arXiv:2301.05399v1 [math.AG] 13 Jan 2023

关于 Collino 循环与双曲椭圆 Johnson 同态的评述

MA LUO 和 TATSUNARI WATANABE

Abstract. Collino 循环是超椭圆曲线的雅可比簇上的高阶循环。Collino 循环的万有族自然导出一个正规函数，其诱导的单值与双曲椭圆 Johnson 同态相关。Colombo 对这一单值进行了明确计算，并精确阐明了这种关系。我们从相对完备化的角度重新表述这一结果。具体而言，我们利用 Colombo 的结果构造 Collino 类；它们是以某种辛表示为系数的超椭圆映射类群的上同调类。我们还确定了在二级双曲椭圆曲线映射类群情形下，这些类张成空间的维数。

Contents

1. 引言 1 2. 映射类群 3 3. 超椭圆映射类群 4 4. 超椭圆曲线的模空间 6 5. 超椭圆映射类群的相对完备化 7 6. 超椭圆 Johnson 同态 10 7. 正规函数与 Ceresa 循环 15 8. Collino 循环及其相关正规函数 18 9. 超椭圆 Johnson 同态与 Collino 类 24 参考文献 27

1. Introduction

将亏格为 g、具有 n 个不同标记点的紧拓扑曲面 S 的映射类群记为 $\Gamma_{g,\,n}$。对于 $g \geq 1$，存在一个满射自然表示 $\Gamma_{g,\,n} \to \mathrm{Sp}(H_1(S,\mathbb{Z}))$，其核称为 Torelli 群，记作 $T_{g,\,n}$。

对于紧黎曼曲面 C（本文称之为曲线），令 $\mathrm{Jac}\,C$ 为其雅可比簇。于是，取 C 中的点 x，可得到代数循环 $C_x - C_x^-$，它位于 $\mathrm{Jac}\,C$ 中，称为 Ceresa 循环。令 $\mathcal{T}_{g,\,n}$ 为亏格为 g 的带标记点曲线的 Torelli 空间。存在一个丛 $\mathcal{T}_{g,\,n} \to \mathcal{T}_g$，覆盖 $[C]$，其纤维是中间雅可比簇，位于 J_1 上的纤维为 $J_1(\mathrm{Jac}\,C)$。循环 $C_x - C_x^-$ 确定了点 $e_{C,\,x}$，位于

第一作者部分受到上海市科学技术委员会（编号：22DZ2229014）资助，部分受到国家自然科学基金委员会资助，项目编号：12201217。

中间雅可比簇 J_1（Jac C）中。这一构造可推广到族，并定义丛的一个截面 $e_{g,\,1}\colon \mathcal{T}_{g,\,1}\to\mathcal{J}_1$。根据定义，该截面是一个正规函数（见定义 7.1）。它诱导出基本群的一个同态$\xi_{g,\,1}\colon T_{g,\,1}\to H_3$（Jac C，$\mathbb{Z}$）$=\Lambda^3H_1$（C），其等于 Johnson 同态的两倍（见 [12, §6]）。另一方面，Johnson 同态在 H^1（$\Gamma_{g,\,1}$，H_1（S，$\mathbb{Q}$））和 H^1（$\Gamma_{g,\,1}$，Λ^3H_1（S，$\mathbb{Q}$）$/\theta\wedge H_1$（S，$\mathbb{Q}$））中给出一个非平凡类（见[26], [21, §5]）。

当 C 是超椭圆的且 x 是魏尔斯特拉斯点时，其对应的 Ceresa 循环 $C_x-C_x^-$ 是平凡的，而一般而言，它在本原雅可比簇 J_1(Jac C)$_{\mathrm{prim}}$中的像也是平凡的。因此，我们将转而考虑由 Collino 在[7] 中构造的典范高阶循环 (Z,q_1,q_2)，它与具有两个有序且不同的魏尔斯特拉斯点 q_1 和 q_2 的 C 相关联。高阶循环 Z 可视为由 C 粘合 q_1 和 q_2所得稳定曲线的 Ceresa 循环的一种退化。Collino 在 [7] 中证明，对于一般的超椭圆曲线，Z 的调节子像 reg(Z) 非平凡。在 [8], 中，Colombo 构造了一个与具有 q_1和 q_2的 C 相关联的扩张类 Pe，它等于本原中间雅可比簇I_2(Jac C)$_{\mathrm{prim}}$中的 $(2g+1)$reg(Z)。将双曲 Torelli 空间记为 $\mathcal{H}_g[0]$。存在一个正规函数 $P\mathcal{E}\colon \mathcal{H}_g[0]\to\mathcal{I}_{2\mathrm{prim}}$，它扩张类 Pe；Colombo 利用高阶 Johnson 同态计算了其单值化作用，我们在本文中将其称为双曲 Johnson 同态。

对于超椭圆曲线 C 上的魏尔斯特拉斯点 q，记 $\pi_1(C,q)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的幺幂完备化的李代数为 $\mathfrak{p}$，其导子代数记为 Der $\mathfrak{p}$。李代数 $\mathfrak{p}$ 和 Der $\mathfrak{p}$ 由霍奇理论给出的权滤过分别为 $W_\bullet\mathfrak{p}$ 和 $W_\bullet$Der $\mathfrak{p}$（见 [14]）。固定 S 的一个超椭圆 involution σ。超椭圆映射类群 Δ_g 定义为 Γ_g 中与类 $[\sigma]$ 交换的元素所构成的子群。记作 $T\Delta_g$ 的超椭圆 Torelli 群，是 Γ_g 中的交集 $\Delta_g\cap T_g$。作为一个高阶 Johnson 同态，我们有双曲型 Johnson 同态 $T\Delta_g\to\mathrm{Gr}^W_{-2}$Der $\mathfrak{p}$，记为 τ_q^{hyp}。将 τ_q^{hyp} 与一个从 Gr^W_{-2}Der $\mathfrak{p}$ 投影到 $\Lambda^2H_1(C,\mathbb{Q})/\langle\theta\rangle$ 的特定 Sp($H_1(C,\mathbb{Q})$)-等变投影复合，可得到一个 Sp($H_1(C,\mathbb{Q})$)-等变同态，记为 $\tilde{\tau}_q^{\mathrm{hyp}}$。记延拓 reg($Z$) 的正规函数为 $\widetilde{R}_{\mathcal{Z}}$，记到纤维上的 $\widetilde{\ }$ 投影为 $p_{I_{2\mathrm{prim}}}$。它们的复合 $p_{I_{2\mathrm{prim}}}\circ R_{\mathcal{Z}}$ 通过 $\pi_{\mathcal{Z}}$ 诱导出一个基本群的同态 $T\Delta_g\to\Lambda^2H_1(C,\mathbb{Z})/\langle\theta\rangle$。作为对 Colombo 工作的补充说明，我们证明

定理 1. 使用上述记号，若 $g\geq 2$，则

$$\tilde{\tau}_{q_2}^{\mathrm{hyp}}-\tilde{\tau}_{q_1}^{\mathrm{hyp}}=(g+1)\pi_{\mathcal{Z}}.$$

同态 $\tilde{\tau}_q^{\mathrm{hyp}}$具有 Sp($H_1(C,\mathbb{Q})$)-等变性，并给出 $H^1(\Delta_g[2],\Lambda^2H_1(C,\mathbb{Q})/\langle\theta\rangle)$ 中的一个非平凡类，记作 $[q]$，其中 $\Delta_g[2]$ 是二级双曲映射类群。我们称类 $[q]$ 为魏尔斯特拉斯类。根据定理 1，同态 $(g+1)\pi_{\mathcal{Z}}$ 产生一个由 $[q_2]-[q_1]$ 给出的非平凡类，我们称之为 $H^1(\Delta_g[2],\Lambda^2H_1(C,\mathbb{Q})/\langle\theta\rangle)$ 中的 Collino 类。对于一般的超椭圆曲线，reg(Z) 非平凡这一事实，等价于相应的 Collino 类非平凡。我们的第二个主要结果涉及由所有 Collino 类张成的 $H^1(\Delta_g[2],\Lambda^2H_1(C,\mathbb{Q})/\langle\theta\rangle)$ 的子空间，记作 X_ζ。将由所有魏尔斯特拉斯类张成的 $H^1(\Delta_g[2],\Lambda^2H_1(C,\mathbb{Q})/\langle\theta\rangle)$ 的子空间记作 X_ω。

定理 2. 沿用上述记号，若 $g \geq 2$，则 $X_\zeta = X_\omega$ 且 dim $X_\zeta = 2g+1$。

事实上， $2g+2$ 魏尔斯特拉斯类满足单个方程 $\sum_{i=1}^{2g+2}[q_i] = 0$，并且每个类（$2g+2$）$[q_i]$ 都是（$2g+1$）Collino 类的整数线性组合（见注 9.5）。根据 Teichm¨uller 理论，已知对于 $g = 2$ 由 Hubbard 在 [22] 中以及对于 $g > 2$ 由 Earle 和 Kra 在 [9], 中，Teichm¨uller 空间中双曲椭圆轨迹某个分支上的万有曲线恰好具有 $2g+2$个魏尔斯特拉斯截面。我们的结果表明，魏尔斯特拉斯截面通过双曲椭圆 Johnson 同态满足一个代数关系。另一方面，万有曲线的典范截面在H^1（$\Gamma_{g,\ n}$，H_1（S，$\mathbb{Q}$））中给出线性无关的类（参见 [18, 命题 12.1]）。我们有兴趣进一步研究二级双曲映射类群的相对完备化 $\Delta_g[2]$如何确定魏尔斯特拉斯截面（参见 [31]）。

致谢：感谢 Richard Hain 就超椭圆映射类群的相对完备化进行了有益的讨论，并允许我们使用其一份未发表的关于超椭圆映射类群的笔记中的部分内容 [20]。

2. Mapping class groups

取一个亏格为 g 的光滑紧致定向曲面 S，以及 S 的子集 P，其中包含 S的 n 个不同点。假设 $2g-2+n>0$。映射类群$\Gamma_{S,P}$ 定义为保持 P 中每一点不动的 S 的保向微分同胚的同痕类所构成的群。根据曲面分类，$\Gamma_{S,P}$与所选的对(S,P)无关，因此我们将$\Gamma_{S,P}$记为$\Gamma_{g,n}$。当 $n=0$时，我们将$\Gamma_{g,0}$ 记为 Γ_g。

2.1. 层结构。将 $H_1(S;R)$记为 H_R，其中 R 是一个交换环。将 H_R 上的代数交叉配对记为 $\langle\ ,\ \rangle\colon\ H_R^{\otimes 2} \to R$。它是一个幺模辛形式。令

$$\mathrm{Sp}(H_R) = \mathrm{Aut}(H_R, \langle\ ,\ \rangle).$$

固定 H_R 的辛基 $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$，可得到 Sp($H_R$) 与经典辛群 Sp$_g(R)$ 的一个同构，后者由 $2g \times 2g$ 辛矩阵组成。Sp($H_\mathbb{Z}$) 中的 $m \in \mathbb{Z}$ 级主同余子群 Sp($H_\mathbb{Z}$)$[m]$ 是模 m 约化映射的核:

$$\mathrm{Sp}(H_\mathbb{Z})[m] := \ker\{\mathrm{Sp}(H_\mathbb{Z}) \to \mathrm{Sp}(H_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}})\}.$$

在 S 中固定一点 q。$\Gamma_{g,\ n}$ 在 $\pi_1(S,q)$ 上的作用诱导出在 $H_\mathbb{Z}$ 上保持交叉配对的作用。因此，存在一个表示

$$\rho : \Gamma_{g,n} \to \mathrm{Sp}(H_\mathbb{Z}).$$

众所周知，当 $R=\mathbb{Z}$ 时该映射是满射（例如参见 [10, 定理 6.4]）。对每个整数 $m \geq 0$，我们将 $\Gamma_{g,\ n}$ 的 m 级子群定义为 ρ 模 m 约化的核:

$$\Gamma_{g,n}[m] = \ker\{\Gamma_{g,n} \to \mathrm{Sp}(H_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}})\}.$$

当 $m=1$ 时，我们省略级数标记，因此 $\Gamma_{g,\ n}[1] = \Gamma_{g,\ n}$。
Torelli 群 $T_{g,\ n}$ 定义为 ρ 的核，并且是 $\Gamma_{g,\ n}$ 的 0 级子群:

$$T_{g,n} = \Gamma_{g,n}[0] = \ker\{\Gamma_{g,n} \to \mathrm{Sp}(H_\mathbb{Z})\}.$$

托雷利群是无挠的（例如 [10, 定理 6.12]）。由于对所有 $m \geq 3$, $\mathrm{Sp}(H_{\mathbb{Z}})[m]$ 都是无挠的，因此对所有 $m \geq 3$, $\Gamma_{g,\,n}[m]$ 都是无挠的。

3. Hyperelliptic mapping class groups

本节内容取自一份关于超椭圆映射类群完备化的未发表笔记 [20]。

固定一个超椭圆 involution $\sigma : S \to S$。它是 S 上的一个保定向、阶为 2 的微分同胚，恰有 $2g+2$ 个不动点，称为魏尔斯特拉斯点。根据黎曼-胡尔维茨公式，商空间 $S/\langle\sigma\rangle$ 是一个球面。因此，所有超椭圆 involution 在 S的保定向微分同胚群中共轭，该群记作 Diff^+S。

S 上的保定向微分同胚若与 σ交换，则称为对称的。超椭圆映射类群记作 Δ_g, 定义为 S上保定向对称微分同胚的同痕类所成的群:

$$\Delta_g := \pi_0(\text{centralizer of } \sigma \text{ in } \mathrm{Diff}^+S)$$

Birman 和 Hilden 的以下结果使我们可以将 Δ_g 视为 Γ_g的一个子群。

定理 3.1（Birman-Hilden [3]）。自然同态 $\Delta_g \to \Gamma_g$ 是单射。其像是 Γ_g中 σ 的同痕类的中心化子。

3.1. 二级双曲映射类群。记 σ的不动点集为 W。Δ在 W上的作用给出一个同态 ρ_W: $\Delta_g \to \mathrm{Aut}W$。由 [3, 定理 1] 可知，同态 ρ_W 是满射，且存在一个扩张:

$$1 \to \langle\sigma\rangle \to \ker\rho_W \to \Gamma_{0,2g+2} \to 1. \tag{1}$$

为了确定核，我们需要回顾魏尔斯特拉斯点的标记与超椭圆曲线上的 2 级结构之间的联系。（参见 [27, 第 3.31] 页。）

记集合 T的 $\mathbb{F}_2$-值特征函数 $W \to \mathbb{F}_2$ 为 e_T，其中 T是魏尔斯特拉斯点集的一个子集。存在一个 $\mathbb{F}_2$ 线性映射

$$q : \{e_T : T \subseteq W,\ |T| \text{ is even}\} \to H_1(S, \mathbb{F}_2) = H_{\mathbb{F}_2}.$$

其定义如下: 设 $f : S \to S^2$ 为一个二对一映射，其伽罗瓦群由 σ 生成。这诱导出 W 与 f 的临界值集合之间的同构。若 T 是 W 的一个偶子集，则存在一个 S^2 中的 1-链 γ，其模 2 边界为 $f(T)$。任意两个这样的链模 2 相差一个边界。定义 $q(e_T)$ 为 $f^{-1}(\gamma)$ 在 $H_1(S,\mathbb{F}_2)$ 中的同调类。其同调类模 2 是良定义的。

引理 3.2. 映射 q 诱导出一个线性同构

$$\overline{q} : \{e_T : T \subseteq W,\ |T| \equiv 0 \bmod 2\}/\{e_T - e_{T^c} : |T| \equiv 0 \bmod 2\} \to H_{\mathbb{F}_2}$$

其中 T^c 表示 T 的补集 $W - T$。 □

$H_{\mathbb{F}_2}$ 上的交叉配对对应于配对

$$e_S \cdot e_T = \#(S \cap T) \bmod 2$$

W 的偶子集上的配对。因此， W 的每个自同构都会诱导出 $H_{\mathbb{F}_2}$的一个辛自同构。

推论 3.3. 存在一个自然的忠实表示 Aut $W \hookrightarrow \mathrm{Sp}(H_{\mathbb{F}_2})$。

将 Γ_g 到 Δ_g 的限制记为

$$\rho^{\mathrm{hyp}} : \Delta_g \to \mathrm{Sp}(H_{\mathbb{Z}}).$$

对于每个 $m \geq 0$，我们通过ρ^{hyp} 模 m的约化，定义 Δ_g 的层级 m 子群 $\Delta_g[m]$：

$$\Delta_g[m] = \ker(\Delta_g \to \mathrm{Sp}(H_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}})).$$

注 3.4. 由于亏格为 2 的每条曲线都是双曲的，$\Gamma_2[m] \cong \Delta_2[m]$ 对所有$m \geq 0$均成立。

推论 3.5. 自然同态 $\Delta_g \to \mathrm{Sp}(H_{\mathbb{F}_2})$ 的像为 $\mathrm{Aut}\ W$。因此，$\rho_W \colon \Delta_g \to \mathrm{Aut}\, W$ 的核为 $\Delta_g[2]$。□

因此存在扩张

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \langle\sigma\rangle & \longrightarrow & \Delta_g[2] & \longrightarrow & \Gamma_{0,2g+2} & \longrightarrow & 1 \\ 1 & \longrightarrow & \Delta_g[2] & \longrightarrow & \Delta_g & \longrightarrow & \mathrm{Aut}\, W & \longrightarrow & 1 \end{array} \tag{2}$$

由于对所有 $m \geq 3$，$\Gamma_g[m]$ 都是无挠的，因此 $\Delta_g[m]$ 也如此。群 $\Delta_g[0]$ 是 ρ^{hyp} 的核。我们称其为超椭圆 Torelli 群，并记作 $T\Delta_g$。

3.2. ρ^{hyp} 的像。通过上述忠实表示，将 $\mathrm{Aut}\, W$ 视为 $\mathrm{Sp}(H_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}})$ 的子群。记 $\mathrm{Aut}\ W$ 在约化映射 $\mathrm{Sp}(H_{\mathbb{Z}}) \to \mathrm{Sp}(H_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}})$ 下的原像为 G_g。我们有以下图表。

$$\begin{array}{ccc} G_g & \longrightarrow & \mathrm{Sp}(H_{\mathbb{Z}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Aut}\, W & \longrightarrow & \mathrm{Sp}(H_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}) \end{array}$$

这里我们回顾 A'Campo 的以下结果（另见 [27, §8，引理 8.12]）。

定理 3.6（[1]）。若 $g \geq 2$，则 ρ^{hyp}： $\Delta_g \to \mathrm{Sp}(H_{\mathbb{Z}})$ 的像为 G_g。特别地，ρ^{hyp} 到 $\Delta_g[2]$ 的限制的像为 $\mathrm{Sp}(H_{\mathbb{Z}})[2]$。

3.3. 子群 $\Delta_{g,\ n}$。固定一个标记 $W \cong \{1, 2, \ldots, 2g+2\}$，即可确定 $\mathrm{Aut}\, W$ 与对称群 $\mathbb{S}_{2g+2}$ 之间的一个同构。固定一个魏尔斯特拉斯点$q \in W$。记它在 $\mathrm{Aut}\ W$ 中的稳定子为 $\mathrm{Aut}_q W$。它同构于对称群 $\mathbb{S}_{2g+1}$。群$\Delta_{g,\ 1}$ 定义如下：

$$\Delta_{g,1} := (\rho_W)^{-1}(\mathrm{Aut}_q\, W).$$

它包含 $\Delta_g[2]$，并且是一个扩张

$$1 \to \Delta_g[2] \to \Delta_{g,1} \to \mathrm{Aut}_q\, W \to 1. \tag{3}$$

更一般地，设 Q 是 W 的一个子集，且 $|Q| = n$。记 $\mathrm{Aut}\ W$ 中逐点固定 Q 的子群为 $\mathrm{Aut}_Q W$。该群同构于对称群 $\mathbb{S}_{2g+2-n}$。滥用记号，对于 W 的任意此类子集 Q，定义 Δ_g 的子群$\Delta_{g,\ n}$ 为 $\mathrm{Aut}_Q\, W$ 在 ρ_W 下的原像：

$$\Delta_{g,n} = (\rho_W)^{-1}(\mathrm{Aut}_Q\, W).$$

类似地，存在一个扩张

$$1 \to \Delta_g[2] \to \Delta_{g,n} \to \mathrm{Aut}_Q\, W \to 1.$$

类似地，将 ρ^{hyp} 在 $\mathrm{Sp}(H_{\mathbb{Z}})$ 中的 $\Delta_{g,\,n}$ 的像记为 $G_{g,\,n}$。于是，对于 $0 \leq n \leq 2g+2$，存在如下扩张的交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & T\Delta_g & \longrightarrow & \Delta_{g,n} & \longrightarrow & G_{g,n} & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & T\Delta_g & \longrightarrow & \Delta_g & \longrightarrow & G_g & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

当 $n = 2g+2$时，我们用 $\Delta_{g,\,2g+2}$ 表示 $\Delta_g[2]$。

3.4. Δ_g 和 $\Delta_g[2]$的群上同调。这里陈述关于超椭圆映射类群 Δ_g 和 $\Delta_g[2]$的上同调的基本结果。

命题 3.7. 若 V是一个有理 Δ_g-模，则 $H^\bullet(\Delta_g[2], V)$ 是一个 $\mathrm{Aut}\ W$-模，并且存在自然同构

$$H^\bullet(\Delta_g, V) \cong H^\bullet(\Delta_g[2], V)^{\mathrm{Aut}\, W} \ \textit{and}\ H^\bullet(\Delta_{g,1}, V) \cong H^\bullet(\Delta_g[2], V)^{\mathrm{Aut}_q\, W}.$$

若 σ在 V上作用为 $-\mathrm{id}$，则 $H^\bullet(\Delta_g, V) = H^\bullet(\Delta_g[2], V) = 0$。若 σ在V上平凡作用，则 V是一个 $\Gamma_{0,\,2g+2}$-模，并且存在自然同构

$$H^\bullet(\Delta_g[2], V) \cong H^\bullet(\Gamma_{0,2g+2}, V).$$

证明。第一个断言由扩张 (2) 和 (3) 的 Hochschild-Serre谱序列得出。第二个断言由群的中心化子在上同调上平凡作用这一事实得出。由于 σ 是 Δ_g的中心元，它作为 $-\mathrm{id}$，在 V上作用为一个 Δ_g-线性自同构，因此也作用于 $H^\bullet(\Delta_g, V)$ 和$H^\bullet(\Delta_g[2], V)$。但是，由于中心化子在群的上同调上平凡作用，可知 σ 也平凡作用。因此，乘以 2 会湮灭这两个上同调群。由于 V 是一个有理表示，我们的断言得证。第三个断言由扩张 (1) 的 Hochschild-Serre谱序列得出。□

4. Moduli spaces of hyperelliptic curves

复曲线，简称曲线，指的是黎曼曲面。假设 $2g-2+n>0$。令 S为 §2 中所述的亏格为 g的参考曲面，并令P 为 S 中由 n个点组成的子集。将带标记、带n个标记点的紧致亏格为 g 的曲线的 Teichm¨uller 空间记为 $X_{g,\,n}$。作为一个集合，$X_{g,\,n}$ 是

$$\left\{\begin{array}{l}\text{orientation-preserving}\quad\text{diffeomorphisms}\\ f : S \to C \text{ to a complex curve}\end{array}\right\} \Big/ \text{isotopies, constant on } P.$$

这是一个维数为 $3g-3+n$的可缩复流形。当 $n=0$,$X_{g,\,0}$ 时，记作 X_g。映射类群$\Gamma_{g,\,n}$ 通过作用于标记，在$X_{g,\,n}$ 上作为一个双全纯映射群作用：

$$\phi : f \mapsto f \circ \phi^{-1}, \quad \phi \in \Gamma_{g,n},\ f \in X_{g,n}.$$

此作用是适当不连续且几乎自由的。$[(S,P) \to (C;\, x_1, \ldots, x_n)] \in X_{g,\,n}$ 的各向同性群同构于固定 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 中各点的 C的自同构集合。

对于每个 $m \geq 0$，带有 m 级结构的 n 标记光滑射影亏格为 g 的曲线的模空间，是 $X_{g,\,n}$ 对 $\Gamma_{g,\,n}$的 m 级子群取商所得：

$$\mathcal{M}_{g,n}[m] = \left(\Gamma_{g,n}[m] \backslash X_{g,n}\right)^{\mathrm{orb}}.$$

它将被视为一个复解析轨形。它是 $\Gamma_{g,\,n}[m]$ 的分类空间的一个模型。当群 $\Gamma_{g,\,n}[m]$ 无挠时，$\mathcal{M}_{g,\,n}[m]$ 是一个光滑

簇，同时也是一个细模空间，参数化带有 n 个标记点、亏格为 g 且具有 level m 结构的光滑射影曲线。例如，当 $m \geq 3$、$m = 0$ 或 $n > 2g + 2$ 时，就会出现这种情况。注意，$\mathcal{M}_{g,\ n}[1] = \mathcal{M}_{g,\ n}$，并且 $\mathcal{M}_{g,\ n}[0]$ 是 Teichm¨uller 空间对 Torelli 群 $T_{g,\ n}$ 取商所得。它称为 Torelli 空间。我们将它记作 $\mathcal{T}_{g,\ n}$。

固定一个超椭圆对合 σ 作用于 S。令 Y_g 为 X_g 中被σ固定的点集:

$$Y_g = X_g^{\sigma}$$

集合 Y_g 由点 $[f$组成: $S \to C]$ 满足 $f \circ \sigma \circ f^{-1}$ 是 C的一个自同构。它是连通且可缩的，维数为 $2g-1$，因为它与$X_{0,\ 2g+2}$双全纯。注意，Δ_g 是 Y_g的稳定子。对于每个 $m \geq 0$，作为一个解析轨形，光滑射影亏格为g 、带有 level m 结构的超椭圆曲线的模叠 $\mathcal{H}_g[m]$ 是如下轨形商

$$\mathcal{H}_g[m] = (\Delta_g[m] \backslash Y_g)^{\mathrm{orb}}.$$

当 $m = 0$时，$\mathcal{H}_g[0]$ 是对应于 σ的双曲 Torelli 空间。事实上，X_g 的双曲椭圆轨迹是 Y_g的平移副本的不交并。由于 Y_g 可缩，$\mathcal{H}_g[m]$ 是 $\Delta_g[m]$的分类空间模型。因此我们有一个同构

$$\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{H}_g[m]) \cong \Delta_g[m],$$

其中 π_1^{orb} 表示轨形基本群。类似地，对于 $\Delta_{g,\ n}$ 满足 $0 \leq n \leq 2g + 2$ 的情形，我们将 Y_g 关于 $\Delta_{g,\ n}$ 的轨形商记为

$$\mathcal{H}_{g,n} = (\Delta_{g,n} \backslash Y_g)^{\mathrm{orb}}.$$

注意，$\mathcal{H}_{g,\ 2g+2} = \mathcal{H}_g[2]$。轨形基本群 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{H}_{g,\ n})$ 同构于 $\Delta_{g,\ n}$。

4.1. $\mathcal{H}_{g,\ n}$ 上的万有族。作为解析轨形，$\mathcal{H}_{g,\ n}$ 具有万有族 $\pi_{g,\ n} : \mathcal{C}_{\mathcal{H}_{g,\ n}} \to \mathcal{H}_{g,\ n}$。它是轨形的适当光滑态射。由于 n 个魏尔斯特拉斯点已被平凡化，族 $\pi_{g,\ n}$ 具有 n 个彼此不同的截面，我们称之为魏尔斯特拉斯截面。设 $x = [C]$ 属于 $\mathcal{H}_{g,\ n}$。$\pi_{g,\ n}$ 在 x 上的纤维为 C。设 q 是 C 的一个魏尔斯特拉斯点。则与 $\pi_{g,\ n}$ 相关联，有一个同伦正合列

$$1 \to \pi_1(C, q) \to \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{C}_{\mathcal{H}_{g,n}}, q) \to \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{H}_{g,n}, x) \to 1. \tag{4}$$

将基本群 $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{C}_{\mathcal{H}_{g,n}})$ 记为 $\Delta_{g,n}^{\mathcal{C}}$。$\mathcal{H}_{g,n}$ 在 C 上的单值化作用给出自然的辛表示

$$\rho_{g,n} : \Delta_{g,n} \to \mathrm{Sp}(H_{\mathbb{Z}})$$

and

$$\rho_{g,n}^{\mathcal{C}} : \Delta_{g,n}^{\mathcal{C}} \to \mathrm{Sp}(H_{\mathbb{Z}}).$$

根据定理 3.6，$\rho_{g,n}$ 和 $\rho_{g,n}^{\mathcal{C}}$ 的像包含 $\mathrm{Sp}(H_{\mathbb{Z}})[2]$ ，因此在 $\mathrm{Sp}(H_{\mathbb{Q}})$ 中 Zariski 稠密。

5. Relative completions of hyperelliptic mapping class groups

本节回顾超椭圆映射类群和相对完备化的基础知识，并介绍所用的全部记号。

5.1. 相对完备化。关于相对完备化的详细概述，见 [19, §3]。设 F 为一个特征为零的域。假设

(i) Γ是一个离散群，(ii) R 是一个约化 F-群，

并且 (iii) $\rho\colon \Gamma \to R(F)$ 是一个扎里斯基稠密同态。

Γ 关于 ρ 的相对完备化由一个丙代数 F-群$\mathcal{G}$ 构成，该群是一个扩张

$$1 \to \mathcal{U} \to \mathcal{G} \to R \to 1 \tag{5}$$

由 R扩张 F丙幂零群$\mathcal{U}$，以及一个扎里斯基稠密同态 $\tilde{\rho}\colon \Gamma \to \mathcal{G}(F)$ 构成，使得该图表

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & & \\ {\scriptstyle\tilde{\rho}}\downarrow & \searrow^{\rho} & \\ \mathcal{G}(F) & \longrightarrow & R(F) \end{array}$$

交换。它满足以下泛性质。设 G 是一个丙代数F-群，且为一个扩张

$$1 \to U \to G \to R \to 1$$

由 R扩张 F丙幂零群 U。若 $\rho_G\colon \Gamma \to G(F)$ 是一个提升了ρ的同态，则存在唯一的同态 $\phi : \mathcal{G} \to G$ ，使得该图表

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & \mathcal{G}(F) \\ {\scriptstyle\rho_G}\downarrow & \swarrow_{\phi} & \downarrow \\ G(F) & \longrightarrow & R(F) \end{array}$$

可交换。

5.2. 关键性质。记 $\mathcal{U}$ 的李代数为 $\mathfrak{u}$。它是一个原幂零李代数。相对完备化在某种程度上是可计算的，因为它由上同调控制。根据 Levi 定理的推广，扩张 (5) 可以分裂，且任意两个分裂都共轭于 $\mathcal{U}$ 中的某个元素。因此，李代数 $\mathfrak{u}$ 是一个 R-模，并且存在一个同构

$$\mathcal{G} \cong R \ltimes \mathcal{U} \cong R \ltimes \exp \mathfrak{u}$$

该同构在 $\mathcal{U} \cong \exp \mathfrak{u}$ 中某个元素的共轭意义下唯一。以下结果将李代数 $\mathfrak{u}$ 与 Γ 的群上同调联系起来。

定理 5.1（[17, 定理 3.8]）。对于所有有限维 R-模 V，

(i) 存在一个自然同构

$$\mathrm{Hom}_R(H_1(\mathfrak{u}), V) \cong H^1(\Gamma, V),$$

and

（ii）存在一个自然的单射

$$\mathrm{Hom}_R(H_2(\mathfrak{u}), V) \hookrightarrow H^2(\Gamma, V).$$

5.3. 超椭圆映射类群的相对完备化。假设 $g \geq 2$。回想一下，$G_{g,\ n}$ 是 $\rho_{g,\ n}$ 的像: $\Delta_{g,\ n} \to \mathrm{Sp}(H_{\mathbb{Z}})$。还要注意，超椭圆 Torelli 群 $T\Delta_g$ 是 $\rho_g = \rho_{g,\ 0}$ 的核，并且对每个 $n = 1,\ \ldots,\ 2g+2$，都有 $\ker \rho_{g,\ n} = T\Delta_g$。表示 $\rho^{\mathcal{C}}_{g,\ n} \colon \Delta^{\mathcal{C}}_{g,\ n} \to \mathrm{Sp}(H_{\mathbb{Z}})$ 可经由 $\rho_{g,\ n}$ 分解，因此具有相同的像 $G_{g,\ n}$。为行文方便，我们也用 $\rho_{g,\ n}$ 和 $\rho^{\mathcal{C}}_{g,\ n}$ 表示限制到该像上的映射。

设 $H = H_{\mathbb{Q}}$。将相对于 $\rho_{g,n}$ 的 $\Delta_{g,n}$ 的相对完备化记为 $\mathcal{D}_{g,n}$，并赋予 $\tilde{\rho}_{g,n} \colon \Delta_{g,\ n} \to \mathcal{D}_g(\mathbb{Q})$。存在一个扩张

$$1 \to \mathcal{U}_{g,n} \to \mathcal{D}_{g,n} \to \mathrm{Sp}(H) \to 1 \tag{6}$$

该扩张的商为 $\mathrm{Sp}(H)$，幂零幂幺根基为 $\mathcal{U}_{g,n}$，且 $\mathcal{D}_{g,n}$。将 $\mathcal{D}_{g,n}$ 和 $\mathcal{U}_{g,n}$ 的李代数分别记为 $\mathfrak{d}_{g,n}$ 和 $\mathfrak{u}_{g,n}$。当 $n = 2g+2$ 时，我们将 $\mathcal{D}_{g,n}$、$\mathcal{U}_{g,n}$、$\mathfrak{d}_{g,n}$ 和 $\mathfrak{u}_{g,n}$ 分别记为 $\mathcal{D}_g[2]$、$\mathcal{U}_g[2]$、$\mathfrak{d}_g[2]$ 和 $\mathfrak{u}_g[2]$。正合列 6 纳入交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & T\Delta_g & \longrightarrow & \Delta_{g,n} & \longrightarrow & G_{g,n} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\rho}_{g,n}|_{T\Delta_g}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\rho}_{g,n}} & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathcal{U}_{g,n} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{g,n} & \longrightarrow & \mathrm{Sp}(H) & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

将 $T\Delta_g$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的幂零幂幺完备化记为 $T\Delta^{\mathrm{un}}_{g/\mathbb{Q}}$。相对完备化的右正合性 [19, Prop. 3.7] 给出正合列

$$T\Delta^{\mathrm{un}}_{g/\mathbb{Q}} \to \mathcal{D}_g \to \mathrm{Sp}(H) \to 1.$$

这意味着同态 $T\Delta^{\mathrm{un}}_{g/\mathbb{Q}} \to \mathcal{U}_g$ 是满射。由于 $T\Delta_g$ 在 $T\Delta^{\mathrm{un}}_{g/\mathbb{Q}}$ 中的像扎里斯基稠密，因此 $\tilde{\rho}_{g,\ n}|_{T\Delta_g}$ 的像扎里斯基稠密。

类似地，关于 $\rho^{\mathcal{C}}_{g,\ n}$ 的 $\Delta^{\mathcal{C}}_{g,\ n}$ 的相对完备化记为 $\Delta^{\mathcal{C}}_{g,\ n} \to G_{g,\ n}$，而 $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}_{g,\ n}$ 和 $\tilde{\rho}^{\mathcal{C}}_{g,\ n} \colon \Delta^{\mathcal{C}}_{g,\ n} \to \mathcal{D}^{\mathcal{C}}_{g,\ n}(\mathbb{Q})$；其幂零幂幺根基记为 $\mathcal{U}^{\mathcal{C}}_{g,\ n}$。分别将它们的李代数记为 $\mathfrak{d}^{\mathcal{C}}_{g,\ n}$ 和 $\mathfrak{u}^{\mathcal{C}}_{g,\ n}$。

将 $\pi_1(C, q)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的幺幂完备化及其李代数分别记为 $\mathcal{P}$和 $\mathfrak{p}$。$\mathcal{P}$ 的中心自由性意味着序列 4 给出正合列

$$1 \to \mathcal{P} \to \mathcal{D}^{\mathcal{C}}_{g,n} \to \mathcal{D}_{g,n} \to 1 \tag{7}$$

and

$$0 \to \mathfrak{p} \to \mathfrak{d}^{\mathcal{C}}_{g,n} \to \mathfrak{d}_{g,n} \to 0. \tag{8}$$

5.4. 相对完备化上的混合霍奇结构。令 V 为$R^1\pi_{g,n*}\mathbb{Z}$的对偶。它是权为 -1的极化霍奇结构变分。其单值表示可识别为$\rho_{g,n}$。根据 Hain 的主要定理 [16], ，相对完备化$\mathfrak{d}_{g,n}$ 和$\mathfrak{d}^{\mathcal{C}}_{g,n}$ 的李代数具有自然的 $\mathbb{Q}$-混合霍奇结构，其李括号是混合霍奇结构的态射。李代数$\mathfrak{p}$ 具有自然的 $\mathbb{Q}$-混合霍奇结构，因为它是$\pi_1(C, q)$的幺幂完备化的李代数。另一方面，作为满射$\mathfrak{d}^{\mathcal{C}}_{g,n} \to \mathfrak{d}_{g,n}$的核，它也具有 $\mathbb{Q}$-混合霍奇结构。根据相对完备化混合霍奇结构的自然性性质 [16,定理 13.12], ， $\mathfrak{p}$ 上的这些混合霍奇结构相同。记 $\mathrm{Sp}(H)$ 的李代数为 $\mathfrak{s}$。这些李代数的权滤过的基本性质可由 [16,推论 13.2] 得出，列于下文。

命题 5.2。权滤过$W_\bullet\mathfrak{d}_{g,n}$、 $W_\bullet\mathfrak{d}^{\mathcal{C}}_{g,n}$和 $W_\bullet\mathfrak{p}$ 满足以下性质:

(1)

$$W_{-1}\mathfrak{d}_{g,n}=\mathfrak{u}_{g,n}=W_{-1}\mathfrak{u}_{g,n},\quad W_{-1}\mathfrak{d}^{\mathcal{C}}_{g,n}=\mathfrak{u}^{\mathcal{C}}_{g,n}=W_{-1}\mathfrak{u}^{\mathcal{C}}_{g,n},\quad and\quad \mathfrak{p}=W_{-1}\mathfrak{p},$$

(2)

$$\mathrm{Gr}^W_0\,\mathfrak{d}_{g,n}=\mathrm{Gr}^W_0\,\mathfrak{d}^{\mathcal{C}}_{g,n}=\mathfrak{s},$$

and

(3) 对于 $m\geq 1$，每个分次商 $\mathrm{Gr}^W_{-m}\mathfrak{d}_{g,\ n}$、$\mathrm{Gr}^W_{-m}\mathfrak{d}^{\mathcal{C}}_{g,\ n}$ 和 $\mathrm{Gr}^W_{-m}\mathfrak{p}$ 都是 Sp(H)-模，且诱导映射

$$\mathrm{Gr}^W_\bullet\,\mathfrak{p}\to\mathrm{Gr}^W_\bullet\,\mathfrak{d}^{\mathcal{C}}_{g,n}\ and\ \mathrm{Gr}^W_\bullet\,\mathfrak{d}^{\mathcal{C}}_{g,n}\to\mathrm{Gr}^W_\bullet\,\mathfrak{d}_{g,n}$$

是 Sp(H)-等变分次李代数同态。

6. Hyperelliptic Johnson homomorphisms

在 S 中固定一个魏尔斯特拉斯点 q。将基本群 $\pi_1(S,q)$ 记为 Π，并将 Π 在 $\mathbb{Q}$ 上的幺幂完备化（Malcev 完备化，见 [25]）的幂零完备李代数记为 $\mathfrak{p}$（$\pi_1(C)$ 和 $\pi_1(S)$ 的幺幂完备化同构）。对于群 G，将 G 的下中心列记为 $L^\bullet G$，其中 $L^1G=G$ 和 $L^kG=[L^{k-1}G,G]$，对 $k\geq 2$ 成立。对于每个 $k\geq 1$，将伴随分次商 $L^kG/L^{k+1}G$ 记为 $\mathrm{Gr}^L_k G$，将商 G/L^kG 记为 N_kG。存在一个正合列

$$1\to\mathrm{Gr}^L_k\,G\to N_{k+1}G\to N_kG\to 1.$$

当 $k=2$ 时，我们有正合列

$$1\to\mathrm{Gr}^L_2\,G\to N_3G\to H_1(G)\to 1.$$

映射类群 $\Gamma_{g,\ 1}$ 作用于 $N_k\Pi$，因此存在一个同态

$$\rho_k:\Gamma_{g,1}\to\mathrm{Aut}(N_k\Pi).$$

$\Gamma_{g,\ 1}$ 在 $\mathrm{Gr}^L_k\,\Pi$ 上的作用经由自然表示 $\rho:\Gamma_{g,\ 1}\to$Sp($H_\mathbb{Z}$) 分解。注意，当 $k=2$ 时，$N_2\Pi=H_1(S,\mathbb{Z})=H_\mathbb{Z}$，$\rho_2$ 是同态ρ，且 $\ker\rho_2=T_{g,\ 1}$。Johnson 同态

$$\tau:\ker\rho_2=T_{g,1}\to\mathrm{Hom}(H_\mathbb{Z},\mathrm{Gr}^L_2\,\Pi)$$

定义为令 $\phi\mapsto(u\mapsto\phi(\tilde{u})\tilde{u}^{-1}\in\mathrm{Gr}^L_2\,\Pi)$，其中 $\tilde{u}$ 是 u 在 $N_3\Pi$ 中的任意提升。它是一个 $\Gamma_{g,\ 1}$-等变同态，且诱导的同态$H_1(T_{g,\ 1})\to$ Hom($H_\mathbb{Z}$,$\mathrm{Gr}^L_2\,\Pi$) 是 Sp($H_\mathbb{Z}$)-等变的。众所周知，作为一个 Sp($H_\mathbb{Z}$)-模，$\mathrm{Gr}^L_2\,\Pi$ 同构于 $\Lambda^2H_\mathbb{Z}/\langle\theta\rangle$。事实上，Johnson 在[23, 24] 中证明，τ 的像包含于 $\Lambda^3H_\mathbb{Z}\subset$ Hom($H_\mathbb{Z}$,$\Lambda^2H_\mathbb{Z}/\langle\theta\rangle$)，且 τ 诱导一个同构 $H_1(T_{g,\ 1})\to\Lambda^3H_\mathbb{Z}$ 模去 2- 挠。

对于超椭圆映射类群$\Delta_{g,\ 1}$，相应的 Johnson 同态是平凡的，理由如下。由于超椭圆 involution σ与 $T\Delta_g$的元素可交换，它在 $T\Delta_g$上平凡作用。另一方面，σ 在 Hom($H_\mathbb{Z}$, $\mathrm{Gr}^L_2\,\Pi$) 上的作用为 $-\mathrm{id}$。同态的平凡性意味着 $T\Delta_g$ 的元素在 $N_3\Pi$上平凡作用。由正合列

$$1\to\mathrm{Gr}^L_3\,\Pi\to N_4\Pi\to N_3\Pi\to 1,$$

我们得到双曲型 Johnson 同态

$$\tau_q^{\mathrm{hyp}} : T\Delta_g \to \mathrm{Hom}(H_{\mathbb{Z}}, \mathrm{Gr}_3^L \Pi) \quad \phi \mapsto (u \mapsto \phi(\tilde{u})\tilde{u}^{-1} \in \mathrm{Gr}_3^L \Pi),$$

其中 $\tilde{u}$ 是 u 在 $N_4\Pi$ 中的任意一个提升。该同态 τ_q^{hyp} 是 $\Delta_{g,\ 1}$-等变的。

6.1. $\mathrm{Sp}(H)$ 的关键表示。假设 $g \geq 2$。令 $H = H_{\mathbb{Q}}$，并固定 H 的一个辛基 $a_1, b_1, ..., a_g, b_g$。$\mathrm{Sp}(H)$ 的每个有限维不可约表示的同构类均可由一个非负整数 n 的分拆 λ 编号，该分拆的部分数少于 g：

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l \text{ with } l \leq g \text{ and } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l.$$

将同构类对应于分拆 λ 的不可约 $\mathrm{Sp}(H)$-表示记为 V_λ。令 $\theta = \sum_{i=1}^g a_i \wedge b_i$。例如，我们有

$$V_{[1]} \cong H, \quad V_{[1^2]} \cong \Lambda^2 H / \langle\theta\rangle, \text{ and } V_{[1^3]} \cong \Lambda^3 H / \theta \wedge H.$$

6.2. 李代数 $\mathfrak{p}$ 和 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{p}$ 作为 $\mathrm{Sp}(H)$-表示。由于 $H_1(\mathfrak{p})$ 是权为 -1的纯对象，因此 $\mathfrak{p}$ 上的自然权滤过与下中心列重合，即对于每个 $m \geq 1$，都有 $W_{-m}\mathfrak{p} = L^m\mathfrak{p}$。每个伴随分次商 $\mathrm{Gr}^W_{-m}\mathfrak{p} = W_{-m}\mathfrak{p}/W_{-m-1}\mathfrak{p}$，记为 $\mathfrak{p}(-m)$，都是有限维 $\mathrm{Sp}(H)$-模。设 V 是域上的一个向量空间。记由 V 生成的自由李代数为 $\mathbb{L}(V)$。它是各分量$\mathbb{L}_k(V)$的直和 $\oplus_{k\geq 1}\mathbb{L}_k(V)$，其中括号长度为 k。众所周知，分次李代数 $\mathrm{Gr}^W_\bullet\,\mathfrak{p}$ 有一个极小表示

$$\mathrm{Gr}^W_\bullet\,\mathfrak{p} \cong \mathbb{L}(H)/\langle\theta\rangle.$$

以下结果展示了当 m 取较小值时，$\mathrm{Gr}^W_\bullet\,\mathfrak{p}$中出现的一些 $\mathrm{Sp}(H)$-表示。

命题 6.1（[17, 命题 8.4，推论 8.5]）。对于所有 $g \geq 2$，$\mathfrak{p}(-m)$作为 $\mathrm{Sp}(H)$-表示时在 $1 \leq m \leq 3$ 下的不可约分解为

$$\mathfrak{p}(-m) = \begin{cases} V_{[1]} & for\ m = 1 \\ V_{[1^2]} & for\ m = 2 \\ V_{[2+1]} & for\ m = 3. \end{cases}$$

导子代数 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{p}$ 也是由 $\mathfrak{p}$所诱导的混合霍奇结构。我们考虑的另一个关键对象是 $\mathrm{Gr}^W_{-2}\,\mathrm{Der}\,\mathfrak{p}$。$\mathbb{L}(H)$ 的导子代数 $\mathrm{Der}\ \mathbb{L}(H)$ 由

$$\mathrm{Der}\,\mathbb{L}(H) = \oplus_{k\geq 0}\,\mathrm{Hom}(H, \mathbb{L}_k(H)).$$

此外，导子 $\mathrm{Gr}^W_\bullet\mathrm{Der}\,\mathfrak{p} = \mathrm{Der}\,\mathrm{Gr}^W_\bullet\,\mathfrak{p}$ 是 $\mathrm{Der}\,\mathbb{L}(H)$ 的一个 $\mathrm{Sp}(H)$-子模，其由下式给出

$$\mathrm{Gr}^W_\bullet\ \mathrm{Der}\,\mathfrak{p} = \oplus_{m\geq 0}\,\mathrm{Der}_{-m}\,\mathfrak{p},$$

其中，$\mathrm{Der}_{-m}\,\mathfrak{p}$ 是 $\mathrm{Hom}(H, \mathbb{L}_{m+1}(H))$ 的 $\mathrm{Sp}(H)$-子模，由湮灭 H 的导子构成——子。根据 $\mathrm{Sp}(H)$ 的表示环中的 [17, Prop. 9.1], ，我们 have

$$\mathrm{Der}_{-m}\,\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(-1) \otimes \mathfrak{p}(-1-m) - \mathfrak{p}(-2-m).$$

在本文中，权重 -2 分量 $\mathrm{Der}_{-2}\,\mathfrak{p}$ 起着至关重要的作用。

命题 6.2（[17, 命题 9.1，推论 9.2]）。对于所有 $g \geq 2$，$\mathrm{Der}_{-2}\,\mathfrak{p}$ 作为 $\mathrm{Sp}(H)$-模的不可约分解为

$$\mathrm{Der}_{-2}\,\mathfrak{p} = V_{[2^2]} + V_{[1^2]}.$$

6.3. $\mathrm{Der}_{-2}\mathfrak{p}$ 到 $V_{[1^2]}$ 的投影。这里我们将说明如何利用 [8, 推论 5.1] 中使用的投影，识别 $\mathrm{Der}_{-2}\mathfrak{p}$ 的 $V_{[1^2]}$ 分量，并给出一个显式公式。

定义一个 $\mathrm{Sp}(H)$-等变映射 $\phi\colon S^2\Lambda^2 H \to \mathrm{Hom}(H, \mathbb{L}_3(H))$，其定义为

$$\phi : (u_1 \wedge v_1)(u_2 \wedge v_2) \mapsto$$

$x \mapsto \langle u_1, x\rangle[v_1,[u_2,v_2]] + \langle v_1, x\rangle[[u_2,v_2],u_1] + \langle u_2, x\rangle[v_2,[u_1,v_1]] + \langle v_2, x\rangle[[u_1,v_1],u_2]$，其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \Lambda^2 H \to \mathbb{Z}$ 是代数交配对。

以下结果有助于描述 Dehn 扭转在双曲型 Johnson 同态下的像。经简单计算可得

引理 6.3. 对于 $I \subset \{1,\dots,g\}$，令 $H_I = \mathrm{Span}\{a_i, b_i | i \in I\}$ 和 $H_I^c = \mathrm{Span}\{a_i, b_i | i \notin I\}$。设 $\theta_I = \sum_{i\in I} a_i \wedge b_i$。则

$$\phi(\theta_I^2)(x) = \begin{cases} 0 & x \in H_I^c \\ -2[\theta_I, x] & x \in H_I \end{cases}.$$

此外，我们有

引理6.4。 ϕ 的像属于 $\mathrm{Der}_{-2}\mathfrak{p}$。

证明。令 $\theta = \sum_{i=1}^g a_i \wedge b_i$。那么，对于每个 $(u_1 \wedge v_1)(u_2 \wedge v_2)$，我们有

$$\begin{aligned}
\phi((u_1\wedge v_1)(u_2\wedge v_2))(\theta) &= \sum_{i=1}^g [-\langle u_1, a_i\rangle b_i + \langle u_1, b_i\rangle a_i, [v_1,[u_2,v_2]]] \\
&+ [-\langle v_1, a_i\rangle b_i + \langle v_1, b_i\rangle a_i, [[u_2,v_2],u_1]] \\
&+ [-\langle u_2, a_i\rangle b_i + \langle u_2, b_i\rangle a_i, [v_2,[u_1,v_1]]] \\
&+ [-\langle v_2, a_i\rangle b_i + \langle v_2, b_i\rangle a_i, [[u_1,v_1],u_2]] \\
&= [u_1,[v_1,[u_2,v_2]]] + [v_1,[[u_2,v_2],u_1]] \\
&+ [u_2,[v_2,[u_1,v_1]]] + [v_2,[[u_1,v_1],u_2]] \\
&= -[[u_2,v_2],[u_1,v_1]] - [[u_1,v_1],[u_2,v_2]] \\
&= [[u_1,v_1],[u_2,v_2]] - [[u_1,v_1],[u_2,v_2]] = 0.
\end{aligned}$$

因此，我们的结论得证。 □

事实上，由舒尔引理不难看出，ϕ 是到 $\mathrm{Der}_{-2}\mathfrak{p}$ 上的满射。我们如下定义从 $\mathrm{Der}_{-2}\mathfrak{p}$ 到 $V_{[1^2]}$ 的副本的显式投影。首先，定义一个 $\mathrm{Sp}(H)$-等变映射 $p_H\colon \otimes^3 H \to H$，使得

$$u \otimes v \otimes w \mapsto \langle u, v\rangle w.$$

注意，映射 p_H 是单射 $\theta\otimes\cdot\colon H \hookrightarrow \otimes^3 H$ 的对偶，并且复合 $p_H \circ (\theta\otimes\cdot) = 2g\,\mathrm{id}_H$。其次，定义一个 $\mathrm{Sp}(H)$-等变映射 $p_{\Lambda^2 H}\colon \mathrm{Hom}(H, \otimes^3 H) \to \Lambda^2 H$，使得

$$\gamma \mapsto \sum_{i=1}^g a_i \wedge p_H\gamma(b_i) - b_i \wedge p_H\gamma(a_i).$$

现在，我们有同一化 $\mathbb{L}_3(H) = (\Lambda^2 H \otimes H)/\Lambda^3 H$，然后利用包含 $\Lambda^2 H \to \otimes^2 H$，$u\wedge v \mapsto u\otimes v - v\otimes u$，得到包含 $\mathbb{L}_3(H) \to \otimes^3 H$。

因此，我们有由复合映射给出的 $\mathrm{Sp}(H)$-等变投影 $\mathrm{Der}_{-2}\mathfrak{p} \to \Lambda^2 H$

$$\mathrm{Der}_{-2}\mathfrak{p} \hookrightarrow \mathrm{Hom}(H, \mathbb{L}_3(H)) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(H, \otimes^3 H) \overset{p_{\Lambda^2 H}}{\to} \Lambda^2 H,$$

我们将其记为 $\pi_{\Lambda^2 H}$。以下结果在计算 $T\Delta_g$ 中元素在 τ^{hyp} 下的像的 $\mathrm{Der}_{-2}\mathfrak{p}$ 中的 $V_{[1^2]}$ 分量时很有用。

引理 6.5。复合 $\pi_{\Lambda^2 H} \circ \phi$：$S^2\Lambda^2 H \to \Lambda^2 H$ 由下式给出

$$(u_1 \wedge v_1)(u_2 \wedge v_2) \mapsto 4[\langle u_1, v_1\rangle v_2 \wedge u_2 + \langle v_2, u_2\rangle u_1 \wedge v_1] +$$
$$2[\langle u_1, v_2\rangle v_1 \wedge u_2 + \langle v_1, u_2\rangle u_1 \wedge v_2 + \langle u_1, u_2\rangle v_2 \wedge v_1 + \langle v_2, v_1\rangle u_1 \wedge u_2].$$

证明。直接计算即可。 □

将投影 $\Lambda^2 H \to \Lambda^2 H/\langle\theta\rangle$ 记为 $\tilde{\theta}$。另一方面，我们可以将 $V_{[1^2]}$ 视为 $\Lambda^2 H$ 的子模，并且存在由 $u \wedge v \mapsto u \wedge v - \frac{\langle u, v\rangle}{g}\theta$ 给出的 $\mathrm{Sp}(H)$-投影 $\hat{}\theta$：$\Lambda^2 H \to V_{[1^2]}$。将复合 $\hat{}\theta \circ \pi_{\Lambda^2 H} \circ \phi$ 记为 $\hat{\pi}$。将由乘以 θ 给出的映射 $V_{[1^2]} \to S^2\Lambda^2 H$ 记为 j_θ。结合引理 6.5，简单计算可得

引理 6.6. 复合映射

$$V_{[1^2]} \overset{j_\theta}{\to} S^2\Lambda^2 H \overset{\hat{\pi}}{\to} V_{[1^2]}$$

由 $-4(g+1)$ 乘以恒等映射 $\mathrm{id}_{V_{[1^2]}}$ 给出。

引理 6.7. 使用上述记号，对每个 $x \in S^2\Lambda^2 H$，向量

$$x - \frac{1}{-4(g+1)}(j_\theta \circ \hat{\pi})(x)$$

属于 $\mathrm{Der}_{-2}\mathfrak{p}$ 的 $V_{[2^2]}$-分量，其中映射经由 ϕ 给出。

证明。令 $s = \phi\left(x - \frac{1}{-4(g+1)}(j_\theta \circ \hat{}\pi)(x)\right)$。由引理 6.6，$(\hat{}\theta \circ \pi_{\Lambda^2 H})(s) = 0$，因此由命题 6.2 和舒尔引理，$s$ 属于 $\mathrm{Der}_{-2}\mathfrak{p}$ 的 $V_{[2^2]}$-分量。□

6.4. τ^{hyp} 的非平凡性。假设 $g \geq 2$。令 c_i 为 S 中的一条分离简单闭曲线，它将 S 分成两个亏格分别为 i 和 $g-i$ 的子曲面 S_i' 和 S_i''。固定 $H_{\mathbb{Z}}$ 的一个辛基 $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$，使得对每个 $i = 1, \ldots, g-1$，集合 $\{a_l, b_l | 1 \leq l \leq i\}$ 和 $\{a_l, b_l | i+1 \leq l \leq g\}$ 分别构成 $H_1(S_i')$ 和 $H_1(S_i'')$ 的辛基。令 $\theta_i' = \sum_{l=1}^{i} a_l \wedge b_l$ 和 $\theta_i'' = \sum_{l=i+1}^{g} a_l \wedge b_l$。于是我们有 $\theta = \theta_i' + \theta_i''$。将沿 c_i 的 Dehn 扭转的同痕类记为 d_i。它是超椭圆 Torelli 群 $T\Delta_g$ 的一个元素。为简便起见，假设魏尔斯特拉斯点 q 位于子曲面 S_i' 中。由引理 6.3 可得

$$\phi((\theta_i'')^2)(x) = \begin{cases} 0 & x \in H_1(S_i') \\ -2[\theta_i'', x] & x \in H_1(S_i'') \end{cases}.$$

根据以基点 q 构造 τ_q^{hyp}，可得命题 6.8（[31, 命题 6.2]）。若 $g \geq 2$，则

$$\tau_q^{\mathrm{hyp}}(d_i) = \frac{1}{2}\phi((\theta_i'')^2).$$

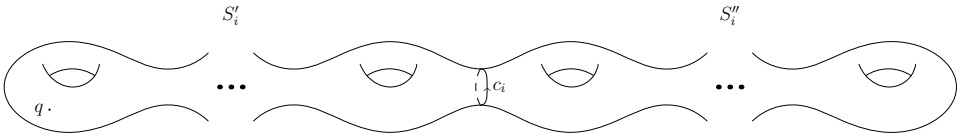


FIGURE 1. 由 c_i分隔的子曲面 S_i' 和 S_i''

Brendle、Margalit 和 Putman 的以下结果是理解双曲椭圆 Johnson 同态的关键。若分离曲线 d 满足 $\sigma(d) = d$，则称其为对称的。

定理 6.9（[5, 定理 A]）。对于 $g \geq 0$，群 $T\Delta_g$ 由关于对称分离曲线的 Dehn 扭转生成。

由命题 6.8 和定理 6.9 可立即得到

推论 6.10。如果 $g \geq 2$， $\tau_{\mathrm{hyp}q}$非平凡，且 τ_q^{hyp}的像包含于 $\mathrm{Der}_{-2}\mathfrak{p}$。

6.5. τ_q^{hyp}的上同调类。这里我们通过相对完备化如下地将一个上同调类与τ_q^{hyp}相关联。假设 $n \geq 1$ 和 $\Delta_{g,\ n}$ 固定 q。考虑同伦正合列

$$1 \longrightarrow \pi_1(C,q) \longrightarrow \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{C}_{\mathcal{H}_{g,n}},q) \underset{\pi_{g,n*}}{\overset{s_{q*}}{\rightleftarrows}} \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathcal{H}_{g,n},x) \longrightarrow 1.$$

万有曲线 $\pi_{g,n}:\mathcal{C}_{\mathcal{H}_{g,n}} \to \mathcal{H}_{g,n}$ 的魏尔斯特拉斯截面 s_q 由 q给出，并诱导出 $\pi_{g,n*}$ 的一个截面 s_{q*}。对 $\Delta_{g,n}^{\mathcal{C}}$ 和 $\Delta_{g,n}$取相对完备化，得到正合列 7，由此导出定义在 $\mathbb{Q}$上的渐近幺幂群正合列

$$1 \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{U}_{g,n}^{\mathcal{C}} \underset{}{\overset{\tilde{s}_q}{\rightleftarrows}} \mathcal{U}_{g,n} \longrightarrow 1.$$

根据相对完备化的泛性质， s_{q*} 诱导出 $\mathcal{D}_{g,n}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{D}_{g,n}$的一个截面 $\tilde{s}_q$，它限制为 $\mathcal{U}_{g,\ n}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{U}_{g,n}$的一个截面。我们也用 $\tilde{s}_q$表示这个限制。对该序列应用对数映射，得到幂零完备李代数的正合列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{u}_{g,n}^{\mathcal{C}} \underset{}{\overset{d\tilde{s}_q}{\rightleftarrows}} \mathfrak{u}_{g,n} \longrightarrow 0.$$

截面 $\tilde{s}_q$ 诱导出 $\mathfrak{u}_{g,n}^{\mathcal{C}} \to \mathfrak{u}_{g,n}$的一个李代数截面 $d\tilde{s}_q$。因此，李代数$\mathfrak{u}_{g,n}$ 通过 $\mathfrak{u}_{g,n}^{\mathcal{C}}$ 在 $\mathfrak{p}$上的伴随作用作用于 $\mathfrak{p}$，从而得到伴随映射 $\mathrm{adj}_q:\mathfrak{u}_{g,n} \to \mathrm{Der}\,\mathfrak{p}$。由于 adj_q 保持权过滤，得到一个 Sp(H)-等变分次李代数同态

$$\mathrm{Gr}_\bullet^W \mathrm{adj}_q : \mathrm{Gr}_\bullet^W \mathfrak{u}_{g,n} \to \mathrm{Gr}_\bullet^W \mathrm{Der}\,\mathfrak{p}.$$

[31, 命题 7.7] 的证明表明， $H_1(\mathfrak{u}_{g,n})$ 是权重 -2 的纯对象。因此，我们有

$$\mathrm{Gr}_{-2}^W \mathfrak{u}_{g,n} = \mathrm{Gr}_{-2}^W H_1(\mathfrak{u}_{g,n}) = H_1(\mathfrak{u}_{g,n}),$$

因此，$\mathrm{Gr}^W_{-2}\mathrm{adj}_q$ 可以表示为一个 $\mathrm{Sp}(H)$-等变映射

$$\mathrm{Gr}^W_{-2}\,\mathrm{adj}_q : H_1(\mathfrak{u}_{g,n}) \to \mathrm{Der}_{-2}\,\mathfrak{p}.$$

另一方面，回想一下，相对完备化 $\tilde{\rho}_{g,\,n}:\Delta_{g,\,n} \to \mathcal{G}_{g,\,n}$ 到 $T\Delta_g$ 的限制诱导出映射 $T\Delta_g \to \mathcal{U}_{g,\,n}$，其像在 $\mathcal{U}_{g,\,n}$中扎里斯基稠密。将其与对数映射 $\mathcal{U}_{g,\,n} \to \mathfrak{u}_{g,\,n}$ 和 $\mathfrak{u}_{g,\,n} \to H_1(\mathfrak{u}_{g,\,n})$复合，我们得到映射 $r_{g,\,n}:\ T\Delta_g \to H_1(\mathfrak{u}_{g,\,n})$。现在，由于伴随映射是由 $\Delta^{\mathcal{C}}_{g,\,n}$ 在 $\pi_1(C,q)$上的共轭作用诱导的，双曲型 Johnson 同态的构造表明存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} T\Delta_g & & \\ {\scriptstyle r_{g,n}}\downarrow & \searrow^{\tau_q^{\mathrm{hyp}}} & \\ H_1(\mathfrak{u}_{g,n}) & \xrightarrow[\mathrm{Gr}^W_{-2}\,\mathrm{adj}_q]{} & \mathrm{Der}_{-2}\,\mathfrak{p}. \end{array}$$

将复合映射记为

$$\tilde{\theta}\circ\pi_{\Lambda^2 H}\circ\tau_q^{\mathrm{hyp}} : T\Delta_g \to \Lambda^2 H/\langle\theta\rangle = V_{[1^2]}$$

记为 $\tilde{\tau}_q^{\mathrm{hyp}}$，并将复合映射

$$\tilde{\theta}\circ\pi_{\Lambda^2 H}\circ\mathrm{Gr}^W_{-2}\,\mathrm{adj}_q : H_1(\mathfrak{u}_{g,n}) \to \Lambda^2 H/\langle\theta\rangle$$

记为 $\tilde{\tau}_q^{\mathrm{adj}}$。由于映射 $r_{g,\,n}$ 的像扎里斯基稠密，因此同态 $\tilde{\tau}_q^{\mathrm{adj}}$是使图交换的唯一 $\mathrm{Sp}(H)$-等变映射

$$\begin{array}{ccc} T\Delta_g & & \\ {\scriptstyle r_{g,n}}\downarrow & \searrow^{\tilde{\tau}_q^{\mathrm{hyp}}} & \\ H_1(\mathfrak{u}_{g,n}) & \xrightarrow[\tilde{\tau}_q^{\mathrm{adj}}]{} & \Lambda^2 H/\langle\theta\rangle \end{array}$$

可交换。现在，同态 $\tilde{\tau}_q^{\mathrm{adj}}$通过由相对完备化诱导的自然同构，对应于 $H^1(\Delta_{g,n}, V_{[1^2]})$ 中的一个类，记为 $[q]$

$$H^1(\Delta_{g,n}, V_{[1^2]}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(H)}(H_1(\mathfrak{u}_{g,n}), V_{[1^2]})$$

定理 5.1。由于 $\Delta_g[2]$ 是 $\Delta_{g,n}$ 的一个子群，因此存在一个自然同态 $H^1(\Delta_{g,n}, V_{[1^2]}) \to H^1(\Delta_g[2], V_{[1^2]})$。容易看出，$[q]$ 在 $H^1(\Delta_g[2], V_{[1^2]})$ 中的像等于上述构造在 $n = 2g+2$ 时产生的 q 的类。

7. Normal functions and Ceresa cycles

正规函数是中间雅可比簇族的全纯截面，并满足某些渐近条件。在研究代数簇族时，自然会出现这一概念。本节回顾与光滑射影簇族中同调平凡代数循环族相关联的正规函数的构造。随后，我们介绍 Ceresa 循环，以及其相关联的正规函数与 Johnson 同态之间的关系。更多详情请参见 Hain [12, 13]。

7.1. 中间雅可比簇。设 X 是一个光滑射影簇，且 Z 是 X中的一个代数 d循环。我们有一个混合霍奇结构的正合列

$$0 \to H_{2d+1}(X) \to H_{2d+1}(X, Z) \to H_{2d}(Z) \to H_{2d}(X).$$

循环 Z 的循环类定义了一个混合霍奇结构的态射

$$c_Z : \mathbb{Z}(d) \to H_{2d}(Z).$$

若 Z 是同调平凡的，我们可以沿着 c_Z 拉回前一个序列，从而得到一个扩张

$$0 \to H_{2d+1}(X) \to E_Z \to \mathbb{Z}(d) \to 0$$

在混合霍奇结构范畴 MHS 中。与 $\mathbb{Z}(-d)$ 张量积得到一个扩张

$$0 \to H_{2d+1}(X, \mathbb{Z}(-d)) \to E_Z(-d) \to \mathbb{Z} \to 0$$

因此得到一个类 e_Z，属于

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{MHS}}(\mathbb{Z}, H_{2d+1}(X, \mathbb{Z}(-d))).$$

注意， $H_{2d+1}(X)$ 的权为 $-(2d+1)$，因此 $H_{2d+1}(X, \mathbb{Z}(-d))$ 的权为-1。

对于权全为负的混合霍奇结构 V，存在一个自然同构

$$J(V) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathsf{MHS}}(\mathbb{Z}, V)$$

其中

$$J(V) := \frac{V_{\mathbb{C}}}{F^0 V_{\mathbb{C}} + V_{\mathbb{Z}}}.$$

一般而言，根据 Carlson [6], ，我们有

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{MHS}}(B, A) \cong J(\mathrm{Hom}(B, A))$$

其中 $\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{MHS}}(B, A)$ 是 B 由 A 扩张而成的扩张的同余类集合，适用于分离混合霍奇结构 A 和 B，即 A 的最高权小于 B 的最低权。

X 中的同调平凡 d-循环 Z 的类 e_Z 因而可以视为一个类

$$e_Z \in J(H_{2d+1}(X, \mathbb{Z}(-d))),$$

进而，它可以视为第 d 个中间雅可比簇中的一个类

$$J_d(X) := (F^{d+1} H^{2d+1}(X))^* / H_{2d+1}(X, \mathbb{Z})$$

作为 $J_d(X) \cong J(H_{2d+1}(X, \mathbb{Z}(-d)))$。格里菲斯对阿贝尔–雅可比构造的推广可以如下显式描述这一类。设 $Z = \partial\Gamma$，其中 Γ 是一个拓扑 $(2d+1)$-链。 $F^{d+1} H^{2d+1}(X)$ 中的每个类都可以由 X的德拉姆复形的霍奇过滤 F^{d+1} 中的闭形式表示。根据斯托克斯定理，将这些代表元在 Γ 上积分，得到一个定义良好的泛函

$$\int_\Gamma : F^{d+1} H^{2d+1}(X) \to \mathbb{C}.$$

Γ 的选取在拓扑意义下唯一到一个（$2d+1$）-循环。因此， $\int_\Gamma$ 确定了 $J_d(X)$中的一个点，该点对应于 e_Z。

7.2. 正规函数。设 T 是一个光滑簇，且 $\mathbb{V} \to T$ 是 T 上的负权混合霍奇结构变分。设 $\mathcal{V}$ 为相应的丛，其在 $t \in T$ 上的纤维为 V_t。记 $\mathcal{J}(\mathcal{V})$为 T 上的丛，其在 t 上的纤维为

$$J(V_t) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathsf{MHS}}(\mathbb{Z}, V_t).$$

定义 7.1。 $\mathcal{J}(\mathcal{V})$ 的全纯截面 $s\colon T \to \mathcal{J}(\mathcal{V}) \to T$若定义了一个扩张,

$$0 \to \mathbb{V} \to \mathbb{E} \to \mathbb{Z}_T \to 0$$

则称其为 T 上的混合霍奇结构可容许变分范畴中的正规函数。

注记 7.2。可容许性刻画了 Steenbrink–Zucker[29] 和 Saito[28] 意义下的良好变分。在几何情形中，Guill´en 等人[11]以及 Hain[14]的情形满足这一性质。一个重要的刻画是在无穷远处存在相对权重滤过，这等价于某些渐近条件。

例 7.3。同调平凡代数循环的族产生混合霍奇结构变分的这类扩张，因而产生正规函数。设 $\mathcal{X} \to T$ 是光滑基 T 上的光滑射影簇族。设 $\mathcal{Z}$ 是 $\mathcal{X}$ 中的一个代数循环，其在 T 上为适当态射，且相对维数为 d。分别记 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Z}$ 在 $t \in T$ 上的纤维为 X_t 和 Z_t 。设对于所有 t， Z_t 在 X_t 中都是同调平凡的。

霍奇结构 $H_{2d+1}(X_t, \mathbb{Z}(-d))$ 构成定义在 T 上、权为 -1 的霍奇结构变分 $\mathbb{V}$。中间雅可比簇 $J_d(X_t) \cong J(H_{2d+1}(X_t, \mathbb{Z}(-d)))$ 构成相对中间雅可比簇

$$\mathcal{J}_d \to T.$$

循环族 $\mathcal{Z}$ 定义了这个丛的一个截面。这称为循环 $\mathcal{Z}$ 的正规函数。

7.3. Ceresa 循环及其相关正规函数。设 C 是亏格为 g 的紧黎曼曲面， JC 是其雅可比簇。当 $g \geq 1$ 时，对每个$x \in C$，Abel-Jacobi 映射

$$\begin{aligned} \nu_x : C &\to JC \\ y &\mapsto y - x \end{aligned}$$

是一个嵌入。记其像为 C_x，它是 JC 中的代数 1-循环。 JC 上存在一个由 $D \mapsto -D$ 给出的对合。记 C_x 在此对合下的像为 C_x^-。由于该对合在 $H_2(JC)$ 上作用平凡，代数 1-循环

$$Z_{C,x} := C_x - C_x^-$$

是同调平凡的。根据 §7.1，这 $Z_{C,\ x}$ 确定了中间雅可比簇中的一个点

$$e_{C,x} \in J_1(JC) \cong J(H_3(JC, \mathbb{Z}(-1))).$$

本原分解

$$H_3(JC, \mathbb{Q}) = H_1(JC, \mathbb{Q}) \oplus PH_3(JC, \mathbb{Q})$$

是将 $H_3(JC,\mathbb{Q})$ 分解为不可约 $\mathrm{Sp}(H_1(C))$-模，其中各部分的最高权分别为 λ_1 和 λ_3。与 C 的类作庞特里亚金积会诱导出一个同态

$$\Phi : JC \to J_1(JC).$$

记 Φ 的余核为 $JQ(JC)$。由 [12, 命题 6.1], , 我们有

$$e_{C,x} - e_{C,y} = \Phi(x-y).$$

由此可知，$e_{C,\,x}$ 在 $JQ(JC)$ 中的像与 x 无关。该像记作 e_C。

现在设亏格为 $g \geq 3$。记 $\mathcal{J}_1$ 和 $\mathcal{J}_{1\mathrm{prim}}$ 为 $\mathcal{M}_{g,\,n}$ 上的丛，其在 $[C$ 上的纤维分别为 $\{x_1,\cdots,x_n\}]$； $J_1(JC)$ 和 $JQ(JC)$。

我们构造截面 $e_{g,\,1} : [C,x] \mapsto e_{C,\,x}$ 和 $e_g : \ [C] \mapsto e_C$，它们分别属于 $\mathcal{J}_1 \to \mathcal{M}_{g,\,1}$ 和 $\mathcal{J}_{1\mathrm{prim}} \to \mathcal{M}_g$。

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{J}_1 & \qquad\qquad \mathcal{J}_{1\mathrm{prim}} \\ {\scriptstyle e_{g,1}}\big(\big\uparrow\big\downarrow & & \big\downarrow\big\uparrow{\scriptstyle e_g} \\ & \mathcal{M}_{g,1} & \qquad\qquad \mathcal{M}_g \end{array}$$

根据定义 7.1 和注记 7.2，通过构造可得以下结果。

定理 7.4。截面 $e_{g,\,1}$ 和 e_g 是正规函数。

分别固定基点 $[C,x] \in \mathcal{M}_{g,\,1}$ 和 $[C] \in \mathcal{M}_g$。因此， $H := H_1(C,\mathbb{Z})$ 已固定。取基本群后，正规函数 $e_{g,\,1}$ 和 e_g 分别诱导出 $\mathrm{Sp}(H)$-模同态

$$\xi_{g,1} : H_1(T_{g,1},\mathbb{Z}) \to H_1(J_1(JC),\mathbb{Z}) \cong \Lambda^3 H_1(C,\mathbb{Z})$$

and

$$\xi_g : H_1(T_g,\mathbb{Z}) \to H_1(JQ(JC),\mathbb{Z}) \cong \Lambda^3 H_1(C,\mathbb{Z})/H_1(C,\mathbb{Z})$$

以下结果见 Hain [12, 命题 6.3]。

定理 7.5。映射 $\xi_{g,\,n}$ 是 Johnson 同态 $\tau_{g,\,n}$ 的两倍，其中 $n = 0,\ 1$。

8. Collino cycles and their associated normal functions

本节回顾 Colombo 关于 Collino 循环 [8]的结果。由于这些循环可被视为 Ceresa 循环的退化，它们在超椭圆曲线 C [7, 1.1]的雅可比簇 JC 的高阶Chow群中给出了元素。它们的调节子像定义于 [2, 4], , 可以用迭代积分表示。因此，它们可与从 C的基本群构造出的某些特定扩张相对应。与 Ceresa 循环的情形一样，我们可以构造与 Collino 循环相关的正规函数，并计算它们诱导的单值化。

8.1. 调节子。设 X 是一个维数为 n 的光滑射影簇。第一高阶 Chow 群 $CH^n(X,1)$ 中的一个元素定义为

$$A := \sum_i (C_i, f_i)$$

其中， C_i 是 X 上的不可约曲线， f_i 是 C_i 上的有理函数，使得

$$\sum_i [div(f_i)] = 0.$$

令 $\gamma_i := f_i^{-1}([0,\infty])$。上述条件告诉我们

$$\eta := \sum_i \gamma_i$$

是一个环路。事实上，它是同调平凡的，因此

$$\eta = \partial D$$

其中 D 是一个 2-链。于是调节子映射

$$\begin{aligned} \mathrm{reg} : CH^n(X,1) &\to I_2(X) := (F^1H^2(X))^*/H_2(X,\mathbb{Z}(1)) \\ A &\mapsto \mathrm{reg}(A) \end{aligned}$$

其中 reg(A) 表示流，即定义在 $F^1H^2(X)$ 上的线性泛函，取值为

$$\alpha \mapsto \sum_i \int_{C_i-\gamma_i} \log(f_i)\alpha + 2\pi i \int_D \alpha$$

对每个 $\alpha \in F^1H^2(X)$ 都成立。调节子的类似定义由

$$\mathrm{reg} : CH^n(X,1) \to I_2(X)_{\mathrm{prim}} := (F^1H^2(X)_{\mathrm{prim}})^*/H_2(X,\mathbb{Z}(1))_{\mathrm{prim}}.$$

使用 H^2的本原部分 H^2_{prim}。

8.2. Collino 循环。Collino 循环 Z 是一个典范高阶循环，取决于亏格为 g 的超椭圆曲线 C 上两个魏尔斯特拉斯点的选择，以及 C [7] 的雅可比簇 JC。固定魏尔斯特拉斯点 q_1、q_2，令 h 为一个二次态射

$$h : C \to \mathbb{P}^1$$

使得 $h(q_1) = 0$ 且 $h(q_2) = \infty$。回顾一下，对于每个 $x \in C$，我们用 C_x表示其在 Abel-Jacobi 映射下的像

$$\begin{aligned} \nu_x : C &\to JC \\ y &\mapsto y - x. \end{aligned}$$

令 $h_s := h \circ \nu_{q_s}^{-1}$为 $C_s := C_{q_s} = \nu_{q_s}(C)$ 上的函数，其中 $s = 1, 2$。则

$$Z := (C_1, h_1) + (C_2, h_2) \in CH^g(JC, 1)$$

称为 Collino 循环。对于一般的 C，其调节子非零。事实上，可以利用迭代积分对其进行计算。

定理 8.1（定理 1.1 [8]）。设 ϕ 和 ψ 是 JC 上的调和 1-形式，其中 ψ 为 (1, 0) 型。对于它们在 C 上的拉回，我们仍使用相同的记号。则

$$\mathrm{reg}(Z)(\phi \wedge \psi) = 2\int_{C-\gamma} \log(h)\phi \wedge \psi + 2\pi i \int_\gamma (\phi\psi - \psi\phi)$$

其中 $\gamma := h^{-1}([0,\infty])$。

注 8.2. 其中一个形式 ψ 是 (1, 0) 型，这使得 $\phi \wedge \psi$ 成为 $F^1H^2(JC)$ 中某个元素的代表元。

8.3. Colombo 利用基本群构造扩张类。Colombo 将调节子像 reg(Z) 与一个扩张类 Pe 联系起来，该扩张类是由具有相同基点 p（ C 的另一个魏尔斯特拉斯点）的穿孔曲线 $C-\{q_1\}$ 和 $C-\{q_2\}$ 的基本群构造而成的扩张类 e 的本原部分。更确切地说，与调节子的处理方式相同，这些扩张类用曲线 C 的雅可比簇 JC 上的迭代积分来表示，而 Colombo 证明 Pe 是 reg(Z) 的有理数倍。

我们首先回顾她如何从基本群上的混合霍奇结构构造扩张[1] e 和 Pe 。固定基本群 $\pi_1(C-\{q\},p)$的基点 p。记 L_q 为群代数 $\mathbb{Z}\pi_1(C-\{q\},p)$的增广理想[2] 。 L_q 的幂给出一个自然的滤过

$$\cdots \subseteq L_q^{k+1} \subseteq L_q^k \subseteq \cdots \subseteq L_q \subseteq \mathbb{Z}\pi_1(C-\{q\},p).$$

因此我们有自然的扩张

$$0 \to (L_q/L_q^k)^* \to (L_q/L_q^{k+1})^* \to (L_q^k/L_q^{k+1})^* \to 0. \tag{9}$$

分次部分具有如下纯霍奇权重

$$(L_q^k/L_q^{k+1})^* \simeq \otimes^k H^1(C,\mathbb{Z}).$$

为简化记号，我们用 H^1表示 $H^1(C,\mathbb{Z})$。若 $k=2$，上述序列（9）变为

$$0 \to H^1 \to (L_q/L_q^3)^* \to \otimes^2 H^1 \to 0.$$

特别地，当 $q=q_s$ ($s=1,2$)是魏尔斯特拉斯点时，此扩张分裂，并有一个自然的回缩

$$r_s : (L_{q_s}/L_{q_s}^3)^* \to H^1.$$

沿着 $k=3, q=q_s$ 的序列 (9) 上的这个回缩进行推送

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & (L_{q_s}/L_{q_s}^3)^* & \longrightarrow & (L_{q_s}/L_{q_s}^4)^* & \longrightarrow & (L_{q_s}/L_{q_s}^3)^* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle r_s} & & & & \simeq\big| & & \\ 0 & \longrightarrow & H^1 & \longrightarrow & E_s & \longrightarrow & \otimes^3 H^1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

我们得到扩张类 $e_s \in \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MHS}}(\otimes^3 H^1, H^1)$，由 E_s for $s=1,2$ 表示。

我们引入若干自然的混合霍奇结构的态射：

(1) 与极化 Ω 作张量积：

$$J_\Omega : H^1(-1) \to \otimes^3 H^1.$$

(2) 满射：

$$\Pi : \otimes^2 H^1 \to \mathbb{Z}(-1),$$

它是杯积与同构 $H^2(C,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}(-1)$ 的复合。

（3）标准包含：

$$\iota : \Lambda^2 H^1 \to \otimes^2 H^1.$$

[1]对于这些相同的扩张，我们还有另一种构造，但由于 Colombo 的构造已经见于文献中，因此这里不必介绍我们的构造。[2]即增广映射 $\mathbb{Z}\pi_1(C-\{q\},p) \to \mathbb{Z}$，它将基本群的每个元素映射到 1。

（4）在 C 上的积分:

$$\int_C : \Lambda^2 H^1 \to \mathbb{Z}$$

它是映射 $\Pi \circ \iota$，差一个 Tate 扭转 $\mathbb{Z}(-1)$。由于我们有自然同构 $\Lambda^2 H^1 \simeq H^2(JC, \mathbb{Z})$，因此可以将核

$$\ker \int_C \cong H^2(JC)_{\mathrm{prim}}$$

与 $H^2(JC, \mathbb{Z})$ 的本原部分等同。根据 Carlson，我们可以将

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{MHS}}(\Lambda^2 H^1, \mathbb{Z}) \cong I_2(JC)$$

and

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathsf{MHS}}(\ker \int_C, \mathbb{Z}) \cong I_2(JC)_{\mathrm{prim}}.$$

现在我们可以构造扩张类 e 和 Pe，它们分别由下图中的扩张 E 和 PE 表示。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^1 & \longrightarrow & E_2 - E_1 & \longrightarrow & \otimes^3 H^1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & & & \uparrow{\scriptstyle J_\Omega} & & \\
0 & \longrightarrow & H^1 & \longrightarrow & E_\Omega & \longrightarrow & H^1(-1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \otimes H^1} & & \downarrow{\scriptstyle \otimes H^1} & & \downarrow{\scriptstyle \otimes H^1} & & \\
0 & \longrightarrow & \otimes^2 H^1 & \longrightarrow & E_\Omega \otimes H^1 & \longrightarrow & \otimes^2 H^1(-1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \Pi} & & & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}(-1) & \longrightarrow & \widetilde{E}(-1) & \longrightarrow & \otimes^2 H^1(-1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \otimes \mathbb{Z}(1)} & & \downarrow{\scriptstyle \otimes \mathbb{Z}(1)} & & \downarrow{\scriptstyle \otimes \mathbb{Z}(1)} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \widetilde{E} & \longrightarrow & \otimes^2 H^1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & & & \uparrow{\scriptstyle \iota} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \Lambda^2 H^1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & PE & \longrightarrow & \ker \int_C & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

定理 8.3（定理 2.1 [8]）。设 C 是一条具有魏尔斯特拉斯点q_1、q_2 和 p的超椭圆曲线。设 h 是一个二次态射 $h: C \to \mathbb{P}^1$，使得 $h(q_1) = 0$ 且$h(q_2) = \infty$。那么我们有

$$e = (2g+1)\Big(\mathrm{reg}(Z) + \log(h(p)) \int_C \Big) \in I_2(JC)$$

and

$$Pe = (2g+1)\mathrm{reg}(Z) \in I_2(JC)_{\mathrm{prim}}.$$

注记 8.4. 尽管 Pe 的计算涉及基点 p，但它只依赖于 q_1 和 q_2，因为它是 reg(Z) 的有理数倍，而 reg(Z) 的构造并不涉及 p。

8.4. 正规函数及其诱导单值化。对于超椭圆曲线，可以将 reg(Z) 和 Pe 的构造推广到超椭圆曲线族 [8, §4, §5]。它们由此给出正规函数，即双曲 Torelli 空间 $\mathcal{H}_g[0]$ 上混合霍奇结构变分的截面。我们将在下一段中对此作出精确定义。

回想一下，双曲 Torelli 空间 $\mathcal{H}_g[0]$是亏格为 g 且带有固定同调辛基的超椭圆曲线的模空间。令

$$\pi : \mathcal{C}_{\mathcal{H}_g[0]} \to \mathcal{H}_g[0] \qquad \text{and} \qquad \mathcal{I}_{2\mathrm{prim}} \to \mathcal{H}_g[0]$$

为普适超椭圆曲线，以及双曲 Torelli
空间 $\mathcal{H}_g[0]$上的丛，其在模点 $[C;\ \{a_j, b_j\}_{j=1}^g] \in \mathcal{H}_g[0]$ 上的纤维为 $I_2(JC)_{\mathrm{prim}}$。
选取魏尔斯特拉斯点的截面后

$$\begin{array}{c} \mathcal{C} \\ {\scriptstyle q_1 \atop \scriptstyle q_2}\nearrow \downarrow \nwarrow {\scriptstyle p} \\ \mathcal{H}_g[0] \end{array}$$

我们可以为每个纤维构造 reg(Z) 和 Pe，它们合起来构成族 $\mathcal{I}_{2\mathrm{prim}}$的截面$r_{\mathcal{Z}}$ 和 $P\mathcal{E}$。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_{2\mathrm{prim}} & & \mathcal{I}_{2\mathrm{prim}} \\ {\scriptstyle r_{\mathcal{Z}}}\nearrow \downarrow & & \downarrow \nwarrow {\scriptstyle P\mathcal{E}} \\ \mathcal{H}_g[0] & & \mathcal{H}_g[0] \end{array}$$

注意到，根据 Hain[14], $\mathcal{I}_{2\mathrm{prim}}$ 是混合霍奇结构的一个可容许变分，因为它的每个纤维 $I_2(JC)_{\mathrm{prim}}$ 都是由基本群自然构造而成的。每个纤维 $I_2(JC)_{\mathrm{prim}}$ 都可以识别为

$$I_2(JC)_{\mathrm{prim}} \cong \mathrm{Ext}^1(H^2(JC)_{\mathrm{prim}}, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}, H^2(JC)_{\mathrm{prim}}(2)) \cong J(H^2(JC)_{\mathrm{prim}}(2))$$

其中间使用了庞加莱对偶，且 $H^2(JC)_{\mathrm{prim}}(2) := H^2(JC)_{\mathrm{prim}} \otimes \mathbb{Z}(2)$。根据定义 7.1，截面 $r_{\mathcal{Z}}$ 和 $P\mathcal{E}$ 是正规函数。

这些正规函数诱导出单值作用，我们现在来计算它们。注意，超椭圆 Torelli 群 $T\Delta_g$ 的单值化作用是平凡的，因此相关的丛 $\mathcal{I}_{2\mathrm{prim}}$ 是平凡丛。固定一个基点 $[C;\ \{a_j, b_j\}_{j=1}^g]$。用 $p_{I_{2\mathrm{prim}}}$ 表示 $\mathcal{I}_{2\mathrm{prim}}$ 到其纤维 $I_2(JC)_{\mathrm{prim}}$的投影。纤维 $I_2(JC)_{\mathrm{prim}}$ 的基本群是 $\Lambda^2 H/\langle\theta\rangle$，其中 H 是由固定基 $\{a_j, b_j\}_{j=1}^g$生成的 C 的第一同调，且 $\theta = \sum_{j=1}^g a_j \wedge b_j$。用 $p_{\mathcal{Z}}$和 $p_{\mathcal{E}}$表示投影 $p_{I_{2\mathrm{prim}}}$ 分别与正规函数 $r_{\mathcal{Z}}$ 和 $P\mathcal{E}$的复合，它们分别诱导基本群的同态

$$\pi_{\mathcal{Z}} = (p_{\mathcal{Z}})_* : T\Delta_g \to \Lambda^2 H/\langle\theta\rangle \qquad \text{and} \qquad \pi_{\mathcal{E}} = (p_{\mathcal{E}})_* : T\Delta_g \to \Lambda^2 H/\langle\theta\rangle.$$

Colombo 比较了作用于某个特定元素 $d_i \in T\Delta_g$ 上的这些单值。该元素取为一条简单闭曲线 c_i 的 Dehn 扭转的类，其中这条曲线位于 C 上，分隔 q_1 和 q_2，且 c_i 在超椭圆 involution 下保持不变。

定理 8.5（推论 5.1 [8]）。

$$\pi_{\mathcal{E}}(d_i) = (2g+1)\pi_{\mathcal{Z}}(d_i).$$

正如 Colombo 所指出的，这一定理可以很容易地得到改进。

命题 8.6。

$$\pi_{\mathcal{E}} = (2g+1)\pi_{\mathcal{Z}}.$$

证明。根据定理 8.3， Pe 和 $(2g+1)\mathrm{reg}(Z)$ 在 $\mathcal{I}_{2\mathrm{prim}} \to \mathcal{H}_g[0]$ 的每个纤维 $I_2(JC)_{\mathrm{prim}}$ 上都相同，因此它们诱导出相同的基本群同态

$$(P\mathcal{E})_* = (2g+1)(r_{\mathcal{Z}})_*.$$

该结果可由将此与 $(p_{I_{2\mathrm{prim}}})_*$ 复合得到，而后者是恒等映射。□

此外，利用 Colombo 的计算，我们得到超椭圆 Torelli 群 $T\Delta_g$ [8, Cor. 4. 2]，的特定生成元 d_i 上的单值，结果如下。

定理 8.7. 设 $d_i \in T\Delta_g$ 为分离简单闭曲线 c_i 在 C上的 Dehn 扭转的类，其中 c_i 在超椭圆对合下保持不变，则

$$\pi_{\mathcal{Z}}(d_i) = \begin{cases} 0 & \text{if } c_i \text{ does not separate } q_1 \text{ and } q_2 \\ 4\theta_i'' & \text{if } c_i \text{ separates } q_1 \text{ and } q_2 \end{cases}$$

证明. 我们按照与 [8, 命题 4.1] 相同的步骤进行计算。这里给出完整细节，以便感兴趣的读者与 Colombo 的计算进行比较。

首先，我们引入一些记号。取一个基点 $[C] \in H$。设 $d \in T\Delta_g$ 为 Dehn 扭转 D_d 的类，其中 c 是 C上一条在超椭圆对合下保持不变的分离简单闭曲线。设 λ_d 为 H 中以 $[C]$ 为基点、对应于˜ ˜Dehn 扭转 D_d的环路。该环路提升为 H 的万有˜ ˜覆盖空间 $\tilde{H}$ 中的一条路径 $\lambda_d\colon [0,1] \to H$ ，其中 $\lambda_d(0) = [C]$ 且 $\lambda_d(1) = [D_d C]$。路径 λ_d 上有一个超椭圆曲线的万有族˜ ˜，我们将 $\lambda_d(t)$上的纤维记为 C_t。特别是˜， $C_0 = C$。 q_1 和 q_2 这两个截面在 λ_d 上的提升分别为 $\tilde{q}_1$ 和 $\tilde{q}_2$ ，它们在每个纤维 C_t 上分别对应于我们为构造 Collino 循环而选取的二次映射$h_t\colon C_t \to \mathbb{P}^1$ 的零点和极点。设 $\gamma_t := h_t^{-1}([0,\infty])$为 C_t 上的路径，则 $h_0 = h$ 和 $\gamma_0 = \gamma$ 与定理 8.1 中定义的相同。截面，即正规函数， $r_{\mathcal{Z}}$ 限制为 H中的环路 λ_d ，并且可以˜ ˜沿 λ_d 提升为 $\tilde{H}$中的正规函数 $\tilde{r}_{\mathcal{Z}}$ 。

现在我们计算单值。对于任意的 $t \in [0,1]$， $\tilde{r}_{\mathcal{Z}}(t)$ 是由魏尔斯特拉斯点 $\tilde{q}_1(t)$ 和 $\tilde{q}_2(t)$ 构造的 Collino 循环的调节子。由定理 8.1，我们有

$$\tilde{r}_{\mathcal{Z}}(t)(\phi_t \wedge \psi_t) = 2\int_{C_t - \gamma_t} \log(h_t)\phi_t \wedge \psi_t + 2\pi i \int_{\gamma_t} (\phi_t \psi_t - \psi_t \phi_t)$$

对于 C_t 上的闭1-形式 ϕ_t 和 ψ_t ，其中 ψ_t 属于 (1,0) 型。由覆盖理论，我们有

$$\pi_{\mathcal{Z}}(d) = \frac{1}{2\pi}\left[\tilde{r}_{\mathcal{Z}}(1) - \tilde{r}_{\mathcal{Z}}(0)\right] \in \Lambda^2 H / \langle\theta\rangle.$$

我们可以选取 $\phi_1 = \phi_0 =: \phi$ 和 $\psi_1 = \psi_0 =: \psi$。因此

$$\begin{aligned}[\tilde{r}_{\mathcal{Z}}(1) - \tilde{r}_{\mathcal{Z}}(0)](\phi \wedge \psi) = 2\left(\int_{C_1 - \gamma_1} \log(h_1)\phi \wedge \psi - \int_{C-\gamma} \log(h)\phi \wedge \psi\right) \\ + 2\pi i\left(\int_{\gamma_1} (\phi\psi - \psi\phi) - \int_{\gamma} (\phi\psi - \psi\phi)\right)\end{aligned}$$

情况(i)：如果 $c = c_i$ 不分隔 q_1 和 q_2，那么很容易看出，我们可以为对数选取相同的分支

$$\log(h_1) = \log(h)$$

因为 q_1 和 q_2 位于同一个子曲面上。此外， γ 与c_i不相交，因此 Dehn 扭转不会改变 γ ，并且

$$\gamma_1 = \gamma.$$

因此，在上式右边，两项都为零，于是我们得到

$$\pi_{\mathcal{Z}}(d) = 0.$$

情形 (ii)：若 $c = c_i$ 将 q_1 和 q_2分隔开，则结论可直接由 [8,推得，见 Cor. 4.2]。主要的变化在于选择 log(*h*) 的不同分支，以及将 γ 映至 $\gamma_1 = \gamma + 2d$的 Dehn 扭转。□

9. Hyperelliptic Johnson homomorphisms and Collino classes

本节从相对完备化的视角，将前几节的结果联系起来。回顾命题 6.2，我们有作为 Sp(*H*)-模的分解 $\mathrm{Der}_{-2}\mathfrak{p} = V_{[2^2]} + V_{[1^2]}$。为简便起见，令 $V = V_{[1^2]}$ 和 $V' = V_{[2^2]}$。回顾， $\tilde{\theta}$ 是投影 $\Lambda^2 H \to \Lambda^2 H/\langle\theta\rangle \cong V$。将˜复合 $\theta \circ \pi_{\Lambda^2 H}$（见 §4）记作 $\tilde{\pi}_{\Lambda^2 H}$。

9.1. $H^1(\Delta_{g,\,2},\ V)$ 中的一个 Collino 类。设 q_1 和 q_2 是 S 中不同的魏尔斯特拉斯点。回顾 6.5，我们有由相应的双曲椭圆 Johnson 同态 $\tau_{q_i}^{\mathrm{hyp}}$ 给出的 $H^1(\Delta_{g,\,2}, V)$ 中的类 $[q_1]$ 和 $[q_2]$。设 $\zeta = [q_2] - [q_1]$属于 $H^1(\Delta_{g,\,2},\ V)$。通过同构 $H^1(\Delta_{g,\,2},\ V) \cong \mathrm{Hom}^{\mathrm{Sp}(H)}(H_1(\mathfrak{u}_{g,\,2})\ V)$，类 ζ 对应于 Sp(*H*)-等变映射

$$\tilde{\tau}_{\zeta}^{\mathrm{adj}} := \tilde{\tau}_{q_2}^{\mathrm{adj}} - \tilde{\tau}_{q_1}^{\mathrm{adj}} : H_1(\mathfrak{u}_{g,2}) \to V.$$

将映射 $\tilde{\tau}_{\text{双曲型}q_2} - \tilde{\tau}_{\text{双曲型}q_1}$：$T\Delta_g \to V$ 记为 $\tilde{\tau}_{\zeta}^{\mathrm{hyp}}$。注意，存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} T\Delta_g & & \\ \downarrow{\scriptstyle r^{\mathrm{ab}}} & \searrow^{\tilde{\tau}_{\zeta}^{\mathrm{hyp}}} & \\ H_1(\mathfrak{u}_{g,2}) & \xrightarrow[\tilde{\tau}_{\zeta}^{\mathrm{adj}}]{} & V, \end{array}$$

其中映射 r^{ab} 是由 $\Delta_{g,\,2}$ 的相对完备化诱导的。

定理 9.1。在沿用上述记号的情况下，若 $g \geq 2$，则有

$$\tilde{\tau}_{\zeta}^{\mathrm{hyp}} = (g+1)\pi_{\mathcal{Z}}$$

证明。假设 $g \geq 2$。令 D in $T\Delta_g$ 为沿简单分离曲线 d 的 Dehn 扭转的类。在 d does not separate q_1 and q_2 的情形下，由命题 6.8 和 8.7 可知， $\tilde{\tau}_{\zeta}^{\mathrm{hyp}}(D)$ 和 $\pi_{\mathcal{Z}}(D)$ 均为零。因此，考虑 d separates q_1 and q_2 的情形。设 S 被 d 分成两个子曲面 S_i'，其亏格分别为 i 和 S_i''，并分别包含 q_1 和 q_2，如 6.4 所示。分别为 S_i'和 S_i'' 固定辛基 $a_1, \ldots, a_i, b_1, \ldots, b_i$ 和 $a_{i+1}, \ldots, a_g, b_{i+1}, \ldots, b_g$。令 $\theta_i' = \sum_{\ell=1}^{i} a_\ell \wedge b_\ell$ 和 $\theta_i'' = \sum_{\ell=i+1}^{g} a_\ell \wedge b_\ell$。我们有

$\theta = \theta_i' + \theta_i''$。于是，由命题 6.8，像 $(\tau_{\mathrm{hyp}q_2} - \tau_{\mathrm{hyp}q_1})(D)$ 可表示为

$$\zeta_D := \frac{1}{2}\phi((\theta_i')^2 - (\theta_i'')^2).$$

利用引理 6.5 可轻易计算得，导子ζ_D 经 $\tilde{\pi}_{\Lambda^2 H}$ 投影到 V 的结果为

$$\tilde{\pi}_{\Lambda^2 H}(\zeta_D) = 2(2g+2)\theta_i'' \mod \theta.$$

由定理 8.7，$\pi_{\mathcal{Z}}(D) = 4\theta_i''$，因此

$$\tilde{\tau}_{\zeta}^{\mathrm{hyp}}(D) = (g+1)\pi_{\mathcal{Z}}(D).$$

根据定理 6.9，我们的断言成立；该定理指出，$T\Delta_g$ 由沿对称分离简单闭曲线的 Dehn 扭转类生成。□

注记 9.2。因此，由 q_1 和 q_2确定的 Collino 循环（Z, q_1, q_2）在 $H^1(\Delta_{g,\,2}, V)$中给出一个非平凡类，其中$\Delta_{g,\,2}$固定 q_1 和 q_2。

9.2. $H^1(\Delta_g[2], V)$的 Weierstrass 子空间。回顾 3.1，$\Delta_g[2]$ 固定所有魏尔斯特拉斯点。因此，对每个魏尔斯特拉斯点 q，我们都有双曲椭圆 Johnson 同态 τ_q^{hyp}。

引理 9.3. 对于两个不同的魏尔斯特拉斯点 q_1和 q_2，$\tau_{q_2}^{\mathrm{hyp}} - \tau_{\mathrm{hyp}q_1}$的像包含于 V。

证明。沿用定理 9.1 证明中的记号，我们将证明 ζ_D 在 $\mathrm{Der}_{-2}\mathfrak{p}$ 的 V'-分量上的投影是平凡的。令 ζ_D' 为 ζ_D在 $\mathrm{Der}_{-2}\mathfrak{p}$中的 V'-部分。我们有

$$(\hat{\theta} \circ \pi_{\Lambda^2 H})(\zeta_D) = 2(2g+2)\left(\theta_i'' - \frac{g-i}{g}\theta\right),$$

其中 $\hat{\theta}\colon \Lambda^2 H \to V$是由 $u \wedge v - \frac{\langle u, v\rangle}{g}\theta$ 给出的投影（见 §4）。于是由引理 6.7，向量

$$\frac{1}{2}((\theta_i')^2 - (\theta_i'')^2) + \theta_i''\theta - \frac{g-i}{g}\theta^2$$

在 ϕ作用下映入 $\mathrm{Der}_{-2}\mathfrak{p}$ 的 V'-分量。由命题 6.3，θ^2 的像是平凡的，因为 $\phi(\theta^2) = -2\mathrm{adj}_\theta$，且由于 $\theta = \theta_i' + \theta_i''$，我们有

$$\begin{aligned}
\zeta_D' = \phi\left(\frac{1}{2}((\theta_i')^2 - (\theta_i'')^2) + \theta_i''\theta - \frac{g-i}{g}\theta^2\right) &= \phi\left(\frac{1}{2}((\theta_i')^2 - (\theta_i'')^2) + \theta_i''\theta\right) \\
&= \phi\left(\frac{1}{2}(\theta_i')^2 + \frac{1}{2}(\theta_i'')^2 + \theta_i'\theta_i''\right) \\
&= \frac{1}{2}\phi((\theta_i')^2 + 2\theta_i'\theta_i'' + (\theta_i'')^2) \\
&= \frac{1}{2}\phi(\theta^2).
\end{aligned}$$

这意味着 ζ_D' 在 $\mathrm{Der}_{-2}\mathfrak{p}$中为零。因此，$\zeta_D$ 属于 V。由于 D 是任意的，故 $\tau_{q_2}^{\mathrm{hyp}} - \tau_{\mathrm{hyp}q_1}$的像包含于 V。注意，当 D是沿着一条不分离 q_1 与 q_2的简单分离曲线作 Dehn 扭转时，$\tau_{\mathrm{hyp}q_1}(D) = \tau_{\mathrm{hyp}q_2}(D)$，因此 $(\tau_{\mathrm{hyp}_{q_2}} - \tau_{q_1}^{\mathrm{hyp}})(D) = 0$。□

我们将同态 $H^1(\Delta_{g,2},V) \to H^1(\Delta_g[2],V)$ 下 ζ 在 $H^1(\Delta_g[2],V)$ 中的像称为 Collino 类。由于 $\tilde{\tau}_\zeta^{\mathrm{hyp}}$ 是一个非平凡同态，可知 $H^1(\Delta_g[2],V)$中的每个 Collino 类都是非平凡的。类似地，对于每个魏尔斯特拉斯点 q，我们将 $[q]$ 在 $H^1(\Delta_{g,1},V)$ 中的类及其在同态 $H^1(\Delta_{g,1},V) \to H^1(\Delta_g[2],V)$ 下的像称为魏尔斯特拉斯类。令 X_ζ 为 $H^1(\Delta_g[2],V)$ 中由所有 Collino 类张成的子空间，并令 X_ω 为 $H^1(\Delta_g[2],V)$ 中由所有魏尔斯特拉斯类张成的子空间。

定理9.4. 如上采用相同记号，若 $g \geq 2$，则 $X_\zeta = X_\omega$ 且 $\dim X_\omega = 2g+1$。

证明。设 $q_1, \ldots, q_{2g+2}$ 是 S 的魏尔斯特拉斯点，且 $W = \{q_1, \ldots, q_{2g+2}\}$。于是我们得到 $H^1(\Delta_g[2],V)$ 中的魏尔斯特拉斯类 $[q_i]$。令 $p = q_{2g+2}$。对于每个 $i = 1, \ldots, 2g+1$，定义 ζ_i 为 $\zeta_i = [q_i] - [p]$。根据定理 9.1，每个 ζ_i 都是 Collino 类。假设

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{2g+1} c_i \zeta_i = 0,$$

其中每个 c_i 都属于 $\mathbb{Q}$。于是我们有 $\sum_{i=1}^{2g+1} c_i \tilde{\tau}^{\text{伴随}}_{\zeta_i} = 0$。回忆一下，$\mathrm{Aut}_p W$ 中固定 p 的子群 Aut W 同构于 $\mathbb{S}_{2g+1}$，且它作用于 $H^1(\Delta_g[2],V)$，因而作用于 Hom $_{\mathrm{Sp}(H)}(H_1(\mathfrak{u}_g[2]), V)$。令 t 是 $\mathrm{Aut}_p W$ 中长度为 $2g+1$ 的一个循环。于是我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2g+1} t^j \left(\sum_{i=1}^{2g+1} c_i \tilde{\tau}^{\mathrm{adj}}_{\zeta_i} \right) &= \sum_{j=1}^{2g+1} \sum_{i=1}^{2g+1} c_i \tilde{\tau}^{\mathrm{adj}}_{t^j(\zeta_i)} \\
&= \sum_{j=1}^{2g+1} \left(\sum_{i=1}^{2g+1} c_i \right) \tilde{\tau}^{\mathrm{adj}}_{\zeta_j} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{2g+1} c_i \right) \sum_{j=1}^{2g+1} \tilde{\tau}^{\mathrm{adj}}_{\zeta_j} = 0.
\end{aligned}$$

假设 $\sum_{i=1}^{2g+1} c_i \neq 0$。那么我们有 $\sum_{i=1}^{2g+1} \tilde{\tau}^{\mathrm{adj}}_{\zeta_i} = 0$。现在，对于每个 $D \in T\Delta_g$，我们有

$$\tilde{\theta} \circ \pi_{\Lambda^2 H} \left(\sum_{i=1}^{2g+1} (\tau^{\mathrm{hyp}}_{q_i} - \tau^{\mathrm{hyp}}_p)(D) \right) = \sum_{i=1}^{2g+1} \tilde{\tau}^{\mathrm{adj}}_{\zeta_i}(r^{\mathrm{ab}}(D)) = 0,$$

其中 r^{ab} 是由 $\Delta_g[2]$ 的相对补全所诱导的同态 $T\Delta_g \to H_1(\mathfrak{u}_g[2])$。由引理 9.3，可得

$$\sum_{i=1}^{2g+1} (\tau^{\mathrm{hyp}}_{q_i} - \tau^{\mathrm{hyp}}_p)(D) = 0.$$

因此我们有 $\sum_{i=1}^{2g+1} (\tau^{\mathrm{hyp}}_{q_i} - \tau^{\mathrm{hyp}}_p) = 0$。最后这个等式变为

$$\sum_{i=1}^{2g+1} \tau^{\mathrm{hyp}}_{q_i} = (2g+1)\tau^{\mathrm{hyp}}_p.$$

现在，与 6.4 中一样，令 D in $T\Delta_g$ 为沿简单分隔闭曲线 d 的 Dehn 扭转；该曲线将 q_1 与 p 分隔开，并且 d 将 S 分隔为两个亏格为

k 和亏格为 S_k'' 的两个子曲面，分别包含 $g-k$ 和 q_1。为 p 和 a_1 分别固定辛基 a_k、……、b_1、b_k、……、a_{k+1} 以及 a_g、……、b_{k+1}、b_g、……、S_k'。令 S_k'' 和 $\theta_k' = \sum_{\ell=1}^{k} a_\ell \wedge b_\ell$。设 $\theta_k'' = \sum_{\ell=k+1}^{g} a_\ell \wedge b_\ell$。于是

$$\sum_{i=1}^{2g+1} \tau_{q_i}^{\mathrm{hyp}}(D)(x) = l\tau_{q_1}^{\mathrm{hyp}}(D)(x) = -l[\theta_k'', x],$$

其中，l 是包含在 S_k'中的魏尔斯特拉斯点的数量。由于 $l \geq 1$，这是一个非平凡元素。另一方面，$(2g+1)\tau_p^{\mathrm{hyp}}(D)(x) = 0$，这就产生了矛盾。因此，$\sum_{i=1}^{2g+1} c_i = 0$。于是，将 $c_{2g+1} = -\sum_{i=1}^{2g} c_i$ 代入方程（*），得到

$$(**) \qquad \sum_{i=1}^{2g} c_i(\zeta_i - \zeta_{2g+1}) = 0.$$

令 $p = q_{2g+1}$，并对每个 $i = 1, \ldots, 2g$，将 ζ_i 替换为 $[q_i] - [p]$，方程（$**$）变为

$$\sum_{i=1}^{2g} c_i\zeta_i = 0.$$

归纳可得 $c_1([q_1] - [q_2]) = 0$。类 $[q_1] - [q_2]$ 是非平凡的，因此$c_1 = 0$。由归纳步骤可知，对于 $i = 1, \ldots, 2g+1$，每个 $c_i = 0$ 都成立。因此，$\dim X_\zeta \geq 2g+1$。

另一方面，我们注意到向量 $\sum_{i=1}^{2g+2}[q_i]$ 在 $\mathbb{S}_{2g+2}$的作用下保持不变。因此，由命题 3.7，它属于 $H^1(\Delta_g, V) = H^1(\Delta_g[2], V)^{\mathbb{S}_{2g+2}}$。由 Tanaka 的一个结果 [30] 可知，$H^1(\Delta_g, V) = 0$，从而 $\sum_{i=1}^{2g+2}[q_i] = 0$且 $\dim X_\omega \leq 2g+1$。由于 $X_\zeta \subset X_\omega$ 且 $\dim X_\zeta \geq 2g+1$，我们的结论得证。□

注 9.5。在 $H^1(\Delta_g[2], V)$ 中，每个魏尔斯特拉斯类都是 Collino 类的线性组合。事实上，对于每个 $i = 1, \ldots, 2g+2$，我们有

$$\frac{1}{2g+2}\sum_{j=1}^{2g+2}([q_i] - [q_j]) = [q_i] - \frac{1}{2g+2}\sum_{j=1}^{2g+2}[q_j] = [q_i],$$

因此，$(2g+2)[q_i]$ 是 $H^1(\Delta_g[2], V)$中的 $2g+1$ 个 Collino 类的整数线性组合。

References

[1] N. A'Campo: *Tresses, monodromie et le groupe symplectique*, 《瑞士数学评论》54（1979），318–327。[2] A. Beilinson: *Higher regulators and values of L-functions*, 《数学当前问题》第24卷，181–238，《科学与技术成果》，苏联科学院，全苏科学技术信息研究所，莫斯科，1984。[3] J. Birman, H. Hilden: *On the mapping class groups of closed surfaces as covering spaces*，载于《黎曼曲面理论进展》，81–115，《数学年刊研究》第66号。普林斯顿大学出版社，1971。[4] S. Bloch: *Algebraic cycles and higher K-theory*, 《数学进展》61（1986），267–304。[5] T. Brendle，D. Margalit，A. Putman *Generators for the hyperelliptic Torelli group and the kernel of the Burau representation at t = −1* 200 2015 1, 263 310 ，《数学发明》（），第—期。[6] J. Carlson: *Extensions of mixed Hodge structures*，昂热代数几何会议，1979年7月/《代数几何，昂热》，1979年，第107–127页，Sijthoff & Noordhoff，阿尔芬 aan den Rijn–马里兰州日耳曼敦，1980。

[7] A. Collino: *Griffiths' infinitesimal invariant and higher K-theory on hyperelliptic Jacobians*, 《代数几何杂志》6（1997），393–415。[8] F. Colombo: *The mixed Hodge structure on the fundamental group of hyperelliptic curves and higher cycles* 11 2002 761 790 ，《代数几何杂志》（），—。[9] C. Earle，I. Kra:
On sections of some holomorphic families of closed Riemann surfaces，《数学学报》137（1976），49-79。[10] B. Farb 和 D. Margalit: *A primer on mapping class groups*，第49卷，普林斯顿数学丛书，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2012。[11] F. Guill´en，V. Navarro Aznar，P. Pascual Gainza，F. Puerta: *Hyperrésolutions cubiques et de-scente cohomologique*，霍奇-德利涅理论研讨会论文集，会议于1982年在巴塞罗那举行。《数学讲义》1335。施普林格出版社，柏林，1988。[12] R. Hain:
Completions of mapping class groups and the cycle $C - C^-$，映射类群与黎曼曲面模空间（哥廷根，1991/华盛顿州西雅图，1991），《当代数学》150（1993）75–105。[13] R. Hain:
Normal functions and the geometry of moduli spaces of curves，《模空间手册》第I卷，527–578，《高等数学讲义》（ALM）24，国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2013。[14] R. Hain:
The de Rham homotopy theory of complex algebraic varieties. I，K理论1（1987），第3期，271–324。[15] R. Hain: *The Hodge-de Rham theory of modular groups*，载于《霍奇理论最新进展》，arxiv [arXiv:1403.6443]（2015），剑桥大学出版社。[16] R. Hain:
The Hodge De Rham theory of relative Malcev completion，《巴黎高等师范学院科学年刊》第31卷第1期（1998），第47-92页。[17] R. Hain: *Infinitesimal presentations of Torelli groups*，《美国数学会杂志》10（1997），597-651。[18] R. Hain: *Rational points of universal curves*，《美国数学会杂志》24（2011），709-769。[19] R. Hain:
Relative weight filtrations on completions of mapping class groups，载于《微分同胚群》，《纯数学高级研究》第52卷（2008），第309-368页，日本数学会。[20] R. Hain、K. Kordek 和 T. Watanabe:
Completions of hyperelliptic mapping class groups，未发表。[21] R. Hain 和 M. Matsumoto: *Galois actions on fundamental groups of curves and the cycle $C - C^-$* 4 3 363 403, 2005 。《儒塞数学研究所杂志》，（）：—。[22] J. Hubbard:
Sur la non-existence de sections analytiques à la courbe univerelle de Teichmüller 274 1972 978 979 ，《巴黎科学院报告》A-B辑（），A -A。[23] D. Johnson: *An abelian quotient of the mapping class group I_g*，《数学年刊》249（1980），225–242。MR 87a:57008。[24] D. Johnson:
The structure of the Torelli group—III: The abelianization of I，《拓扑学》24（1985），127–144。MR 87a:57016。[25] A. Malcev: *On a class of homogeneous spaces*，《苏联科学院数学系列通报》13（1949），9–32；英文译本，《美国数学会译丛》39（1962），MR 10:507e。[26] S. Morita: *The extension of Johnson's homomorphism from the Torelli group to the mapping class group* 111 1993 197 224 ，《数学发明》（），—。[27] D. Mumford: *Tata lectures on theta*,
II: Jacobian theta functions and differential equations,
with the collaboration of C. Musili M. Nori E. Previato M. Stillman and H. Umemura , , , , , ，《数学进展》43。Birkh¨auser Boston, Inc.，马萨诸塞州波士顿，1984。[28] M. Saito:
Mixed Hodge modules，《数学科学研究所出版物》26（1990），第2期，221–333。[29] J. Steenbrink, S. Zucker: *Variation of mixed Hodge structure. I*，《数学发明》80（1985），第3期，489–542。[30] A. Tanaka: *The first homology group of the hyperelliptic mapping class group with twisted coefficients* 115 2001 19 42 ，《拓扑学及其应用》（）—。[31] T. Watanabe: *On the rational points of universal hyperelliptic curves*，《代数杂志》第533卷（2019），44-89。

School of Mathematical Sciences, East China Normal University, Shanghai
Email address: mluo@math.ecnu.edu.cn

Mathematics Department, Embry-Riddle Aeronautical University, Prescott
Email address: watanabt@erau.edu