arXiv:2301.05450v1 [math.CA] 13 Jan 2023

¨乘积空间 $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$ 上薛定谔方程的平滑估计

XIANGHONGCHEN、Zihua Guo、Minxing Shen 和 Lixin Yan

摘要。设 $\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}$ 表示乘积空间 $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$ 上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子。本文证明

$$\left\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f\right\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])} \le C\|f\|_{W^{\alpha,p}(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}$$

当 p $\ge$ 2(m+n+2)/(m+n) 且 $\alpha > (m+2n)(1/2-1/p)-2/p$ 时成立。此外，我们应用 l^2 解耦不等式，在调制空间 $M^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n)$ 中建立薛定谔算子 $e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}}$ 的局部 L^p 平滑估计：

$$\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])} \le C\|f\|_{M^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}$$

对于某些范围内的 α、p 和 q。对于一定范围内的 p 和 q，L^p-Sobolev 空间和调制空间中的平滑估计除端点正则性外均为尖锐的。

1. 引言

考虑薛定谔方程

$$\begin{cases} i\partial_t u(x,t) + \Delta_{\mathbb{R}^n} u(x,t) &= 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \\ u(\cdot,0) &= f. \end{cases} \tag{1.1}$$

解 u 可形式化地写为

$$u(x,t) = e^{it\Delta_{\mathbb{R}^n}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi\cdot x - t|\xi|^2)} \hat{f}(\xi)\, d\xi,$$

其中 $\hat{f}$ 表示 f 的傅里叶变换。对于固定的 $t > 0$，Miyachi [17] 证明了

$$\left\|e^{it\Delta_{\mathbb{R}^n}} f\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C(n,p)(1+t)^{\frac{\alpha}{2}}\|f\|_{W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}, \quad \alpha \ge 2n\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right| \tag{1.2}$$

当 $1 < p < \infty$ 时成立，其中 $W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ 表示 Sobolev 空间。此外，(α 中的正则性指数 1.2) 是尖锐的。另一方面，预期对于“典型的” t，(α 中的指数 1.2) 可以降低。事实上，有人猜想

$$\|e^{it\Delta_{\mathbb{R}^n}} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n\times[0,1])} \le C(n,p,\alpha)\|f\|_{W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}, \quad \alpha > 2n\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\Big)-\frac{2}{p} \tag{1.3}$$

对所有 p $> 2 + 2/n$ 均成立。这被称为薛定谔方程的局部平滑猜想。它表明，对于“通常的” t $\in [0,1]$，解相较于定时估计可获得 2/p 阶导数增益

日期：2023年1月16日。2010年数学主题分类：35J10、35B45、42B37。关键词和短语：薛定谔方程、局部平滑估计、l^2-解耦不等式、Sobolev 空间与调制空间、乘积空间。

（1.2）中的定时估计。在 [18], Rogers 证明了，关于抛物面的傅里叶限制猜想蕴含局部平滑猜想（1.3）；此外，他还利用陶哲轩的傅里叶限制定理证明了（1.3）对$p > 2+4/(n+1)$成立[24]。关于局部平滑猜想（[11]1.3）的最新进展，参见 [21]（关于波动方程对应问题的最新进展，另见 [14]）。

本文关注半周期设置下不等式（1.3）的类似形式$\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$，$m$，$n \geq 1$，即，

$$i\partial_t u(x,y,t) + \Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n} u(x,y,t) = 0 \tag{1.4}$$

初始数据为

$$u(x,y,0) = f(x,y). \tag{1.5}$$

在这种情况下，$(x, y, t) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$，且 $\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n} = \Delta_x + \Delta_y$ 其中 Δ_x 是 $\mathbb{T}^m$ 上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，且 $\Delta_y = \sum^n{}_{j=1} \partial^2_{y_j}$ 是 $\mathbb{R}^n$上的拉普拉斯算子。（1.4）和（1.5）的解为

$$u(x,y,t) = e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(k\cdot x+\xi\cdot y)} e^{-it(|k|^2+|\xi|^2)} \hat{f}(k,\xi)\, d\xi. \tag{1.6}$$

令 $2 \leq p \leq \infty$并设 $s(p, m) = m(1/2 - 1/p)$。由嵌入关系 $W^{s(p,m),\,p}(\mathbb{T}^m) \hookrightarrow W^{s(p,m),\,2}(\mathbb{T}^m) \hookrightarrow L^p(\mathbb{T}^m)$ 以及恒等式 $\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m}} g\|_{W^{s(p,m),\,2}(\mathbb{T}^m)} = \|g\|_{W^{s(p,m),\,2}(\mathbb{T}^m)}$，可得对 $2 \leq p < \infty$ 的估计；该恒等式显然成立，因为 $e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m}}$ 是 $L^2(\mathbb{T}^m)$ 上的等距变换。

$$\left\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m}} g\right\|_{L^p(\mathbb{T}^m)} \leq C(m,p)\|g\|_{W^{s(p,m),p}(\mathbb{T}^m)}. \tag{1.7}$$

通过写出

$$e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f(x,y) = e^{it\Delta_{\mathbb{R}^n}}(e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m}} f(x,\cdot))(y), \tag{1.8}$$

于是应用（1.7）和（1.2），可得

$$\left\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f\right\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)} \leq C(m,n,p,t,\alpha)\|f\|_{W^{\alpha,p}(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}, \quad \alpha \geq (m+2n)\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|. \tag{1.9}$$

事实证明，对于“典型的” $t \in [0,1]$，与定时估计（1.9）相比，解还会多获得 $2/p$ 阶导数，至少在 p 的某个范围内如此。事实上，根据 $\mathbb{T}^m$（[5, 6, 16]）上的斯特里卡茨估计以及 Hölder 不等式，对于 $p > 2 + 4/m$，有

$$\left\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m}} f\right\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times[0,1])} \leq C(m,p)\|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{T}^m)}, \quad s \geq m\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\Big) - \frac{2}{p}. \tag{1.10}$$

结合（1.2）和（1.10），可知对于 $p > 2 + 4/m$，

$$\left\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f\right\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])} \leq C(m,n,p)\|f\|_{W^{\alpha,p}(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}, \quad \alpha \geq (m+2n)\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\Big) - \frac{2}{p}.$$

本文的首要目标是将这一范围扩展到 $p \geq 2 + 4/(m + n)$。更准确地说，我们有以下结果。

定理 1.1. 设 $p \geq 2+4/(m+n)$，且 $\alpha > (m+2n)(1/2-1/p) - 2/p$。那么存在常数 $C = C(m, n, p, \alpha)$，使得

$$\left\| e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f \right\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])} \leq C\|f\|_{W^{\alpha,p}(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}. \tag{1.11}$$

此外，(1.11) 在 $0 \leq \alpha < (m+2n)(1/2-1/p) - 2/p$ 时不成立。

为了证明定理 1.1，我们结合了 Rogers [18] 的思想，以及 Barron [1]关于薛定谔方程 (1.4) 在 $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$ 上的解所得到的尖锐 Strichartz 型估计。注意，当 $p = 2+4/(m+2n)$ 时，$(m+2n)(1/2-1/p) - 2/p = 0$。估计 (1.11) 或许可以推广到 $p > 2+4/(m+2n)$ 的范围，但我们目前尚不确定。

本文的第二个目标是运用 Bourgain 和 Demeter 的 l^2-解耦不等式 [6]，通过采用调制空间中另一种初始数据空间，来获得薛定谔方程的局部 L^p-平滑估计，并将其与 (1.11) 中 Sobolev 空间里的初始数据进行比较。回顾一下，调制空间由 Feichtinger [10]引入。Schippa 首先在 L^p-调制空间中的薛定谔方程 (1.1) 局部平滑估计进行了探讨，见 [19]。近几十年来，傅里叶乘子和薛定谔方程领域的调制空间已得到广泛研究，例如参见 [3, 4, 19, 26] 及其中的参考文献。

对于调制空间的定义，考虑傅里叶乘子

$$\widehat{\square_K f} = \sigma_K \hat{f}, \quad K \in \mathbb{Z}^{m+n},$$

其中 $\{\sigma_K\}_{K\in\mathbb{Z}^{m+n}} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^{m+n})$ 是适用于平移单位立方体 $Q_K = K + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^{m+n}$ 的光滑单位分解。不失一般性，我们假设 $\operatorname{supp} \sigma_0 \subset [-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})^{m+n}$, $\sigma_K(\cdot) = \sigma_0(\cdot - K)$，因此

$$\sigma_K f(x,y) = \int_{|\xi-k'|\leq 1} \sigma(k,\xi)\hat{f}(k,\xi)e^{i(k\cdot x+\xi\cdot y)}\, d\xi,$$

其中 $K = (k, k') \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^n$。令 $0 < p, q < \infty$ 和 $s \geq 0$。记 $\langle K\rangle = (1+|K|^2)^{1/2}$。范数定义为

$$\|f\|_{M^\alpha_{p,q}(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)} = \Big(\sum_{K\in\mathbb{Z}^{m+n}} \langle K\rangle^{q\alpha} \|\square_K f\|^q_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)} \Big)^{1/q}.$$

若 $\alpha = 0$，我们记作 $M_{p,q}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n)$。调制空间与 L^p 空间密切相关。由 Plancherel 定理可得，$M^{2,2}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n)$。根据 l^p 空间的嵌入和 Bernstein 不等式，

$$M^\alpha_{p,q_1}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n) \hookrightarrow M^\alpha_{p,q_2}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n) \quad (q_1 \leq q_2), \tag{1.12}$$

$$M^\alpha_{p_1,q}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n) \hookrightarrow M^\alpha_{p_2,q}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n) \quad (p_1 \leq p_2). \tag{1.13}$$

Rubio de Francia 不等式和对偶性得到

$$M_{p,p'}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n) \hookrightarrow M_{p,p}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n) \quad (2 \leq p \leq \infty), \tag{1.14}$$

$$M_{p,p}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n) \hookrightarrow M_{p,p'}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n) \quad (1 \leq p \leq 2). \tag{1.15}$$

由 H¨older 不等式,

(1.16) $$M^{\alpha_1}_{p,q_1}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n) \hookrightarrow M^{\alpha_2}_{p,q_2}(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n)$$

只要 $\alpha_1 - \alpha_2 > (m+n)(1/q_2 - 1/q_1) > 0$。

我们的结果如下。

定理 1.2。 设 $p \geq 2$ 且 $1 \leq q < \infty$。那么存在常数 $C = C(m, n, p, q, \alpha)$，使得 t

(1.17) $$\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])} \leq C\|f\|_{M^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}$$

假设 $\alpha > \alpha(p, q)$，其中

(a) $\alpha(p,q) = \max\{0, (m+n)(1/2 - 1/q)\}$ *with* $2 \leq p \leq 2 + 4/(m+n)$.
(b) $\alpha(p,q) = (m+n)(1 - 1/p - 1/q) - 2/p$ *with* $p \geq 2 + 4/(m+n)$ *and* $q \geq 2$.
(c) $\alpha(p,q) = 2(1 - 1/q)[(m+n)(1/2 - 1/p) - 2/p]$ *with* $p \geq 2 + 4/(m+n)$ *and* $1 \leq q \leq 2$.

定理 α 1.1 和 1.2 中的范围（端点除外）具有尖锐性，这由下述命题得出。可以看出，定理 1.2 在端点正则性方面具有尖锐性，具体而言：$2 \leq p \leq 2 + 4/(m+n)$ 以及 $1 \leq q \leq 2$；而对于 $2 + 4/(m+n) \leq p \leq \infty$ 以及 $2 \leq q \leq \infty$,

命题 1.3. (i) 设 p、q、r ≥ 1。假设

(1.18) $$\left\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f\right\|_{L^q(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n, L^r[0,1])} \leq C\|f\|_{W^{\alpha,p}(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}$$

对某个 $\alpha \geq 0$ 成立。那么

$$\alpha \geq (m+n)\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\Big) + n\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\Big) - \frac{2}{r}.$$

特别地，当 $p = q = r$ 时，有 $\alpha \geq (m+2n)(1/2 - 1/p) - 2/p$；当 $p = 2$、$q = r$ 时，有 $\alpha \geq (m+n)(1/2 - 1/q) - 2/q$。

(ii) 设 p、q ≥ 1。假设

(1.19) $$\left\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f\right\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])} \leq C\|f\|_{M^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}$$

对某个 α 成立。则

$$\alpha \geq \max\Big\{0, (m+n)(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - \frac{2}{p}\Big\}.$$

本文的组织结构如下。在第 2 节，我们介绍关于 $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$ 上 Littlewood-Paley 理论的一些预备知识。在第 3 节，我们利用 Barron [1] 关于 ¨方程（1.4）在 $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$ 上的解的 Strichartz 型估计，证明定理 1.1 。在第4 节，我们应用 Bourgain 和 Demeter 的 l^2 解耦定理 [6] 来证明定理 1.2。在第 5 节，我们通过证明更一般时空估计的一个必要条件，说明定理 1.1 和 1.2 的结果是尖锐的。

记号。我们将写作 $A \leq CB$，表示 C 是仅依赖于 m、n、p、q、r、α 和 s 的常数；我们写作 $A \leq C_\varepsilon B$（分别地，$A \leq C_N B$），表示 C 还可能依赖于 ε（分别地，N）。C、C_ε 和 C_N 的取值可能逐行变化。

2. 预备知识

在全文中，我们将 $\mathbb{T}^m$ 视为周期立方体 $[0,2\pi]^m \subset \mathbb{R}^m$。对于定义在 $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$上的函数 f(x, y)，我们采用以下傅里叶变换约定：

$$\hat{f}(k,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{m+n}} \int_{\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n} f(x,y) e^{-i(k\cdot x+\xi\cdot y)} dxdy, \quad k \in \mathbb{Z}^m, \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

因此，对于足够好的函数 f，有

$$f(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k,\xi) e^{i(k\cdot x+\xi\cdot y)} \, d\xi.$$

若函数 m(k, ξ) 定义在 $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}^n$ 上，则称其为 $L^p(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n)$ 上的乘子，当且仅当

$$Tf = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \int_{\mathbb{R}^n} m(k,\xi) \hat{f}(k,\xi) e^{i(k\cdot x+\xi\cdot y)} \, d\xi$$

定义了 $L^p(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n)$ 上的一个有界算子（T 的算子范数记为 $\|m\|_{\mathcal{M}^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}$）。当 m(k, ξ) = m(−|k $|^2 - |\xi|^2$) 对某个单变量函数 m(·) 成立时，我们将对应的算子 T 记为 $m(\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n})$。特别地，

$$e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(k,\xi) e^{i(k\cdot x+\xi\cdot y)} e^{-it(|k|^2+|\xi|^2)} \, d\xi. \tag{2.1}$$

对于 $\alpha \geq 0$，索博列夫范数定义为

$$\|f\|_{W^{\alpha,p}(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)} = \left\|(1-\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n})^{\frac{\alpha}{2}} f\right\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}.$$

下面我们概述一些与索博列夫函数的 Littlewood-Paley不等式相关的基本事实。首先是经典转移定理在 $\mathbb{T}^m$ 上的一个简单类比（例如参见[12, 第 4.3 节2] 和 [20]）。

命题 2.1. 设 $1 \leq p \leq \infty$。假设 m(η,ξ) 是 $L^p(\mathbb{R}^{m+n})$ 上的连续乘子。那么，$m|_{\mathbb{Z}^m\times\mathbb{R}^n}$(k, ξ) 是 $L^p(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n)$ 上的乘子，且 $\|m\|_{\mathcal{M}^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)} \leq \|m\|_{\mathcal{M}^p(\mathbb{R}^{m+n})}$。

由命题2.1和上的经典 Littlewood-Paley不等式可得 $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$ 上的 Littlewood-Paley不等式。设 $\mathbb{R}^{m+n}$是 ψ 上的一个施瓦茨函数，满足 $\mathbb{R}^{m+n}$

$$\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subset \{(\eta,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : 1/2 \leq \sqrt{|\eta|^2+|\xi|^2} \leq 2\}.$$

令 b $\psi_j(\eta,\xi)$ = b$\psi(\eta/2^j, \xi/2^j)$，其中 j ≥ 1，并令 ψ_0为 $\mathbb{R}^{m+n}$上的一个施瓦茨函数，其傅里叶变换 d b ˆ 的支集包含在单位球内。对于 $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$上的函数 f，定义 P_jf (k, ξ) = ψ_j(k, ξ) f (k, ξ)。

命题 2.2（Littlewood-Paley不等式）。设 $1 < p < \infty$。那么对任意 $\alpha \geq 0$，有

$$\left\|\Big(\sum_{j\geq 0} |2^{j\alpha} P_j f|^2\Big)^{1/2}\right\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{W^{\alpha,p}(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}.$$

此外，假设 $P_{j\geq 0}\psi_j = 1$，则反向不等式成立

$$\|f\|_{W^{\alpha,p}(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)} \leq C\left\|\Big(\sum_{j\geq 0} |2^{j\alpha} P_j f|^2\Big)^{1/2}\right\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}.$$

命题2.2 的以下推论将在定理 1.1 和1.2 的证明中用到。

推论 2.3. (i) 设 $1 < p < \infty$ 且设 $\alpha \geq 0$。那么对于定义在 $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$ 上、满足 $\hat{}$s uppf $\subset B_R^{m+n}(0), R \geq 1$ 的任意函数 f，我们有

$$\|f\|_{W^{\alpha,p}(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)} \leq CR^{\alpha}\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}.$$

(ii) 设 $2 \leq p < \infty$，且 X 是一个巴拿赫空间。假设线性算子 T 满足

$$\|Tf\|_X \leq CR^{\alpha}\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}$$

对于定义在 $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$ 上的所有满足 supp $\hat{}$f $\subset (\mathbb{Z}^m \cap [-R, R]^m) \times [-R, R]^n, R \geq 1$ 的函数 f，均成立。那么对于任意$\varepsilon > 0$，我们有

$$\|Tf\|_X \leq C_{\varepsilon}\|f\|_{W^{\alpha+\varepsilon,p}(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}.$$

3. 定理 的证明 1.1

为证明定理 1.1，首先需要以下命题 3.1 ，它给出了关于薛定谔方程解的尖锐 Strichartz 型估计¨（1.4） $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$，该命题由 Barron 证明 [1, 命题 3。4]。

命题 3. 1. 设 $p \geq 2 + 4/(m + n)$，且 $\alpha > (m + n)(1/2 - 1/p) - 2/p$。则有

$$\left\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f\right\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])} \leq C(m, n, p, \alpha)\|f\|_{W^{\alpha,2}(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}. \tag{3.1}$$

在具有突破性的论文中[6],，Bourgain 和 Demeter 通过建立尖锐的l^2 解耦定理， $\mathbb{R}^{n+1}$。他们的方法利用周期性和抛物重缩放，在周期情形与欧几里得情形之间转换。为了得到命题3.1，Barron 使用相同的思路，将问题化归到 $\mathbb{R}^{m+n+1}$情形。所需的l^2 解耦现在是相对于（$m + n$）维抛物面，在$\mathbb{R}^{m+n+1}$中进行的，其尺度与周期分量 $\mathbb{T}^m$相适应。对于 $\mathbb{T}^m$ 和 $\mathbb{R}^n$，解耦部分最初都是在次临界可积性指数下进行度量的。然而，这些部分在周期方向上本质上是常数，在非周期方向上则是带限的。结合这一观察以及混合范数斯特里卡茨不等式，可以有效地估计每个部分，从而得到所需的估计。

标准的缩放论证表明，命题3.1 是尖锐的，因为当$0 \leq \alpha < (m + n)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) - \frac{2}{p}$时，(3.1) 不成立；另见命题 1.3。当 $m = n = 1$ 时，(3.1) 的端点版本形式如下：

$$\left\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f\right\|_{L^4(\mathbb{T}\times\mathbb{R}\times[0,1])} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{R})}, \tag{3.2}$$

该结果此前已由 Takaoka 和 Tzvetkov 证明 [23]。此外，Barron [1] 证明，对于ϵ-损失可以从斯特里卡茨估计 (3.1) 中消除，只要$p > 2 + 4/(m + n)$。也就是说，对于$p > 2 + 4/(m + n)$，

$$\left\| e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f \right\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])} \le C(m,n,p,\alpha)\|f\|_{W^{\alpha,2}(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}$$

对于 $\alpha = (m + n)(1/2 - 1/p) - 2/p$。关于薛定谔方程的斯特里卡茨估计，已有大量文献¨，读者可参阅[1, 2, 8, 13, 15, 16, 23] 及其中的参考文献。

接下来，我们利用薛定谔方程的局部化论证¨，从命题f 中推出定理R。这种论证在欧几里得情形中相当标准（参见 [24],[18] 及其中的参考文献）。它使我们只需考虑初始数据f，其在某个与频率成比例的尺度（例如R）上（本质上）局部化。在柱状情形 $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$中，我们改编了[18, 引理 8] 中的局部化论证，以证明要证明定理1.1，只需考虑满足以下条件的函数f：其本质支撑包含在形如 $\mathbb{T}^m \times B^n_{R^{1+\varepsilon}}$的球内。这使我们能够应用 H¨older 不等式，由斯特里卡茨估计（1.11）推出局部平滑估计（3.1）。

我们先总结证明中需要的欧几里得估计。这些估计可由 [18, 引理 7] 通过重新缩放直接推出。

引理 3.2（[18], 引理 7）。设 $\varepsilon > 0$ 且 $R \ge 1$。存在施瓦茨函数 $\eta_\ell \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，$\ell \in \mathbb{Z}^n$，满足 $\mathrm{supp}\,\eta_\ell \subset [-R^{-1}, R^{-1}]^n$，使得以下结论成立。(i) 对任意函数 f,

$$\left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n} \|f\eta_\ell\|^p_{L^q(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/p} \le C_\varepsilon R^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)+\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1 \le q \le p \le \infty; \tag{3.3}$$

ˆ (ii) 对任意满足 $\mathrm{supp}\, f \subset [-R, R]^n$ 的函数 f、任意 $t \in [0,1]$ 以及任意 $N \ge 1$,

$$\left\| e^{it\Delta_{\mathbb{R}^n}} f \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n} \left\| e^{it\Delta_{\mathbb{R}^n}} (f\eta_\ell) \right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/p} + C_N R^{-N} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{3.4}$$

下一个引理是 [18, 引理 8] 在 $\mathbb{R}^n$上的柱状类比。证明利用了 $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$ 的乘积结构，因此可以直接将引理 3.2 应用于欧几里得分量。值得指出的是，同样的证明也适用于形如 $M \times \mathbb{R}^n$ 的流形（其中 M 是任意紧黎曼流形）。在我们的应用中，只需考虑 $M = \mathbb{T}^m$ 的情形。

引理 3.3. 设 $p > 2$ 且 $s \ge 0$. 假设

$$\left\| e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f \right\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])} \le C R^s \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)} \tag{3.5}$$

对于满足 $\mathrm{supp}\,\hat{f} \subset (\mathbb{Z}^m \cap [-R, R]^m) \times [-R, R]^n$, $R \ge 1$ 的函数 f 成立。于是，对于同一类函数 f，我们有

$$\left\| e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f \right\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])} \le C_\varepsilon R^{s+n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)+\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}, \quad \varepsilon > 0. \tag{3.6}$$

证明。 取 $x \in \mathbb{T}^m$ 和 $t \in [0,1]$。回顾式（1.8）可知

$$(e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f)(x,y) = e^{it\Delta_{\mathbb{R}^n}}((e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m}} f)(x,\cdot))(y), \quad (x,y) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n.$$

将（3.4）应用于（$e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m}} f)(x,\cdot)$），对任意 $N \geq 1$,

$$\begin{aligned}\left\|(e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f)(x,\cdot)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n} \left\|(e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}}(f\eta_\ell))(x,\cdot)\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/p} \\ &\quad + C_N R^{-N}\left\|(e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m}} f)(x,\cdot)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

其中，在第一项中我们用到了恒等式 $(e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m}} f)\eta_\ell(y) = e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m}}(f\,\eta_\ell(y))$。对 x 和 t 积分后，得到

$$\begin{aligned}\left\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f\right\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])} &\leq \left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n} \left\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}}(f\eta_\ell)\right\|^p_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])}\right)^{1/p} \\ &\quad + C_N R^{-N}\left\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m}} f\right\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])} \\ &=: I + II.\end{aligned}$$

将假设（3.5）应用于第一项 I，可得

$$I \leq CR^s\left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n} \|f\eta_\ell\|^p_{L^2(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}\right)^{1/p}.$$

由 H¨older 不等式,

$$\|f\eta_\ell\|^p_{L^2(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)} \leq C^p \int_{\mathbb{T}^m} \|f(x,\cdot)\eta_\ell\|^p_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,dx.$$

因此我们可以估计

$$I \leq CR^s\left(\int_{\mathbb{T}^m}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n} \|f(x,\cdot)\eta_\ell\|^p_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,dx\right)^{1/p}.$$

将（3.3）应用于含有 $q = 2$ 的求和式，我们得到

$$\begin{aligned}I &\leq C_\varepsilon R^{s+n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)+\varepsilon}\left(\int_{\mathbb{T}^m} \|f(x,\cdot)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,dx\right)^{1/p} \\ &= C_\varepsilon R^{s+n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)+\varepsilon}\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}. \qquad (3.7)\end{aligned}$$

对于第二项 II，注意到对任意固定的 y 和 t，由 $\mathbb{T}^m$ 上的简单 L^∞ 估计，

$$\left\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m}} f(\cdot,y)\right\|_{L^p(\mathbb{T}^m)} \leq CR^{\frac{m}{2}}\|f(\cdot,y)\|_{L^p(\mathbb{T}^m)}.$$

因此，对 y 和 t 积分后，我们有

$$II \leq C_N R^{-N+\frac{m}{2}}\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}. \qquad (3.8)$$

现在在（3.8）中取$N \geq \frac{m}{2}$，并结合（3.7）和（3.8），便得到所需的估计（3.6）。命题3.2 的证明至此完成。□

定理 1.1 现在可由命题 3.1、引理 3.3以及 Littlewood-Paley 不等式推出。

定理 *1.1* 的证明。由推论 2.3(ii)，只需证明对于 p ≥ $^{2}_{(m+n+2)\ m+n}$ 以及任意~~$\varepsilon > 0$,~~

$$\left\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f\right\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])} \le C_\varepsilon R^{(m+2n)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)-\frac{2}{p}+2\varepsilon}\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}$$

对满足 supp ˆf ⊂ $(\mathbb{Z}^m \cap [-R, R]^m) \times [-R, R]^n$、R ≥ 1 的函数 f 成立。然而，将命题 3.1 和引理 3.3 与 s = $\frac{m+n}{2} - \frac{m+n+2}{p} + \varepsilon$ 结合，即可立即得到这一结论。这就证明了 (1.11)。范围 α 在 (1.11) 中的尖锐性是命题 1.3 的一个特例，其证明将在下文第 5 节给出。定理 1.1 的证明至此完成。□

4. 定理1.2 的证明

开始证明定理 1.2之前，我们先回顾一下由 Bourgain 和 Demeter 提出的抛^2 物面的解耦定理的框架[6], ，该定理在我们的证明中起着重要作用。令 $\mathbb{P}^n = \{(\xi, |\xi|^2) \in \mathbb{R}^{n+1} : \xi \in [-1,1]^n\}$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$中的截断抛物面，并令

$$\mathcal{N}_{\delta^2}(\mathbb{P}^n) = \{(\xi, |\xi|^2 + \mu) \in \mathbb{R}^{n+1} : \xi \in [-1,1]^n,\ |\mu| \le \delta^2/2\}.$$

令 $\mathcal{P}^n_\delta$ 为由曲面区域构成的 $\mathcal{N}_{\delta^2}(\mathbb{P}^n)$ 覆盖

$$\theta = \left\{(\xi, |\xi|^2 + \mu) \in \mathbb{R}^{n+1} : \xi \in C_\theta,\ |\mu| \le \delta^2\right\},$$

其中，C_θ遍历所有满足 c ∈ $\frac{\delta}{2}\mathbb{Z}^n \cap [-1,1]^n$的立方体 c + $[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]^n$。对于定义在$\mathbb{R}^{n+1}$上的函数 f，记 f_θ 为 f 在 θ上的傅里叶限制。

以下这个（特殊的）l^2 Bourgain-Demeter 解耦定理 [6, 定理 1.1] 将在证明定理 1.2时用到；另见 [9, 第 10]章。

命题 4.1. 假设 supp ˆf ⊂ $\mathcal{N}_{\delta^2}(\mathbb{P}^n)$。那么对于 p ≥ $^{2}_{(n+2)\ n}$ ~~以~~及任意 $\varepsilon > 0$,

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})} \le C_\varepsilon \delta^{-\left(\frac{n}{2}-\frac{n+2}{p}+\varepsilon\right)} \Big(\sum_{\theta\in\mathcal{P}^n_\delta} \|f_\theta\|^2_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})}\Big)^{1/2}. \tag{4.1}$$

为了应用命题 4.1证明定理 1.2，引入一些傅里叶延拓理论中的记号会很方便。根据频域中 $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}^n$ 的结构，我们考虑 $\mathbb{P}^{m+n}$的切片，其中这些切片彼此R^{-1}–分离：

$$\mathbb{P}^{m+n}_{R^{-1}} = \{(\tau, \xi, |\tau|^2 + |\xi|^2) \in \mathbb{P}^{m+n} : \tau \in (R^{-1}\mathbb{Z}^m) \cap [-1,1]^m,\ \xi \in [-1,1]^n\}.$$

对于定义在 $\mathbb{P}^{m+n}{}_{R^{-1}}$ 上的函数 g，定义

$$E_{\mathbb{P}^{m+n}_{R^{-1}}} g(x,y,t) = \sum_{\tau\in(R^{-1}\mathbb{Z}^m)\cap[-1,1]^m} \int_{[-1,1]^n} g(\tau,\xi) e^{i(\tau,\xi,|\tau|^2+|\xi|^2)\cdot(x,y,t)}\, d\xi, \quad (x,y,t) \in \mathbb{R}^{m+n+1},$$

其中我们将 $g(\tau, \xi, |\tau|^2 + |\xi|^2)$ 与 $g(\tau, \xi)$ 视为相同（下文中我们常这样处理）。

在以下命题中，我们首先考虑定理 $q = 2$ 中的情形 1.2。回顾一下，$\{\sigma_K\}_{K\in\mathbb{Z}^{m+n}} \subseteq C^\infty_c(\mathbb{R}^{m+n})$ 是一个适配于平移单位立方体的光滑单位分解

$Q_K = K + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^{m+n}$，且 $\square_K$是由 $\widehat{\square_K f} = \sigma_K \hat{f}$，$\langle K\rangle = (1+|K|^2)^{1/2}$给出的算子。其范数定义为

$$\|f\|_{M^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)} = \Big(\sum_{K\in\mathbb{Z}^{m+n}} \langle K\rangle^{q\alpha} \|\square_K f\|^q_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/q}.$$

命题 4.2. 设 $p \geq 2 + 4/(m+n)$。那么，对于任意 $\alpha > (m+n)(1/2 - 1/p) - 2/p$，存在常数 $C = C(m, n, p, \alpha)$，使得

$$\left\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f\right\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])} \leq CR^{\alpha}\Big(\sum_{K\in\mathbb{Z}^{m+n}} \|\square_K f\|^2_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/2} \tag{4.2}$$

对于满足 $\operatorname{supp}\hat{f} \subset (\mathbb{Z}^m \cap [-R,R]^m)\times[-R,R]^n$ 的 f。

$\hat{}$ d 证明。设 $\hat{g}(k, \xi) = f(Rk, R\xi)$，且 $\hat{g}_K(k, \xi) = \square_K f(Rk, R\xi)$，则通过重新缩放可得

$$\left\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f\right\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])} = R^{n-\frac{2m+n+2}{p}} \|E_{\mathbb{P}^{m+n}_{R^{-1}}}\hat{g}\|_{L^p([0,2\pi R^2]^m\times\mathbb{R}^n\times[0,R^2])}. \tag{4.3}$$

设 φ 是 $\mathbb{R}$ 上的施瓦茨函数，满足 $\operatorname{supp}\hat{\varphi} \subset (-1/2, 1/2)$，且 $\varphi(t) \geq 1$，$t \in [-\pi, \pi]$。再设 $\Phi(x) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_m)$。那么，其傅里叶变换为

$$F(x, y, t) := \Phi\Big(\frac{x}{R^2}\Big)\varphi\Big(\frac{t}{R^2}\Big)E_{\mathbb{P}^{m+n}_{R^{-1}}}\hat{g}(x, y, t)$$

支撑在 R^{-2} 邻域内 $\mathbb{P}^{m+n}_{R^{-1}}$，它是$\mathcal{N}_{R^{-2}}(\mathbb{P}^{m+n})$ 的子集。因此，我们可以将命题4.1 应用于 F，并对任意 $\alpha > (m+n)(1/2 - 1/p) - 2/p$，

$$\|E_{\mathbb{P}^{m+n}_{R^{-1}}}\hat{g}\|_{L^p([0,2\pi R^2]^m\times\mathbb{R}^n\times[0,R^2])} \leq CR^{\alpha}\Big(\sum_{K\in\mathbb{Z}^{m+n}} \Big\|\Phi\Big(\frac{x}{R^2}\Big)\varphi\Big(\frac{t}{R^2}\Big)E_{\mathbb{P}^{m+n}_{R^{-1}}}\widehat{g_K}\Big\|^2_{L^p(\mathbb{R}^{m+n+1})}\Big)^{1/2} \tag{4.4}$$

要计算右侧的L^p 范数，只需考虑平移后以原点为中心的 suffices to consider $K = 0$。但由式（4.3）显然可知

$$\begin{aligned}\Big\|\Phi\Big(\frac{x}{R^2}\Big)\varphi\Big(\frac{t}{R^2}\Big)E_{\mathbb{P}^{m+n}_{R^{-1}}}\widehat{g_0}\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^{m+n+1})} &= R^{\frac{2m+n+2}{p}-n}\big\|\Phi(x)\varphi(t)e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}}(\square_0 f)\big\|_{L^p(\mathbb{R}^{m+n+1})} \\ &\leq CR^{\frac{2m+n+2}{p}-n}\|\square_0 f\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}\end{aligned} \tag{4.5}$$

由于 Φ 和 φ 快速衰减，且$\widehat{\ }\square_0 f$ 支撑在单位立方体内。具体而言，由式（1.2）和（1.7），可得

$$\big\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}}(\square_0 f)\big\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)} \leq C(m, n, p)P(t)\|\square_0 f\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)},$$

其中 $P(t)$ 是一个多项式。这确保了关于 t 的积分收敛 t

$$\begin{aligned}\big\|\varphi(t)e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}}(\square_0 f)\big\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})} &= \Big(\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)^p\big\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}}(\square_0 f)\big\|^p_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}dt\Big)^{1/p} \\ &\leq \|\square_0 f\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

In 综上，结合所有估计式（4.3）、（4.4）和（4.5），最终得到 n

$$\left\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f\right\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])} \leq C(m, n, p, \alpha)R^{\alpha}\Big(\sum_{K\in\mathbb{Z}^{m+n}} \|\square_K f\|^2_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/2} \tag{4.6}$$

对于f满足 $\operatorname{supp}\hat{f} \subset (\mathbb{Z}^m \cap [-R, R]^m)\times[-R, R]^n$。命题 4.2 的证明至此完成。□

定理 *1.2* 的证明。 首先证明定理 1.2 中当 $q = 2$ 时的 (a)、(b) 和 (c)。回顾一下，P_j 是命题 $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$ 中的 Littlewood-Paley 算子，见命题 2.2。由 Littlewood-Paley 估计、闵可夫斯基不等式和命题 4.2，可得

$$\begin{aligned}
\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])} &\le C\Big\|\Big(\sum_{j=0}^{\infty} |e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} P_j f|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])} \\
&\le C\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} P_j f\|^2_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])}\Big)^{1/2} \\
&\le C(m,n,p,\alpha)\Big(\sum_{K} \langle K\rangle^{2\alpha} \|\square_K f\|^2_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/2} \\
&= C(m,n,p,\alpha)\|f\|_{M^{\alpha}_{p,2}(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}, \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

其中，当 $2 \le p \le 2+4/(m+n)$ 时满足 $\alpha > 0$；且当 $2+4/(m+n) < p \le \infty$ 时，$(m+n)(1/2-1/p) - 2/p + \varrho$。

接下来我们考虑 1.17) 对于 $q = 1$。显然，对于任意 $p \ge 1$,

$$\begin{aligned}
\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])} &\le C\sum_{K} \|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} \square_K f\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])} \\
&\le C\sum_{K} \|\square_K f\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)}. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

对于 $1 \le q \le 2$，(a) 可由 (4.7) 以及与 (4.8) 插值得出；而对于 $q \ge 2$，我们使用嵌入 (1.16)。(b) 对于 $q \ge 2$，可由 (1.16) 得出。(c) 可由 (b) 在 $q = 2$ 时与 (4.8) 插值得出。定理 1.2 的证明至此完成。□

5. 尖锐性：命题 的证明 1.3

命题 1.3 的 (i) 部分的证明改编自 Rogers 关于 $\mathbb{R}^n$ 的相应结果 [18]。设 ϕ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的施瓦茨函数，满足 supp $\hat{}\phi \subset (-1,1)$，且 $\hat{}\phi(\xi) \ge 0, \xi \in (-1,1)$，并且 $\hat{}\phi(\xi) \ge 1, \xi \in (-1/2, 1/2)$。对于 $h \in (0, 1/2)$，令

$$\phi_h(y) = \frac{1}{\sqrt{h}}\phi\Big(\frac{y}{h}\Big), \quad y \in \mathbb{R},$$

并令

$$\widetilde{\phi}_h(x) = \sqrt{h}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\phi}(hk)e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{T}.$$

注意，ϕ_h 和 e ϕ_h 在 L^2 中已归一化。对于 $m, n \ge 1$，令

$$\Phi_h(y) = \phi_h(y_1)\cdots\phi_h(y_n), \quad y = (y_1,\cdots,y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

并令

$$\widetilde{\Phi}_h(x) = \widetilde{\phi}_h(x_1)\cdots\widetilde{\phi}_h(x_m), \quad x = (x_1,\cdots,x_m) \in \mathbb{T}^m.$$

根据 Burq 的半经典色散估计，G´erard 和 Tzvetkov [7, 引理 2。5], 我们有

$$\left\|e^{i\varepsilon_0 h\Delta_{\mathbb{T}}}\widetilde{\phi}_h\right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \le C$$

对于充分小的常数 ε_0。因此

$$\left\|e^{i\varepsilon_0 h\Delta_{\mathbb{T}^m}}\widetilde{\Phi}_h\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^m)} = \left\|e^{i\varepsilon_0 h\Delta_{\mathbb{T}}}\widetilde{\phi}_h\right\|^m_{L^\infty(\mathbb{T})} \le C.$$

由于 $e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m}}$ 在 t 中是 2π-周期的，因此

$$\left\|e^{-i(2\pi-\varepsilon_0 h)\Delta_{\mathbb{T}^m}}\widetilde{\Phi}_h\right\|_{L^\infty(\mathbb{T}^m)} \le C. \tag{5.1}$$

另一方面，由于 $2\pi-\varepsilon_0 h \approx 1$，根据标准色散估计（参见 [18], 第 2 节），我们有

$$\left\|e^{-i(2\pi-\varepsilon_0 h)\Delta_{\mathbb{R}^n}}\Phi_h\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \left\|e^{-i(2\pi-\varepsilon_0 h)\Delta_{\mathbb{R}}}\phi_h\right\|^n_{L^\infty(\mathbb{R})} \le Ch^{\frac{n}{2}}. \tag{5.2}$$

因此，令

$$f(x,y) = e^{-i(2\pi-\varepsilon_0 h)\Delta_{\mathbb{T}^m}}\widetilde{\Phi}_h(x)\cdot e^{-i(2\pi-\varepsilon_0 h)\Delta_{\mathbb{R}^n}}\Phi_h(y),$$

由推论 2.3(i)、(5.1) 和 (5.2) 可得

$$\|f\|_{W^{\alpha,p}(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n)} \le Ch^{-\alpha}h^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}. \tag{5.3}$$

注意到对于 $|\tau| \le \varepsilon_0 h^2$ 和 $|x|, |y| \le \varepsilon_0 h$（必要时令 ε_0 减小），由傅里叶反演可得

$$\left|e^{i\tau\Delta_{\mathbb{T}^m}}\widetilde{\Phi}_h(x)\right| \ge Ch^{-\frac{m}{2}}, \quad \left|e^{i\tau\Delta_{\mathbb{R}^n}}\Phi_h(y)\right| \ge Ch^{-\frac{n}{2}}.$$

因此，对于 $t \in 2\pi-\varepsilon_0 h + [0,\varepsilon_0 h^2]$ 和 $|x|, |y| \le \varepsilon_0 h$,

$$\left|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}}f(x,y)\right| = \left|e^{i(t-1+\varepsilon_0 h)\Delta_{\mathbb{T}^m}}\widetilde{\Phi}_h(x)\right|\cdot\left|e^{i(t-1+\varepsilon_0 h)\Delta_{\mathbb{R}^n}}\Phi_h(y)\right| \ge Ch^{-\frac{m+n}{2}}.$$

积分后可得

$$\left\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}}f\right\|_{L^q(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n, L^r[0,1])} \ge Ch^{-(m+n)(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}h^{\frac{2}{r}}. \tag{5.4}$$

结合（ 5.3）与（5.4），并令$h \to 0^+$，可知要使（1.18）成立，必须有 e

$$\alpha \ge (m+n)\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\Big) + n\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\Big) - \frac{2}{r}.$$

再证明命题1.3的 (ii) 部分。设 Φ_h, Φ_h 如上。令 $f(x,y) = \Phi_h(x)\Phi_h(y)$。由于 $|\square_K f| \approx h^{(m+n)/2}\widehat{\ }\sigma_K|$ 对 $|K| \le h^{-1}$，可得

$$\begin{aligned}\|f\|_{M^\alpha_{p,q}} &\le C\Big(\sum_{|K|\le h^{-1}} h^{-\alpha q}h^{\frac{(m+n)q}{2}}\Big)^{1/q} \\ &= Ch^{(m+n)(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})-\alpha}.\end{aligned} \tag{5.5}$$

另一方面，对于 $0 \le t \le \varepsilon_0 h^2$ 和 $|x|$, $|y| \le \varepsilon_0 h$,

$$\left|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}}f(x,y)\right| = \left|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m}}\widetilde{\Phi}_h(x)\right|\cdot\left|e^{it\Delta_{\mathbb{R}^n}}\Phi_h(y)\right| \ge Ch^{-\frac{m+n}{2}}.$$

Thus

$$\left\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}}f\right\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])} \ge Ch^{-(m+n)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})+\frac{2}{p}}. \tag{5.6}$$

结合（5.5）和（5.6），并令$h \to 0^+$，我们得到必要条件

$$\alpha \geq (m+n)\Big(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)-\frac{2}{/}p.$$

对于条件 $\alpha \geq 0$，选取 K_0 使得 $h^{-1}/2 \leq |K_0| \leq h^{-1}$，并令 $\hat{f} = \sigma_{K_0}$。由于$\|f\|_{M^{\alpha}_{p,q}} \leq Ch^{-\alpha}$，$\|e^{it\Delta_{\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n}} f\|_{L^p(\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n\times[0,1])} \geq C$，(1.19) 立即推出 $\alpha \geq 0$。综上，要使 (1.19) 成立，必须满足

$$\alpha \geq \max\left\{0,(m+n)\Big(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)-\frac{2}{p}\right\}.$$

This 证明了命题 1.3的 (ii) 部分，命题1.3 的证明完毕 e.

注 5.1。在上述 (i) 部分的证明中取 $p = q$ 且 $r = \infty$，可见定时估计 (*1.9*) 在 $t = 2\pi$附近，当 $\alpha < (m+2n)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})$时不能一致成立。另一方面，可以证明，当 t 是 2π 的有理数倍时，(1.9) 中的范围 $\alpha \geq 2n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})$（参见[25]）。

致谢。作者谨向 S.M. Guo 致以谢意，感谢他提供的有益讨论。X. Chen 获得了国家自然科学基金项目（批准号：11901593 和 12071490）的资助。Z. Guo 获得了澳大利亚研究理事会 DP200101065 项目的资助。L. Yan 获得了国家重点研发计划项目（编号：2022YFA1005700）、国家自然科学基金项目（编号：11871480）以及澳大利亚研究理事会（ARC）研究项目（编号：DP190100970）的资助。

参考文献

1. A. Barron，关于半周期薛定谔方程的全时间斯特里卡茨估计。《PDE分析》14（2021），第4期，1125–1152。2. A. Barron、M. Christ 和 B. Pausader，圆柱面 $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$ 上薛定谔方程的整体端点斯特里卡茨估计。《非线性分析》206（2021），论文编号112172，共7页。´3. A. B´enyi、K. Gr¨ochenig、K.A. Okoudjou、L.G. Rogers，调制空间上的酉傅里叶乘子。《泛函分析杂志》246（2）（2007），366–384。4. D. Bhimani、R. Carles，负正则性傅里叶-勒贝格空间和调制空间中非线性薛定谔方程的范数膨胀。《傅里叶分析及其应用杂志》26（2020）第6期，论文编号78，共34页。5. J. Bourgain，某些格点子集的傅里叶变换限制现象及其在非线性演化方程中的应用。I. 薛定谔方程。《几何与泛函分析》3（1993），107–156。6. J. Bourgain 和 C. Demeter，l^2 解耦猜想的证明。《数学年刊》182（2015），351–389。7. N. Burq、P. G´erard 和 N. Tzvetkov，紧流形上的斯特里卡茨不等式与非线性薛定谔方程。《美国数学杂志》126（2004），569–605。8. X. Cheng、Z.H. Guo、K.L. Yang 和 L.F. Zhao，关于波导 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{T}$ 上三次散焦非线性薛定谔方程的散射。《伊比利亚美洲数学评论》36（2020），985–1011。9. C. Demeter，《傅里叶限制、解耦及其应用》。《剑桥高等数学研究》184卷，剑桥大学出版社，剑桥，2020。10. H.G. Feichtinger，维纳型巴拿赫卷积代数，载于：《函数、级数、算子》，第I、II卷，布达佩斯，1980；载于：《J´anos Bolyai数学学会研讨会论文集》第35卷，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1983，第509–524页。11. C. Gao、C. Miao 和 J. Zheng，分数阶薛定谔算子的改进局部平滑估计。《伦敦数学学会会刊》54（2022），第1期，54–70。12. L. Grafakos，《经典傅里叶分析》，第三版。《数学研究生教材》第249卷，施普林格，纽约（2014）。

13. Z. Guo、T. Oh 和 Y. Wang，无理环面上的薛定谔方程的斯特里卡茨估计。《伦敦数学会会刊》109（2014），975–1013。14. L. Guth、H. Wang 和 R. Zhang，$\mathbb{R}^3$ 中圆锥的尖锐平方函数估计。《数学年刊》192（2020），551–581。15. A.D. Ionescu 和 B. Pausader，$\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3$ 上能量临界散焦非线性薛定谔方程的整体适定性。《数学物理通讯》312（2012），781–831。16. R. Killip 和 M. Visan，环面上的尺度不变Strichartz估计及其应用。《数学研究快报》23（2016），445–472。17. A. Miyachi，关于 $H^p(R^n)$ 上的一些傅里叶乘子。东京大学理学部纪要，IA数学27（1980），157–179。18. K.M. Rogers，薛定谔方程的局部平滑估计。《数学进展》219（2008），2105–2122。19. R. Schippa，调制空间中的平滑估计及具有慢衰减初始数据的非线性薛定谔方程。《泛函分析杂志》282（2022），第5期，论文编号109352，共46页。20. M.X. Shen，将 L^p 乘子从 $\mathbb{R}^{m+n}$ 转移到 $\mathbb{T}^m\times\mathbb{R}^n$ 及其应用。预印本（2022）。21. C.D. Sogge，平面上的奇性传播与极大函数。《数学创刊》104（1991），349–376。22. E.M. Stein，《调和分析：实变量方法、正交性与振荡积分》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1993。23. H. Takaoka 和 N. Tzvetkov，关于在 $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$ 上给定数据的二维非线性薛定谔方程。《泛函分析杂志》182（2001），427–442。24. T. Tao，抛物面的尖锐双线性限制估计。《几何与泛函分析》13（2003），1359–1384。25. M. Taylor，球面上的薛定谔方程。《太平洋数学杂志》209（2003），145–155。26. B.X. Wang、Z.H. Huo、C.C. Hao、Z.H. Guo，《非线性演化方程的调和分析方法》I，世界科学出版公司，哈肯萨克，新泽西州，2011。Xianghong Chen，数学系，中山大学，广州，510275，中华人民共和国 电子邮箱：chenxiangh@mail.sysu.edu.cn Zihua Guo，数学科学学院，莫纳什大学，VIC 3800，澳大利亚 电子邮箱：zihua.guo@monash.edu Minxing Shen，数学系，中山大学，广州，510275，中华人民共和国 电子邮箱：shenmx3@163.com Lixin Yan，数学系，中山大学，广州，510275，中华人民共和国 电子邮箱：mcsylx@mail.sysu.edu.cn