arXiv:2301.05394v1 [math.AC] 13 Jan 2023

符号Rees代数上的投射模中幺模元素的存在性

CHANDAN BHAUMIK 和 HUSNEY PARVEZ SARWAR

摘要。设 A 是维数为 d 的符号（或扩展符号）Rees 代数（不必是诺特环）。设 P 是一个有限生成的秩为 $\geq d$ 的投射 A-模。那么 P 含有一个幺模元素。这改进了 Serre 针对上述代数类的经典结果。

1. 引言

设 R 是一个交换环， P 是一个有限生成的投射 R-模。若存在 $\phi \in \text{Hom}(P, R)$ 使得 $\phi(p) = 1$，则称元素 $p \in P$ 为幺模元素；换言之， P 分裂出一个秩为一的自由直和项，即对于某个投射 R-模 Q，有 $P \cong Q \oplus R$。若 R 是一个维数为 d 的诺特交换环，则 Serre 的一个经典结果 [21] 表明，每个秩为 $> d$ 的有限生成投射 R-模都有一个幺模元素。事实上，一般而言这是最优结果；文献中一个容易找到的常见例子是实代数球面上的切丛。因此，若 $\text{rank}(P) \leq d$，那么关于 P 是否含有幺模元素的问题就比较微妙。在 $\text{rank}(P) = \dim(R)$ 的情形下，若 R 是代数闭域上的仿射代数，则存在一套成熟的阻碍理论，这是 Murthy [12, 定理 3.7] 的结果。（关于 [12, 定理 3.7], 中假设条件的证明，见 [10, 推论 1.5]。）

除 Murthy 的著作外，文献中还有各种引人入胜的阻碍理论，适用于 $rank(P) \leq \dim(R)$ 的情形。对此，我们建议读者查阅 MathSciNet 上对 Murthy 论文 [12] 的引用。本文不探讨这类复杂的理论，因为我们的目标是发现不存在此类阻碍的交换环。

本文证明，符号 Rees 代数和扩展符号 Rees 代数（见定义2.6）是不存在此类阻碍的交换环的例子。符号 Rees 代数的重要性首先源于希尔伯特第十四问题的反例。Rees [16] 通过证明某个环 R 的理想 J 的符号 Rees 代数 $\mathcal{R}_s(J)$ 不是有限生成的，为 Zariski 版本的希尔伯特第十四问题给出了第一个反例。我们证明以下关于符号 Rees 代数或扩展符号 Rees 代数上的投射模中幺模元素存在性的结果。

定理 1.1.（定理 3.5）设 R 是维数为 d 的交换诺特整环，且 I 是 R 的一个理想。设 $A = \mathcal{R}_s(I)$ 或 $\mathcal{R}_s(I, x^{-1})$（符号 Rees 代数或扩展符号 Rees 代数）（见定义2.6），并设 P 是一个秩为 $\geq d+1$ 的有限生成投射 A-模。那么 P 有一个幺模元素，即对某个投射 A-模 Q，有 $P \cong Q \oplus A$。

Plumstead [13]，对多项式环、Mandal [11] 对 Laurent 多项式环，以及 Rao [14] 对多项式环的上环得到了类似的结果。对于 Rees 代数，文献 [15] 研究了类似的猜想。上述结果

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 13C10；次要分类 19A13。

Key words and phrases. 投射模、幺模元素、符号 Rees 代数。

由 Bhatwadekar–Roy [3] 和 Bhatwadekar–Lindel–Rao [2] 推广到了多个变量的多项式环和 Laurent 多项式环。对于幺半群扩张，Sarwar [19] [20], 、Keshari–Sarwar [8], 和 Keshari–Mathew [9] 研究了幺模问题的存在性。

设 R 是一个 Krull维数为 d 的交换诺特整环。那么， R 上的 Rees 代数是诺特的，但符号 Rees 代数未必是诺特的（例如，参见 [17]）。然而，我们可以不借助符号 Rees 代数是诺特的这一假设来证明定理 1.1。这得益于 Heitmann 关于非诺特环的结果 [6] 。关于 Heitmann 结果的推广，参见 Gupta 的研究结果 [5]。我们的方法是采用标准的层拼接技术。具体而言，我们找到两个覆盖，随后分别在每个覆盖上证明结果，最后通过拼接/粘合得到原空间上的结果。 [15] 中也采用了类似的技术。不过，为了证明其中一个覆盖上的结果，他们使用了 Plumstead广义维数函数。由于符号 Rees 代数未必是诺特的，这里我们利用 Heitmann 的结果证明类似的结果。在第 2 节中，我们回顾了全文将用到的一些基本定义和结果，并通过赋值维数研究了（扩张的）符号 Rees 代数的 Krull维数。定理 3.5 在第 3 节中证明。

2. Recollection of basic definitions and results

2.1. 记号。本文中，我们假设环都是含幺交换环，模都是有限生成的。此外，我们假设投射模具有常秩函数。

现在回顾一些基本概念。对于环 R，令 dim$R$ 表示 R的 Krull维数。令 Ass (R)表示 R的关联素理想集合，并令 ht(I)表示理想 I的高度。

定义 2.1（幺模元素）。设 R 是环 R ，且 M 是一个 R-模。对于$m \in M$，我们定义理想 $O_M(m) = \{\varphi(m) : \varphi \in M^* = \text{Hom}_R(M, R)\}$，称其为序理想。若元素 m 属于 M，且 $O_M(m) = R$，则称其为幺模元素；也就是说，存在一个满射 R-线性映射 $\varphi \in M^*$，使得 $\varphi(m) = 1$。令 Um (M)表示 M中所有幺模元素的集合。

赋值维数。赋值维数的概念由 Jaffard [7]提出。设 A 是一个整环， A 的上环 B 是分式域 K 的一个子环，且包含 A，即 $A \subseteq B \subseteq K$。

A的赋值上环是指一个同时也是赋值环的 A的上环。

定义 2.2（赋值维数）。设 R 是一个整环， R 的赋值维数是其赋值上环的维数的上确界。 R 的赋值维数记作 dim$_v R$，即

$$\dim_v R = \text{ Sup } \{\dim V : V \text{是 } R\}.\text{的一个赋值上环}$$

定理 2.3。 [1, 定理 0.1] 设 R 是一个非域的整环， K是 R的分式域。令 F 表示 K的代数扩张， d为一个正整数。若满足以下等价条件，则称 R 具有有限赋值维数 d （记作 dim$_v R = d$）：

(1) R 在 F 中的每个赋值上环的维数均为 $\leq d$ ，且存在一个 R 在 F 中的赋值上环，其维数为 d。(2) R 在 F 中的每个上环的维数均为 $\leq d$ ，且存在一个 R 在F 中的上环，其维数为 d。(3) dim$R[x_1, \ldots, x_d] = 2d$。

(4) 如果 $n \geq d-1$，则 $\dim R[x_1, \ldots, x_n] = n + d$。

如果不存在满足条件 1 至 4 的 d，则称 $\dim_v R = \infty$。为完整起见，规定每个域的赋值维数为 0。

显然，对于任意整环 R，$\dim R \leq \dim_v R$；若 B 是 A 的上环，则 $\dim_v B \leq \dim_v A$。

2.2. Rees 代数与符号Rees代数回顾。设 R 为交换环，I 为 R 的理想。以 I 为依据的 R 的 Rees 代数（亦称爆破代数）定义为 $R[x]$ 的子环：

$$R[Ix] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i : a_i \in I^i\} = \bigoplus_{n\geq 0} I^n x^n \subseteq R[x].$$

以 I 为依据的 R 的扩展Rees代数定义为 $R[x, x^{-1}]$ 的子环：

$$R[Ix, x^{-1}] = \{\sum_{i=-n}^{n} a_i x^i : a_i \in I^i\} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I^n x^n \subseteq R[x, x^{-1}].$$

其中，当 $n \leq 0$ 时，按约定 $I^n = R$。

以下定理讨论 Rees 代数和扩展Rees代数的 Krull维数（参见 [22,定理 5.1.4]）。

定理2.4. 设 R 是诺特环，I 是 R 的一个理想。若 $\dim R$ 有限，则

(1) 若 $I \nsubseteq \mathfrak{p}$，则 $\dim R[Ix] = \dim R + 1$；否则，对某个满足 $\dim(R/\mathfrak{p}) = \dim R$ 且 $\dim R[Ix] = \dim R$ 的 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$，有 $\dim R[Ix] = \dim R + 1$。(2) $\dim R[Ix, x^{-1}] = \dim R + 1$。

推论 2.5. 设 R 是维数为 d 的诺特整环，且 $(0) \neq I$ 是 R 的一个理想。那么 $\dim_v R[Ix] = d + 1$。

关于 Rees 代数 $R[Ix]$ 和扩展Rees代数 $R[Ix, x^{-1}]$ 的更多性质，可参见 [22]。

定义2.6. [符号幂、符号 Rees 代数] 设 R 是一个交换诺特环，I 是 R的一个理想。I 的第 n个符号幂是 R的一个理想，定义如下：

$$I^{(n)} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass}(R/I)} (I^n R_{\mathfrak{p}} \cap R).$$

一般而言，给定 R 的一个理想 I，其普通幂 I^n 与符号幂 $I^{(n)}$并不相同。特别地，若 $I = \mathfrak{p} \in$ 是R的谱，则 $\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^n R_{\mathfrak{p}} \cap R$；若 I 是一个极大理想 $\mathfrak{m}$，则 $\mathfrak{m}^{(n)} = \mathfrak{m}^n$。由定义显然可知，$I^{(1)} = I$、$I^n \subseteq I^{(n)}$ 且$I^{(n+1)} \subseteq I^{(n)}$ 对所有 $n \geq 1$均成立。

设 R 是一个交换诺特环，I 是 R的一个理想。关于 I 的 R 的符号 Rees 代数是一个分次代数，定义为

$$\mathcal{R}_s(I) = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i : a_i \in I^{(i)}\} = \bigoplus_{n\geq 0} I^{(n)} x^n \subseteq R[x].$$

它有时也称为符号爆破代数。特别地，对于所有 $n \geq 2$，若$I^{(n)} = I^n$，则符号 Rees 代数 $\mathcal{R}_s(I)$与 Rees 代数 $R[Ix]$ 相同。

可以将 I 在 R 中的扩展符号 Rees 代数定义为 $\mathcal{R}_s(I)$ 的扩张。记 $\mathcal{R}_s(I, x^{-1})$ 为扩展符号 Rees 代数，其定义为

$$\mathcal{R}_s(I, x^{-1}) = \{\sum_{i=-n}^{n} a_i x^i : a_i \in I^{(i)}\} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I^{(n)} x^n \subseteq R[x, x^{-1}].$$

其中，按照惯例， $n \leq 0$、 $I^{(n)} = R$ 。

关于 $\mathcal{R}_s(I)$ 和 $\mathcal{R}_s(I, x^{-1})$ 的更多性质，可参见 [4], [22]。

引理 2.7. 设 R 是一个维数为 d 的交换诺特整环。那么

$$\dim \mathcal{R}_s(I) = \begin{cases} d, & \text{if } I = (0); \\ d+1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明. 对于 $I = (0)$，无需证明。因此我们可以假设 $I \neq (0)$。由推论 2.5，$\dim_v R[Ix] = 1 + d = \dim R[Ix]$。考虑 $R[Ix] \subseteq \mathcal{R}_s(I) \subseteq R[x]$。那么 $\dim_v \mathcal{R}_s(I) \leq \dim_v R[Ix] = d+1$，且 $\dim_v \mathcal{R}_s(I) \geq \dim_v R[x] = d+1$。这意味着 $\dim_v \mathcal{R}_s(I) = d+1$。我们知道 $\dim \mathcal{R}_s(I) \leq \dim_v \mathcal{R}_s(I)$。因此 $\dim \mathcal{R}_s(I) \leq d+1$。

对于另一个不等式，注意到 $\mathcal{R}_s(I) = \mathcal{R}_s(I)_0 \oplus \mathcal{R}_s(I)_+$，其中 $\mathcal{R}_s(I)_0 = R$ 和 $\mathcal{R}_s(I)_+ = Ix \oplus I^{(2)}x^2 \oplus \cdots$，且 $\mathcal{R}_s(I)/\mathcal{R}_s(I)_+ \cong R$。因此， $\mathcal{R}_s(I)_+$ 是 $\mathcal{R}_s(I)$ 的一个素理想，且 $\mathrm{ht}(\mathcal{R}_s(I)_+) > 0$。于是我们有

$$\dim(\mathcal{R}_s(I)/\mathcal{R}_s(I)_+) + \mathrm{ht}(\mathcal{R}_s(I)_+) \leq \dim \mathcal{R}_s(I).$$

这意味着 $\dim R + 1 \leq \dim \mathcal{R}_s(I)$。因此 $\dim \mathcal{R}_s(I) = d+1$。 □

引理 2.8. 设 R 是一个维数为 d 的诺特整环。那么 $\dim \mathcal{R}_s(I, x^{-1}) = d+1$.

证明。注意到 $\dim_v R[x^{-1}] = d+1$。考虑 $R[x^{-1}] \subseteq \mathcal{R}_s(I, x^{-1}) \subseteq R[x, x^{-1}]$. 根据[1, 引理 1.15], $\dim_v R[x^{-1}] = \dim_v R[x, x^{-1}]$。因此 $\dim_v \mathcal{R}_s(I, x^{-1}) = 1 + d$。于是我们有 $\dim \mathcal{R}_s(I, x^{-1}) \leq \dim_v \mathcal{R}_s(I, x^{-1}) = d+1$。

对于另一个不等式，由 $R[x^{-1}] \subseteq \mathcal{R}_s(I, x^{-1}) \subseteq R[x, x^{-1}]$，我们注意到 $\mathcal{R}_s(I, x^{-1})_{x^{-1}} = R[x, x^{-1}]$。于是有

$$\dim \mathcal{R}_s(I, x^{-1}) \geq \dim \mathcal{R}_s(I, x^{-1})_{x^{-1}} = \dim R[x, x^{-1}].$$

因此 $\dim \mathcal{R}_s(I, x^{-1}) \geq d+1$。所以 $\dim \mathcal{R}_s(I, x^{-1}) = d+1$。 □

若 R 是诺特环，则我们知道 Rees 代数是有限生成的 R-代数。与 Rees 代数不同，符号 Rees 代数不一定是有限生成的 R-代数。例如，参见 [17]。

3. Existence of a unimodular element

引理 3.1. 设 R 是一个诺特环， I 是 R 的一个理想，且 T 是 R 的一个乘法闭子集。则 $T^{-1}\mathcal{R}_s(I) = T^{-1}\mathcal{R}_s(T^{-1}I)$，其中 $T^{-1}\mathcal{R}_s(T^{-1}I)$ 表示 $T^{-1}R$ 关于 $T^{-1}I$ 的符号 Rees 代数。

证明。根据定义 $\mathcal{R}_s(I) = R \oplus Ix \oplus I^{(2)}x^2 \oplus \cdots$，并且由于局部化与直和可交换，我们有

$$\begin{aligned} T^{-1}\mathcal{R}_s(I) &= T^{-1}R \oplus T^{-1}(I)x \oplus T^{-1}(I^{(2)})x^2 \oplus \cdots \\ &= T^{-1}R \oplus T^{-1}(IR)x \oplus T^{-1}(I^{(2)}R)x^2 \oplus \cdots . \end{aligned}$$

现在，对于 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} T^{-1}(I^{(n)}) &= T^{-1}(\bigcap_{\mathrm{Ass}\,(R/I)} (I^n R_{\mathfrak{p}} \cap R)) \\ &= \bigcap_{\mathrm{Ass}\,(T^{-1}(R/I))} T^{-1}(I^n R_{\mathfrak{p}} \cap R) \\ &= \bigcap_{\mathrm{Ass}\,(T^{-1}R/T^{-1}I))} ((T^{-1}I)^n (T^{-1}R)_{\mathfrak{p}} \cap T^{-1}R) \\ &= (T^{-1}I)^{(n)}. \end{aligned}$$

由于局部化与直和可交换，我们还有

$$T^{-1}\mathcal{R}_s(T^{-1}I) = T^{-1}R \oplus T^{-1}I(T^{-1}R)x \oplus (T^{-1}I(T^{-1}R))^{(2)}x^2 \oplus \cdots .$$

但我们已经有 $(T^{-1}I)^{(n)} = T^{-1}(I^{(n)})$，因此可得 $T^{-1}\mathcal{R}_s(I) = T^{-1}\mathcal{R}_s(T^{-1}I)$。□

下面的引理是前一个引理的一个特例。稍后我们将使用以下表述。

引理 3.2. 设 R 是交换诺特整环，且 $(0) \neq I$ 是 R的一个理想。则

(1) 若 $T :=$ 是 R的所有非零因子组成的集合，则 $T^{-1}\mathcal{R}_s(I) = T^{-1}R[x]$。(2) 若 $T = \{1, a, a^2, \ldots\}$ 满足 $a \in I$是 R的一个非零因子，则 $T^{-1}\mathcal{R}_s(I) = R_a[x]$。

证明。(1) 由于 R 是整环， $T = R^* = R\backslash\{0\}$。对于 $n \geq 1$， $I^{(n)}$ 是 R 的理想，且 $T \cap I^{(n)} \neq \emptyset$。这意味着 $T^{-1}(I^{(n)}) = T^{-1}R$。因此，根据引理 3.1 证明的第一部分，可得 $T^{-1}\mathcal{R}_s(I) = T^{-1}R[x]$。

(2) 根据引理 3.1]，，我们有 $T^{-1}R[Ix] = T^{-1}R[(T^{-1}I)x]$。由于 $T \cap I \neq \emptyset$，这意味着 $T^{-1}R[Ix] = T^{-1}R[x]$。考虑

$$R[Ix] \subseteq \mathcal{R}_s(I) \subseteq R[x].$$

在 T 处局部化后，我们有

$$T^{-1}R[Ix] \subseteq T^{-1}\mathcal{R}_s(I) \subseteq T^{-1}R[x].$$

因此 $T^{-1}\mathcal{R}_s(I) = R_a[x]$。 □

引理 3.3。设 R 是一个维数为 d 的交换整环，且 $A = R_{1+aR}$，其中 a 是 R 的非零非单位元。设 P 是一个秩为 $\geq d$ 的投射 R-模。设 $Q := P_{1+aR}$。那么 Q 有一个幺模元素。

证明。用上横线表示模掉理想 aR。由于 (0) 是整环 R 中的极小素理想，我们注意到 $dim(\overline{R}) < d$。根据 [6, 推论 2.6]， $\overline{P}$ 有一个幺模元素。因此存在 $\overline{p}$ ，使得序理想 $O_{\overline{P}}(\overline{p}) = \overline{R}$。令 $p \in P$ 为 $\overline{p}$ 的一个提升。现在注意到序理想 $O_P(p)$ 的 $1 + aR \subset$。因此，p_{1+aR} 是 Q 的一个幺模元素。证明完毕。□

以下定理是 Ravi A. Rao 的一个结果 [14, 定理 5.1(I)]。

定理 3.4。设 R 是一个维数为 d 的交换诺特环，且 S 是 $R[x]$ 的非零因子的乘法封闭集。设 A 是一个介于 $R[x]$ 与 $S^{-1}R[x]$ 之间的环。那么对于 $n \geq d + 2$, $\mathrm{E}_n(A)$ 在 $\mathrm{Um}(A^n)$ 上传递地作用。

定理 3.5. 设 R 是维数为 d的交换诺特整环， I 是 R的一个理想。设 $A = \mathcal{R}_s(I)$ 或 $\mathcal{R}_s(I, x^{-1})$，并且 P是一个秩为 $\geq d + 1$的有限生成投射 A-模。那么 P有一个幺模元素。

证明. 首先，假设 $A = \mathcal{R}_s(I)$。令 $\mathrm{rank}(P) = m > d$。由于 A 是整环 $R[x]$的子环， A 是整环。若 $I = (0)$，则 $I^{(n)} = (0)$，这意味着$A = R$。此时，结论由 Serre [21] 得出。若 $I = (1)$，则 $I^{(n)} = (1)$，这意味着 $A = R[x]$。此时，结论由 Plumstead [13, 推论 4] 得出。因此，我们可以假设 $I \neq (0)$ 且 $I \neq (1)$。由引理 2.7，$\dim \mathcal{R}_s(I) = d + 1$。

令 T 为 R 的所有非零因子构成的集合。由引理 3.2(1)， $T^{-1}A = T^{-1}R[x]$，其中 $T^{-1}R$ 是 R 的商域。由于 $T^{-1}R[x]$ 是主理想整环， $T^{-1}P$ 是 $T^{-1}A$ 上的自由模。由于 P 是有限生成的，存在 $t \in T$，使得 P_t 是一个自由 $\mathcal{R}_s(I)_t$- 模。令 $0 \neq a$ 为 I 的一个非单位元。则 P_{at} 是一个自由 $\mathcal{R}_s(I)_{at}$- 模。

记 $b = at$。由引理 3.2(2)，我们有 $\mathcal{R}_s(I)_b \cong R_b[x]$。现在考虑下列环的笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_s(I) & \xrightarrow{i_1} & \mathcal{R}_s(I)_b \cong R_b[x] \\ \downarrow{\scriptstyle i_2} & & \downarrow{\scriptstyle j_1} \\ \mathcal{R}_s(I)_{1+b\mathcal{R}_s(I)} & \xrightarrow{j_2} & R_b[x]_{1+b\mathcal{R}_s(I)}. \end{array}$$

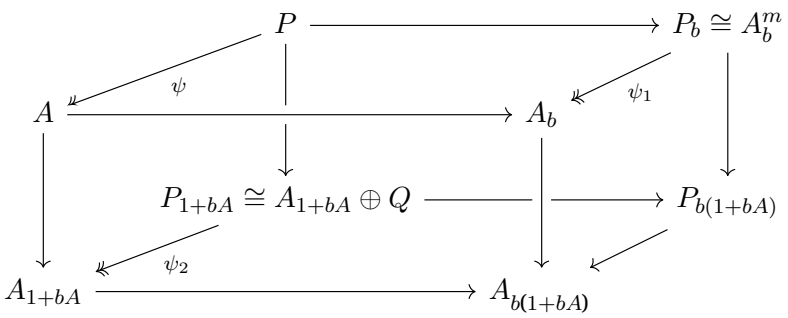
由于 P_b 是秩为 m 的自由 A_b-模， $P_b \cong A_b^m$。因此 P_b 有一个幺模元素，记为 p_1。由于 P_{1+bA} 是投射 A_{1+bA}-模，由引理 3.3(1)， P_{1+bA} 有一个幺模元素，记为 p_2。因此我们有 $P_{1+bA} \cong p_2 A_{1+bA} \oplus Q$，其中 Q 是投射 A_{1+bA}-模。

现在考虑 $B = A_{b(1+bA)} = (1 + bA)^{-1}\mathcal{R}_s(I)_b = (1 + bR)^{-1}D^{-1}R_b[x] = D^{-1}R'[x]$，其中 D 是 $R'[x]$ 的乘法闭子集，且 $R' = R_{b(1+bR)}$ 的维数为$d - 1$。由于 $P_{b(1+bA)}$ 是秩为 m 的自由 B-模， $P_{b(1+bA)} \cong B^m$。令 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 分别为 p_1 和 p_2 在 $P_{b(1+bA)}$ 中的像。现在考虑以下投射模的笛卡尔方块。

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{i_1} & P_b \\ \downarrow{\scriptstyle i_2} & & \downarrow{\scriptstyle j_1} \\ P_{1+bA} & \xrightarrow{j_2} & P_{b(1+bA)} \cong B^m \end{array}$$

注意，环 B 介于 $R'[x]$ 和 $S^{-1}R'[x]$之间，其中 S 是 $R'[x]$中所有非零因子的集合。因此，由定理 3.4，存在 $\sigma \in \mathrm{E}m(B)$，使得 $\sigma(\bar{u}) = \bar{v}$。根据[18, 推论 3.2] （另见 [2, 命题 3.2]），我们可以将 σ 分解为 $(\sigma_1)_b(\sigma_2)_{1+bA}$，其中$\sigma_2 \in \mathrm{E}(P_b)$ 且 $\sigma_1 \in \mathrm{E}(P_{1+bA})$。由于 $(\sigma_1)_b(\sigma_2)_{1+bA}(\bar{u}) = \bar{v}$，适当调整 p_1 和 p_2 后，可以假设 $\bar{u} = \bar{v}$。

现在考虑下面的投射模纤维积图。



由于 ψ_1 和 ψ_2 是满同态，由上图可得一个满同态 $\psi : P \twoheadrightarrow A$。因此存在 $p \in P$ 使得 $\psi(p) = 1$。所以P 有一个幺模元素。

当 $A = \mathcal{R}_s(I, x^{-1})$时，证明与上文完全相同。不过，在第二个角中需要使用 [11, 定理 2.1] 。细心的读者可以自行补全细节。□

致谢：H.P. Sarwar 谨向印度政府科学与工程研究委员会（S.E.R.B.）致谢，感谢其提供资助 SRG/2020/000272。

References

[1] D.F. Anderson、A.Bouvier、D. Dobbs、M.Fontana 和 S.Kabbaj。 *On Jaffard domains*, 《数学博览》6（1988），145-175。[2] S.M. Bhatwadekar、H. Lindel 和 R.A. Rao。 *The Bass-Murthy question: Serre dimension of Laurent polynomial extensions* **81** 1985 189 203 , 《数学发明》（），-。[3] S.M. Bhatwadekar 和 A. Roy。 *Some theorems about projective modules over polynomial rings*, 《代数杂志》86（1984），150-158。[4] W. Bruns 和 U. Vetter。 *Determinantal Rings*, 《数学讲义》, Springer-Verlag, 柏林, 1988。[5] A. Gupta。 *On the existence of unimodular elements and cancellation of projective modules over noetherian and non-noetherian rings* **446** 2016 323 345 , 《代数杂志》（），-。[6] R. Heitmann。 *Generating non-noetherian modules efficiently*, 《密歇根数学杂志》31（1984），第2期，167-180。[7] P. Jaffard。 *Théorie de la Dimension des Anneaux de Polynômes*, Mém. 数学科学，146，Gauthier-Villars，巴黎，1960。[8] M.K. Keshari 和 H.P. Sarwar。 *Serre dimension of monoid algebras*, 《印度科学院院刊·数学科学》127（2017），第2期，269-280。[9] M.K. Keshari 和 M.A. Mathew。 *On Serre dimension of monoid algebras and Segre extensions*, 《纯粹与应用代数杂志》226（2022），第9期，论文编号107058，共16页。[10] A. Krishna。 *Murthy's conjecture on 0-cycles.* 《数学发明》217（2019），第2期，549–602。[11] S. Mandal。 *Basic elements and cancellation over Laurent polynomial rings*, 《代数杂志》79（1982），251-257。[12] M.P. Murthy。 *Zero cycles and projective modules.* 《数学年刊》140(2)，405，1994。[13] B. Plumstead。 *The conjectures of Eisenbud and Evans*, 《美国数学杂志》105（1983），1417–1433。[14] R.A. Rao。 *Stability theorems for overrings of polynomial rings. II* **78** 1982 2, 。《代数杂志》（），第–期。[15] R.A. Rao 和 H.P. Sarwar。 *Stability results for projective modules over Rees algebras*, 《纯粹与应用代数杂志》223（2019），第1期，1-9。[16] D. Rees。 *On a problem of Zariski*, 《伊利诺伊数学杂志》2（1958），第1期，145-149。[17] P.C. Roberts。 *A prime ideal in a polynomial ring whose symbolic blow-up is not noetherian*, 《美国数学会会刊》94（1985），第4期，589-592。[18] A. Roy。 *Application of patching diagrams to some questions about projective modules*, 《纯粹与应用代数杂志》24（1982），第3期，313-319。[19] H.P. Sarwar, *Some results about projective modules over monoid algebras.* 《代数通讯》44（2016），第5期，2256–2263。[20] H.P. Sarwar。 *K_0-stability over monoid algebras*, 《K理论年刊》6（2021），第4期，629–649。[21] J.-P. Serre, *Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle*, 1958年S´eminaire P. Dubreil、M.-L. Dubreil-Jacotin 和 C. Pisot，1957/58，第2册，第23讲，18页。[22] I. Swanson 和 C. Huneke。 *Integral closure of ideals, rings, and modules*, 伦敦数学学会讲义系列336，剑桥，2006。

(Chandan Bhaumik) Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Kharag-pur, Kharagpur 721302, West Bengal, India*Email address*: cbhaumik11math@gmail.com

(H.P. Sarwar) Department of Mathematics,

Indian Institute of Technology Kharagpur,Kharagpur 721302, West Bengal, India *Email address*: parvez@maths.iitkgp.ac.in*Email address*: mathparvez@gmail.com