arXiv:2301.05441v2 [math.DS] 6 Feb 2023

极小动力学扩张的 M-动力系统与李-约克混沌

戴雄屏

中华人民共和国南京市南京大学数学系，邮编 210093

摘要

设 π: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 是极小紧致度量流的扩张，满足 R_π, Δ_X。R_π 的子流若具有拓扑传递性且包含一个稠密的几乎周期点集，则称为 M-流。本文主要证明以下结论：

(1) π 是 PI，当且仅当 Δ_X 是 R_π 中包含 Δ_X 的唯一 M-流。(2) 如果 π 不是 PI，那么 R_π 中存在一个典范 Li-Yorke 混沌 M-流。特别地，Ellis 弱混合的非近端扩张是非 PI 的，因此是李-约克混沌的。

此外，我们证明

(3) 无界或非极小的 M-流（不一定是紧致的）是敏感的；以及 (4) 每个相对稠密远离紧流都是逐点 Bohr 几乎周期的。

关键词：极小流 · PI扩张 · M-流 · 李-约克混沌 · 稠密远离性

2010 年 MSC：37B05

1. 引言

我们先简要回顾所需的基本概念。设 T 是一个以 e 为单位元的豪斯多夫拓扑群，X 是一个豪斯多夫一致空间。除非另有说明，(T, X) 表示一个以 T 为相位群、以 X 为相空间的流；也就是说，存在一个连续相映射 $T \times X \to X$，记作 $(t, x) \mapsto tx$，使得对所有 $x \in X$ 及 $s, t \in T$，都有 $ex = x$ 且 $(st)x = s(tx)$。如果 T 仅为拓扑幺半群，则称 (T, X) 为半流。如果 X 是紧致的（分别为可度量的，……），则称 (T, X) 为紧致（分别为度量，……）动力系统，其中 T 可以是群或幺半群。

与 [46] 中的写法一样，动力系统 (T, X)、(T, Y)、(T, Z)、……分别简写为 $\mathscr{X}$、$\mathscr{Y}$、$\mathscr{Z}$、……。记 $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$ 为由 $(t, (x_1, x_2)) \mapsto (tx_1, tx_2)$ 定义的 $(T, X \times X)$。

约定记号。

1. 在非度量空间中，“$x_j \to x$”始终是指 Moore–Smith 网收敛。 2. 我们用 N_x 表示环境空间中点 x 的邻域系。

电子邮箱： xpdai@nju.edu.cn (戴雄屏) 投稿至 JDE 的预印本（2023年1月23日） 2023年2月7日

3. $\mathscr{U}_X$ 表示 X 上相容的对称一致结构。对于所有 A $\subset$ X 以及 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$,$\varepsilon$[, A] 是 X 中 A 的 ε-邻域，定义为集合 {x $\in$ X | $\exists$a $\in$ A s.t. (a, x) $\in \varepsilon$}。 4. {$*$} 表示单点动力系统。

设 $\mathscr{X}$ 是任意一个动力系统。那么 $\mathscr{X}$ 是极小的，当且仅当 Tx = X $\forall$x $\in$ X。若点 x $\in$ X 在 $\mathscr{X}$ 下满足

(1.1a) $N_T(x, U) := \{t \mid tx \in U\}$

在 T 中对所有 $U \in \mathfrak{N}_x$（见 §2.2.1 中定义 I）。 $\mathscr{X}$称为 拓扑传递（T.T.），如果对于所有非空开集 U、V 属于 X,

(1.1b) $N_T(U, V) := \{t \in T \mid V \cap tU \neq \emptyset\}$

非空。若 $\mathscr{X}$ 是拓扑传递动力系统，则称其为弱混合。遵循 Glasner- Weiss [28]:

（1.2） $\mathscr{X}$称为 M-动力系统，如果 $\mathscr{X}$是拓扑传递的，且 X 包含一个由几乎周期点构成的稠密集。

参见定理 2.1 和 2.2，了解 M-动力系统的一个充分条件。此外，我们将证明每个相对稠密远离紧流都是逐点 Bohr 几乎周期的（见 §2.2.1 中定义III和定义v以及定理2.10）。

设 $\mathscr{X}$和 $\mathscr{Y}$是两个动力系统。称连续映射 π: X $\to$ Y 为动力系统扩张，记作 π: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$，若 πX = Y 且对所有 t $\in$ T 和 x $\in$ X，均有 πtx = tπx。扩张是极小紧动力系统结构理论中的重要组成部分（参见 [25, 46, 9, 2, 17,10]）。对于 π: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$和 n $\geq$ 2，记

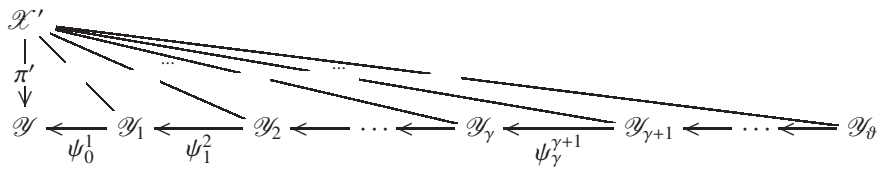
(1.3) $\mathrm{R}_\pi^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n \mid \pi x_1 = \cdots = \pi x_n\}$ and $\mathrm{R}_\pi = \mathrm{R}_\pi^2$.

显然，R_π是 X 上一个不变的闭等价关系。因此，$\mathscr{R}_\pi$ = (T, R_π) 是一个动力系统。通常人们关注由 $\mathscr{Y}$ 驱动的 $\mathscr{R}_\pi$ 的动力系统，例如斜积流和随机动力系统。

现在设 π: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$是极小紧动力系统的一个扩张。按照惯例，我们称：

(1.4) 若 T z $\cap \Delta_X \neq \emptyset$ $\forall$z $\in \mathrm{R}_\pi$，则称 π 为近端。(1.5) 若不存在 (x, x′) $\in \mathrm{R}_\pi \setminus \Delta_X$ 使得对所有 U $\in \mathrm{N}_x$ 和 V $\in \mathrm{N}_{x'}$，均有 T(U $\times$ V) $\cap \mathrm{R}_\pi) \cap \Delta_X \neq \emptyset$，则称 π 为几乎周期（a.p.）。

(1.6a) π 是 *PI* [20, 25, 46, 9, 2, 24], 当且仅当存在一个极小近端扩张ρ: $\mathscr{X}' \to \mathscr{X}$具有 $\pi' = \pi \circ \rho$: $\mathscr{X}' \to \mathscr{Y}$可以通过连续进行近端扩张和几乎周期扩张来构造；也就是说，存在一个“PI 塔”:



使得:

a. π'_ϑ 是一个同构；b. 对所有序数 $\gamma < \vartheta$，$\psi_\gamma^{\gamma+1}$都是近端或几乎周期；c. 若 γ 且 $\gamma \leq \vartheta$ 是极限序数，则 $\mathscr{Y}_\gamma = \lim_{\leftarrow \lambda<\gamma} \mathscr{Y}_\lambda$。

这里 $\mathscr{X}'$ 和 $\mathscr{Y}_\gamma$，对于 $\gamma \le \vartheta$，都是紧动力系统。（1.6b） π 在特殊情形下是严格 PI，即 ρ 是（1.6a）中的同构；也就是说， π 自身拥有一个 PI 塔。（1.6c）特别地，若 $\mathscr{X}$ 是一个非平凡的极小弱混合紧动力系统，且具有T幂零（[10, 定义 2.3。8]），则 $\mathscr{X} \to \{*\}$ 不是 PI（参见引理 3.12）。

每个具有稠密周期点集的非极小拓扑传递动力系统都是 Devaney 混沌（参见例如 [6, 31, 12, 40]）。事实上，非极小紧 M-动力系统具有敏感性（参见 [28, 定理 1.3] 和 [16, 命题 2.5]）。关于极小紧致度量流的扩张的敏感性及其变体，参见 [48, 47]。

本文将研究非紧 M-动力系统的敏感性（参见 §4）；此外，我们将从 M-动力系统的角度定义并研究极小紧致度量动力系统的扩张的李-约克混沌（参见 §5）；并证明，每个极小紧致动力系统的非 PI 扩张都能自然地导出 M-动力系统（定理 3.5）。我们将改进 Bronstein 对 PI扩张的内蕴刻画（定理 3.10）。最后，我们将考察 §6中的例子。

现在，我们以一则关于 Robert Ellis 在 20 世纪 70 年代提出的重要未解问题的评论结束引言；该问题与 M-动力系统的定义 (1.2) 密切相关。

(1.7) 备注。 设 $\mathscr{X}$ 是一个拓扑传递、逐点几乎周期的紧动力系统，其相空间 X 非度量化。

问题（R. Ellis；参见 [17, 第 263] 页）。 $\mathscr{X}$是极小动力系统吗?

在某些特殊情形下，借助 Ellis 的度量方法，答案是肯定的（（1.7a）、（（1.7b）和（（1.7c））。

(1.7a). 若 T 是 σ-紧致的，则 $\mathscr{X}$是极小的。

证明。若 T 是半群，见 [10, 定理 B.2.1]；若 T 是可数群，见 [17, 命题 4.23] □

(1.7b) (参见 [18, 命题 1。9] 和 [17, 命题 4。24] 当 T 为群时； [4, 推论 1。31]当 T 为半群时）。若 $\mathscr{X}$是远端的，则 $\mathscr{X}$是极小的。

(1.7c) (参见 [10, 定理 B.2。4])。 若 θ: $\mathscr{X} \to \mathscr{Z}$是一个具有 $\mathscr{Z}$极小动力系统（见定义2.0f）的远端扩张，则 $\mathscr{X}$是极小的。

(1.7d)。 若 $\mathscr{X}$是弱渐近周期的（按 Gottschalk 的意义；即，$x \mapsto Tx$ 是连续的），则 $\mathscr{X}$是极小的。

证明。显然。 □

(1.7e)。 若 $\mathscr{X}$是局部几乎周期的（定义 II，见 §2.2.1），且 $tX = X$ 对所有 $t \in T$ 均成立，则 $\mathscr{X}$是极小的。

证明。首先我们断言 $P(\mathscr{X}) = RP(\mathscr{X})$（见定义 (2.0a) 和 (2.0b)）。事实上，如果 $\mathscr{X}$ 是一个流，这就是引理 13(4)]。现在假设 $\mathscr{X}$ 是一个半流。令 $Z \subset X$，并取 $x \in X$，使得 x 与 Z 远离（即存在指标 $\alpha \in \mathscr{U}_X$，满足 $(tx, tz) \notin \alpha\ \forall t \in T, z \in Z$）。取 $\beta \in \mathscr{U}_X$，使得 $\beta^3 \subseteq \alpha$。选取 $U \in N_x$，以及 T 中的一个相对稠密集 A，使得 $AU \subseteq \beta[x]$。显然，对所有 $a \in A$、$y \in U$ 和 $z \in Z$，都有 $(ay, az) \notin \beta$。接下来，选取 T 中的一个紧集 K，使得 $Kt \cap A \neq \emptyset\ \forall t \in T$。取$\gamma \in \mathscr{U}_X$ 足够小，使得 $K\gamma \subseteq \beta$。现在，对所有 $y \in U$、$z \in Z$ 和 $t \in T$，都有 $(ty, tz) \notin \gamma$；否则，我们可以选取某个 $k \in K$，使得 $a = kt \in A$，从而 $(ay, az) \in \beta$。这意味着

如果 $(x, x') \notin P(\mathscr{X})$，那么存在 $U \in N_x$ 和 $V \in N_{x'}$，使得在 $\mathscr{X}$ 下 U 与 V 远离，并且 $(x, x') \notin RP(\mathscr{X})$。因此，$P(\mathscr{X}) = RP(\mathscr{X})$。（注：此断言不需要条件 $tX = X\ \forall t \in T$ 和拓扑传递。）

若 $M_1 \neq M_2$ 是 X 中的两个极小集，则对所有 $t \in T$，都有 $tM_1 = M_1$，进一步由拓扑传递可知，存在一对 $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$，使得 $(x_1,x_2) \in RP(\mathscr{X})$。于是 $(x_1,x_2) \in P(\mathscr{X})$，且 $Tx_1 = Tx_2$,，这与 $M_1 \neq M_2$ 矛盾。因此，$\mathscr{X}$ 是极小的。 □

(**1**.7f）。若 $\mathscr{X}$ 是逐点正则几乎周期流（见 §*2.2.1* 中的定义 V），则 $\mathscr{X}$ 是极小正则几乎周期的

证明。由[30, 定理 5。18], $(T, \overline{Tx})$ 对所有 $x \in X$ 均为极小正则几乎周期，只要 $\mathscr{X}$ 是远离的。于是由（1.7b），$\mathscr{X}$ 是极小正则几乎周期流。 □

(**1**.7g）。 $\mathscr{X}$ 要么是极小的，要么是敏感的（见定义*4.2*b）。

证明。 根据定理4.2j 属于 §4。 □

2. 几乎周期传递关系与稳定性

我们将给出使 子动力系统 $\mathscr{R}_\pi$ 成为 中 M-动力系统的一个充分必要条件§2.1。此外，我们将在 §2.2 中 研究非紧流的稳定性。

2.1. 几乎周期传递关系

在本小节中，T 被视为离散群或半群；令 $\mathbb{I}$ 为 βT 中任意一个固定的极小左理想，且 $\mathbb{J} = \{u \in \mathbb{I} \mid u^2 = u\}$。

设 π: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 是紧动力系统的一个扩张，其中 $\mathscr{Y}$ 是极小的。我们首先需要在 X 上引入一个关系。令 $L \subseteq R_\pi$，$L \neq \emptyset$。

• 我们称 L 是 π 在 X 上的 AP-传递关系，若 L 是 X 上的自反对称关系，并且当 (x1, x2)、(x2,x3) $\in L$ 都是几乎周期点时，(x1,x3) $\in L$ 也是几乎周期点。

显然，π 在 X 上的不变闭 AP-传递关系未必是等价关系。当然，如果 $\mathscr{X}$ 是 π的远端扩张，那么每个 π 上的 AP-传递关系都是 X 上的等价关系。

• 设 $L = \{\overline{z \in R_\pi \mid z \text{ 是几乎周期的}}\}$，且若 $u, v \in \mathbb{J}$ 满足对某个 $x \in X$ 有 $ux = vx$，则对所有 $x' \in L[x](= \{x' \in X \mid (x, x') \in L\})$，均有 $ux' = vx'$。那么 L 是 π 在 X 上的 AP-传递关系。

证明。设 (x_1, x_2) 和 $(x_2, x_3) \in L$ 都是几乎周期的。那么存在 $u,v \in \mathbb{J}$ 使得 $u(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$，且 $v(x_2, x_3) = (x_2, x_3)$。因此 $ux_2 = vx_2$。于是 $ux_1 = vx_1$，且 $(x_1,x_3) = v(x_1,x_3) \in R_\pi$ 是几乎周期的，因此 $(x_1, x_3) \in L$。 □

令 P_π 和 RP_π 分别表示 X 上的 π-相对近端关系和区域近端关系；即，

(2.0a) $$P_\pi = \{\tilde{x} \in R_\pi \mid \exists t_j \in T, \tilde{x}' \in \Delta_X \text{ s.t. } t_j\tilde{x} \to \tilde{x}'\}.$$

and

(2.0b) $$RP_\pi = \{\tilde{x} \in R_\pi \mid \exists \tilde{x}_j \in R_\pi, t_j \in T, \tilde{x}' \in \Delta_X \ s.t.\ \tilde{x}_j \to \tilde{x}, t_j\tilde{x}_j \to \tilde{x}'\}.$$

在 $\mathscr{Y}=\{*\}$ 的情形下，我们记 $\mathrm{P}(\mathscr{X})=\mathrm{P}_\pi$ 和 $\mathrm{RP}(\mathscr{X})=\mathrm{RP}_\pi$。令 $\mathrm{L}\subseteq \mathrm{R}_\pi$，于是我们定义

(2.0c) $$\mathrm{P}_{\pi|L}=\mathrm{P}_\pi\cap L$$

and

(2.0d) $$\mathrm{RP}_{\pi|L}=\{\tilde{x}\in L\,|\,\exists\,\tilde{x}_j\in L, t_j\in T, \tilde{x}'\in\Delta_X \ s.t.\ \tilde{x}_j\to\tilde{x}, t_j\tilde{x}_j\to\tilde{x}'\}.$$

在 $\mathrm{L}=\mathrm{R}_\pi$、$\mathrm{P}_{\pi|L}=\mathrm{P}_\pi$ 和 $\mathrm{RP}_{\pi|L}=\mathrm{RP}_\pi$的情形下。

那么：

2.0e. π 是近端的，当且仅当 $\mathrm{P}_\pi=\mathrm{R}_\pi$；2.0f. 点 $\mathrm{x}\in\mathrm{X}$ 是 π-远离的，当且仅当 $\mathrm{P}_\pi[\mathrm{x}]\cap\mathrm{T}\,\mathrm{x}=\{\mathrm{x}\}$；$\pi$ 是远离的，当且仅当 $\mathrm{P}_\pi=\Delta_X$；在 $\mathscr{Y}=\{*\}$ 的情形下，$\mathscr{X}$ 是远离的，当且仅当 π 是远离的，当且仅当 $\mathrm{P}(\mathscr{X})=\Delta_X$。

2.0g. π 是远离等度连续(d.e.；参见 [10]) 当且仅当 $\mathrm{RP}_\pi=\Delta_X$ 当且仅当 π 是几乎周期（注意 π-等度连续性不一定蕴含 π-远离性，见紧半流中的 [15, 定理 1.5，例 1。6]）。

2.0h. 若 $\mathscr{X}$ 是一个紧致流，且 $\mathrm{P}(\mathscr{X})=\mathrm{RP}(\mathscr{X})$，则

$$\mathrm{P}(\mathscr{X})=\{(x,x')\,|\,\forall\delta\in\mathscr{U}_X\exists A\subseteq T \text{ a syndetic set s.t. } A(x,x')\subseteq\delta\}$$

（见 [13, 定理 7] 或 [9, 定理 1.3。14]）。

这里，$\mathrm{x}\in\mathrm{X}$ 的 π-近端胞腔定义为 $\mathrm{P}_\pi[\mathrm{x}]=\{\mathrm{x}'\,|\,\mathrm{x}'\in\mathrm{X},(\mathrm{x},\mathrm{x}')\in\mathrm{P}_\pi\}$。请注意，在流中，远离等度连续扩张也称为几乎周期扩张或等距扩张（例如参见 [25, 46, 2]）。

2.1 定理（参见 [35, 46] for $\mathrm{L}=\mathrm{R}_\pi$）。设 π: $\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 是极小紧流的一个扩张。假设 $\mathrm{L}\subseteq R_\pi$ 是 X 上一个闭的不变 AP-传递关系，满足

(a) L 有一个几乎周期点稠密集；(b)

$RP_{\pi|L}=\mathrm{L}$。

那么 (T, L) 是拓扑传递的；也就是说，(T, L) 是一个 M-流。

由于L 不一定是X上的等价关系，因此$T\times X/L\to X/L$，由 $(t,L[x])\mapsto L[tx]$, 定义的相映射未必是良定义的。有鉴于此，定理2.1 并非经典 McMahon-Veech 定理的推论。事实上，利用 Ellis 代数理论，我们可以得到上述定理的半流版本如下：

2.2 定理（参见 [10] for $\mathrm{L}=\mathrm{R}_\pi$）。设 π: $\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 是极小紧半流的一个扩张。假设 $\mathrm{L}\subseteq R_\pi$ 是 X 上一个闭不变 AP-传递关系，且

(a) L 有一个稠密的几乎周期点集；

(b) $RP_{\pi|L}=\mathrm{L}$。

那么 (T, L) 是一个 M-半流。

在证明定理 2.2 之前，为了方便起见，我们需要引入一些术语。设 Aut ($\mathscr{I}$) 为泛极小紧动力系统 $\mathscr{I}=(T,\mathbb{I})$ 的自同构群。令

$$\Gamma[\alpha]=\{(m,\alpha m)\,|\,m\in\mathbb{I}\}\quad\forall\alpha\in\mathrm{Aut}(\mathscr{I}).$$

Aut ($\mathscr{I}$) 上所谓的 τ-拓扑定义如下：

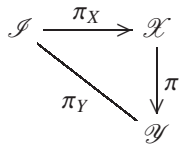
设 $\alpha_i \in \mathrm{Aut}(\mathscr{I})$ 是一个网，并设 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathscr{I})$。我们称 $\alpha_i \to_\tau \alpha$ iff 对于每个 $m \in \mathbb{I}$ 都存在一个网 $m_i \to m$ 属于 $\mathbb{I}$，使得 $\alpha_i m_i \to \alpha m$ 属于 $\mathbb{I}$（参见 [10, 附录 A]）。

在 τ拓扑下，$\mathrm{Aut}(\mathscr{I})$ 是一个紧致 T_1空间（参见 [25, 2] 和 [10, 命题 A.2.5]）。设$\mathbb{F}$ 是 $\mathrm{Aut}(\mathscr{I})$ 的一个 τ 闭子群；则其导出子群定义如下：

$$\mathbb{F}' = \{\alpha \in \mathbb{F} \mid \exists \delta_i \in \mathbb{F} \text{ s.t. } \delta_i \to_\tau \alpha \ \& \ \delta_i \to_\tau \mathrm{id}_{\mathbb{I}}\}$$

（参见 [10, 定义 A.4.1]）。这里，$\mathbb{F}'$ 清楚地衡量了 $\mathbb{F}$ 上的 τ拓扑偏离豪斯多夫空间的程度。此外，$\mathbb{F}'$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个 τ闭正规子群（[10, 引理 A.4.2]）。

定理证明***2.2***。首先，我们可以如下构造极小紧半流及其扩张的一个 CD：



并令

$$\mathbb{F} = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathscr{I}) \mid \pi_Y = \pi_Y \circ \alpha\};$$

也就是说，$\mathscr{Y}$关于 π_Y 的 Ellis 群。令

$$\mathbb{L} = \{\alpha \in \mathbb{F} \mid (\pi_X \times \pi_X)\Gamma[\alpha] \subseteq L\}.$$

注意，对于每个 $\alpha \in \mathbb{F}$，$\Gamma[\alpha]$ 都由 R_π 中的几乎周期点组成。由于 L 是 X 上的一个 AP-传递关系，$(\alpha^{-1}\mathrm{m}, \mathrm{m}) = (\alpha^{-1}\mathrm{m}, \alpha(\alpha^{-1}\mathrm{m})) \ \forall \mathrm{m} \in \mathbb{I}$，且 $\mathbb{F}$是一个群，因此 $\mathbb{L}$是 $\mathbb{F}$的一个子群。此外，$\mathbb{L}$是 τ 闭的。事实上，若$\alpha_j \in \mathbb{L}$且 $\alpha_j \to_\tau \alpha$，则存在一个网 $\mathrm{m}_j \to \mathrm{m}$，属于 $\mathbb{I}$，使得 $\alpha_j \mathrm{m}_j \to \alpha\mathrm{m}$，因此 $(\pi_X \times \pi_X)(\mathrm{m}, \alpha\mathrm{m}) \in \mathrm{L}$ 且 $\alpha \in \mathbb{L}$，因为 L 是闭的。于是，$\mathbb{L}$是 $\mathbb{F}$的一个 τ闭子群。

设 $(\mathrm{x}, \mathrm{x}') \in \mathrm{L}$ 是一个几乎周期点。存在 $\mathrm{u} \in \mathbb{J}$，使得 $\mathrm{u}(\mathrm{x}, \mathrm{x}') = (\mathrm{x}, \mathrm{x}')$。由于 $(\mathrm{x}, \mathrm{x}') \in \mathrm{RP}^{\pi|L}$，且 L 有一个由几乎周期点组成的稠密集，根据标准论证（例如参见 [10, 定理 3.1 的证明。3]），我们可以选取 $(\mathrm{m}, \mathrm{m}')$、$(\mathrm{m}_j, \mathrm{m}'_j)$、$(\mathrm{n}, \mathrm{n}')$ 属于 $R_{\pi_Y} \subseteq \mathbb{I} \times \mathbb{I}$，并取 $\mathrm{t}_j \in \mathrm{T}$，使得

$$(\pi_X \times \pi_X)(m, m') = (x, x'), \ (\pi_X \times \pi_X)(m_j, m'_j) \in L, \ \pi_X n = \pi_X n',$$

and

$$(m_j, m'_j) \to (m, m'), \ t_j(m_j, m'_j) \to (n, n')$$

使得 $(\mathrm{m}, \mathrm{m}')$ 和 $(\mathrm{m}_j, \mathrm{m}'_j)$ 在 $(\mathrm{T}, \mathbb{I} \times \mathbb{I})$ 作用下都是几乎周期点。于是，由 $\mathscr{I}$ 的正则性，存在 $\alpha_j, \gamma \in \mathbb{L}$ 使得

$$m' = \gamma m, \ m'_j = \alpha_j m_j, \ (m_j, \alpha_j m_j) \to (m, \gamma m), \ (t_j m_j, \alpha_j t_j m_j) \to (n, n').$$

现在，由于 $\pi_X \mathrm{n} = \pi_X \mathrm{n}'$，我们可以取 $\mathrm{n}'' \in \mathbb{I}$，使得 $(\mathrm{n}', \mathrm{n}'')$ 是几乎周期的，n 与 n″近端，且 $\pi_X \mathrm{n}'' = \pi_X \mathrm{n}'$。因此，存在某个 $\xi \in$ 自同构群 $(\mathscr{I})$，使得 $\mathrm{n}'' = \xi \mathrm{n}'$。于是 $\pi_X \xi \mathrm{n}' = \pi_X \mathrm{n}'$，所以$\pi_X \circ \xi = \pi_X$，$\xi \in \mathbb{L}$，且 $(\mathrm{m\,j}, \xi\alpha\mathrm{jm\,j}) \to (\mathrm{m}, \xi\gamma\mathrm{m})$。此外，存在一个网 $\mathrm{s}_j \in \mathrm{T}$，使得 $(\mathrm{s\,jm\,j}, \xi\alpha\mathrm{j\,s}_j\mathrm{m\,j}) \to (\mathrm{n}, \mathrm{n})$。因此，$\xi\alpha\mathrm{j} \to_\tau \xi\gamma, \xi\alpha\mathrm{j} \to_\tau \mathrm{id}_{\mathbb{I}}, \xi\alpha\mathrm{j} \in \mathbb{L}$。所以 $\xi\gamma \in \mathbb{L}'$。

总之，我们得出结论：如果 $(\mathrm{x}, \mathrm{x}') \in \mathrm{L}$ 是几乎周期的，那么存在一个 $\alpha \in \mathbb{L}$，满足 $(\mathrm{x}, \mathrm{x}') \in (\pi_X \times \pi_X)\Gamma[\alpha]$，使得存在一个网 $\delta_j \in \mathbb{L}$，满足 $\delta_j \to_\tau \alpha$ 且 $\delta_j \to_\tau \mathrm{id}_{\mathbb{I}}$；也就是说，$\alpha \in \mathbb{L}'$。

由于 $\mathbb{L}'$ 是一个 τ-闭子群（参见 [10, 引理 A.4.2]），因此若 $\alpha, \gamma \in \mathbb{L}'$，则存在一个网 $\delta_j \in \mathbb{L}$，使得 $\delta_j \to_\tau \alpha$ 且 $\delta_j \to_\tau \gamma$（参见 [10, 引理 A.4.3]）。

现在设 $\bar{x}$、$\bar{w}$ 是 L 中两个几乎周期点，并设 U 和 V 分别是 L 中 $\bar{x}$ 和 $\bar{w}$ 的两个邻域。于是我们可以取 α、$\gamma \in \mathbb{L}'$ 和 m、n $\in \mathbb{I}$，使得 $(\pi_X \times \pi_X)(m, \alpha m) = \bar{x}$ 且 $(\pi_X \times \pi_X)(n, \gamma n) = \bar{w}$。因此存在一个网 $\delta_j \in \mathbb{L}$，使得 $\delta_j \to_\tau \alpha$ 且 $\delta \to_\tau \gamma$。此外，在 $\mathbb{I}$ 中存在网 $m_j \to m$ 和 $n_j \to n$，使得 $\delta_j m_j \to \alpha m$ 且 $\delta n_j \to \gamma n$。由于 $(\pi_X \times \pi_X)(m_j, \delta_j m_j)$ 和 $(\pi_X \times \pi_X)(n_j, \delta_j n_j)$ 属于 L 的同一个极小子集，这表明 $N_T(U, V) \neq \emptyset$。由于 L 已有一个由几乎周期点构成的稠密集，(T, L) 是拓扑传递的 M-半流。证明完毕。

□

事实上，如果 (*T*,*L*) 是一个 M-半流，那么定理 2.2 中的条件 (a) 和 (b) 显然成立。

2.2. 李雅普诺夫稳定性与 Bohr/正则几乎周期性

在本节中，设 $\mathscr{X}$ 是一个任意的流，除非另有说明，它不一定是极小的，也不一定是紧致的。现在我们将考察几乎周期点（正则几乎周期点）成为李雅普诺夫稳定点的条件。

2.2.1. 基本定义

我们首先引入一些后文需要的概念。设 S 和 A 是 T 的子集。若对于 T 的每个紧子集 K，都存在一个元素 $t \in T$，使得 $Kt \subseteq S$，则称 S 是（右）厚集；若存在 T 的紧子集 K，使得 $T = K^{-1}A$，或者等价地，$Kt \cap A \neq \emptyset\ \forall t \in T$，则称 A 是 T 的（右）相对稠密子集。容易验证

- T 的子集是相对稠密集，当且仅当它与 T 的每个厚子集都有非空交集。
- 若 T 是阿贝尔群，且 B 在 T 中相对稠密、S 在 T 中是厚集，则 $T = BS$。

回顾如下定义:

I. 点 $x \in X$ 在 $\mathscr{X}$ 下是几乎周期（a.p.）的，当且仅当对每个 $U \in N_x$ in X，$N_T(x, U)$ 都是 T 的相对稠密子集。于是，x 在 $\mathscr{X}$ 下是几乎周期的，当且仅当对所有 T 的厚子集 $S \subset$，都有 $x \in \overline{Sx}$。II. 点 $x \in X$ 在 $\mathscr{X}$ 下是局部几乎周期的，当且仅当对每个 $U \in N_x$，都存在 $V \in N_x$ 以及 T 的相对稠密子集 A，使得 $AV \subseteq U$。若 $\mathscr{X}$ 是逐点局部几乎周期的，我们称其为局部几乎周期。III. 若对每个 $\alpha \in \mathscr{U}_X$，都存在 T 中的相对稠密集 A，使得对所有 $x \in X$，$Ax \subseteq \alpha[x]$，则称 $\mathscr{X}$ 是几乎周期的。若 (T, T x) 是几乎周期流，则称点 $x \in X$ 在 $\mathscr{X}$ 下是 Bohr 几乎周期的。若 X 中每个点在 $\mathscr{X}$ 下都是 Bohr 几乎周期点，则称 $\mathscr{X}$ 是逐点 Bohr 几乎周期的。IV. 若给定 $\varrho \in \mathscr{U}_X$ 和 $x \in X$，都存在一个指标 $\delta \in \mathscr{U}_X$，使得对所有 $t \in T$，都有 $t(\delta[x]) \subseteq \varrho[tx]$，则称 $\mathscr{X}$ 是等度连续的。若对所有 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$，都存在一个指标 $\delta \in \mathscr{U}_X$，满足 $T\delta \subseteq \varepsilon$，则称 $\mathscr{X}$ 是一致等度连续的。V. 若对所有 $U \in N_x$，$N_T(x, U)$ 都包含 T 的一个相对稠密正规闭子群，则称 $\mathscr{X}$ 在 $x \in X$ 处正则几乎周期，或称 x 是 $\mathscr{X}$ 下的正则平均周期点。若给定$\varepsilon \in \mathscr{U}_X$，都存在 T 的一个相对稠密正规闭子群 A，使得对所有 $x \in X$，都有 $Ax \subseteq \varepsilon[x]$，则称 $\mathscr{X}$ 是正则几乎周期的。若存在一个正则平均周期点 x，使得 $Tx = X$，则称 $\mathscr{X}$ 是点正则几乎周期的。

若 X 是紧致的，则 $x \in X$ 在 $\mathscr{X}$i当且仅当 Tx 在 $\overline{\mathscr{X}}$下是极小的；并且，$\mathscr{X}$是几乎周期的，当且仅当 它是一致等度连续的，当且仅当 它是等度连续的，当且仅当 $\mathrm{RP}(\mathscr{X}) = \Delta_X$（见引理 2.3）。我们称

i. $\mathscr{X}$ 厚稳定，当且仅当对每个指标 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$ 及所有点 x $\in$ X，存在一个指标$\delta \in \mathscr{U}_X$ 和 T 的一个厚子集 S，使得对所有 s $\in$ S，s(δ[x]) $\subseteq \varepsilon$[sx] 。若此处的 δ 和 S 不依赖于 x 的选取，则称 $\mathscr{X}$为一致厚稳定。ii. $\mathscr{X}$ 厚正则稳定，当且仅当对每个指标 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$ 及所有点 x $\in$ X，存在一个指标 $\delta \in \mathscr{U}_X$ 和 T 的一个厚子半群 S，使得对所有 s $\in$ S，s(δ[x]) $\subseteq \varepsilon$[sx] 。iii. $\mathscr{X}$ 一致厚正则稳定，当且仅当对每个指标 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$ ，存在一个指标$\delta \in \mathscr{U}_X$ 和 T 的一个厚子半群 S，使得 S$\delta \subseteq \varepsilon$。iv. $\mathscr{X}$ 相对稠密稳定，是指对每个指标 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$ 及所有点 x $\in$ X，存在一个指标 $\delta \in \mathscr{U}_X$ 和 T 的一个相对稠密子集 S，使得对所有 s $\in$ S，s(δ[x]) $\subseteq \varepsilon$[sx] 。$\mathscr{X}$ 一致相对稠密稳定，当且仅当对每个指标 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$ ，存在一个指标 $\delta \in \mathscr{U}_X$和 T 的一个相对稠密子集 S，使得 S$\delta \subseteq \varepsilon$。v. $\mathscr{X}$ 相对稠密远离，是指对每个 x $\in$ X 及 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$ ，存在 T 的一个相对稠密子集 S 和一个指标 $\delta \in \mathscr{U}_X$ ，使得若 y $\notin \varepsilon$[x] ，则对所有 t $\in$ S，ty $\notin \delta$[tx] 。$\mathscr{X}$ 一致相对稠密远离，是指对每个 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$ ，存在 T 的一个相对稠密子集 S 和一个指标 $\delta \in \mathscr{U}_X$ ，使得若 y $\notin \varepsilon$[x] ，则对所有 t $\in$ S 及 x $\in$ X，ty $\notin \delta$[tx] 。

设 $S \subseteq T$ 和 $X_0 \subseteq X$ 为非空集合。根据 [21, 定义 2] 和 [9, 定义 2.8.6 和定义 2.8。11]我们称:

a. $\mathscr{X}$是李雅普诺夫 S-稳定的，当且仅当对每个指标 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$ 以及所有 x $\in$ X，都存在一个指标 $\delta \in \mathscr{U}_X$，使得对于所有 t $\in$ S，t(δ[x]) $\subseteq \varepsilon$[tx] 。 b. $\mathscr{X}$是一致李雅普诺夫 S-稳定的，当且仅当对每个指标 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$ ，都存在一个指标 $\delta \in \mathscr{U}_X$，使得 S$\delta \subseteq \varepsilon$。 c. $\mathscr{X}$ 在 L $\subseteq$ X 处关于 X_0 是李雅普诺夫 S-稳定的，当且仅当对每个指标 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$ 以及所有 x $\in$ L，都存在一个指标 $\delta \in \mathscr{U}_X$ ，使得对于所有 t $\in$ S，t(δ[x] $\cap$ X_0) $\subseteq \varepsilon$[tx] 。

显然，一致 Lyapunov T-稳定恰好就是定义 IV 中的一致等度连续。若 X 是紧致的，则定义 a 和定义 b 等价。

请注意，与 England [21, 定义 2] 和 Bronstein [9, 2.8.6 及 2.8.11],中的“Lyapunov S-稳定”和“一致 Lyapunov S-稳定”相比，在上述厚集稳定性和相对稠密稳定性情形 i、ii、iii、iv 和 v 中，S 可以随 ε 变化。此外，如果 T 不是阿贝尔群，那么相对稠密集（分别为厚集）的逆集不一定是相对稠密集（分别为厚集）。

以下重要结果归功于 W.H. Gottschalk。不过，为方便读者，我们将在此给出另一种简单的证明。

2.3 引理（参见 [29]; 另见 [9, 定理 1.6.23]和 [2, 定理 2.2]）。紧流 $\mathscr{X}$ 等度连续（或等价地，Lyapunov T-稳定）当且仅当它是几乎周期流。

证明。假设 $\mathscr{X}$ 是一个几乎周期流。显然，它是一致分段稳定且远离的，因此 RP($\mathscr{X}$) = P($\mathscr{X}$) = Δ_X。于是，当 RP($\mathscr{X}$) = $\bigcap_{\alpha \in \mathscr{U}_X} T\alpha$ 且 X 紧致时， $\mathscr{X}$ 是等度连续的。反过来，假设 $\overline{\mathscr{X}^n}$ 等度连续；那么，由于 P($\mathscr{X}$) = Δ_X， $\mathscr{X}$ 远离。令 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$ 和 $\beta \in \mathscr{U}_X$ 满足 $\beta^3 \subset \varepsilon$。那么存在一个指标 $\delta \in \mathscr{U}_X$ ，使得 $\delta \subset \beta$ ，从而 T$\delta \subset \beta$。由于 X 紧致，存在有限集 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 属于 X，使得 X = $\delta[x_1] \cup \cdots \cup \delta[x_n]$。由于 $(x_1, \ldots, x_n)$ 是 X^n 中的一个几乎周期点，因此存在 T 的一个相对稠密子集 A，使得 A$(x_1, \ldots, x_n) \subseteq \delta[x_1] \times \cdots \times \delta[x_n]$。现在，对 y $\in$ X，存在某个 i，满足 $1 \leq i \leq n$，使得 $(y, x_i) \in \delta$，A$(y, x_i) \subset \beta$ 且 A$x_i \subset \delta[x_i]$。因此 Ay $\subset \beta^3[y]$。于是，对所有 y $\in$ X，Ay $\subset \varepsilon$[y] 。证明完毕。 □

2.2.2. 厚稳定性

文献 [7, 13] 和 [9, §1对紧流中的一致厚稳定性进行了研究。6] 本文现在将考察非一致的非紧致情形。

2.4 引理。设 $\mathscr{X}$ 是一个极小流，且 S 是 T 的一个{ 厚集}{相对稠密} 子集。若 $\mathscr{X}$ 在某点 $x \in X$ 处关于 X 是 Lyapunov S- 稳定的，则 $\mathscr{X}$ 是 { 厚稳定且 }{ 相对稠密稳定的 } 。

证明。显然。 □

2.5 定理。设 $\mathscr{X}$ 是一个厚稳定流，且 T 是阿贝尔群。若 $x \in X$ 是 $\mathscr{X}$ 下的一个几乎周期点，则 $(T, \overline{Tx})$ 是 $\mathscr{X}$ 的一个具有离散相位群 T 的几乎周期子流；此外，(T, Tx) 是 $\mathscr{X}$ 的一个等度连续子流。

证明。由于 X 是正则空间，几乎周期点的轨道闭包是极小的（参见 [9, 定理 1.5.3]），因此不失一般性，我们可以假设 $\mathscr{X} = (T, Tx)$ 是极小的。此外，我们可以假设 x 是 $\mathscr{X}$ 下的几乎周期点，且 T 是离散群。

设 $\varepsilon, \alpha \in \mathscr{U}_X$ 且 $\alpha^2 \subseteq \varepsilon$。根据假设，$\mathscr{X}$ 在 x 处厚稳定，因此存在指标 $\gamma \in \mathscr{U}_X$ 以及 T 的一个厚子集 S，使得对所有 $s \in S$，都有 $s(\gamma[x]) \subseteq \alpha[sx]$ 。取一个满足 $\delta^2 \subseteq \gamma$的指标 $\delta \in \mathscr{U}_X$ 。由于 x 在 $\mathscr{X}$ 作用下几乎周期，且 T 是拓扑群，因此存在 T 的一个离散相对稠密子集 A，使得 $Ax \subseteq \delta[x]$。要证明 $\mathscr{X}$ 几乎周期，只需证明对所有 $t \in T$，都有 $Atx \subseteq \varepsilon[tx]$ 。为此，取 $t \in T$、$a \in A$。存在一个满足 $\sigma \subset \delta$ 的指标 $\sigma \in \mathscr{U}_X$，使得 $a(\sigma[x]) \subseteq \delta[ax]$。于是存在 T 的一个相对稠密子集 B，使得 $Bx \subseteq \sigma[x]$。由 $T = BS$ 可知，存在 $b \in B$ 和 $s \in S$，使得 $b^{-1}t = s$。由 $bx \in Bx \subseteq \sigma[x]$, 可得 $abx \in \delta[ax] \subseteq \gamma[x]$。由 $b^{-1}t = s \in S$ 以及 T 的交换性可知，$atx = (b^{-1}t)(ab)x \in \alpha[b^{-1}tx]$。此外，由 $b \in B$ 可知 $bx \in \delta[x] \subseteq \gamma[x]$。因此，$tx = (b^{-1}t)bx \in \alpha[b^{-1}tx]$。所以，对所有 $t \in T$ 和所有 $a \in A$，都有 $(atx, tx) \in \alpha^2 \subseteq \varepsilon$ 。

接下来我们将证明 $\mathscr{X}$是等度连续的。设 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$ 存在指标 $\delta_1 \in \mathscr{U}_X$ 和相对稠密集 $A \subseteq T$，使得 $A\delta_1 \subseteq \varepsilon$。选取紧集 $K \subseteq T$，使得 $KA = T = AK$（因为 T 是阿贝尔群）。给定 $x_0 \in X$，存在一个 $\delta \in \mathscr{U}_X$，使得对所有 $k \in K$，都有 $k\delta[x_0] \subseteq \delta_1[kx_0]$ 。因此，对所有 $t \in T$，都有 $t\delta[x_0] \subseteq \varepsilon[tx_0]$，于是 $\mathscr{X}$是等度连续的。证毕。 □

2.5a 推论。 若 $\mathscr{X}$是一个局部几乎周期且厚稳定的紧流，且 T 为阿贝尔群，则 $\mathscr{X}$是一个几乎周期流。

证明。 由于 $\mathscr{X}$是局部几乎周期的， $\mathscr{X}$是逐点几乎周期的，且 $\mathrm{P}(\mathscr{X}) = \mathrm{RP}(\mathscr{X})$。于是，根据定理 $\mathrm{RP}(\mathscr{X}) = \Delta_X$ 2.5，结合引理 2.3 可得推论 2.5a。 □

2.5b 推论 (参见 [21, 定理 2] 或 [9, 定理 2.8。8])。 设 $\mathscr{X}$是一个流，其中 T 为阿贝尔群。设 S 是 T 的一个厚子集，且 $x \in X$ 是一个几乎周期点，在 $\mathscr{X}$下。如果 $\mathscr{X}$相对于 Tx 在 x 处是 Lyapunov S-稳定的，那么 x 是一个 Bohr 几乎周期点，在 $\mathscr{X}$下。

证明。 由引理 2.4 和定理2.5。 □

当 T 不一定是阿贝尔拓扑群时，我们可以用“x 在 $\mathscr{X}$ 下正则几乎周期”代替“x 在 $\mathscr{X}$ 下几乎周期”，从而得出以下结果：

2.6 定理。设 $\mathscr{X}$ 是一个流，且 X 是贝尔空间。若 $\mathscr{X}$ 厚稳定，并且在某个点 $x \in X$ 处正则几乎周期，则 (T, Tx) 是 $\mathscr{X}$ 的逐点正则几乎周期等度连续子流。

证明。不失一般性，可假设 X = T x，因为 T x 是 X 的极小子集。令 ε、$\overline{\alpha} \in \mathscr{U}_X$，其中 $\alpha^2 \subseteq \varepsilon$。存在一个指标 $\gamma \in \mathscr{U}_X$ 和 T 的一个厚子集 S，使得对所有 s ∈ S，都有 sγ[x] ⊆ α[sx]。取一个指标 $\delta \in \mathscr{U}_X$，使得 $\delta^2 \subseteq \gamma$。由于 x 在 $\mathscr{X}$ 下几乎周期，T 中存在一个离散稠密集 A，使得 Ax ⊆ δ[x] 且 int Ax ≠ ∅。为了证明 $\mathscr{X}$ 在 X 中关于 x 是李雅普诺夫 T-稳定的，只需证明对所有 t ∈ T 及每个 a ∈ A，都有 tax ∈ ε[tx]。

为此，任取 t ∈ T 和 a ∈ A。选取指标 $\sigma \in \mathscr{U}_X$，使得 aσ[x] ⊆ δ[ax]。由于 x 在 $\mathscr{X}$ 下是正则几乎周期的，存在 T 的一个相对稠密正规闭子群 B，使得 Bx ⊆ σ[x]。因此 aBx ⊆ δ[ax] ⊆ γ[x]。由于 S 是厚集，且 tB 在 T 中相对稠密，故 tB ∩ S ≠ ∅。于是，对某个 b ∈ B 和 s ∈ S，有 tb = s。然后

$$tax = (tb)(b^{-1}a)x \in (tb)(aB)x \subseteq \alpha[tbx] \quad \text{and} \quad tx = (tb)b^{-1}x \in (tb)Bx \subseteq (tb)\gamma[x] \subseteq \alpha[tbx].$$

由此，对于所有 t ∈ T 和所有 a ∈ A，(tax, tx) ∈ $\alpha^2 \subseteq \varepsilon$。

此外，由 X 的极小性，$\mathscr{X}$ 是 Lyapunov T-稳定的。另一方面，$\mathscr{X}$ 在 T x 的每个点处都是正则几乎周期的。因此，根据李雅普诺夫稳定性，X = T x 中的每个点在 $\mathscr{X}$ 下都是正则几乎周期的。证明完毕。 □

2.6a 推论。 若 $\mathscr{X}$ 是点正则平均周期厚稳定紧流，则 $\mathscr{X}$ 是正则几乎周期流。

证明。 利用定理 2.6 以及 $\mathscr{X}$ 的一致等度连续性。 □

2.6b 推论。 设 $\mathscr{X}$ 是一个流，其中 X 是贝尔空间。设 S 是 T 的一个厚子集，且 x ∈ X 是 $\mathscr{X}$ 下的正则平均周期点。若 $\mathscr{X}$ 在 x 处关于 T x 是 Lyapunov S-稳定的，则 $\mathscr{X}$ 在 x 处关于 T x 是 Lyapunov T-稳定的。

证明。 由引理 2.4 和定理2.6。 □

注意，点正则平均周期紧流未必是几乎周期的；例如， [30, 定理 12。55]。因此，条件“$\mathscr{X}$ 是厚稳定的”对于定理2.6至关重要。

2.2.3. Lyapunov 厚子半群稳定性

2.7（P-极限集）。设 x ∈ X，且 P ⊆ T。x 的 P-极限集记为 P_x，定义为$\bigcap_{t\in T}$ Ptx；也就是说，若对每个 t ∈ T，都存在一个网 $p_j \in P$，使得 $p_j$tx → y，则 y ∈ P_x。P_x 中的每个点都称为 x 在 $\mathscr{X}$ 作用下的 P-极限点。参见 [30, 定义 6.33] 或 [9, 定义 2.8.9]。

• 若 x ∈ X 在 $\mathscr{X}$ 作用下几乎周期，且 P 是 T 中的厚集，则 x ∈ P_x。

注意，此处的 P_x 不同于 x] 在 $\mathscr{X}$ 作用下的近端胞腔 P[。

2.7a 引理（当 T 为生成群时，参见 [30, 定理 6.07] ）。若 P 是 T 中的厚半群，且 K 是 T 的一个紧子集，其中 e ∈ K，则$\bigcap$k∈K kP 是 T 中的厚半群。

证明。令 Q = $\bigcap_{k\in K}$ kP。由于对所有 k ∈ K，P ∩ kP 都是半群，因此 Q 是 T 中的半群。设 C 是 T 的一个紧子集，并令 D = C ∪ K^{-1}C。由于 D 是紧集，我们可以选取 t ∈ T，使得 Dt ⊆ P。现在，对于 k ∈ K，我们有 C ⊆ D ∩ kD，且 Ct ⊆ Dt ∩ kDt ⊆ P ∩kP。因此 Ct ⊆ Q，且 Q 在 T 中是厚集。证明完毕。 □

2.7b 引理 (参见 [9, 引理 2.8。10]对于 T 阿贝尔群)。 设 P 是 T 的正规厚子半群。设 x ∈ X。则基于 $\mathscr{X}$：

(1) P_x 是闭且 T-不变的。

(2) 若 $\overline{Px}$ 是紧致的，则 $P_x \neq \emptyset$。
(3) $P_x = \bigcap_{t\in P} \overline{Ptx}$。

这里，“正规”意为“$Pt = tP \ \forall t \in T$”。

证明。
(1)：显然，P_x 是闭的。设 $y \in P_x$ 且 $s, t \in T$。由于 $y \in Ps^{-1}tx$，因此 $sy \in s\overline{Ps^{-1}tx} = \overline{Ptx}$ 且 $sy \in P_x$。故 P_x 是 T-不变的。
(2)：假设 P_x 是紧致的。设 $t_1, \ldots, t_n \in T$。由引理 2.7a，$P \cap t_1P \cap \cdots \cap t_nP$ 是 T 中的一个厚半群。因此 $\bigcap_{i=1}^{n} Pt_ix = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{t_iPx} \supseteq \left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{t_iP}\right) x \neq \emptyset$ 且 $P_x \neq \emptyset$。
(3)：由于 P 是 T 中的正规厚集，P^{-1} 在 T 中也厚。因此，对所有 $t \in T$，都存在某个 $s_t \in P$，使得 $s_t t \in P$。于是 $P_x \subseteq \bigcap_{p\in P} \overline{Ppx} \subseteq \bigcap_{t\in T} \overline{Ps_tx} \subseteq \bigcap_{t\in T} \overline{Ptx} \subseteq P_x$。证明完毕。 □

2.8 引理（[4, 定理 1.15]的一个特例）。设 $\mathscr{X}$ 是一个紧流，且 S 是 T 的一个子半群。如果 $\mathscr{X}$ 是 Lyapunov S-稳定的，那么它就是 Lyapunov $\langle S \rangle$-稳定的。这里，$\langle S \rangle$ 是由 S 生成的 T 的子群。

2.9 定理。设 $\mathscr{X}$ 是一个紧流，且 S 是 T 的一个厚子半群。如果 $\mathscr{X}$ 是 Lyapunov S-稳定的，那么 $\mathscr{X}$ 就是一个几乎周期流。

证明。由引理 2.8，$(\langle S \rangle, X)$ 是一个等度连续流。由于 S 在 T 中是厚集，$\langle S \rangle$ 也如此。然而，T 的每个厚子群都与 T 相同。因此 $\langle S \rangle = T$，且 $\mathscr{X}$ 是等度连续的。由于 X 是紧致的，$\mathscr{X}$ 由引理 2.3 可知是几乎周期的。证明完毕。 □

2.9a 推论（参见 [34] [38, 定理 V.8.12]（适用于 $T = \mathbb{R}$ 和 $S = \mathbb{R}_+$）；[21, 定理 3] [9, 定理 2.8.12]（适用于阿贝尔 T））。设 $\mathscr{X}$ 为一个流，且 S 是 T 的稠密正规子半群。设 $x \in X$ 满足 $S^{-1}x$ 是紧致的，并且 $\overline{(T, Tx)}$ 是 $\mathscr{X}$ 的一个一致李雅普诺夫 S-稳定子流。那么 (T, Tx) 是 $\mathscr{X}$ 的一个紧致极小几乎周期子流。

证明。令 $P = S^{-1}$；则 $P \triangleleft T$，且 P 在 T 中是厚集。由引理 2.7b，P_x 是 X 的一个 T-不变、闭、非空紧子集。于是可以取一个 T-极小集 M，使得 $M \subseteq P_x \subseteq Tx$。由于 (T, Tx) 是一致李雅普诺夫 S-稳定的，(T, Tx) 也是一致李雅普诺夫 S-稳定的。令 $y \in M$。由于 $M \subseteq S^{-1}x$，存在一个网 $s_n \in S$，使得 $s_n^{-1}x \to y$ 属于 Tx。由一致 S-稳定性，$s_ny \to x \in M$。因此 $Tx = M$ 是紧致的。由定理 2.9，(T, Tx) 是等度连续的，因而是 $\mathscr{X}$ 的一个几乎周期极小紧子流。证明完毕。 □

2.9b 推论 (参见 [21, 定理 4] [9, 定理 2.8。14]对于 T 阿贝尔)。设 $\mathscr{X}$ 为一个流，且令 P 为 T 的稠密正规子半群。设 $x \in X$。则以下命题等价：
(1) x 在 $\mathscr{X}$ 下是 Bohr 几乎周期的，且 Tx 紧致。(2) $x \in P_x$，P_x 是紧致的，并且 $\mathscr{X}$ 关于 P_x 在 Tx 处一致李雅普诺夫 P-稳定。

证明。假设 (1)。显然，由引理 2.7b，$\overline{P_x} = Tx$ 是紧致极小的，并且 (T, Tx) 是等度连续的。因此 $x \in P_x$，且 Tx 关于 P_x 一致李雅普诺夫 P-稳定。于是 (1) 推出 (2)。反过来，假设 (2)。由引理 2.7b，$Tx \subseteq P_x$ 且 $Tx = P_x$。现在用 Tx 和 P 分别代替 X 和 S 应用定理 2.9，得到 (T, P_x) 是几乎周期的。由于 $x \in P_x$，因此 x 是 Bohr 几乎周期的，且 (2) 推出 (1)。证明完毕。 □

2.9c 推论(参见 [21, 定理 5] 对于 T 阿贝尔)。设 $\mathscr{X}$ 是一个流，且令 P 为 T 的稠密正规子半群。假设 $y \in X$ 满足：

(1) y 的 P-极限集 P_y 是非空紧致集，且对于所有 $x \in P_y$，均有 $P_x = P_y$。
(2) $\mathscr{X}$ 相对于 P_y，在 Ty 处是李雅普诺夫 P-稳定的。

那么，P_y 是 $\mathscr{X}$ 中一个 Bohr 几乎周期点的闭包。

证明。 条件 (1) 意味着 P_y 是 $\mathscr{X}$ 的一个极小集。由于 P_y 是紧致的，条件 (2) 意味着 (T,P_y) 是一致 Lyapunov P-稳定的。于是由定理 2.9，(T,P_y) 是（Bohr）几乎周期的，因此 P_y 是 $\mathscr{X}$ 的一个 Bohr 几乎周期轨道的闭包。证明完毕。 □

2.2.4. 相对稠密远离性

容易验证，每个一致远离紧流都是几乎周期的（参见 [4, 引理 1.7(2)]和[10, 定理 1.1.5]）。现在我们将这一结果改进如下：

2.10 定理。如果 $\mathscr{X}$ 是一个相对稠密远离紧流，那么它是逐点 Bohr 几乎周期的。

证明。首先我们断言 $\mathscr{X}$ 是远离的。事实上，设 $x \in X$，且 $y \in P[x]$，其中 $x \neq y$。则存在一个指标 $\varrho \in \mathscr{U}_X$，使得 $(x, y) \notin \varrho$。由于 $\mathscr{X}$ 是相对稠密远离的，存在一个指标 $\gamma \in \mathscr{U}_X$和一个 T 的相对稠密子集 A，使得对所有 $t \in A$，都有 $t^{-1}(\gamma[tx]) \subseteq \varrho[x]$。然而，由 $y \in P[x]$, $B := \{t \in T \mid (tx, ty) \in \gamma\}$ 是 T 的一个厚子集。取 $A \cap B \neq \emptyset$中的 $t_0 \in$。那么 $t_0 y \in \gamma[t_0 x]$，且 $t_0^{-1}(\gamma[t_0 x]) \subseteq \varrho[x]$。因此 $(x, y) \in \varrho$，矛盾。故 $P(\mathscr{X}) = \Delta_X$，且 $\mathscr{X}$ 是一个远离紧流。

因此，为了证明 $\mathscr{X}$ 逐点 Bohr 几乎周期，我们可以假设 $\mathscr{X}$ 是极小远离的，并证明$\mathscr{X}$几乎周期。为此，在 X 上定义强区域近端关系如下：

$$\mathrm{U}(\mathscr{X}) = \{(x, y) \mid \exists\, y_n \in X \to y \text{ and } t_n \in T \text{ s.t. } (t_n x, t_n y_n) \to \Delta_X\}$$

并令 $U[x] = \{y \in X \mid (x, y) \in U(\mathscr{X})\}$对所有 $x \in X$ 成立。于是，对所有 $x \in X$，$U[x] = \bigcap_{\alpha\in\mathscr{U}_X}\bigcup_{t\in T} t^{-1}(\alpha[tx])$。由于 $\mathscr{X}$ 是极小远离的，$\mathscr{X}$ 存在一个不变博雷尔概率测度（参见 [22]）。由 [36] 可得，$RP(\mathscr{X}) = U(\mathscr{X})$。因此，

$$RP[x] = U[x] = \bigcap_{\alpha\in\mathscr{U}_X} \overline{\bigcup_{t\in T} t^{-1}(\alpha[tx])} \quad \forall x \in X.$$

设 $x \in X$ 且 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$。存在一个指标 $\delta \in \mathscr{U}_X$ 和 T 的一个相对稠密子集 S，使得对所有 $s \in S$，$s^{-1}(\delta[sx]) \subseteq \varepsilon[x]$。由于 S 相对稠密，存在 T 的一个紧子集 K，使得 $T = KS$。此外，由于 X 是紧致的，且相映射 $T \times X \to X$ 联合连续，存在一个指标 $\alpha \in \mathscr{U}_X$ 使得 $K^{-1}\alpha \subseteq \delta$。任取 $t \in T$。于是可将 t 写成 $t = ks$，其中 $k \in K$，$s \in S$。因此，$t^{-1}(\alpha[tx]) = s^{-1}(k^{-1}(\alpha[ksx])) \subseteq s^{-1}(\delta[sx]) \subseteq \varepsilon[x]$。这表明 $RP[x] \subseteq \varepsilon[x]$。由于 ε 是任意的，故 $RP[x] = \{x\}$ 且 $RP(\mathscr{X}) = \Delta_X$。于是，根据引理 2.3，$\mathscr{X}$ 是等度连续且几乎周期的。证明完毕。 □

2.10推论。 若 $\mathscr{X}$ 是一个 {相对稠密}{厚} 远离且相对稠密稳定的紧流，则它是一个几乎周期流。

证明。 由于 $\mathscr{X}$ 相对稠密稳定，因此 $P(\mathscr{X}) = RP(\mathscr{X})$。若 $\mathscr{X}$ 相对稠密远离，则由定理 2.10，$RP(\mathscr{X}) = \Delta_X$。若 $\mathscr{X}$ 厚远离，则由 2.0h $RP(\mathscr{X}) = \Delta_X$。因此 $\mathscr{X}$ 由引理 2.3可知是一个几乎周期流。证明完毕。 □

2.10b 推论。 若 $\mathscr{X}$ 是相对稠密远离的拓扑传递紧流，则它是几乎周期极小流。

证明。 由定理2.10 和（1.7b）。 □

回顾一下，如果对于每个指标$\varepsilon \in \mathscr{U}_X$，都存在一个指标 $\delta \in \mathscr{U}_X$ 和 T 的一个相对稠密子集 S，使得 $S\delta \subseteq \varepsilon$，则称 $\mathscr{X}$ 是一致分段稳定/等度连续的。

2.10c 推论([14])。 若 $\mathscr{X}$ 是一个一致分段稳定的紧流，且 T 是阿贝尔群，则 $\mathscr{X}$ 是几乎周期流。

证明。 由于 T 是阿贝尔群， $\mathscr{X}$ 是相对稠密远离的。于是，根据推论 $\mathscr{X}$，2.10a，是几乎周期流。 □

2.10d 问题。 若 $\mathscr{X}$ 是一个一致分段稳定的紧流，且 T 非阿贝尔，是否 $\mathscr{X}$ 是几乎周期流?

我们称

- $\mathscr{X}$ 是一致分段正则稳定的，当且仅当对每个指标 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$，都存在一个指标$\delta \in \mathscr{U}_X$ 以及 T 的一个分段子半群 A，使得 $A\delta \subset \varepsilon$。
- $\mathscr{X}$ 是一致左分段稳定的，当且仅当对于每个指标 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$，都存在一个指标 $\delta \in \mathscr{U}_X$以及 T 的一个“左相对稠密”子集 A，使得 $A\delta \subset \varepsilon$。
- $\mathscr{X}$ 是一致左厚稳定的，当且仅当对于每个指标 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$，都存在一个指标 $\delta \in \mathscr{U}_X$ 以及 T 的一个“左厚”子集 A，使得 $A\delta \subset \varepsilon$。

这里，A 是左相对稠密的，当且仅当存在 T 的一个紧子集 K，使得对于所有 $t \in T$，都有 $A \cap tK \neq \emptyset$；而且，A 是左厚的，当且仅当对于每个 T 的紧子集 K，都存在一个元素 $t \in T$，使得 $tK \subseteq A$。

2.10e 推论。 如果 $\mathscr{X}$ 是一个一致分段正则稳定的紧流，那么它是一个几乎周期流。

证明。令 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$。我们可以取一个指标 $\alpha \in \mathscr{U}_X$，使得 $\bar{\alpha} \subseteq \varepsilon$。此外，存在一个指标$\delta \in \mathscr{U}_X$ 以及 T 的一个分段子半群 A，使得 $A\delta \subseteq \alpha$。令 $S = \overline{A}$。那么 S 是 T 的一个闭的相对稠密子半群，且 $S\delta \subseteq \varepsilon$。注意到 S 是 T 的一个子群（参见 [9, 引理 2.8。17]），$\mathscr{X}$ 是相对稠密远离且相对稠密稳定的。因此，根据推论 2.10a， $\mathscr{X}$ 是几乎周期的。证明完毕。 □

2.10f 定理。若 $\mathscr{X}$ 是一个一致左分段稳定的紧致流，则它是一个几乎周期流。

证明。令 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$。则存在一个指标 $\delta \in \mathscr{U}_X$ 和 T 的一个左分段子集 A，使得 $A\delta \subset \varepsilon$。由于 A 是左分段的，因此存在 T 的一个紧子集 K，使得 $T = AK$。此外，存在一个指标 $\alpha \in \mathscr{U}_X$，使得 $K\alpha \subseteq \delta$。因此 $T\alpha = AK\alpha \subseteq A\delta \subset \varepsilon$。于是 $\mathscr{X}$ 是等度连续且几乎周期的流。证明完毕。 □

2.10g 推论。若 $\mathscr{X}$ 是一个一致稠密远离的紧致流，则它是一个几乎周期流。

证明。令 $\mathscr{X}$ 为一致相对稠密远离的。由于相对稠密集的逆是左分段集，$\mathscr{X}$ 显然是一个一致左分段稳定流。因此 $\mathscr{X}$ 根据定理2.10f 是几乎周期的。证明完毕。 □

定理 2.10f 与 Clay 的定理（[13, 定理 14] [9, 定理 1.6.21]）相当： $\mathscr{X}$ 一致左厚稳定，当且仅当它是等度连续的。此外，根据 [4, 定理 8.3]， $\mathscr{X}$ 等度连续，当且仅当对每个 $\alpha \in \mathscr{U}_X$，都存在 T 的一个相对稠密子集 A，使得 $A = A^{-1}$（因此 A 是左相对稠密的），并且对所有 $x \in X$，都有 $Ax \subseteq \alpha[x]$。

3. 非 PI扩张的典范 M-动力系统

除非另有说明，本节中令 $\pi\colon\ \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$为极小紧动力系统的一个非平凡扩张。

回顾一下， π 若 $\mathscr{R}_\pi$ 是拓扑传递，则称其为弱混合；若 π 满足“相对不可压缩”（RIC）条件，即π 是开映射，且R_π^n 对所有 $n \geq 2$ 都有稠密的几乎周期点集（参见[10]）。此处我们将在R_π中定义典范 M-动力系统，这有助于描述π的相对不可预测动力学。此外，本节还将内在地刻画极小动力学的 PI 扩张。

下文中，T 被视为离散空间，并令 $\mathbb{I}$ 为 βT中的一个极小左理想。令 $\mathscr{I} = (T, \mathbb{I}$如§2.1所示。令 $\pi_X\colon\ \mathscr{I} \to \mathscr{X}$以及 $\pi_Y\colon\ \mathscr{I} \to \mathscr{Y}$为两个满足$\pi_Y = \pi \circ \pi_X$的扩张。与 π_X和 π_Y相关联，我们可以在 Aut $(\mathscr{I})$ 中定义两个群：

3.1. $\mathbb{A} = \{\alpha \in \mathrm{Aut}\,(\mathscr{I}) \mid \pi_X = \pi_X \circ \alpha\}$ and $\mathbb{F} = \{\alpha \in \mathrm{Aut}\,(\mathscr{I}) \mid \pi_Y = \pi_Y \circ \alpha\}$.

于是， $\mathbb{A}$和 $\mathbb{F}$ 是 Aut$(\mathscr{I})$ 的 τ闭子群，且满足 $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{F}$；并且， $\mathbb{A} = \mathbb{F}$ 当且仅当 π 是近端的；参见[10, 附录 A]。令 $\mathbb{F}_0 = \mathbb{F}$、 $\mathbb{F}_1 = \mathbb{F}'$、 $\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}'_1$，并对每个序数 o，令 $\mathbb{F}_{o+1} = \mathbb{F}'_o$。若 o 是极限序数，令$\mathbb{F}_o = \bigcap_{\gamma<o} \mathbb{F}_\gamma$。于是通过超限归纳，存在最小序数 o，使得 $\mathbb{F}_0 \supsetneq \mathbb{F}_1 \supsetneq \mathbb{F}_2 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathbb{F}_o = \mathbb{F}_{o+1} = \cdots$。记

3.2. $\mathbb{F}_\infty = \mathbb{F}_o$，称为 $\mathbb{F}$ 的核心，并且是 $\mathbb{F}$ 的一个 τ-闭子群，使得$\mathbb{A}\mathbb{F}_\infty = \mathbb{F}_\infty\mathbb{A}$。

于是：

3.3. π 是一个PI扩张当且仅当 $\mathbb{F}_\infty \subseteq \mathbb{A}$ （参见[25, 定理 X.42] 或 [2, 定理 1423]；由3.6推出）。

的 PI 条件与 π_X和 π_Y的选择无关。因此，PI 扩张是一个内在概念。每个 PI 扩张都具有“良好”的结构；见下文3.6 。

PI 扩张有许多内蕴刻画；见 [8, 37, 44]。特别是，“π是 PI，当且仅当 实数集中的每个 M-动力系统实数集 $_\pi$ 都是极小的”（归功于 Bronstein，参见 [8, 44, 24]）。事实上，我们将证明， π 是 PI，当且仅当 实数集中包含 Δ_X 的每个 M-动力系统实数集$_\pi$ 都恰好等于 Δ_X （见下文定理3.10）。因此，若 π 不是 PI，那么实数集$_\pi$ 包含一个非极小的 M-动力系统。

然而，我们只关注包含 Δ_X 的非极小 M-动力系统。这类 M-动力系统有助于我们定义非 PI 扩张的混沌。为此，我们现在置

3.4. $\mathrm{M}_\infty = (\pi_X \times \pi_X)\overline{\Gamma[\mathbb{F}_\infty]}$, where $\Gamma[\mathbb{F}_\infty] = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{F}_\infty} \Gamma[\alpha]$.

显然， M_∞ 是 R_π 的一个闭不变对称子集，其中包含 RP_π 的一个几乎周期点稠密集（参见 [10, 引理 A.4.4]）。

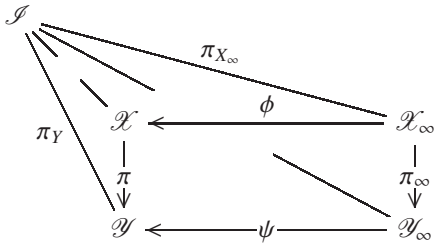
尽管我们尚未在此证明 M_∞ 是 X 上的 AP-传递关系，但我们可以先得到如下结论：

3.5 定理。如果 π 不是 PI，则 (T, M_∞) 是 R_π 中的一个 M-动力系统，具有 $\Delta_X \subsetneq M_\infty$ 和 $RP_{\pi|M_\infty} = M_{\infty\infty}$

证明。由于 π 不是 PI，根据 3.3 得 $\mathbb{F}_\infty \nsubseteq \mathbb{A}$，且 $\mathrm{id}_\mathbb{I} \in \mathbb{F}_\infty \cap \mathbb{A}$。因此， $\Delta_X \subsetneq \mathrm{M}_{\infty\infty}$。设 U 和 V 是 M_∞ 中的两个非空开集。存在两个元素 α、 $\gamma \in \mathbb{F}_\infty$，使得 $\mathrm{U} \cap (\pi_X \times \pi_X)\Gamma[\alpha]$、 $\emptyset$，且 $\mathrm{V} \cap (\pi_X \times \pi_X)\Gamma[\gamma]$、 $\emptyset$。由于 $\mathbb{F}_\infty = \mathbb{F}'_\infty$，可知 $(\mathrm{T}, \mathrm{M}_\infty)$ 是拓扑传递的（参见定理 2.2 的证明），因此 $(\mathrm{T},\mathrm{M}_\infty)$ 是一个 M-动力系统，进而 $\mathrm{RP}_{\pi|\mathrm{M}_\infty} = \mathrm{M}_{\infty\infty}$ 证明完毕。 □

因此，鉴于 Bronstein 定理和定理 3.5，若 实数集π 具有一个非极小的 M-子动力系统，则 (T,M_∞) 是 实数集π 中的一个 M-动力系统，且具有 $\Delta_X \subsetneq \mathrm{M}_{\infty\infty}$

3.6 (Ellis-Glasner-Shapiro 塔)。 基于经典的 Ellis-Glasner-Shapiro 结构定理（参见 [20, 25, 46, 2] 和 [24]），对于 $\pi\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$，存在如下极小紧动力系统及 T-扩张的典范 CD：



$$\text{s.t.}\begin{cases}\psi \text{ 有一个 PI 塔},\\ \phi \text{ 是近端的},\\ \pi_\infty \text{ 是 RIC 弱混合的},\\ \mathrm{g}(\mathscr{X}_\infty) = \mathbb{A},\\ \mathrm{g}(\mathscr{Y}_\infty) = \mathbb{AF}_\infty\end{cases}$$

这里 $\mathbb{A}$， $\mathbb{F}$ 如定义3.1 和

$$\mathrm{g}(\mathscr{X}_\infty) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathscr{J}) \mid \pi_{X_\infty} = \pi_{X_\infty} \circ \alpha\}, \quad \mathrm{g}(\mathscr{Y}_\infty) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathscr{J}) \mid \pi_{Y_\infty} = \pi_{Y_\infty} \circ \alpha\}.$$

注意，$(\phi\times\phi)\mathrm{R}_{\pi_\infty} \subsetneq \mathrm{R}_\pi$ 一般成立，因为 ψ 通常不必是近端的，且 π 不必满足 Bronstein 条件。此外， π 是 PI 当且仅当 π_∞ 是 1-1 满射，当且仅当 π_∞ 是近端的，当且仅当 $\mathbb{A} = \mathbb{AF}_\infty$。

3.7 定理。设 $\pi\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 不是 PI。那么 $M_\infty = (\phi \times \phi)R_{\pi_\infty}$， 且 $(\pi_X \times \pi_X)\Gamma[\mathbb{F}_\infty]$ 是 (T, M_∞) 的所有几乎周期点的集合。

证明。由定义 3.4 和 $\mathbb{F}_\infty \subseteq \mathrm{g}(\mathscr{Y}_\infty)$，可得 $M_\infty \subseteq (\phi\times\phi)\mathrm{R}_{\pi_\infty}$。设 $(w, w') \in \mathrm{R}_{\pi_\infty}$ 是一个几乎周期点。由于 π_∞ 满足 Bronstein 条件，且 $(w, w') \in \mathrm{RP}_{\pi_\infty}$，因此根据 [10, 定理 3.1，3] 存在 $\alpha \in (\mathbb{AF}_\infty)' \subseteq \mathbb{AF}_\infty$， 使得 $(w, w') \in (\pi_{X_\infty} \times \pi_{X_\infty})\Gamma[\alpha]$。这意味着 $(\phi\times\phi)(w, w') \in M_\infty$。因此 $M_\infty \supseteq (\phi\times\phi)\mathrm{R}_{\pi_\infty}$， 且 $M_\infty = (\phi\times\phi)\mathrm{R}_{\pi_\infty}$。

设 $(x_1, x_2) \in M_\infty$ 是一个几乎周期点。根据 $M_\infty = (\phi \times \phi)\mathrm{R}_{\pi_\infty}$，我们可以取 R_{π_∞} 中的一个几乎周期点 (w_1, w_2)，使得 $\phi w_1 = x_1$ 且 $\phi w_2 = x_2$。此外，存在元素 $\alpha \in \mathbb{A}$ 和 $\gamma \in \mathbb{F}_\infty$， 使得 $(w_1, w_2) = (\pi_{X_\infty} \times \pi_{X_\infty})(m, \alpha\gamma m) = (\pi_{X_\infty} \times \pi_{X_\infty})(m, \gamma m)$，其中某个 $m \in \mathbb{I}$。因此，由 $\pi_X = \phi \circ \pi_{X_\infty}$可得 $(x_1, x_2) = (\pi_X \times \pi_X)(m, \gamma m)$。证明完毕。 □

3.8 引理（参见 [5, 引理 2.10]， 其中 T 是一个群）。设 $\phi\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 是一个紧动力系统的近端扩张，且 X 有一个稠密的几乎周期点集。那么，当且仅当 $\mathscr{Y}$ 是 M-动力系统时， $\mathscr{X}$ 也是 M-动力系统。

证明。必要性显然。反之，设 $\mathscr{Y}$ 是一个M-动力系统。设K是X中的一个不变闭集，且int K $\neq \emptyset$。我们需要证明K $= X$。反设K $\subsetneq$ X。于是X $\setminus$ K $\neq \emptyset$。由于几乎周期点在X中稠密，因此，对于所有t $\in$ T，都有(X $\setminus$ K) $\cap$ t^{-1}int K $= \emptyset$。显然，L := X $\setminus$ K $=$ X $\setminus$ int K，并且对于每个t $\in$ T，都有t(X $\setminus$ K) $\subseteq$ L。因此，L是X中的一个不变闭集，且int L $\neq \emptyset$， 而K $\cup$ L $=$ X。由于 ϕK $\cup$ ϕL $=$ ϕX $=$ Y， ϕK或 ϕL必有一个在Y中的内部非空，因此由 $\mathscr{Y}$的拓扑传递性， ϕK $=$ Y或 ϕL $=$ Y。

设 ϕK $=$ Y。取x $\in$ X $\setminus$K为一个几乎周期点。于是可以找到x′ $\in$ K，使得 ϕx $=$ ϕx′， 并且(x, x′)是一个几乎周期点。由于 ϕ 是近端的，因此x $=$ x′， 且K $=$ X。若 ϕL $=$ Y，则同理可得L $=$ X，这与L $\cap$ int K $= \emptyset$ 以及int K $\neq \emptyset$相矛盾。因此K $=$ X，且 $\mathscr{X}$是拓扑传递的并且是一个M-动力系统。证明完毕。 □

3.9 引理。设 $\phi\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$是紧动力系统的扩张，且 $\mathscr{Y}$是极小的，设 $\mathscr{N}$是 R_ϕ中的 M-动力系统。那么：

(1) 如果 ϕ 是近端的，那么 N $= \Delta_Z$。

(2) 如果 ϕ 是几乎周期的，那么 $\mathscr{N}$ 是极小的。

证明。 (1) 显然。对于 (2)，我们考虑 θ: $\mathscr{N} \to \mathscr{Y}$，它由 ϕ 规范地诱导而来。于是 $\mathscr{N}$ 是拓扑传递的，且 θ-远离。由 (1.7c)， $\mathscr{N}$ 是极小的。 □

3.10 定理（参见 [8, 44, 24] 关于 (1) $\Leftrightarrow$ (2)）。对于 π: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 以下命题两两等价:

(1) π 是一个 PI扩张。(2) R_π 中的每个 M-动力系统都是极小的。(3) (T, Δ_X) 是包含 Δ_X 于 R_π 中的唯一 M-动力系统。

证明。
(1) $\Rightarrow$ (2): 由 3.3 可知， $\mathscr{X}_\infty \cong \mathscr{Y}_\infty$ 属于 3.6 的 CD。令 $\psi_\infty = \psi \circ \pi_{\infty\circ}$ 设 (T, M) 是 R_π 中的一个 M-动力系统。存在 R_{ψ_∞} 的一个不变闭子集 N，它含有一个稠密的几乎周期点集，使得 $M = (\phi \times \phi)N$。于是由引理 3.8，(T, N) 是 R_{ψ_∞} 中的一个 M-动力系统。由于ψ_∞ 是严格 PI，利用 ψ_∞ 的 PI 塔和引理 3.9 可知 N 是极小的，M 也极小。因此 (1) 蕴含 (2)。

(2) $\Rightarrow$ (3): 显然。

(3) $\Rightarrow$ (1): 这可由定理3.5轻易推出。证明完毕。 □

3.11（Ellis弱混合扩张）。回顾对于 π: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$:

- $\mathscr{X}$ 称为 *Ellis* π-弱混合扩张 的 $\mathscr{Y}$，或简称 π 是 Ellis弱混合 [27, 3]，如果$\mathbb{F} = \mathbb{A}\mathbb{F}'$，其中 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{F}$ 如定义 3.1 中所定义。

众所周知，如果不满足 Bronstein 条件且 Y $\{*\}$，极小紧流的 Ellis弱混合扩张不一定是弱混合扩张（见 [27]）；同样，Ellis弱混合极小紧半流也不一定是弱混合的（见 [10, 例 4.3.2]）。

此外，利用 RIC扩张的规范 Ellis-Glasner-Shapiro构造 [20,25, 46, 2, 10]，我们可以轻易得到如下结果:

3.12 引理。若 π 是 Ellis弱混合非近端的，则它不是 PI，因此在 R_π 中存在非极小典范 M-动力系统 (T, M_∞)。

证明。由于 $\mathbb{A}(\mathbb{A}\mathbb{F}')' = \mathbb{A}\mathbb{F}''$（根据 [25, 引理 X.4.1]），所以 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1\mathbb{A} = \mathbb{F}_2\mathbb{A} = \cdots = \mathbb{F}_\infty\mathbb{A}$。若 π 是 PI，则 $\mathbb{F} = \mathbb{A}$ 和 π 将是近端的，这与假设 π 非近端相矛盾。因此， π 不是 PI。 □

注意，Ellis弱混合的定义与 π_X 和 π_Y 的选择无关。此外，近端极小流是 Ellis弱混合且为 PI（参见 [25, 10]）。

4. 扩张的李-约克混沌、敏感性与渐近几乎周期运动

我们将在 §4.1 中介绍李-约克混沌扩张的定义，在 §4.2 中给出初始条件敏感性的一个充分条件，并在 §4.3 中考察渐近几乎周期运动。

4.1（扩张的李-约克混沌）。设 π: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$是极小紧致度量动力系统的一个非平凡扩张。设 ρ 是 X 上的一个度量。

那么 $(x, x') \in P_\pi$ 当且仅当 $(x, x') \in R_\pi$，且存在一列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 属于 T，使得 $\lim_{n\to\infty}{}^{\rho}(t_n x, t_n x') = 0$。由于 π 非平凡，因此 R_π, Δ_X。回想一下，只要 $T = \mathbb{Z}_+$，且 $(x, x') \in X \times X$，其中 x , x′，我们就称 (x, x′) 是一个李-约克对，当且仅当

$$\liminf_{n\to\infty}\rho(nx, nx') = 0 \quad \text{and} \quad \limsup_{n\to\infty}\rho(nx, nx') > 0.$$

鉴于此，李-约克混沌的定义已推广到群作用；例如参见：[32, 39, 16, 1] 等等。此外，Devaney 混沌蕴含 Li-Yorke 混沌（例如参见 [31]关于 $\mathbb{Z}$-流，[16, 命题 2。21] 以及 [1] 关于T 为阿贝尔群的情形）。现在，我们如下引入极小动力学扩张的李-约克混沌：

4.1a 定义。 设 L 是 $X \times X$ 的一个闭子集，满足 $\Delta_X \subsetneq L \subseteq$ 实数集$_\pi$。

(1) 若 $(x, x') \in X \times X$ 满足 $(x, x') \in$ 实数集$_\pi$ 且 $L \subseteq T(x, x')$，则称其为相对于 L 的~~李-约~~克对。
(2) 若 X 中的集合 S 满足其中任意一对 $(x, x') \in S \times S \setminus \Delta_X$ 都是相对于 L 的李-约克对，则称 S 是相对于 L 的李-约克混杂集。

4.1b 引理。 设 $\mathscr{L} = (T, L)$ 是 R_π中的一个 M-动力系统，并定义 $Trans(\mathscr{L})$ 为如下集合

$$Trans(\mathscr{L}) = \{\tilde{x} \in L \mid \overline{T\tilde{x}} = L\}.$$

若 $\Delta_X \subsetneq L$，则 $Trans(\mathscr{L})$ 中的每个点都是相对于 L 的李-约克对。

由于 $\mathscr{L}$是一个 M-动力系统，且 $\Delta_X \subsetneq L \subseteq$实数集$_\pi$，因此若 $(x, x') \in$ Trans($\mathscr{L}$)，那么使 T x 与 T x′ 充分接近的 $t \in T$ 集合，以及使 T x 与 T x′ 相距甚远的 $t \in T$ 集合都非常大（至少是相对稠密的）。鉴于此，这里的李-约克混沌比经典意义上的混沌强得多。

4.2（对初始条件敏感）。设 $\mathscr{X}$ 是一个动力系统，在本部分中，X 是一个不一定紧致的豪斯多夫一致空间。

4.2定义。 $\mathscr{X}$ 称为 有界，如果对于给定的 $\alpha \in \mathscr{U}_X$，存在一点 $x_0 \in X$ 以及一个紧集 K 属于 T，使得 $\alpha[Kx_0] = X$。如果 $\mathscr{X}$无界，则称其为 无界。

显然，若 (X, ρ) 是一个度量空间，且存在一点 $x_0 \in X$，使得 $\{\rho(x_0, x) \mid x \in X\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中无界，则 $\mathscr{X}$ 无界。此外，我们可以很容易地构造一个能够支持无界逐点几乎周期流的紧致度量空间。因此，我们这里的“无界”条件比 [42, (D_1)] 中针对度量空间提出的条件一般得多。

事实上，

(i). 若 $\mathscr{X}$ 有界且具有稠密的几乎周期点集，则 $\mathscr{X}$ 是拓扑传递的。此外，若 $\mathscr{X}$ 有界，则它是全有界的。

证明。假设这不成立。那么 $\mathscr{X}$ 将是有界的，因此它将是拓扑传递的。事实上，设 U、V 是 X 中非空的开集。那么存在点 $x_0 \in X$ 以及 $s, t \in T$，使得 $sx_0 \in U$ 且 $tx_0 \in V$。此外，存在开集 $W \in N_{x_0}$，使得 $sW \subseteq U$ 且 $tW \subseteq V$。由于几乎周期点在 X 中稠密，我们可以选取一个几乎周期点，记为 x_1, ，它属于 sW，并选取某个 $s_1 \in T$，使得 $s_1 x_1 \in W$。因此 $ts_1x_1 \in V$ 且 $N_T(U, V) \neq \emptyset$。 □

(ii). 设 T 是 σ-紧致的。若 $\mathscr{X}$ 是逐点几乎周期的非极小紧动力系统，则 $\mathscr{X}$ 是无界的。

证明。 如果这不成立，那么 $\mathscr{X}$根据（i）是拓扑传递的，因此， $\mathscr{X}$根据（1.7a）在 §1中将是极小的。 □

4.2b 定义。若存在一个指标 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$，使得对于每个 $x \in X_0$ 以及所有 $U \in N_x(X)$，都存在某个 $y \in U$ 和某个 $t \in T$，满足 $(tx, ty) \notin \varepsilon$，则称 $\mathscr{X}$ 在 X_0, 上对初始条件敏感，其中 $X_0 \subseteq X$。如果 $\mathscr{X}$是拓扑传递的，且“周期点”在 X 中稠密，则称 $\mathscr{X}$是 Devaney 混沌。

则 $\mathscr{X}$敏感当且仅当我们可以找到 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$，使得对于 X 中的每个开集 $U \neq \emptyset$，存在 $x_1, x_2 \in U$ 和 $t \in T$，满足 $(tx_1, tx_2) \notin \varepsilon$。因此，如果 $\mathscr{X}$是敏感的，那么 X 没有孤立点。

4.2c 引理。如果 X_0 在 X 中稠密，且 $\mathscr{X}$ 在 X 上对初始条件敏感$_0$, 那么 $\mathscr{X}$ 在 X 上对初始条件敏感。

证明。显然。 □

4.2d 定理 （参见 [42, 定理 1，定理 1。1] 对于 $T = \mathbb{R}_+$ 或 $\mathbb{Z}_+$ 在 X 为无界度量空间且采用更强的几乎周期点定义时）。设 $\mathscr{X}$为无界 M-流；则 $\mathscr{X}$在 X 上对初始条件敏感。

证明。令 X_0 为 $\mathscr{X}$ 中几乎周期点组成的集合。则 X_0 在 X 中稠密。根据引理 4.2c，只需证明 $\mathscr{X}$ 在 X_0 上对初始条件敏感。假设结论不成立。取 $\alpha, \varepsilon \in \mathscr{U}_X$，满足 $\varepsilon^2 \subseteq \alpha$。那么存在指标 $\delta \in \mathscr{U}_X$ 和一点 $x_0 \in X_0$，使得对所有 $y \in \delta[x_0]$,$(ty, tx_0) \in \varepsilon$，对所有 $t \in T$ 均成立。此外，由于 x_0 在 $\mathscr{X}$ 下是几乎周期点，因此 T 中存在紧集 K，使得 $KN_T(x0, \delta[x_0]) = T$。因此 $T\ \delta[x_0] \subseteq \varepsilon[K\delta[x_0]] \subseteq \varepsilon^2[Kx_0]$ 且 $T\ \delta[x_0] \subseteq \alpha[K\, x_0]$。由于$\mathscr{X}$是拓扑传递的，$X = T\ \delta[x_0]$ 且 $X = \alpha[Kx_0]$。这与 X 无界相矛盾。证毕。 □

需要注意的是， $\mathscr{X}$的无界性对于定理4.2d 至关重要；例如，极小等度连续紧流是非敏感 M-流。

4.2e 推论（参见 [42, 定理 1。2] 对于$T = \mathbb{Z}_+$ 以及 $\mathbb{R}_+$ 且$\mathrm{RE}(\mathscr{X})$ 稠密）。设 $\mathscr{X}$是一个 M-流，其中 X 是完备非紧空间，例如 $X = \mathbb{R}^n$。那么 $\mathscr{X}$在 X 上对初始条件敏感。

证明。首先注意到 $\mathscr{X}$是无界的；否则，X 将是全有界的完备空间，因此X 将是紧致的。于是由定理4.2d， $\mathscr{X}$是敏感的。 □

4.2f. 若点$x \in X$ 在*Birkho*ff 下称为回归点， $\mathscr{X}$ [38, 42, 11] 如果给定 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$，则存在一个紧集 K 属于T，使得$Tx \subseteq \varepsilon[Ktx]$ 对所有$t \in T$。Birkhoff 回归点的集合 $\mathscr{X}$记作$\mathrm{RE}(\mathscr{X})$，属于 [42]。

Birkhoff复返点必定是几乎周期点。事实上，在紧动力系统中，一个点是几乎周期点，当且仅当它是比尔霍夫回归点（参见 [11, 定理 4.1]）；在局部紧度量流中，一个点是几乎周期点，当且仅当它是比尔霍夫回归点（参见 [11, 推论 4.2]）。然而，在局部紧度量半流中，一个几乎周期点不一定是比尔霍夫回归点（反例见 [4, 注 3.15(c)]）。

因此在定理4.2d 中，我们的条件“几乎周期点在 X 中稠密”通常弱于 Seifert 条件“回归点集($\mathscr{X}$) 在 X 中稠密” [42]。

- 设 $\mathscr{X}$为一个流。若 $x \in X$，且给定 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$，存在一个紧集 $L \subseteq T$，使得$\varepsilon[tx] \cap Latx \neq \emptyset$对所有 t、$a \in T$ 都成立，则 $x \in \mathrm{RE}(\mathscr{X})$（参见 [42, p. 1721]，其中 $T = \mathbb{R}_+$和 $\mathbb{Z}_+$）。

证明。设 s ∈ T 且 t ∈ T。取 a ∈ T，使得 s = at，或等价地，t = a^{-1}s。于是 tx ∈ ε[Lsx]。这表明 x ∈ RE($\mathscr{X}$)。 □

因此，x 在 $\mathscr{X}$ 下是比尔霍夫回归的，当且仅当 (T, T x) 是 $\mathscr{X}$ 的弱几乎周期子流（按 Gottschalk [4] 的定义：给定 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$，存在 T 中的紧集 L，使得对所有 y ∈ T x，Lt ∩ N_T(y, ε[y]) ≠ ∅ ∀t ∈ T）。

4.2g. 用 Equi($\mathscr{X}$) 表示 $\mathscr{X}$ 等度连续/T-稳定的点集。也就是说，x ∈ Equi($\mathscr{X}$) 当且仅当对给定的 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$，存在一个成员 U ∈ N_x，使得对所有 t ∈ T 及所有 y ∈ U，(tx, ty) ∈ ε。参见 §2.2.1 中的定义 IV 和定义 a。

4.2h 推论。设 $\mathscr{X}$ 是一个无界拓扑传递流。若 $Equi(\mathscr{X}) \neq \emptyset$，则几乎周期点在 X 中不稠密（因此 $RE(\mathscr{X})$ 在 X 中不稠密，且 $\mathscr{X}$ 不是 M-流）。

证明。 假设结论不成立。那么根据定理 4.2d， $\mathscr{X}$ 在 X 上对初始条件敏感。因此存在一个指标 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$ 使得对于 x ∈ 等度连续集($\mathscr{X}$) 以及 U ∈ $\mathfrak{N}_x$，存在一点 $y \in U$，满足 $(tx, ty) \notin \varepsilon$ 对某个 $t \in T$成立。这与 $\mathscr{X}$ 在 x处的等度连续性矛盾。证明完毕。 □

4.2i 注。 若将“几乎周期”点替换为“Birkhoff ff 回归”点，则定理 4.2d 和推论 4.2h 对 T 为半群时仍然成立。由此，推论 4.2h 与 [42, p. 1725] 中的一个开放问题相冲突。

用“$\mathscr{X}$ 非极小”代替“$\mathscr{X}$ 无界”，通过一种与定理 ff4.2d 的证明不同的论证，并且 [31, 12, 40], 我们可以得出以下结论：

4.2j 定理 (参见 [28] 关于紧 M-动力系统； [6, 31, 12, 40] 关于 Devaney 混沌动力系统）。设 $\mathscr{X}$ 是一个非极小 M-动力系统。那么 $\mathscr{X}$ 在 X 上对初始条件敏感。

证明。由于 X 是正则空间，且 $\mathscr{X}$ 是非极小的，因此存在 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$、$y_0 \in X$ 以及 X 中的一个极小集 M，使得对于所有 $y_1 \in \varepsilon$[M] 和所有 $y_2 \in \varepsilon[y_0]$，$(y_1, y_2) \notin \varepsilon$。取满足$\alpha^2 \subseteq \varepsilon$的 $\alpha \in \mathscr{U}_X$。为证明 $\mathscr{X}$敏感，反设不然。则可选取 $x_0 \in X$ 和 $\delta \in \mathscr{U}_X$，使得若 $y_1, y_2 \in \delta[x_0]$，则对所有 t ∈ T，$(ty_1, ty_2) \in \alpha$。注意到 $N_T(\delta[x_0], \varepsilon$[M]) 在 T 中是相对稠密厚集，而 $N_T(\delta[x_0], \varepsilon[y_0])$ 在 T 中相对稠密，因此可取 s ∈ $N_T(\delta[x_0], \varepsilon$[M]) ∩ $N_T(\delta[x_0], \varepsilon[y_0])$。此外，可选取 $y_1, y_2 \in \delta[x_0]$，使得 $sy_1 \in \varepsilon$[M] 且 $sy_2 \in \varepsilon[y_0]$, ，并且 $(sy_1, sy_2) \in \alpha$，这与对于 $\alpha^2 \subseteq \varepsilon$ 有 $(sy_1, sy_2) \notin \varepsilon$ 矛盾。证毕。 □

4.2k 注记。 由于 X 不一定是局部紧致的，我们不知道无界 M-流是否是非极小的。另一方面，任何非等度连续的极小流都是敏感的。因此，“非极小”并非敏感性的必要条件，而定理 4.2d 不是定理4.2j 的推论。

4.3（渐近几乎周期运动）。本部分中，设 $\mathscr{X}$ 是一个半流，其中 X 是豪斯多夫一致空间。我们首先定义

(i) ω-极限集 ω[x] = {w ∈ X | ∀ U ∈ N_w 且存在 s ∈ T, ∃t ∈ T，使得 tsx ∈ U}。显然，对于 T = $\mathbb{R}_+$ 或 $\mathbb{Z}_+$，w ∈ ω[x] 当且仅当存在 ∃$t_n \to \infty$，使得 t_nx → w。此外，x 的 P-极限集，$P_x = \omega$[x], ，对于 P = T。若 T 是群，则 ω[x] = T x 不会提供任何新信息。(ii) AAP($\mathscr{X}$) = {x ∈ X | ∃存在一个几乎周期点 y，使得 ∀$\varepsilon \in \mathscr{U}_X$, ∃s ∈ T 满足 (tsx, tsy) ∈ ε ∀t ∈ T}。显然，对于 T = $\mathbb{R}_+$ 或 $\mathbb{Z}_+$，且 (X, ρ) 是度量空间，x ∈ AAP($\mathscr{X}$) 当且仅当存在一个几乎周期点 y，使得 $\rho(tx, ty) \to 0$ 当 $t \to \infty$。

我们称渐近几乎周期($\mathscr{X}$)为渐近几乎周期点 $\mathscr{X}$。根据4.2f，这等价于 Seifert [41, (iv)] 在紧致ambit下所定义的概念。

4.3a 引理。设 T 满足：对每个有限集 F $\subset$T，$\bigcap_{s\in F} Ts \neq \emptyset$。若 x $\in$X 且 T x 紧致，则 $\omega[x], \emptyset$ 是紧致不变集。

证明。由 $\omega[x] = \bigcap_{s\in T} Tsx$ 及紧致性，容易得出 $\omega[x], \emptyset$ 是紧致的。不变性显然。 □

4.3b 定理。设 T 满足：对每个有限集 F $\subset$T，$\bigcap_{s\in F} Ts \neq \emptyset$。设 x $\in$X，满足 T x 紧致且 $\omega[x] \subseteq Equi(\mathscr{X})$。则 (T, ω[x]) 是 $\mathscr{X}$,$\omega[x] \subseteq RE(\mathscr{X})$ 的极小子半流，且 x $\in AAP(\mathscr{X})$。此外，若 T 是一个可 amenable 半群，则 (T, ω[x]) 是 $\mathscr{X}$ 的几乎周期子动力系统。

证明。由引理 4.3a，$\omega[x]$ 是 X 的一个非空紧致不变子集。设 M 是 ω[x]的一个极小子集。若 $M \neq \omega[x],$，则可取一点 w $\in \omega[x] \setminus M$。此外，存在一个指标 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$ 使得 $\varepsilon[w] \cap \varepsilon[M] = \emptyset$。令 y $\in$M。取 U $\in N_y$，使得 U $\subset \varepsilon[M]$，并且若 sx $\in$U，则对所有 t $\in$T，都有 tsx $\in \varepsilon[M]$。这与 w $\in \omega[x]$矛盾。因此，$\omega[x]$ 是 X 中的一个极小集。这也表明 $\omega[x] \subseteq$ RE($\mathscr{X}$)。

现在我们将证明 x $\in$ AAP($\mathscr{X}$)。根据 Auslander-Ellis 的一个定理（例如参见 [23,定理 8.7]），可找到一点 y $\in \omega[x]$，使得 x 与 y 近端。令 $\varepsilon \in \mathscr{U}_X$。这里注意，由于 $\omega[x] \subseteq$ Equi($\mathscr{X}$)是紧致的，存在一个指标 $\delta \in \mathscr{U}_X$，使得若 (z, w) $\in \delta$且 w $\in \omega[x]$，则对所有 t $\in$T，都有 (tz, tw) $\in \varepsilon$。现在，我们可以取某个 s $\in$T，使得 (sx, sy) $\in \delta$，进而对所有 t $\in$T，都有 (tsx, tsy) $\in \varepsilon$。因此 x $\in$AAP($\mathscr{X}$)。

最后，若 T 是一个可 amenable 半群，则由 [4, 定理 1.15] 可知，(T, ω[x]) 是 $\mathscr{X}$ 的一个几乎周期子动力系统。证明完毕。 □

4.3c 推论（参见 [41, 定理 1]，当 d = 1时）。设 T = $\mathbb{R}^d_+$ 或 $\mathbb{Z}^d_+$，其中 d $\geq$ 1；设 Tx 紧致，且 $\omega[x] \subseteq Equi(\mathscr{X})$。则 x $\in AAP(\mathscr{X})$，$\omega[x] \subset RE(\mathscr{X})$，且 (T, ω[x]) 是 $\mathscr{X}$ 的一个几乎周期子半流。

证明。显然，$\mathbb{R}^d_+$ 和 $\mathbb{Z}^d_+$ 都满足引理4.3a 的条件（见下文备注4.3g）。于是定理4.3b 由推论 4.3c 得出。 □

4.3d 推论。设 x $\in$X，使得

(1) $\omega[x], \emptyset$ 是紧致的，且对所有 y $\in \omega[x]$，都有 $\omega[y] = \omega[x]$；(2) $\omega[x] \cap Equi(\mathscr{X}) \neq \emptyset$。

那么 x $\in AAP(\mathscr{X})$。

证明。由条件 (1)，$\omega[x]$ 是 $\mathscr{X}$ 的一个紧致极小集。由条件 (2) 可知，$\omega[x] \subseteq$ 是等度连续集($\mathscr{X}$)。现在利用定理 4.3b，可得 $x \in$ 渐近几乎周期($\mathscr{X}$)。 □

4.3e 备注(参见 [41, 引理 1] 关于 $T = \mathbb{R}_+$)。在定理4.3b 中，若 T 是可 amenable 半群，则对于 $x \in$ 渐近几乎周期($\mathscr{X}$)，定义 4.3(ii) 中相应的跟踪几乎周期运动是唯一的。4.3(ii) is unique.

证明。假设结论不成立。那么存在两个不同的点 $y_1, y_2 \in \omega[x]$，使得对每个$\varepsilon \in \mathscr{U}_X$，都存在 $s_1, s_2 \in$T，使得 $(ts_ix, ts_iy_i) \in \varepsilon \ \forall t \in$T，$i = 1, 2$。由 T $s_1 \cap$T $s_2 \neq \emptyset$对所有 $s_1, s_2 \in$T，可知 y_1 在 $\mathscr{X}$下近端于 y_2。然而，由于 $y_1, y_2 \in \omega[x]$ 且 (T, ω[x]) 是几乎周期的，因此 (y_1, y_2) 在 $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$下是几乎周期的，从而 $y_1 = y_2$。证明完毕。 □

需要指出的是，此处的唯一性证明比 Seifert 对特殊情形 $T = \mathbb{R}_+$ 且 X 是完备度量空间 [41, 引理 1] 中的证明简单得多。在那里，Seifert 需要使用 $y_1, y_2 \in$ 回归点集$(\mathscr{X})$，而不是我们这里的“近端性”论证。

4.3f 注记。回顾一下，拓扑半群 T 被称为“C-半群” [33]，如果 $T \setminus Ts$ 对所有 $s \in T$ 都是紧致的。例如，（$\mathbb{R}_+$，+）和（$\mathbb{Z}_+$，+）都是 C-半群。那么：

• 如果 T 是非紧致C-半群，那么对所有 $n \geq 2$ 以及 $s_1, \ldots\ldots, s_n \in T$，都有 $\bigcap_{i=1}^{n} T s_i \neq \emptyset$。

证明。设 $n \geq 2$ 且 $s_1, \ldots\ldots, s_n \in T$。若 $\bigcap_{i=1}^{n} T s_i = \emptyset$，则 $(T \setminus T s_1) \cup \cdots \cup (T \setminus T s_n) = T$，从而 T 是紧致的，这与假设矛盾。因此 $\bigcap_{i=1}^{n} T s_i \neq \emptyset$。 □

4.3g 注记。设 $T = \mathbb{R}_+^d$ 和 $\mathbb{Z}_+^d$，其中 $d \geq 1$ 为一个整数。那么对所有 $n \geq 2$ 以及 $s_1, \ldots\ldots, s_n \in T$，都有 $\bigcap_{i=1}^{n} (T + s_i) \neq \emptyset$。

证明。给定 $n \geq 2$，令 $K = \{o, s_1, \ldots, s_n\}$，它是 G 的一个紧子集，其中 $G = \mathbb{R}^d$ or $\mathbb{Z}^d$，且 $o = (0, \ldots, 0)$。注意到 T 是 G 中的一个厚半群。由引理 2.7a 可知，$\bigcap_{i=1}^{n} (T + s_i)$ 是 G 中的一个厚集，因此 $\bigcap_{i=1}^{n} (T + s_i) \neq \emptyset$。证明完毕。 □

5. 非 PI 扩张的李-约克混沌

若 $\pi\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 是极小紧流的一个非 PI 扩张，则可以定义一个典范的 M-流（T，M_∞），使得 $\Delta_X \subsetneq M_\infty \subseteq R_\pi$ 如定义 3.4 所述（见 §3）。此外，M_∞ 已由定理 3.7描述。因此，我们可以将本节的主要结果陈述如下：

5.1 定理。设 $\pi\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 是极小紧致度量流的一个非 PI 扩张。那么存在一个余集 Y_{LY}，包含于 Y 中，使得对于每个 $y \in Y_{LY}$，以及泛型的 $x \in \pi^{-1}y$，都存在一个余集 S [，包含于] x M_∞ [中，满足：对于每个 $x' \in S[x]$，(x, x') 是关于 π rel. M_∞ 的李 - 约克对。

回忆一下，如果一个映射作用于每个非空开集后，其像都包含一个非空开集，则称该映射为半开。若 $\phi\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 是紧流的一个扩张，其中 Y 是极小的，且 X 有一个由几乎周期点组成的稠密集，则 ϕ 是半开的（[9, 引理 3.12.15]，[2, 定理 1.15]）。

为了证明定理 5.1，我们需要两个辅助引理。第一个是前述半开性定理的一个特例。

5.2 引理。设 $\pi\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 是紧流的扩张，且 Y 极小。若 (T, L) 是 R_π 中的 M-流，则由 $(x, x') \mapsto \pi x$ 定义的 p: L → Y 是半开满射。

5.3 引理（一个拓扑版“Fubini 定理”；其他版本参见 [45, 命题 3.1], [26, 引理 5.2] ）。设 ϕ: W → Z 是波兰空间之间的半开连续满射。假设 K 是 W 的一个余集。令 $Z_K = \{z \in Z \mid K \cap \phi^{-1}z$ 是 $\phi^{-1}z\}$ 的一个余集。则 Z_K 在 Z 中余稠。

证明。由于 K 在 W 中是余稠密的，因此存在一列 W 中的闭无处稠密集 $F_1, F_2, \ldots$，使得 $W \setminus K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$。令 $K_z = K \cap \phi^{-1}z$ 对所有 $z \in Z$ 成立，并注意到

$$\phi^{-1}z \setminus K_z \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (F_i \cap \phi^{-1}z).$$

现在令

$$B = \{z \in Z \mid \exists i \geq 1 \text{ s.t. } \mathrm{int}_{\phi^{-1}z}(F_i \cap \phi^{-1}z) \neq \emptyset\}.$$

因此，若 z ∉ B，则 K_z 在 ϕ^{-1}z 中显然是余稠密的。因此 Z \Z_K ⊆ B。于是只需证明 B 是第一纲集。

设 $U_1, U_2, \ldots$ 是 W 上拓扑的一个基。若 z ∈B，则存在整数 m 和 i，使得 ∅ , $U_m \cap \phi^{-1}$z ⊆ F_i。令

$$C_{mi} = \{z \in B \mid \emptyset \neq U_m \cap \phi^{-1}z \subseteq F_i\} \quad \text{for } 1 \leq m, i < \infty.$$

于是 B = $\bigcup^{\infty}_{m,i=1} C_{mi}$ ，并且若每个集合 C_{mi} 在 Z 中都无处稠密，则 B 是 Z 中的第一纲集。

令 D_{mi} = $\mathrm{int}_Z \mathrm{cls}_Z C_{mi}$，并假设对于某两个正整数 m、i，有 D_{mi} , ∅ 。由于 $C_{mi} \cap D_{mi}$, ∅，且当 z ∈ $C_{mi} \cap D_{mi}$ 时，$U_m \cap \phi^{-1}$z ∅ ，因此集合

$$F := U_m \cap \phi^{-1} D_{mi}$$

是一个非空开子集，属于U_m。我们将证明$F \subseteq F_i$，与F_i 无处稠密相矛盾，则引理5.3 即可得证。

由于 W_o = {w ∈W | ϕ 在 w}处是开集，且 ϕ 是半开集，而 W 是波兰空间，因此 W_o 是 W 的余集。事实上，设 G_n = {x | x ∈W，使得 x ∈$B^{1/n}$(x) ∩ $\phi^{-1}\mathrm{int}_W \phi B^{1/n}$(x)} 对 n = 1, 2, . . . 成立；则 G_n 是 W 中的开稠密集，并且 W^o = $\bigcap_n$ G $_n$。

现在令 F_o = F ∩W_o。那么 F_o 在 F 中稠密。若 w ∈ F_o 且 z = ϕw ∈ C_{mi}，则根据定义，w ∈ $U_m \cap \phi^{-1}$ z ⊆ F_i。现在设 w ∈ F_o ，但 z = ϕw ∉ C_{mi}。那么至少有 z ∈ $\mathrm{cls}_Z C_{mi}$，或者 z = $\lim_{n\to\infty} z_n$, z_n ∈ C_{mi}。因此存在一个序列 $w_n \to$ w，属于 F，且对所有 n 都有 $\phi w_n = z_n$ 。最终，$w_n \in U_m$，并且由于 $z_n \in C_{mi}$，对所有 n 都有 $w_n \in F_i$ 。因此 w ∈ F_i = F_i ，且 $F_o \subseteq F_i$。由于 F_i 是闭集，且 F_o 在 F 中稠密，所以 F ⊆ F_i。 证明完毕。 □

这里需要注意的是，与 Veech [45, 命题 3.1] 和 Glasner [26, 引理 5.2], 相比，引理 5.3 的要点在于 W 不必是一个 极小 流。此外，由引理 5.3，我们可以得出以下有用结果:

推论（[31, 引理 3.2]）。设 E 是一个波兰空间，R 是 E 上的一个关系，且 R 包含 E ×E 的一个余集。那么存在 E 的一个余集 A，使得对所有 x ∈A，都存在 E 的一个余集 K_x ，满足 {x} × K_x ⊂ R。

定理 5.1 的证明。由于 $\mathscr{M}_\infty$:= (T, M_∞) 根据定理 3.5 是拓扑传递的，且 M_∞ 是一个紧致度量空间，因此 Trans($\mathscr{M}_\infty$) 在 M_∞中是余稠密的。根据引理 4.1b，Trans($\mathscr{M}_\infty$) 中的每个点都是 π rel. M_∞ 的一个李-约克对。令 λ: $\mathscr{M}_\infty \to \mathscr{X}$ 由 (x, x′) ↦ x 定义。显然， λ 是流的一个扩张。由于根据引理 5.2， λ: $M_\infty \to$ X 是半开满射，根据引理 5.3，存在 X 中的一个余集 X_{LY} ，使得对每个 x ∈X_{LY}，集合 S [x] = {x′ ∈X | (x, x′) ∈Trans($\mathscr{M}_\infty$)} 在 λ^{-1}x = M_∞[x] 中是相对余稠密的。此外，由于 π: X →Y 是半开满射，根据引理 5.3，存在 Y 中的一个余集 Y_{LY} ，使得对每个 y ∈Y_{LY}，集合 π^{-1}y ∩ X_{LY} 在 π^{-1}y 中是相对余稠密的。证毕。 □

引理 5.4（参见 [31, 引理 3.1], 适用于没有孤立点且 R ⊂E × E 的情形）。设 E 是一个波兰空间。设 R ⊂E × E \ Δ_E 是 E 上的一个对称关系，并具有如下性质：存在 E 的一个余集 A，使得对每个 a ∈ A，R[a] 都包含 E 的一个余集。则存在 E 的一个稠密不可数子集 B，使得 B ⊆A 且 B × B \ Δ_E ⊆R。

证明。令 B 表示 E 的稠密子集 B 的族，满足 $B\times B\setminus\Delta_E\subseteq R$ 且 $B\subseteq A$。显然，$B\neq\emptyset$。事实上，若 $B\subset A$ 至多可数，且满足 $B\times B\setminus\Delta\subseteq R$，并且 B, E，那么存在一个元素 $x\in A\cap\overline{(E\setminus B)\cap\left(\bigcap_{b\in B}R[b]\right)}$。因此 $B_1=B\cup\{x\}\subset A$，使得 $B_1\times B_1\setminus\Delta_E\subseteq R$。于是通过归纳，我们可以找到 A 的一个子集，它属于 B。

现在，由佐恩引理可知，存在一个极大元 B 属于（$\mathfrak{B}$，$\subseteq$）。那么 B 是不可数的。否则，我们可以选取一个元素 $x\in A\cap\left(\bigcap_{b\in B}R[b]\right)$ 使得 $B\cup\{x\}\in\mathfrak{B}$，这与 B 是 $\mathfrak{B}$ 中的极大元矛盾。这就证明了引理5.4。□

定理5.1 是命题 [16, 321]的一个扩张。事实上，在上述论证中用实数集 π 代替 M_∞，我们可以得到如下结论：

5.5 定理。设 π：$\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 是度量流的一个非平凡扩张，且Y是极小的。假设 R_π 有一个由几乎周期点组成的稠密集，且 π 是弱混合的。那么，存在Y中的一个余集 Y_{LY}，使得对每个 $y\in Y_{LY}$，$\pi^{-1}y$ 都没有孤立点，并且其中包含一个相对稠密的不可数李-约克混沌集，该集合是 π rel. R_π。

证明。注意，$\mathscr{R}_\pi$ 是一个 M-流，且 R_π, Δ_X。令 $S=\mathrm{Trans}(\mathscr{R}_\pi)$。那么 S 是 X 上的对称关系，满足 $S\cap\Delta_X=\emptyset$，并且它在 R_π 中是余稠密的。对映射 $R_\pi\xrightarrow{(x,x')\mapsto\pi x}Y$ 和 $\pi^{-1}y\times\pi^{-1}y\xrightarrow{(x,x')\mapsto x}\pi^{-1}y$ 应用引理 5.3，可得 Y_{LY} 中存在一个余集，使得对所有 $y\in Y_{LY}$，$\pi^{-1}y$ 都包含一个相对余稠密集 $(\pi^{-1}y)_{LY}$，并且对于 $x\in(\pi^{-1}y)_{LY}$，集合 $S[x]$ 在 $\pi^{-1}y$ 中相对余稠密。

给定 $y\in Y_{LY}$，令 $E=\pi^{-1}y$，且 $R=S\cap E\times E$。那么 R 是 E 上的对称关系，且 $R\cap\Delta_E=\emptyset$。如果 E 有一个（相对）孤立点 x_0，，那么 $x_0\in(\pi^{-1}y)_{LY}$ 且 $x_0\in S[x_0]$，因此 (x_0, x_0) 是 $\mathscr{R}_\pi$的传递点。这与 R_π, Δ_X矛盾。这说明 E 没有孤立点。令 $A=(\pi^{-1}y)_{LY}$。那么根据引理 5.4，E 中存在一个稠密不可数子集 B，使得只要 $x, x'\in B$ 且 x, x'，就有 $(x, x')\in R$。

显然，对于所有的 $y\in Y_{LY}$，$B\subseteq\pi^{-1}y$ 是关于 π rel. R_π 的李-约克混杂集。证明完毕。□

因此，如果 π: $\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 是极小度量流的非平凡 Bronstein 扩张，且 π没有非平凡的等度连续因子，那么 π 按照定理 5.5(即，存在一个余集 Y_{LY}，位于 Y中）。

由定理 3.7 和定理 5.5可知，若 Y_{LY} 由定理5.1定义，则对于所有 $y\in Y_{LY}$，在 $\pi^{-1}y$ 中存在一个不可数的李-约克混杂集，其相对于 π rel. M_∞而言成立。当 Y 是单点集时，定理 π 中的 Bronstein 条件 5.5 可按如下方式删除：

5.6 命题（参见 [16, 命题 3.11]）。设 $\mathscr{X}$ 是一个弱混合、非平凡的度量动力系统。则 $\mathscr{X}$ 有一个稠密的不可数李-约克混杂集（对于 $\pi: X\to\{*\}$），相对于 $X\times X$。

证明。由于 $X\times X$ 是一个紧致度量空间，$R:=\mathrm{Trans}(\mathscr{X}\times\mathscr{X})$ 在 $X\times X$ 中是余稠密的，因此 $R\cap\Delta_X=\emptyset$。此外，由于 $X\times X\to X$ 由 $(x, x')\mapsto x$ 定义且是一个开满射，根据引理 5.3 和引理 5.4，存在 X 中的稠密不可数集 B，使得若 $x, x'\in B$ 且 x, x'，则 $T(x, x')=X\times X$。由于 $X\to\{*\}, \Delta_X$，$X\times X$ 且 B 是$\pi: X\to\{*\}$ rel. $X\times$ 的李-约克混杂集。证明完毕。□

5.7 命题。设 π: $\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 是极小紧致度量流的非平凡扩张。假设 π 是 Ellis 弱混合且非近端的。那么存在一个余集 Y_{LY} in Y，使得对每个 $y\in Y_{LY}, \pi^{-1}y$ 都包含一个关于 π rel. M_∞ 的不可数李-约克混沌集。

证明。 这可由定理 5.5 和引理3.12得出。 □

注意，如果 $\mathscr{X}$ 是 Ellis 弱混合极小流，那么它是弱混合的（参见 [27, 3]）。然而，即使 $\mathscr{X}$ 是弱混合的，一般来说 $M_\infty \subsetneq X \times X$。

6。M-流不一定是点传递的，且例 子

如果 $\mathscr{X}$ 是一个M-动力系统，那么它是相对稠密传递的；也就是说，对于X中任意非空开集U、V，$N_T(U, V)$是T中的相对稠密集。众所周知，如果X不可分，那么拓扑传递流未必是点传递的（参见[17, 例4.17]）。事实上，M-流也未必是点传递的。

6.1 例。令$X = Y^T$ 为所有函数$f : T \to Y$组成的空间，其中函数可以连续，也可以不连续；该空间赋予逐点收敛拓扑。这里Y是一个紧豪斯多夫空间，T是一个以单位元e为单位元的无限离散群。因此，X是一个紧豪斯多夫空间。给定$t \in T$和$f \in X$，定义$f^t : T \to Y$为 $\tau \mapsto f(\tau t)$。现在，我们在X上定义相位群为T的右平移流 $\mathscr{X}$如下：$T \times X \to X$，$(t, f) \mapsto t f := f^t$。于是：

(1) $\mathscr{X}$ 是相对稠密传递且厚传递的。

证明。对于 Y 中任意非空开子集 U、V 以及 $\tau_1, \ldots, \tau_n, s_1, \ldots, s_n$ in T，令

$$\mathcal{U} = [\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}, U] = \{f \in X \mid f(\tau_i) \in U, i = 1, \ldots, n\}$$
$$\mathcal{V} = [\{s_1, \ldots, s_n\}, V].$$

Let

$$T_0 = \left\{s_i^{-1}\tau_j \mid i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n\right\} \cup \left\{s_i^{-1}s_j \mid i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n\right\}$$

and

$$T_1 = T \setminus T_0.$$

由于 T 是无限离散群，且 T_0 是有限集，因此很容易验证 T_1 在 T 中既相对稠密又是厚集。事实上，若 $K = \{e\} \cup t_0 T_0^{-1}$for some $t_0 \in T_1$, then $Kt \cap T1 , \emptyset$for all $t \in T = T_0 \cup T_1$，则 T_1在 T 中相对稠密。若 F 是 T 的任意有限子集，则存在某个 $t \in T$，使得 $Ft \subseteq T_1$；否则，存在 $k \in F$ 以及 T 中的 t、s，使得 $kt, ks \in T_0$ 且 $kt = ks$，因此 $t = s$。

因此，对于所有 $t \in T_1$,，我们都有 $\{s_1t, \ldots, s_nt\} \cap \{\tau_1, \ldots, \tau_n, s_1, \ldots, s_n\} = \emptyset$。现在选取 $f \in X$，使得 $f(\tau_i) \in U$ 且 $f(s_it) \in V$，其中 $1 \le i \le n$。因此 $f \in \mathcal{U}$且 $f_t \in \mathcal{V}$，从而 $N_T(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \supseteq T_1$。这就证明了我们的断言。 □

由于 T 的每个相对稠密子集都与 T 的每个厚子集有非空交，因此我们实际上得出了以下事实：

(2) $\mathscr{X}$ 是弱混合的。

(3) 设 Y 是不可分空间，T 是可数离散群。那么 $\mathscr{X}$ 不是点传递的，即，$Trans(\mathscr{X}) = \emptyset$；并且，$Equi(\mathscr{X}) = \emptyset$。

证明。首先，X 没有可数稠密子集。由于 X 不可分且 T 可数，$\mathscr{X}$不是点传递的。由于 $\mathscr{X}$ 是拓扑传递的，等度连续集$(\mathscr{X}) \subseteq \mathrm{Trans}(\mathscr{X}) = \emptyset$。 □

(4) 设$T = \mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{R}$，且 $e = 0$，则 $\mathscr{X}$是一个 M-流。

˜证明。设 $f \in X$ 且 $k > 1$。定义周期函数 $f : T \to Y$，其周期为 $2k + 1$，使得 $\tilde{f}(t) = f(t)$ 对于 $-k \le t \le k$ 成立。因此，X 有一个稠密周期点集，并且根据 (1)，$\mathscr{X}$ 是一个 M-流。□

此外，事实上我们已经得出以下结论：

(5) 设 $T = \mathbb{Z}$ or $\mathbb{R}$ with $e = 0$，则 $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$ 是一个 M-流。

这里 $\mathbb{R}$ 被视为一个离散群。这就完成了例6.1的构造。

我们注意到，即使 X 是一个紧致度量空间，点传递半流一般也未必是拓扑传递（T.T.）。下面来看一个简单的反例。

6.2 例。设 $T = \mathbb{Q}_+$ 为非负有理数加法半群，并设 $X = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ 配备通常的一点紧化拓扑。定义如下紧致半流 $\mathscr{X}$：$T \times X \to X$，$(t, x) \mapsto t + x$。显然，$\mathrm{Trans}(\mathscr{X}) = \{0\}$，因此 $\mathscr{X}$ 是点传递的。但 $\mathscr{X}$ 不是拓扑传递（T.T.），因为 $\mathrm{Trans}(\mathscr{X})$ 不是 X 中的稠密 G_δ-子集。事实上，对于 X 的开子集 $U = (10, 12)$ 和 $V = (5, 6)$，我们有 $N_T(U, V) = \emptyset$。

6.3 示例。设 $\mathbb{k} \ge 2$ 是一个整数，且 $\mathbb{Z}_\mathbb{k} = \mathbb{Z}/\mathbb{k}\mathbb{Z}$ 赋予离散拓扑。设 Γ 是一个无限集，φ：$\Gamma \to \Gamma$ 是一个函数，且 $w = (w_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \mathbb{Z}_\mathbb{k}^\Gamma$ 满足 $w_\gamma \ne 0$。那么我们将考虑由 φ 和 w 诱导的“加权移位”：

$$\sigma : \mathbb{Z}_\mathbb{k}^\Gamma \to \mathbb{Z}_\mathbb{k}^\Gamma, \quad x = (x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \mapsto \sigma x = (w_\gamma x_{\varphi\gamma})_{\gamma\in\Gamma}, \text{ i.e., } \sigma x_\gamma = w_\gamma x_{\varphi\gamma}\ \forall \gamma \in \Gamma.$$

参见 [43]。相空间 $\mathbb{Z}_\mathbb{k}^\Gamma$ 赋予积拓扑。经典情形是 $\Gamma = \mathbb{Z}_+$ 或 $\mathbb{Z}$，$w_\gamma \equiv 1$，且 φ：$\gamma \mapsto \gamma + 1$（参见示例 6.1）。注意

$$\sigma^n x_\gamma = w_\gamma \cdots w_{\varphi^{n-1}\gamma} x_{\varphi^n\gamma} \quad \forall x \in \mathbb{Z}_\mathbb{k}^\Gamma, \gamma \in \Gamma \text{ and } n \ge 1.$$

若元素 $k \in \mathbb{Z}_\mathbb{k}$ 满足存在 $\mathbb{Z}_\mathbb{k}$ 中的一个元素（记为 k^{-1}），使得 $kk^{-1} = 1 \pmod{\mathbb{k}}$，则称其为“可逆”。例如，$2^{-1} = 3$ 和 $3^{-1} = 2$ 属于 $\mathbb{Z}_5$。若对于所有 $\gamma \in \Gamma$，$w \in \mathbb{Z}_\mathbb{k}^\Gamma$ 中的 w_γ 均可逆，则称 $w \in \mathbb{Z}_\mathbb{k}^\Gamma$ 为“可逆”。若对某个整数 $\tau \ge 1$，$\varphi^\tau\gamma = \gamma$，则称点 $\gamma \in \Gamma$ 在 (φ, Γ) 作用下是“周期点”，记作 $\gamma \in \mathrm{Per}(\varphi)$。我们用 $\mathrm{Per}(\sigma)$ 表示 $(\sigma, \mathbb{Z}_\mathbb{k}^\Gamma)$ 作用下周期点的集合。

6.3一个引理(参见 [43, 定理 4。1] 证明过程较为复杂)。设 φ：$\Gamma \to \Gamma$ 是一一映射，且令 w 可逆。则：

(1) σ：$\mathbb{Z}_\mathbb{k}^\Gamma \to \mathbb{Z}_\mathbb{k}^\Gamma$ 是连续满射。

(2) $\mathrm{Per}(\sigma)$ 在 $\mathbb{Z}_\mathbb{k}^\Gamma$ 中稠密。

证明。

(1)：连续性显然。现在设 $y = (y_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \mathbb{Z}_\mathbb{k}^\Gamma$。若 $\gamma \notin \varphi(\Gamma)$，令 $x_\gamma = 0$；若 $\alpha \in \Gamma$ 且 $\gamma = \varphi\alpha$，令 $x_\gamma = w_\alpha^{-1} y_\alpha$。则存在 $x = (x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \mathbb{Z}_\mathbb{k}^\Gamma$，使得 $\sigma x = y$。

(2)：设 $z = (z_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \mathbb{Z}_\mathbb{k}^\Gamma$，并令 γ_1、……、$\gamma_n \in \Gamma$ 两两不同。只需证明 z 的既开又闭柱邻域中存在一个 σ-周期点：

$$U := [z_{\gamma_1}]_{\gamma_1} \cap \cdots \cap [z_{\gamma_n}]_{\gamma_n} = \{x = (x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \mid x_{\gamma_1} = z_{\gamma_1}, \ldots, x_{\gamma_n} = z_{\gamma_n}\}.$$

由于 φ 是一一映射，因此不失一般性，只需考虑以下特殊情形：$n = 4$，且 γ_1 是 φ 的周期点，而 γ_2、γ_3、γ_4 是非周期点，并且存在某个整数 $m \ge 1$

使得 $\{\gamma_3, \varphi\gamma_3, \ldots\ldots, \varphi^m\gamma_3 = \gamma_2, \varphi^{m+1}\gamma_3 = \varphi\gamma_2, \varphi^{m+2}\gamma_3 = \varphi^2\gamma_2, \ldots\ldots \varphi^{m+3}\gamma_3 = \varphi^3\gamma_2$ 与 $\}\ldots\ldots$ $\{\gamma_4, \varphi\gamma_4, \varphi^2\gamma_4,$ 没有共同元素，因为其他情形也可用类似方法证明。

注意，$r \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ 可逆，当且仅当存在一个整数 $l \geq 1$，使得 $r^{\ell} = 1$ （模 $\mathbb{K}$）.[1] 那么我们可以找到一个整数 τ 使得

$$\tau \geq m+1, \quad \varphi^{\tau}\gamma_1 = \gamma_1, \quad w_{\varphi^{\tau-1}\gamma_1} \cdots w_{\gamma_1} = 1.$$

设 $\Gamma_0 = \{\gamma_1, \ldots\ldots, \varphi^{\tau-1}\gamma_1\} \cup \{\varphi^{i\tau}\gamma_j \mid j = 2, 3, 4; i \geq 0\}$。现在我们如下定义一个点 $x = (x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \mathbb{Z}^{\Gamma}_{\mathbb{K}}$：

(a) $x_\gamma = z_\gamma$，对于 $\gamma \in \{\gamma_1, \varphi\gamma_1, \ldots\ldots, \varphi^{\tau-1}\gamma_1\}$；(b) $x_{\gamma_2} = z_{\gamma_2}$，且 $x_{\varphi^{i\tau}\gamma_2} = (w_{\varphi^{i\tau-1}\gamma_2} \cdots w_{\gamma_2})^{-1} z_{\gamma_2}$，对于 $i = 1, 2, \ldots\ldots$；(c) $x_{\gamma_3} = z_{\gamma_3}$，且 $x_{\varphi^{i\tau}\gamma_3} = (w_{\varphi^{i\tau-1}\gamma_3} \cdots w_{\gamma_3})^{-1} z_{\gamma_3}$，对于 $i = 1, 2, \ldots\ldots$；(d) $x_{\gamma_4} = z_{\gamma_4}$，且 $x_{\varphi^{i\tau}\gamma_4} = (w_{\varphi^{i\tau-1}\gamma_4} \cdots w_{\gamma_4})^{-1} z_{\gamma_4}$，对于 $i = 1, 2, \ldots\ldots$；(e) 若 $\gamma \notin \Gamma_0$，使得 $\varphi^{\tau}\gamma = \gamma_j$ 对某个 $j = 2, 3, 4$ 成立，则 $x_\gamma = (w_{\varphi^{\tau-1}\gamma} \cdots w_\gamma)^{-1} z_{\gamma_j}$；(f) 对于 Γ 中其他的 γ，$x_\gamma = 0$。

显然，$\sigma^{\tau}x = x$ 且 $x \in U$。证明完毕。 □

6.3b 定理 (参见 [43, 定理 5.2] 用于证明 $(\sigma, \mathbb{Z}^{\Gamma})$ 是拓扑传递)。设 $\varphi: \Gamma \to \Gamma$ 是一一映射，且没有周期点；设 w 可逆。那么 $(\sigma, \mathbb{Z}^{\Gamma})$ 作为一个 $\mathbb{Z}_+$-半流是弱混合的；并且此外，$(\sigma, \mathbb{Z}^{\Gamma} \times \mathbb{Z}^{\Gamma})$ 是 Devaney 混沌的（拓扑传递且具有稠密周期点集）。

证明。设

$$U_1 = [k_1]_{\gamma_1} \cap \cdots \cap [k_n]_{\gamma_n}, \quad U_2 = [i_1]_{\alpha_1} \cap \cdots \cap [i_n]_{\alpha_n},$$

and

$$V_1 = [j_1]_{\delta_1} \cap \cdots \cap [j_m]_{\delta_m}, \quad V_2 = [\ell_1]_{\lambda_1} \cap \cdots \cap [\ell_m]_{\lambda_m}$$

是 $\mathbb{Z}^{\Gamma}$ 的柱集。为证明 $(\sigma, \mathbb{Z}^{\Gamma})$ 弱混合，只需证明存在 $_{\mathbb{K}}$ 一个整数 $\tau > 0$，使得 $\sigma^{\tau}(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset$。注意到，由于 φ 是一一映射且没有周期点，存在一个整数 $\tau \geq 1$，使得

$$\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \cap \left(\{\varphi^i\delta_j \mid i \geq \tau, 1 \leq j \leq m\} \cup \{\varphi^i\lambda_j \mid i \geq \tau, 1 \leq j \leq m\}\right) = \emptyset.$$

令 $x = (x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in U_1$ 和 $y = (y_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in U_2$ 定义如下：

$$x_\gamma = \begin{cases} k_i & \text{if } \gamma = \gamma_i \text{ for } 1 \leq i \leq n, \\ \left(w_{\varphi^{\tau-1}\delta_i} \cdots w_{\delta_i}\right)^{-1} j_i & \text{if } \gamma = \varphi^{\tau}\delta_i \text{ for } 1 \leq i \leq m, \\ 0 & \text{for other } \gamma \in \Gamma. \end{cases}$$

and

$$y_\gamma = \begin{cases} i_j & \text{if } \gamma = \alpha_j \text{ for } 1 \leq j \leq n, \\ \left(w_{\varphi^{\tau-1}\lambda_j} \cdots w_{\lambda_j}\right)^{-1} \ell_j & \text{if } \gamma = \varphi^{\tau}\lambda_j \text{ for } 1 \leq j \leq m, \\ 0 & \text{for other } \gamma \in \Gamma. \end{cases}$$

显然，$\sigma^{\tau}x \in V_1$ 且 $\sigma^{\tau}y \in V_2$。因此，$(x, y) \in U_1 \times U_2$ 使得 $\sigma^{\tau}(x, y) \in V_1 \times V_2$。

这证明了（σ，$\mathbb{Z}^{\Gamma}$）是弱混合的。由引理 6.3a，（σ，$\mathbb{Z}^{\Gamma} \times \mathbb{Z}^{\Gamma}$）具有一个稠密的周期点集。因此（$\sigma$，$\mathbb{Z}^{\Gamma} \times \mathbb{Z}^{\Gamma}$）是 Devaney 混沌。 □

[1] 充分性显然。反过来，假设 r 可逆。显然，对于 $l \geq 1$，r^{ℓ} 可逆。此外，存在一个序列 $l_1, l_2, \ldots \to \infty$，使得 $r^{\ell_1} = r^{\ell_2} = \cdots$（模 $_{\mathbb{K}}$）。因此，对于某个 $l \geq 1$，$r^{\ell} = 1$（模 $_{\mathbb{K}}$）。

事实上，容易验证，若 $(\sigma, \mathbb{Z}^\Gamma)$ 是弱混合的，则 σ 是满射，因此 φ 是一一映射$_{\mathbb{K}}$ 且没有周期点，并且 w 是可逆的。

6.3c 命题。 设 Γ 为可数集。设 $\varphi\colon \Gamma \to \Gamma$ 为无周期点的单射；设 w 可逆。那么存在 $\mathbb{Z}^\Gamma$ 相对于 $\mathbb{Z}^\Gamma \times \mathbb{Z}^\Gamma$ 的稠密不可数 Li-Yorke 混沌子集。

证明。 这可由定理 6.3b 和命题5.6轻易得到。 □

回忆一下，若对所有 $\varepsilon \in \mathscr{U}_{\mathbb{Z}^\Gamma}$，存在一个$_{\mathbb{K}\ \mathbb{K}\ \mathbb{K}}$ 整数 $\tau > 0$，使得对所有 $n \geq \tau$，$(\sigma^n x, \sigma^n y) \in \varepsilon$，则称 $(x,y) \in \mathbb{Z}^\Gamma \times \mathbb{Z}^\Gamma$ 为“渐近对”。

6.3d 命题。设 $\varphi\colon \Gamma \to \Gamma$ 为有一个非周期点的单射，且设 w 可逆。那么存在 $\mathbb{Z}^\Gamma$ 的一个不可数子集 Θ，使得对于所有满足 x, y 的 $x, y \in \Theta$，(x, y) 在 $(\sigma, \mathbb{Z}^\Gamma)$ 下是近端非渐近对$_{\mathbb{K}}$。

$_{\mathbb{K}}$
证明。设 $\theta \in \Gamma$ 是 φ的一个非周期点。由于 φ 是一一映射，因此 $\Gamma_\theta := \{\gamma, \varphi\gamma, \varphi^2\gamma, \ldots\}$ 是 Γ 的一个可数无限 φ-不变两两不同子集。考虑基于 $\Gamma_\theta \xrightarrow{\gamma\mapsto\varphi\gamma} \Gamma_\theta$ 和 $\Gamma_\theta \overset{\gamma\mapsto}{\underset{w}{\longrightarrow}} \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ 自然定义的系统 $(\sigma, \mathbb{Z}^{\Gamma_\theta}{}_{\mathbb{K}})$，由命题 6.3c 可知，在 $\mathbb{Z}^{\Gamma_\theta}{}_{\mathbb{K}}$ 相对于 $\mathbb{Z}^{\Gamma_\theta}{}_{\mathbb{K}} \times \mathbb{Z}^{\Gamma_\theta}{}_{\mathbb{K}}$ 的 Ξ 中，存在一个不可数的李-约克混沌集。对于所有满足 $x = (x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_\theta} \in \Xi$ 的情形，定义 $x' \in \mathbb{Z}^\Gamma{}_{\mathbb{K}}$：若 $\gamma \in \Gamma_\theta$，则 $x'_\gamma = x_\gamma$；若 $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_\theta$，则 $x'_\gamma = 0$。令 $\Theta = \{x' \mid x \in \Xi\}$。显然，$\Theta$ 具有所需性质。证明完毕。 □

6.3e 注。w 可逆这一条件对于引理 6.3a、定理6.3b、命题6.3c 和 6.3d 至关重要。否则，我们可以如下构造一个反例：设 $_{\mathbb{K}} = 4$，对所有 $\gamma \in \Gamma$，$w_\gamma \equiv 2\,(,0)$，且 $o = (o_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \mathbb{Z}_4^\Gamma$，其中 $o_\gamma = 0$，对 $\gamma \in \Gamma$ 成立。现在令 $x \in \mathbb{Z}_4^\Gamma$。由于$2\mathbb{Z}_4 = \{0, 2\}$，因此 $\sigma x \in \{0, 2\}^\Gamma$，$\sigma^2 x = o$，并且对所有 $n \geq 3$，以及所有 1-1 函数 $\varphi\colon \Gamma \to \Gamma$，都有 $\sigma^n x = 0$。因此，$(\sigma, \mathbb{Z}^\Gamma)$ 没有任何混沌动力学。$_{\mathbb{K}}$

致谢。本研究得到中国国家自然科学基金（项目编号：11790274）和江苏高等院校江苏高校优势学科建设工程的资助。

参考文献

[1] T. Arai，一致空间中的 Devaney 混沌与 Li-Yorke 混沌，《动力系统与控制系统杂志》24（2018），93–100。[2] J. Auslander，《极小流及其扩张》，北荷兰数学研究第153卷。North-Holland，阿姆斯特丹，1988。[3] J. Auslander，拓扑动力学中的一个群论条件，《拓扑学论文集》28（2004），327–334。[4] J. Auslander 和 X. Dai，紧豪斯多夫空间上半群作用的极小性、远离性与等度连续性，《离散与连续动力系统》39（2019），4647–4711。[5] J. Auslander、D. C. McMahon、J. van der Woude 和 T. S. Wu，弱不相交性与等度连续结构关系，《遍历论与动力系统》4（1984），323–351。[6] J. Banks、J. Brooks、G. Cairns、G. Davis 和 P. Stacey，论 Devaney 对混沌的定义，《美国数学月刊》99（1992），332–334。[7] J. D. Baum，拓扑动力学中的一个等度连续条件，《美国数学会会刊》12（1961），30–32。[8] I. U. Bronstein，PD 扩张的一个特征性质，Bul. Akad. ˇ Stiince RSS Moldoven (1977 3, 11 15), no. – .[9] I. U. Bronstein，《极小变换群的扩张》，Sijthoff & Noordhoff，1979（俄文版，1975）。[10] K. Cao 和 X. Dai，区域近端关系的提升与远端扩张的刻画，《离散与连续动力系统》42（2022），2103–2174。[11] B. Chen 和 X. Dai，拓扑半群作用的一致复运动，《离散与连续动力系统》36（2016），2931–2944。

[12] T. Ceccherini-Silberstein 和 M. Coornaert，一致空间中的敏感性与 Devaney 混沌，《动力系统与控制系统杂志》19（2013），349–357。[13] J. P. Clay，变换群中的邻近关系，Trans. Amer. Math. Soc. 108（1963），88–96。[14] J. P. Clay，等度连续性的若干变式，Duke Math. J. 30（1963），423–431。[15] X. Dai、H. Liang 和 Z. Xiao，拓扑动力系统中相对远点的刻画，《拓扑学应用》302（2021），论文编号107832，共23页。[16] X. Dai 和 X. Tang，拓扑动力学中的 Devaney 混沌、李-约克混沌与多维Li-Yorke混沌，《微分方程杂志》263（2017），5521–5553。[17] D. Ellis 和 R. Ellis，《拓扑动力学中的自同构与等价关系》，伦敦数学学会讲义丛书412，剑桥大学出版社，2014。[18] R. Ellis，Furstenberg结构定理，《太平洋数学杂志》76（1978），345–349。[19] R. Ellis 和 W. H. Gottschalk，变换群的同态，Trans. Amer. Math. Soc. 94（1960），258–271。[20] R. Ellis、S. Glasner 和 L. Shapiro，近端-等距$\mathscr{PI}$流，《数学进展》17（1975），213–260。[21] J. W. England，拓扑动力学中的稳定性，《太平洋数学杂志》21（1967），479–485。[22] H. Furstenberg，远流的结构，《美国数学杂志》85（1963），477–515。[23] H. Furstenberg，《遍历理论与组合数论中的复现》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1981。[24] A. I. Gerko，《拓扑变换半群的扩张》（俄文），摩尔多瓦国立大学，MolSU 出版中心，基希讷乌，2001。[25] E. Glasner，《近端流》，数学讲义丛书517，Springer-Verlag，1976。[26] E. Glasner，Veech 定理的一个拓扑版本与几乎简单流，《遍历论与动力系统》10（1990），463–482。[27] E. Glasner，拓扑弱混合与拟Bohr系统，《以色列数学杂志》148（2005），277–304。[28] E. Glasner 和 B. Weiss，对初始条件的敏感依赖，《非线性》6（1993），1067–1075。[29] W. H. Gottschalk，几乎周期性、等度连续性与全有界性，《美国数学会通报》52（1946），633–636。[30] W. H. Gottschalk 和 G. A. Hedlund，《拓扑动力学》，美国数学会文集第36卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1955。[31] W. Huang 和 X. Ye，Devaney 混沌或2-散射蕴含 Li-Yorke 混沌，《拓扑学应用》117（2002），259–272。[32] D. Kerr 和 H. Li，组合独立性与sofic熵，《数学与统计通讯》1（2013），213–257。[33] E. Kontorovich 和 M. Megrelishvili，关于半群作用敏感性的一则注记，《半群论坛》76（2008），133–141。[34] A. A. Markov，李雅普诺夫意义下的稳定性与几乎周期性，Math. Z. 36（1933），708–738。[35] D. C. McMahon，弱混合及关于极小变换群结构定理的一则注记，《伊利诺伊数学杂志》20（1976），186–197。[36] D. C. McMahon，相对弱不相交与相对不变测度，Trans. Amer. Math. Soc. 236（1978），225–237。[37] D. C. McMahon 和 L. J. Nachman，PI流的内蕴刻画，《太平洋数学杂志》89（1980），391–403。[38] V. V. Nemytskii 和 V. V. Stepanov，《微分方程定性理论》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1960。[39] O. V. Rybak，半群作用的Li-Yorke敏感性，《乌克兰数学杂志》65（2013），752–759。[40] F. M. Schneider、S. Kerkhoff、M. Behrisch 和 S. Siegmund，拓扑半群的混沌作用，《半群论坛》87（2013），590–598。[41] G. Seifert，半流中的几乎周期性，《美国数学会会刊》123（1995），2895–2899。[42] G. Seifert，一般半流中的混沌，《非线性分析》28（1997），1719–1727。[43] F. Shirazi、E. Hakimi、A. Hosseini 和 R. Rezavand，wighted shifts 中的Li-Yorke混沌与 Devaney 混沌一致动力系统，《拓扑学应用》326（2023），论文编号108406，共15页。[44] J. van der Woude，(H)PI扩张的刻画，《太平洋数学杂志》120（1985），453–467。[45] W. A. Veech，点远流，《美国数学杂志》92（1970），205–242。[46] W. A. Veech，拓扑动力学，《美国数学会通报》83（1977），775–830。[47] T. Yu 和 X. Zhou，极小系统中敏感性的相对化，《遍历论与动力系统》40（2020），1715–1728。[48] G. Zhang，复杂性与敏感性的相对化，《遍历论与动力系统》27（2007），1349–1371。