积 $\mathbf{F}^{/A}$ 转移，得到 $\sim_{f(\mathbf{F})^{/B}} = \mathbf{F}^{/B}$，其中 $\mathbf{F}^{/B}$ 是例4.2 中方程 (4.3) 定义的同伦内积。

证明。将 (4.22) 中的 $\mathbf{F}^{/A}$ 转移后得到的映射，是先对来自 B 的输入应用 f，再应用 $\mathbf{F}^{/A}$；参见 (2.10)。由于 f 的像由 c_{012} 和 $e_0 + e_1 + e_2 + e_3$ 张成，根据 (4.11)-(4.18)，应用 f 后唯一非零的分量为：

$$\boldsymbol{F}^{[012]}_{0,0}(c_{012})(e_2) = 1, \quad \boldsymbol{F}^{[012]}_{0,0}(e_0)(c_{012}) = 1, \quad \boldsymbol{F}^{[012]}_{2,0}(\underline{c_{012}}, \underline{c_{012}}; e_1)(e_1) = 1.$$

因此，我们恰好得到 (4.3) 中 $\mathbf{F}$ 的非零分量，对应于 $f(\mathbf{F})^{/B}$。 □

5. Computations of the BV algebras

现在，我们计算第 4 节例 4.1 和例 4.2 中所考虑的同伦内积在霍赫希尔德上同调上诱导的 BV 代数。具体而言，我们将通过计算 $HH^\bullet(H^\bullet, \mathbf{H}^\bullet)$ 和 $HH^\bullet(H^\bullet, \mathbf{H}_\bullet)$，完成定理 1.6 中关于二维球面的计算，其中 $H^\bullet = \mathbf{H}^\bullet = H^\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2)$ 和 $\mathbf{H}_\bullet = H_\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2)$；并检验定理 1.6 中所述的 (1.7) 里映射 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{F}$ 的公式。本节的基环为 $R = \mathbb{Z}_2$。

5.1. Hochschild 上同调 $HH^\bullet(H^\bullet, \mathbf{H}^\bullet)$ 与杯积。记 $H^\bullet = H^\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2.e \oplus \mathbb{Z}_2.s$，它来自例 4.1，其中 $|e| = 0$ 和 $|s| = -2$。归一化霍赫希尔德上链 $\overline{CH}^\bullet(H^\bullet, \mathbf{H}^\bullet)$ 的生成元为 ϕ_k, ψ_k，对于 $k \geq 0$，定义为

$$\phi_k(\underbrace{\underline{s}, \ldots, \underline{s}}_{k \text{ many}}) := e, \qquad \psi_k(\underbrace{\underline{s}, \ldots, \underline{s}}_{k \text{ many}}) := s.$$

注意，$|\phi_k| = k$, $|\psi_k| = k - 2$，因为移位生成元 s 的次数为 $|\underline{s}| = -1$。应用 Hochschild 微分（见 2.1，并使用 $d = 0$ 和 $s \cdot s = 0$, $s \cdot e = e \cdot s = s$），可知所有 ϕ_k 和 ψ_k 都是闭的（在 $\mathbb{Z}_2$ 上）。因此，

$$HH^\bullet(H^\bullet, \boldsymbol{H}^\bullet) \cong \bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{Z}_2.\phi_k \oplus \bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{Z}_2.\psi_k.$$

容易验证，杯积 (3.5) 为 $\phi_k \smile \phi_\ell = \phi_{k+\ell}$, $\psi_k \smile \psi_\ell = 0$ 和 $\phi_k \smile \psi_\ell = \psi_\ell \smile \phi_k = \psi_{k+\ell}$。

5.2. 霍赫希尔德上同调 $HH^\bullet(H^\bullet, \mathbf{H}_\bullet)$ 与 Connes 的 B 算子。将例 4.1 中的 $\mathbf{H}_\bullet = H_\bullet(S^2;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2.e^* \oplus \mathbb{Z}_2.s^*$ 记为 $|e^*| = 0$，并且 $|s^*| = 2$ 和 $s.e^* = e^*.s = 0$, $s.s^* = s^*.s = e^*$。归一化霍赫希尔德上链 $\overline{CH}^\bullet(H^\bullet, \mathbf{H}_\bullet)$ 的生成元为 θ_k, χ_k，其中 $k \geq 0$ 定义为

$$\theta_k(\underbrace{\underline{s}, \ldots, \underline{s}}_{k \text{ many}}) := s^*, \qquad \chi_k(\underbrace{\underline{s}, \ldots, \underline{s}}_{k \text{ many}}) := e^*.$$

注意，$|\theta_k| = k + 2$, $|\chi_k| = k$。所有 θ_k 和 χ_k 在 $\mathbb{Z}_2$上都关于霍赫希尔德上链微分封闭，因此

$$HH^\bullet(H^\bullet, \boldsymbol{H}_\bullet) \cong \bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{Z}_2.\theta_k \oplus \bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{Z}_2.\chi_k.$$

而 $HH^\bullet(H^\bullet, H^\bullet)$具有杯积（3.5），$HH^\bullet(H^\bullet, H_\bullet)$则具有 Connes 的 B 算子（3.2）。我们由（3.2）计算得 B 为 (B(φ))($s, \ldots, s$)(a) $:= r \cdot \varphi(s, \ldots, \underbrace{s}_{(r-1) \text{ many}}, a, s, \ldots, s)(e)$,¬11111111¬11111111¶

将其应用于 θ_k 和 χ_k 可得:

$$\mathcal{B}(\theta_r) = 0, \quad \mathcal{B}(\chi_r) = r \cdot \theta_{r-1}.$$

这验证了定理1.6中给出的 B 的表达式。

5.3. 由例 4.1 和 BV余微分 $\Delta^{\boldsymbol{F}}$诱导的 F。例 4.1 中的微分分次双模映射 F : $H^\bullet \to H_\bullet$、F(s) = e^* 和 F(e) = s^*，通过式 (2.6) 诱导出 Hochschild上同调之间的映射 F : $HH^\bullet(H^\bullet, H^\bullet) \to HH^\bullet(H^\bullet, H_\bullet)$。由于 F 只有最低阶分量 $F_{0,0}$，因此这仅仅是

$$\mathcal{F}(\phi_k) = \boldsymbol{F} \circ \phi_k = \theta_k, \quad \mathcal{F}(\psi_k) = \boldsymbol{F} \circ \psi_k = \chi_k.$$

F 显然是一个同构，并验证了定理1.6中的 F。

我们还计算了 $\Delta^{\boldsymbol{F}}$，并检查它是否等于转移到 $HH^\bullet(H^\bullet, H^\bullet)$上的 B，即满足定义 3.6 中 Poincar´e 对偶结构的条件 (2)。由 (3.3) 可得，对于$\varphi \in Hom(H^{\bullet \otimes r}, H^\bullet)$，$Z^{\boldsymbol{F}}(\varphi)(s, \ldots, s)(a) = r \cdot F(e)(\varphi(s, \ldots, a, \ldots, s))$，从而得到

$$\mathcal{Z}^{\boldsymbol{F}}(\phi_k) = 0 = \mathcal{B}(\theta_k) = \mathcal{B} \circ \mathcal{F}(\phi_k), \quad \mathcal{Z}^{\boldsymbol{F}}(\psi_k) = k \cdot \theta_{k-1} = \mathcal{B}(\chi_k) = \mathcal{B} \circ \mathcal{F}(\psi_k).$$

因此，$F^{-1} \bigcirc B \bigcirc F = F^{-1} \bigcirc Z^{\boldsymbol{F}} = \Delta^{\boldsymbol{F}}$。

~5.4. 由例4.2诱导的 F 与 BV余微分 $\Delta^{\boldsymbol{F}}$。考虑来自例4.2的微分分次双模~映射 F : $H^\bullet \to H_\bullet$。由于 F = $F_{0,\,0}$ +$F_{2,0}$ 是 $F_{0,0}(s)$ = e^*，$F_{0,0}(e)$ = s^*，并且~还有一个额外的同伦 $F_{2,0}$，它仅在 $F_{2,0}(s, s; e) := e^*$ 时非零（见 (4.3)），我们得到

$$\widetilde{\mathcal{F}}(\phi_k) = \widetilde{\boldsymbol{F}}_{0,0} \circ \phi_k + \widetilde{\boldsymbol{F}}_{2,0}(-, -; \phi_k(-)) = \theta_k + \chi_{k+2}, \quad \widetilde{\mathcal{F}}(\psi_k) = \widetilde{\boldsymbol{F}}_{0,0} \circ \psi_k = \chi_k.$$

~这证实了定理1.6中的 F。正如定理1.6中所指出的，F 是一个同构，其~逆映射 F^{-1}由 $F^{-1}(\theta_k) = \phi_k + \psi_{k+2}$和 $F^{-1}(\chi_k) = \psi_k$给出。

我们还验证了在这种情况下 ~$F^{-1} \bigcirc B \bigcirc$ ~F = $\Delta^{\widetilde{F}}$。由 (3.3) 可得，对于 $\varphi \in Hom(H^{\bullet \otimes r}, H^\bullet)$，有

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{\widetilde{\boldsymbol{F}}}(\varphi)(\underline{s}, \ldots, \underline{s})(a) = & r \cdot \widetilde{\boldsymbol{F}}_{0,0}(e)(\varphi(\underline{s}, \ldots, \underline{a}, \ldots, \underline{s})) + r \cdot \widetilde{\boldsymbol{F}}_{2,0}(\underline{s}, \underline{s}; e)(\varphi(\underline{s}, \ldots, \underline{a}, \ldots, \underline{s})) \\ & + \widetilde{\boldsymbol{F}}_{2,0}(\underline{\varphi(\underline{s}, \ldots, \underline{s})}, \underline{s}; e)(a) + \widetilde{\boldsymbol{F}}_{2,0}(\underline{s}, \underline{\varphi(\underline{s}, \ldots, \underline{s})}; e)(a)\end{aligned}$$

从而得到

$$\mathcal{Z}^{\widetilde{\boldsymbol{F}}}(\phi_k) = 0 + k \cdot \theta_{k+1} + 0 + 0 = k \cdot \theta_{k+1}, \quad \mathcal{Z}^{\widetilde{\boldsymbol{F}}}(\psi_k) = k \cdot \theta_{k-1} + 0 + \chi_{k+1} + \chi_{k+1} = k \cdot \theta_{k-1}.$$

~由于 B ○ F(ϕ_k) =B($\theta_k + \chi_{k+2}$) = $k \cdot \theta_{k+1}$且 B ○ F (ψ_k) =B(χ_k) = $k \cdot \theta_{k-1}$，这表明~$Z^{\boldsymbol{F}}$=B ○ F，因此 $F^{-1} \bigcirc B \bigcirc F = F^{-1} \bigcirc Z^{\boldsymbol{F}} = \Delta^{\boldsymbol{F}}$。具体而言，$\Delta^{\boldsymbol{F}}$由下式给出:

$$\begin{aligned}\Delta^{\widetilde{\boldsymbol{F}}}(\phi_k) &= \widetilde{\mathcal{F}}^{-1} \circ \mathcal{Z}^{\widetilde{\boldsymbol{F}}}(\phi_k) = \widetilde{\mathcal{F}}^{-1}(k \cdot \theta_{k+1}) = k \cdot (\phi_{k+1} + \psi_{k+3}) \\ \Delta^{\widetilde{\boldsymbol{F}}}(\psi_k) &= \widetilde{\mathcal{F}}^{-1} \circ \mathcal{Z}^{\widetilde{\boldsymbol{F}}}(\psi_k) = \widetilde{\mathcal{F}}^{-1}(k \cdot \theta_{k-1}) = k \cdot (\phi_{k-1} + \psi_{k+1})\end{aligned}$$

~这证实了根据 (1.9) 得到的 Δ，从而得出定理1.6。

5.5. 一个并非庞加莱对偶结构的同伦内积示例。本节最后给出一个同伦内积示例，它并非庞加莱对偶结构，因为它不满足定义 3.6 中的条件 (2)（但满足条件 (1)）。因此，我们无法在霍赫希尔德上同调$HH^\bullet(A, A)$ 上得到一个底层代数为 A 的 BV代数，因为不存在 Δ 算子，只有一个平方为零的算子 $F^{-1} \circ B \circ F$，以及另一个算子 $\Delta^{\boldsymbol{F}}$，其偏离导子性质的部分是一个 Gerstenhaber括号；参见引理 3.4。

令 $A = \mathbb{Z}_2.e \oplus \mathbb{Z}_2.b \oplus \mathbb{Z}_2.c$ 带有零微分，$|e| = 0$、$|b| = -1$、$|c| = -2$，并且其中 e 是单位元，$b \cdot b = c$，其余所有乘积均为零。我们记 A^* 为 $A^* = \mathbb{Z}_2.e^* \oplus \mathbb{Z}_2.b^* \oplus \mathbb{Z}_2.c^*$，其中 e^*、b^*、c^* 分别是 e、b、c 的对偶，因此 $|e^*| = 0$、$|b^*| = 1$、$|c^*| = 2$。定义同伦内积 F，其唯一非零分量为 $F_{0,0}$ 和 $F_{3,0}$，如下给出

$$\boldsymbol{F}_{0,0}(c)(e) = \boldsymbol{F}_{0,0}(b)(b) = \boldsymbol{F}_{0,0}(e)(c) = 1,$$
$$\boldsymbol{F}_{3,0}(\underline{c}, \underline{b}, \underline{c}; e)(e) = \boldsymbol{F}_{3,0}(\underline{b}, \underline{b}, \underline{b}; c)(e) = \boldsymbol{F}_{3,0}(\underline{b}, \underline{b}, \underline{b}; e)(c) = \boldsymbol{F}_{3,0}(\underline{b}, \underline{b}, \underline{b}; b)(b) = 1.$$

可以直接验证，同伦内积 $0 = DF = D_1F$ 的条件均得到满足，其中 D_1 由 (2.4) 给出。

注意，F 在霍赫希尔德上链 $F : \overline{CH}^\bullet(A,A) \xrightarrow{\simeq} \overline{CH}^\bullet(A, A^*)$上诱导出一个同构，因为 $F_{0,0} : A \to A^*$ 是一个同构，因此 F 满足 3.6 条件 (1)。

接下来我们证明 3.6 条件 (2) 不成立，即 $B \circ F \neq Z^{\boldsymbol{F}}$。考虑 $\varphi \in Hom(A^{\otimes 0}, A)$，$\varphi(1) = e$。注意，$\varphi$ 是霍赫希尔德上链 $\varphi \in \overline{CH}^\bullet(A, A)$中的一个闭元。将 φ 代入 (3.3)，得出 $Z^{\boldsymbol{F}}(\varphi) = 0$，因为 (3.3) 中每个单独的求和项都为零。接下来，为了计算 $F(\varphi)$，我们看到 $F(\varphi)$的唯一非零取值是（在 F 的模输入位置带有“e”的那些）：

$$\mathcal{F}(\varphi)(1) = \boldsymbol{F}_{0,0}(\varphi(1)) = c^*$$
$$\mathcal{F}(\varphi)(\underline{c}, \underline{b}, \underline{c}) = \boldsymbol{F}_{3,0}(\underline{c}, \underline{b}, \underline{c}; \varphi(1)) = e^*$$
$$\mathcal{F}(\varphi)(\underline{b}, \underline{b}, \underline{b}) = \boldsymbol{F}_{3,0}(\underline{b}, \underline{b}, \underline{b}; \varphi(1)) = c^*$$

将 (3.2) 中的 B 应用于此处（注意，本例中 A 里的单位元记作 e），只有中间项不为零，由此得到唯一非零的求值：

$$\mathcal{B}(\mathcal{F}(\varphi))(\underline{c}, \underline{b})(c) = 1, \quad \mathcal{B}(\mathcal{F}(\varphi))(\underline{b}, \underline{c})(c) = 1, \quad \mathcal{B}(\mathcal{F}(\varphi))(\underline{c}, \underline{c})(b) = 1.$$

于是，$B(F(\varphi))$ 非零，且在 $\overline{CH}^\bullet(A, A^*)$ 中是闭的；这要么是因为 φ 是闭的且 $B \circ F$ 是链映射，要么可由直接检查得出。

断言：$B(F(\varphi))$ 在 $\overline{CH}^\bullet(A, A^*)$ 中不是恰当的。

该断言意味着，在 $HH^\bullet(A, A^*)$ 中，$B \circ F(\varphi) \neq 0 = Z^{\boldsymbol{F}}(\varphi)$，因此 F 不是庞加莱对偶结构，因为它不满足定义 3.6 中的条件 (2)。

断言的证明：为证明该断言，注意到 $d = 0 \in A$ 意味着，2.1 中的 Hochschild 微分 $D = D_0 + D_1 = D_1$ 必须增加输入 A 的张量因子数量。因此，任何使 $B(F(\varphi))$ 成为恰当元的 $\widetilde{\varphi}$，即满足 $D(\widetilde{\varphi}) = B(F(\varphi))$ 的 $\widetilde{\varphi}$，都必须具有恰好含一个张量输入的非零分量。由于 $B(F(\varphi))$ 的次数为 $\| = 3$，因此必有 $|\widetilde{\varphi}| = 4$。然而，$\overline{CH}^\bullet(A, A^*)$ 中所有只有一个或没有输入的霍赫希尔德上链的次数都是 ≤ 3。因此，$B(F(\varphi))$ 不可能是恰当元。□

AppendixA. Proof of equations (4.8) 和 (4.19) 的证明

在本附录中，我们证明恒等式 (4.8)，即对于例 4.6 中由 (4.7) 给出的映射 $\mathrm{F}^{[01]}=$，有 $\mathrm{DF}^{[01]}=\mathrm{F}^{[0]}+\mathrm{F}^{[1]},$；并证明恒等式 (4.19)，即对于例 4.9 中由 (4.11)-(4.18) 给出的映射 $\mathrm{F}^{[012]}$，有 $\mathrm{DF}^{[012]}=\mathrm{F}^{[01]}+\mathrm{F}^{[02]}+\mathrm{F}^{[12]},$。本附录中的基环为 $R=\mathbb{Z}_2$。

A.1. 预备知识。任意 $\mathrm{F}_{p,q}$ 都是一个映射 $\mathrm{F}_{p,q}:\underline{A}^{\otimes p}\otimes\mathrm{A}\otimes\underline{A}^{\otimes q}\to\mathrm{A}^*$，它是 $\mathrm{F}_{p,q}\in(A^*)^{\otimes p}\otimes\mathrm{A}^*\otimes(A^*)^{\otimes q}\otimes\mathrm{A}^*$的一个元素。考虑由生成元 $e_{\underline{0}}$、e_1、b_{01}分别生成的 $A^{[01]}A^{[012]}$，以及由生成元 e_0、e_1、e_2、b_{01}、b_{12}、b_{02}、c_{012}生成的 $\overline{b_{12}b_{02}}c_{012}$）。对于多重指标 $I\in\{0,1,2,01,02,12,012\}$，定义 a_I^* 为 $a_0^*:=e_0^*$、$a_1^*:=e_1^*$、$a_2^*:=e_2^*$、$a_{01}^*:=b_{01}^*$、$a_{02}^*:=b_{02}^*$、$a_{12}^*:=b_{12}^*$、$a_{012}^*:=c_{012}^*$。据此，对于给定的多重指标序列 I_1，……，I_{p+q+2}，采用如下记号：

$$[\,I_1,\dots,I_p\mid I_{p+1}\mid I_{p+2},\dots,I_{p+q+1}\mid I_{p+q+2}\,]\tag{A.2}$$
$$:=a_{I_1}^*\otimes\ldots\otimes a_{I_p}^*\otimes a_{I_{p+1}}^*\otimes a_{I_{p+2}}^*\otimes\ldots\otimes a_{I_{p+q+1}}^*\otimes a_{I_{p+q+2}}^*\in(\underline{A}^*)^{\otimes p}\otimes\boldsymbol{A}^*\otimes(\underline{A}^*)^{\otimes q}\otimes\boldsymbol{A}^*$$

此外，在多重指标下方加波浪号表示对任意数量的这些指标求和，即对于位于 $1\le k_1<k_2<\cdots<k_r\le p$ 的波浪号，我们定义

$$[\,I_1,\dots,\underset{\sim}{I_{k_1}},\dots,\underset{\sim}{I_{k_2}},\dots,I_p\mid I_{p+1}\mid I_{p+2},\dots,I_{p+q+1}\mid I_{p+q+2}\,]\tag{A.3}$$
$$:=\sum_{n_1,n_2,\dots,n_r\ge0}[\,I_1,\dots,\underbrace{I_{k_1},\dots,I_{k_1}}_{n_1\text{ many}},\dots,\underbrace{I_{k_2},\dots,I_{k_2}}_{n_2\text{ many}},\dots,I_p\mid I_{p+1}\mid I_{p+2},\dots,I_{p+q+1}\mid I_{p+q+2}\,]$$

由于我们选择的例子在右侧是“严格”的（见观察4.4），因此只需在前 p 个张量因子上使用高阶同伦（因而加波浪号），而其他 q 个张量因子 A^* 上则不需要。

我们将 (2.3) 和 (2.4) 中的 $\mathrm{D}=\mathrm{D}_0+\mathrm{D}_1$ 应用于上述内容。这里，D_0 作用于 A^* 的微分；在多重指标记法中，这会移除一个指标（例如 $01\mapsto0+1$、$012\mapsto01+02+12$ 等）。D_1 作用于一个乘法；在 A^* 上，它应用 Alexander-Whitney 余乘法（例如 $01\mapsto0\otimes01+01\otimes1$、$012\mapsto0\otimes012+01\otimes12+012\otimes2$ 等）；另见下文的计算。

A.4. (4.8) 的证明。由 (4.7) 得到的 $\mathrm{F}^{[01]}$ 为 $\mathrm{F}^{[01]}=[\,\underset{\sim}{01}\mid0\mid\mid01\,]+[\,\underset{\sim}{01}\mid01\mid\mid1\,]$。我们计算 $\mathrm{D}=\mathrm{D}_0+\mathrm{D}_1$ 作用于 $\mathrm{F}^{[01]}$。

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_0([\,\underset{\sim}{01}\mid0\mid\mid01\,])=\;&[\,\underset{\sim}{01},0,\underset{\sim}{01}\mid0\mid\mid01\,]_{\boxed{01}}+[\,\underset{\sim}{01},1,\underset{\sim}{01}\mid0\mid\mid01\,]_{\boxed{02}}\\
&+[\,\underset{\sim}{01}\mid0\mid\mid0\,]_{\boxed{03}}+[\,\underset{\sim}{01}\mid0\mid\mid1\,]_{\boxed{04}}\\
\mathcal{D}_1([\,\underset{\sim}{01}\mid0\mid\mid01\,])=\;&[\,\underset{\sim}{01},0,01,\underset{\sim}{01}\mid0\mid\mid01\,]_{\boxed{01}}+[\,\underset{\sim}{01},01,1,\underset{\sim}{01}\mid0\mid\mid01\,]_{\boxed{02}}\\
&+[\,\underset{\sim}{01},0\mid0\mid\mid01\,]_{\boxed{01}}+[\,\underset{\sim}{01}\mid0\mid0\mid01\,]_{\boxed{05}}\\
&+[\,\underset{\sim}{01}\mid0\mid0\mid01\,]_{\boxed{05}}+[\,\underset{\sim}{01}\mid0\mid01\mid1\,]_{\boxed{06}}\\
&+[\,01,\underset{\sim}{01}\mid0\mid\mid0\,]_{\boxed{03}}+[\,1,\underset{\sim}{01}\mid0\mid\mid01\,]_{\boxed{02}}\\
\mathcal{D}_0([\,\underset{\sim}{01}\mid01\mid\mid1\,])=\;&[\,\underset{\sim}{01},0,\underset{\sim}{01}\mid01\mid\mid1\,]_{\boxed{07}}+[\,\underset{\sim}{01},1,\underset{\sim}{01}\mid01\mid\mid1\,]_{\boxed{08}}\\
&+[\,\underset{\sim}{01}\mid0\mid\mid1\,]_{\boxed{04}}+[\,\underset{\sim}{01}\mid1\mid\mid1\,]_{\boxed{09}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1([\,\underline{01}\,|01||1\,]) = \quad & [\,\underline{01},0,01,\underline{01}\,|01||1\,]_{07} \quad +[\,\underline{01},01,1,\underline{01}\,|01||1\,]_{08}\\ & +[\,\underline{01},0\,|01||1\,]_{07} \quad +[\,\underline{01},01\,|1||1\,]_{09}\\ & +[\,\underline{01}\,|0|01|1\,]_{06} \quad +[\,\underline{01}\,|01|1|1\,]_{10}\\ & +[\,\underline{01}\,|01|1|1\,]_{10} \quad +[\,1,\underline{01}\,|01||1\,]_{08}\end{aligned}$$

每个表达式右侧的灰色方框标明了哪些项可以合并。注意，对于 $_{01}$、$_{02}$、$_{07}$ 和 $_{08}$，总是有 3 项可以合并并相互抵消。事实上，除了标记为 $_{03}$ 的项（其剩余项为 $[\,|0||0\,]$）以及标记为 $_{09}$ 的项（其剩余项为 $[\,|1||1\,]$）之外，所有项都相互抵消。这两个剩余项分别是 $F^{[0]}$ 和 $F^{[1]}$,，这表明 $DF^{[01]} = F^{[0]} + F^{[1]}$,，即方程 (4.8)。

A.5. (4.19) 的证明。$F^{[012]}$ 由 (4.11)-(4.18) 给出：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}^{[012]} = & [\,\underline{02}\,|012||2\,] + [\,\underline{02}\,|0||012\,] + [\,\underline{02}\,|01||12\,]\\ & + [\,\underline{01},012,\underline{02}\,|0||01\,] + [\,\underline{01},012,\underline{02}\,|01||1\,]\\ & + [\,\underline{02},012,\underline{12}\,|1||12\,] + [\,\underline{02},012,\underline{12}\,|12||2\,]\\ & + [\,\underline{01},012,\underline{02},012,\underline{12}\,|1||1\,]\end{aligned}$$

我们计算作用于 $F^{[012]}$ 的 $D = D_0 + D_1$。同样，灰色方框标示出哪些项会合并并相互抵消。剩余项将在下文汇总。

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_0([\,\underline{02}\,|012||2\,]) = \quad & [\,\underline{02},0,\underline{02}\,|012||2\,]_{01} \quad +[\,\underline{02},2,\underline{02}\,|012||2\,]_{02}\\ & +[\,\underline{02}\,|01||2\,]_{03} \quad +[\,\underline{02}\,|02||2\,]_{04}\\ & +[\,\underline{02}\,|12||2\,]_{05}\\ \mathcal{D}_1([\,\underline{02}\,|012||2\,]) = \quad & [\,\underline{02},0,02,\underline{02}\,|012||2\,]_{01} \quad +[\,\underline{02},02,2,\underline{02}\,|012||2\,]_{02}\\ & +[\,\underline{02},0\,|012||2\,]_{01} \quad +[\,\underline{02},01\,|12||2\,]_{06}\\ & +[\,\underline{02},012\,|2||2\,]_{07} \quad +[\,\underline{02}\,|012|2|2\,]_{08}\\ & +[\,\underline{02}\,|01|12|2\,]_{09} \quad +[\,\underline{02}\,|0|012|2\,]_{10}\\ & +[\,\underline{02}\,|012|2|2\,]_{08} \quad +[\,2,\underline{02}\,|012||2\,]_{02}\\ \mathcal{D}_0([\,\underline{02}\,|0||012\,]) = \quad & [\,\underline{02},0,\underline{02}\,|0||012\,]_{11} \quad +[\,\underline{02},2,\underline{02}\,|0||012\,]_{12}\\ & +[\,\underline{02}\,|0||01\,]_{13} \quad +[\,\underline{02}\,|0||02\,]_{14}\\ & +[\,\underline{02}\,|0||12\,]_{15}\\ \mathcal{D}_1([\,\underline{02}\,|0||012\,]) = \quad & [\,\underline{02},0,02,\underline{02}\,|0||012\,]_{11} \quad +[\,\underline{02},02,2,\underline{02}\,|0||012\,]_{12}\\ & [\,\underline{02},0\,|0||012\,]_{11} \quad +[\,\underline{02}\,|0|0|012\,]_{16}\\ & [\,\underline{02}\,|0|0|012\,]_{16} \quad +[\,\underline{02}\,|0|01|12\,]_{17}\\ & [\,\underline{02}\,|0|012|2\,]_{10} \quad +[\,2,\underline{02}\,|0||012\,]_{12}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&[\,12,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,01\,]\square \qquad +[\,012,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,0\,]_{19}\mathbf{D}_0([\,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,|\,12\,])\\
=\;&[\,\underbrace{02},0,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,|\,12\,]\square \qquad +[\,\underbrace{02},2,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,|\,12\,]_{21}\\
+\;&[\,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,12\,]\square \qquad +[\,\underbrace{02}\,|\,1\,|\,|\,12\,]_{22}\\
+\;&[\,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,|\,1\,]\square \qquad +[\,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,|\,2\,]_{03}\mathbf{D}_1([\,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,|\,12\,])\\
=\;&[\,\underbrace{02},0,02,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,|\,12\,]\square \qquad +[\,\underbrace{02},02,2,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,|\,12\,]_{21}\\
+\;&[\,\underbrace{02},0\,|\,01\,|\,|\,12\,]\square \qquad +[\,\underbrace{02},01\,|\,1\,|\,|\,12\,]\square\\
+\;&[\,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,1\,|\,12\,]\square \qquad +[\,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,01\,|\,12\,]\square\\
+\;&[\,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,1\,|\,12\,]\square \qquad +[\,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,12\,|\,2\,]_{09}\\
+\;&[\,2,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,|\,12\,]\square \qquad +[\,12,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,|\,1\,]_{26}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{D}_0([\,\underbrace{01},012,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,01\,]) =\\
&[\,\underbrace{01},0,\underbrace{01},012,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,01\,]\square \qquad +[\,\underbrace{01},1,\underbrace{01},012,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,01\,]_{28}\\
+\;&[\,\underbrace{01},01,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,01\,]\square \qquad +[\,\underbrace{01},02,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,01\,]_{13}\\
+\;&[\,\underbrace{01},12,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,01\,]_{18}\\
+\;&[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},0,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,01\,]\square \qquad +[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},2,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,01\,]_{30}\\
+\;&[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,0\,]\square \qquad +[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,1\,]_{31}\mathbf{D}_1(\\
&[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,01\,]) =\\
&[\,\underbrace{01},0,01,\underbrace{01},012,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,01\,]\square \qquad +[\,\underbrace{01},01,1,\underbrace{01},012,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,01\,]_{28}\\
+\;&[\,\underbrace{01},0,012,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,01\,]\square \qquad +[\,\underbrace{01},01,12,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,01\,]_{18}\\
+\;&[\,\underbrace{01},012,2,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,01\,]_{30}+[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},0,02,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,01\,]_{29}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\square\\
&\square \qquad +[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},02,2,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,01\,]\boxed{30}\\
+\;&[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},0\,|\,0\,|\,|\,01\,]\boxed{29} \qquad +[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,0\,|\,01\,]\boxed{32}\\
+\;&[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,0\,|\,01\,]\boxed{32} \qquad +[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,01\,|\,1\,]\boxed{33}\\
+\;&[\,1,\underbrace{01},012,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,01\,]\boxed{28} \qquad +[\,01,\underbrace{01},012,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,0\,]\boxed{19}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{D}_0([\,\underbrace{01},012,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,|\,1\,]) =\\
&[\,\underbrace{01},0,\underbrace{01},012,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,|\,1\,]\square \qquad +[\,\underbrace{01},1,\underbrace{01},012,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,|\,1\,]_{35}\\
+\;&[\,\underbrace{01},01,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,|\,1\,]\square \qquad +[\,\underbrace{01},02,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,|\,1\,]_{23}\\
+\;&[\,\underbrace{01},12,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,|\,1\,]_{26}\\
+\;&[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},0,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,|\,1\,]\square \qquad +[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},2,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,|\,1\,]\square\\
+\;&[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,1\,]\square \qquad +[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02}\,|\,1\,|\,|\,1\,]_{38}
\end{aligned}
$$

$\mathbf{D}_1([\ \underbrace{01},012,\underbrace{02}\mid 01\mid\mid 1\ ])\ =$
$[\ \underbrace{01},0,01,\underbrace{01},012,\underbrace{02}\mid 01\mid\mid 1\ ]$ □

$+[\ \underbrace{01},01,1,\underbrace{01},012,\underbrace{02}\mid 01\mid\mid 1\ ]$ 35

$+[\ \underbrace{01},0,012,\underbrace{02}\mid 01\mid\mid 1\ ]$ 34 $\quad +[\ \underbrace{01},01,12,\underbrace{02}\mid 01\mid\mid 1\ ]$ 26

$+[\ \underbrace{01},012,2,\underbrace{02}\mid 01\mid\mid 1\ ]$ 37

$+[\ \underbrace{01},012,\underbrace{02},0,02,\underbrace{02}\mid 01\mid\mid 1\ ]$ 36 $\quad +[\ \underbrace{01},012,\underbrace{02},02,2,\underbrace{02}\mid 01\mid\mid 1\ ]$ 37

$+[\ \underbrace{01},012,\underbrace{02},0\mid 01\mid\mid 1\ ]$ 36 $\quad +[\ \underbrace{01},012,\underbrace{02},01\mid 1\mid\mid 1\ ]$ 39

$+[\ \underbrace{01},012,\underbrace{02}\mid 01\mid 1\mid 1\ ]$ 40 $\quad +[\ \underbrace{01},012,\underbrace{02}\mid 0\mid 01\mid 1\ ]$ 33

$+[\ \underbrace{01},012,\underbrace{02}\mid 01\mid 1\mid 1\ ]$ 40 $\quad +[\ 1,\underbrace{01},012,\underbrace{02}\mid 01\mid\mid 1\ ]$ 35

$\mathbf{D}_0([\ \underbrace{02},012,\underbrace{12}\mid 1\mid\mid 12\ ])\ =$
$[\ \underbrace{02},0,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\mid 1\mid\mid 12\ ]$ 41 □

$+[\ \underbrace{02},2,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\mid 1\mid\mid 12\ ]$ 42

$+[\ \underbrace{02},01,\underbrace{12}\mid 1\mid\mid 12\ ]$ 24 $\quad +[\ \underbrace{02},02,\underbrace{12}\mid 1\mid\mid 12\ ]$ 22

$+[\ \underbrace{02},12,\underbrace{12}\mid 1\mid\mid 12\ ]$ 22

$+[\ \underbrace{02},012,\underbrace{12},1,\underbrace{12}\mid 1\mid\mid 12\ ]$ 43 $\quad +[\ \underbrace{02},012,\underbrace{12},2,\underbrace{12}\mid 1\mid\mid 12\ ]$ 44

$+[\ \underbrace{02},012,\underbrace{12}\mid 1\mid\mid 1\ ]$ 38 $\quad +[\ \underbrace{02},012,\underbrace{12}\mid 1\mid\mid 2\ ]$ 45

$\mathbf{D}_1([\ \underbrace{02},012,\underbrace{12}\mid 1\mid\mid 12\ ])\ =$
$[\ \underbrace{02},0,02,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\mid 1\mid\mid 12\ ]$ 41 □

$+[\ \underbrace{02},02,2,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\mid 1\mid\mid 12\ ]$ 42

$+[\ \underbrace{02},0,012,\underbrace{12}\mid 1\mid\mid 12\ ]$ 41 $\quad +[\ \underbrace{02},01,12,\underbrace{12}\mid 1\mid\mid 12\ ]$ 24

$+[\ \underbrace{02},012,2,\underbrace{12}\mid 1\mid\mid 12\ ]$ 44

$+[\ \underbrace{02},012,\underbrace{12},1,12,\underbrace{12}\mid 1\mid\mid 12\ ]$ 43 $\quad +[\ \underbrace{02},012,\underbrace{12},12,2,\underbrace{12}\mid 1\mid\mid 12\ ]$ 44

$+[\ \underbrace{02},012,\underbrace{12},1\mid 1\mid\mid 12\ ]$ 43 $\quad +[\ \underbrace{02},012,\underbrace{12}\mid 1\mid 1\mid 12\ ]$ 46

$+[\ \underbrace{02},012,\underbrace{12}\mid 1\mid 1\mid 12\ ]$ 46 $\quad +[\ \underbrace{02},012,\underbrace{12}\mid 1\mid 12\mid 2\ ]$ 47

$+[\ 2,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\mid 1\mid\mid 12\ ]$ 42 $\quad +[\ 12,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\mid 1\mid\mid 1\ ]$ 48

$\mathbf{D}_0([\ \underbrace{02},012,\underbrace{12}\mid 12\mid\mid 2\ ])\ =$
$[\ \underbrace{02},0,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\mid 12\mid\mid 2\ ]$ 49 □

$+[\ \underbrace{02},2,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\mid 12\mid\mid 2\ ]$ 50

$+[\ \underbrace{02},01,\underbrace{12}\mid 12\mid\mid 2\ ]$ 06 $\quad +[\ \underbrace{02},02,\underbrace{12}\mid 12\mid\mid 2\ ]$ 05

$+[\ \underbrace{02},12,\underbrace{12}\mid 12\mid\mid 2\ ]$ 05

$+[\ \underbrace{02},012,\underbrace{12},1,\underbrace{12}\mid 12\mid\mid 2\ ]$ 51 $\quad +[\ \underbrace{02},012,\underbrace{12},2,\underbrace{12}\mid 12\mid\mid 2\ ]$ 52

$+[\ \underbrace{02},012,\underbrace{12}\mid 1\mid\mid 2\ ]$ 45 $\quad +[\ \underbrace{02},012,\underbrace{12}\mid 2\mid\mid 2\ ]$ 07

$\mathbf{D}_1([\ \underbrace{02},012,\underbrace{12}\mid 12\mid\mid 2\ ])\ =$

$$
\begin{aligned}
&[\,\underbrace{02},0,02,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,12\,|\,|\,2\,]_{49} && +[\,\underbrace{02},02,2,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,12\,|\,|\,2\,]_{50}\\
&+[\,\underbrace{02},0,012,\underbrace{12}\,|\,12\,|\,|\,2\,]_{49} && +[\,\underbrace{02},01,12,\underbrace{12}\,|\,12\,|\,|\,2\,]_{06}\\
&+[\,\underbrace{02},012,2,\underbrace{12}\,|\,12\,|\,|\,2\,]_{52} &&\\
&+[\,\underbrace{02},012,\underbrace{12},1,12,\underbrace{12}\,|\,12\,|\,|\,2\,]_{51} && +[\,\underbrace{02},012,\underbrace{12},12,2,\underbrace{12}\,|\,12\,|\,|\,2\,]_{52}\\
&+[\,\underbrace{02},012,\underbrace{12},1\,|\,12\,|\,|\,2\,]_{51} && +[\,\underbrace{02},012,\underbrace{12},12\,|\,2\,|\,|\,2\,]_{07}\\
&+[\,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,12\,|\,2\,|\,2\,]_{53} && +[\,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,12\,|\,2\,]_{47}\\
&+[\,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,12\,|\,2\,|\,2\,]_{53} && +[\,2,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,12\,|\,|\,2\,]_{50}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{D}_0([\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]) =\\
&[\,\underbrace{01},0,\underbrace{01},012,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]\square && +[\,\underbrace{01},1,\underbrace{01},012,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]_{55}\\
&+[\,\underbrace{01},01,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]\square && +[\,\underbrace{01},02,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]_{38}\\
&+[\,\underbrace{01},12,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]_{48} &&\\
&+[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},0,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]\square\square && +[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},2,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]\square\\
&+[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},01,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]\square && +[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},02,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]_{38}\\
&+[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},12,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]_{38} &&\\
&+[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},012,\underbrace{12},1,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]\square\square && +[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},012,\underbrace{12},2,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]_{59}\\
&\mathrm{D}_1([\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]) =\\
&[\,\underbrace{01},0,01,\underbrace{01},012,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]\square && +[\,\underbrace{01},01,1,\underbrace{01},012,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]_{55}\\
&+[\,\underbrace{01},0,012,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]\square && +[\,\underbrace{01},01,12,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]_{48}\\
&+[\,\underbrace{01},012,2,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]\square &&\\
&+[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},0,02,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]\square && +[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},02,2,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]\square\\
&+[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},0,012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]\square && +[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},01,12,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]_{39}\\
&+[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},012,2,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]_{59} &&\\
&+[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},012,\underbrace{12},1,12,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]\square && +[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},012,\underbrace{12},12,2,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]_{59}\\
&+[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},012,\underbrace{12},1\,|\,1\,|\,|\,1\,]\square && +[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,]_{60}\\
&+[\,\underbrace{01},012,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,1\,|\,1\,]\square\square && +[\,1,\underbrace{01},012,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]_{55}
\end{aligned}
$$

在上述求和中，有若干项出现了两次，因此相互抵消（在 $\mathbb{Z}_2$ 上）。标有以下编号的项出现了两次，因而相互抵消：

03, 08, 09, 10, 15, 16, 17, 25, 31, 32, 32, 40, 45, 46, 47, 53, 60

此外，在某些情况下，三项之和会相互抵消。以下标签出现了三次，也会相互抵消：

$$\boxed{01},\boxed{02},\boxed{06},\boxed{07},\boxed{11},\boxed{12},\boxed{18},\boxed{19},\boxed{20},\boxed{21},\boxed{24},\boxed{26},\boxed{27},\boxed{28},\boxed{29},\boxed{30},\boxed{34},\boxed{35},$$
$$\boxed{36},\boxed{37},\boxed{39},\boxed{41},\boxed{42},\boxed{43},\boxed{44},\boxed{48},\boxed{49},\boxed{50},\boxed{51},\boxed{52},\boxed{54},\boxed{55},\boxed{56},\boxed{57},\boxed{58},\boxed{59}.$$

共有六个项标记为 $\boxed{38}$，它们的和为零：

$$\begin{aligned}\boxed{38} =&([\underbrace{01},012,\underbrace{02}\,|\,1\,|\,|\,1\,]+[\underbrace{01},012,\underbrace{02},02,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]+[\underbrace{01},012,\underbrace{02},12,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,])+\\ &([\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]+[\underbrace{01},01,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]+[\underbrace{01},02,\underbrace{02},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,])\\ =&[\underbrace{01},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]+[\underbrace{01},012,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,1\,]=0\end{aligned}$$

未能抵消的剩余项为：

$$\boxed{04} = [\underbrace{02}\,|\,02\,|\,|\,2\,]$$
$$\boxed{05} = [\underbrace{02}\,|\,12\,|\,|\,2\,]+[\underbrace{02},02,\underbrace{12}\,|\,12\,|\,|\,2\,]+[\underbrace{02},12,\underbrace{12}\,|\,12\,|\,|\,2\,]=[\underbrace{12}\,|\,12\,|\,|\,2\,]$$
$$\boxed{13} = [\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,01\,]+[\underbrace{01},01,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,01\,]+[\underbrace{01},02,\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,01\,]=[\underbrace{01}\,|\,0\,|\,|\,01\,]$$
$$\boxed{14} = [\underbrace{02}\,|\,0\,|\,|\,02\,]$$
$$\boxed{22} = [\underbrace{02}\,|\,1\,|\,|\,12\,]+[\underbrace{02},02,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,12\,]+[\underbrace{02},12,\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,12\,]=[\underbrace{12}\,|\,1\,|\,|\,12\,]$$
$$\boxed{23} = [\underbrace{02}\,|\,01\,|\,|\,1\,]+[\underbrace{01},01,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,|\,1\,]+[\underbrace{01},02,\underbrace{02}\,|\,01\,|\,|\,1\,]=[\underbrace{01}\,|\,01\,|\,|\,1\,]$$

这些项恰好是 $F^{[02]}$, $F^{[12]}$, 和 $F^{[01]}$, , 因此 $DF^{[012]} = D_0F^{[012]} + D_1F^{[012]} = F^{[01]} + F^{[02]} + F^{[12]}$, , 这就是 (4.19)。

References

[CS] Moira Chas、Dennis Sullivan。弦拓扑。预印本 arXiv:math/9911159[L] Jean-Louis Loday。循环同调，数学科学基础丛书 301（1998），施普林格。[M] Luc Menichi。球面的弦拓扑，Comment. Math. Helv. 84（2009），135–157。[T1] Thomas Tradler。A-无穷代数上的无穷内积。J. Homotopy Relat. Struct. 3（2008），第 1 期，第 245–271 页。[T2] Thomas Tradler。由无穷内积诱导的霍赫希尔德上同调上的 BV代数。Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 58（2008），第 7 期，第 2351–2379 页。[TZS] ThomasTradler、Mahmoud Zeinalian、Dennis Sullivan，庞加莱对偶空间的无穷结构。Algebr. Geom. Topol. 7（2007），第 233–260 页。

Kate Poirier, Department of Mathematics, New York City College of Technology, City University of New York, 300 Jay Street, Brooklyn, NY 11201电子邮箱: kpoirier@citytech.cuny.edu

Thomas Tradler, Department of Mathematics, New York City College of Technology, City University of New York, 300 Jay Street, Brooklyn, NY 11201电子邮箱: ttradler@citytech.cuny.edu