arXiv:2301.05468v1 [math.DS] 13 Jan 2023

在 $\mathbb{S}^2$ 和 $\mathbb{RP}^2$ 上远端且极小作用的群

史恩辉和 Hui Xu

摘要。设 X 为二维球面 $\mathbb{S}^2$ 或实射影平面 $\mathbb{RP}^2$。我们证明，若 Γ 是在 X 上极小且远端作用的有限生成群，则 Γ 含有一个非阿贝尔自由子群。

1. 引言

本文旨在继续研究以下问题：

> 给定一个离散群 G 和一个紧致度量空间 X，G 能否在 X 上产生远端且极小的作用?

这个问题的答案涉及对 G 的代数结构和 X 的拓扑的讨论。这里，我们主要关注 X 为闭曲面的情形（即没有边界的紧致连通二维流形）。围绕这一主题，已有若干相关研究。Furstenberg 的一项重要结果表明，如果一个非平凡空间 X 允许局部紧阿贝尔群的远离极小作用，那么 X 不可能是单连通的（见 [4, 定理 11。1] 或 [1, 第 7 章—定理 16]）。在 [9],中，Shi 进一步证明，如果一个连续统 X 允许可恰群的远端极小作用，那么 X 的整数系数第一 Čech 上同调群 $\check{H}^1(X)$ 非平凡；特别地，如果 X 是一个 CW复形，那么 X 的基本群不可能是有限群；因此，二维球面 $\mathbb{S}^2$ 和实射影平面 $\mathbb{RP}^2$ 不允许可解群的远端极小作用。Bronˇsteˇın 证明，如果 X 是一个连通、局部连通、有限维的紧致度量空间，并且允许某个群的远端极小作用，那么 X 必须是一个流形，且基本群 $\pi_1(X)$ 是虚幂零的（[3]）；这意味着，除球面 $\mathbb{S}^2$、实射影平面 $\mathbb{RP}^2$、环面 $\mathbb{T}^2$和克莱因瓶 $\mathbb{K}^2$之外，任何闭曲面都不允许任何群的远端极小作用。Shi 证明，没有任何闭曲面允许 SL(n $\mathbb{Z}$)（其中 $n \geq 3$）的远端极小作用（[10]）。

以下是本文的主定理。回顾一下，如果一个群 G 不包含自由非阿贝尔子群，则称其为小群。

2010年数学主题分类。37B05。关键词与短语：远离性、可 amenable 群、自由群、极小性、上同调。1

定理 1.1。设 X 为二维球面 $\mathbb{S}^2$ 或实射影平面 $\mathbb{RP}^2$。如果 Γ 是一个在 X 上作极小且远离作用的有限生成群，那么 Γ 包含一个非阿贝尔自由子群。等价地说，小群不允许在 X 上产生远端极小作用。

这里我们指出，小群的范围严格大于可解群的范围，因此该定理并不能由 [9] 中的主定理推出；而且，利用 $\mathbb{S}^2$ 和 $\mathbb{RP}^2$，很容易在 $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ 上构造远端极小作用。此外，当 X 是环面 $\mathbb{T}^2$ 或克莱因瓶 $\mathbb{K}^2$时，该定理不成立，因为阿贝尔群在其上存在远端极小作用（见附录）。

现在，我们将已知的关于闭曲面上远端极小群作用存在性的一切结果汇总如下表。

闭曲面	存在性	不存在性
$\mathbb{S}^2, \mathbb{RP}^2$	$\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$	小群，$SL(n\ \mathbb{Z})(n \geq 3)$
$\mathbb{T}^2, \mathbb{K}^2$	$\mathbb{Z}$	$SL(n\ \mathbb{Z})(n \geq 3)$
其他		任意群

2. 预备知识

本节仅列出证明主定理时将用到的定理，不再提及 [9, 10] 中已经出现的相关概念和记号。

定理 2.1. [1, p.98] 设 $(X, G\ \phi)$ 和 $(Y, G\ \psi)$ 是远端极小作用，且 $f: X \to Y$ 是一个同态。那么 f 是开映射。

定理 2.2. [1, p.104] 假设 X 不只是一个单点。若 $(X, G\ \phi)$ 是远离极小作用，则它有一个非平凡的等度连续因子。

定理 2.3. [3, 定理 3.17.12] 设 $\pi: (X, G\ \phi) \to (Y, G\ \psi)$ 是极小系统之间的一个同态。假设 π是开映射且 G 是有限生成的。若 $(Y, G\ \psi)$ 是等度连续的，并且存在某个 $y \in Y$，使得 $f^{-1}(y)$ 是零维的，那么 $(X, G\phi)$ 也是等度连续的。

定理 2.4. [1, p.52] 设 $(X, G\ \phi)$ 是等度连续的。那么，关于一致收敛拓扑，$\overline{C(X, X)}$ 中 $\phi(G)$ 的闭包是一个紧拓扑群。

定理 2.5. [8] 设 $(X, G\ \phi)$ 和 $(Y, G\ \psi)$ 是远端极小作用，且 $f: X \to Y$ 是一个同态。那么，对每个 $y \in Y$，都有 $\dim(Y) + \dim(f^{-1}(y)) = \dim(X)$。

定理 2.6. [3, 定理 3.17.10] 设 $(X, G\ \phi)$ 是一个远离极小系统，其中 X 是有限维、连通且局部连通的紧致度量空间，则 X 是一个流形。

定理 2.7。[5, 推论 4。25] 设 G 是一个紧李群，$\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数。则 $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$，其中 $Z(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$的中心，且 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 是半单的。

定理 2.8。 [5, 推论 1。103]设 G 是一个维数为 n 的紧致连通交换李群。那么 G 同构于 n 维环面 $\mathbb{T}^n$。

定理 2.9。 [11, 定理 3.50] 设 G 是一个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的连通李群。那么，G 的中心是 G 的一个闭李子群，其李代数为 $\mathfrak{g}$ 的中心。

定理 2.10。[6, p.65] 设 X 是一个紧致度量空间，且 (X, G) 是群 G 在 X 上的群作用。假设 G 是紧群。那么，对每个 $x \in X$，G/G_x 同胚于 Gx，其中 $G_x = \{g \in G : gx = x\}$。

定理 2.11。[6, p.99] 设 G 是一个紧群，U 是单位元 e 的一个开邻域。那么，U 包含 G 的一个闭正规子群 H，使得 G/H 同构于一个李群。

定理 2.12。 [6, p.61] 设 X 是一个紧致度量空间，且 (X，G) 是群 G 在 X 上的群作用。假设 G 是紧群，H 是 G 的一个闭正规子群。那么，G/H 可通过令 $gH \cdot H(x) = H(gx)$ 作用于 X/H，其中 $gH \in G/H$ 且 $H(x) \in X/H$。

我们用 $\check{H}^1(X)$ 表示 X 的第一 Čech 上同调群，取整数系数 s.

定理 2.13. [9, 推论 2.15] 设 $f : X \to Y$ 是从连续统 X 到连续统 Y 的开映射。那么 $f^* : \check{H}^1(Y) \to \check{H}^1(X)$ 是单射。

定理 2.14. [2, 定理 1.3] 设 G 是一个维数为 d 的连通非可解实李群。那么 G 的任意有限生成稠密子群都包含一个秩为 2d 的稠密自由子群。

众所周知，紧致连通豪斯多夫空间是局部连通且可度量化的，当且仅当它是闭区间 $[0, 1]$ ([7, 定理 8.18]) 的连续像。因此，以下结果可直接得出。

定理 2.15. 设 X 是一个紧致度量空间，且连通并局部连通；设 Y 是一个豪斯多夫空间。若存在连续满射 $f : X \to Y$，则 Y 局部连通且可度量化。

3. 主定理的证明

引理 3.1. 设 X 为二维球面 $\mathbb{S}^2$ 或实射影平面 $\mathbb{RP}^2$。设 Γ 是一个有限生成群，且 $\phi : \Gamma \to \mathrm{Homeo}(X)$ 是 X 上的远离极小作用。那么 $(X\ \Gamma, \phi)$ 是等度连续的。

证明。反设 ϕ不是等度连续的。根据定理 2.2，设 $(Y\ \Gamma, \psi)$ 是 $(X\ \Gamma, \phi)$ 的最大等度连续因子，其因子映射为 π。根据定理 2.5、定理 2.6 和定理 2.15，Y 是一个维数为 ≤ 2 的紧流形。若 $\dim(Y) = 2$，则由定理 2.5 可知，对于每个 $x \in X$，$\dim(\pi^{-1}(x)) = 0$。

结合定理 2.3 和定理 2.1 可知 $(X\ \Gamma,\phi)$ 是等度连续的，这与假设矛盾。因此，我们可以假设 $\dim(Y)\ =1$；这意味着 Y 是圆 $\mathbb{S}^1$。由于 π 是开集且 $\check{}H^1(\mathbb{S}^1)$ 是整数群，根据定理 2.1 和定理 2.13，可知 $\check{}H^1(X)$ 是无限集，这就产生了矛盾。□

引理 3.2. 设 G 是一个连通紧李群，它在一个基本群有限的闭曲面 X 上忠实且传递地作用。那么 G 是半单的。

证明。反设 G 不是半单的。那么根据定理 2.7、定理 2.8 和定理 2.9，G 的中心的连通分支 $Z(G)_0$ 同构于某个环面 $\mathbb{T}^n$，其维数为 $n\ >0$。令 $K\ =Z(G)_0$。对于 $x\ \in X$，令 $Stab(x):=\{k\ \in K:kx\ =x\}$表示 K 中 x 的稳定子。由定理 2.10，Kx 同胚于 K/Stab(x)，后者也是一个环面。因此 Kx 要么是一个点，要么是一个圆。若对每个 $x\ \in X$，Kx 都是一个圆，则类似于引理 3.1 中的论证，X/K 是一个圆，且具有整数系数的 Čech 上同调群 $\check{}H^1(X)$ 是无限的。这是矛盾的。因此，存在某个 $x_0\in X$，使得 $Kx_0=x_0$。由于 K 位于 G 的中心，对每个 $g\ \in G$ 都有 $Kgx_0=gKx_0=gx_0$。注意到 $Gx_0=X$，K 在 X 上的作用是平凡的，这与该作用的忠实性矛盾。因此，G 是半单的。□

主定理的证明。设 $\phi:\Gamma\to Homeo(X)$ 是远离极小作用。由引理 3.1 可知，$(X\ \Gamma,\phi)$ 是等度连续的。令 K 为 $\phi(\Gamma)$ 在 $Homeo(X)$ 上的一致拓扑下的闭包。由定理 2.4 可知，K 是一个在 X 上传递作用的紧致度量群。根据定理 2.11，我们可以取 K 的一个闭正规子群 N，使得 K/N 是李群，且 X/N 不是单点。于是，它自然地诱导出 K 在 X/N 上的作用，并且自然商映射 $X\ \to X/N$ 是一个等度连续扩张。因此，由定理 2.5、定理 2.6 和定理 2.15 可知，X/N 是一个维数为 ≤ 2 的流形。类似于引理 3.1 中的论证，我们有 $\dim(X/N)\ =2$。

设 $p:\mathbb{S}^2\to X$ 是一个覆盖，$q:X\ \to X/N$ 是商映射。设 $\pi:Y\ \to X/N$ 是普遍覆盖，且 $\frown qp:\mathbb{S}^2\to Y$ 是 qp 的提升。由于 π 是开集，且 p 和 q 是局部同胚，因此可知 $\frown qp$ 是开映射。因此，$\frown qp(\mathbb{S}^2)$ 在 Y 中既开又闭。由连通性可得 $Y\ =\frown qp(\mathbb{S}^2)$。所以 Y 是紧致的（与 $\mathbb{S}^2$ 同胚）。因此，π 是有限覆盖，进而 X/N 的基本群是有限群。

现在考虑 K/N 在 X/N 上的自然作用（见定理 2.12）。由于连通分支 $(K/N)_0$ 在 K/N 中具有有限指数，K/N 在 X/N 上的 $_0$ 作用仍然是传递的，并且 $\phi(\Gamma)\ N\cap(K/N)_0$ 在 $(K/N)_0$ 中是稠密的。应用引理 3.2，我们看到 $(K/N)_0$ 的一个商群是半单的。这与定理 2.14 一起推出了 Γ 中自由非阿贝尔子群的存在。□

4. 附录

在本附录中，我们证明克莱因瓶上存在一个极小远端同胚。

设环面 $\mathbb{T}^2$ 为 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$。则存在一个 $\mathbb{Z}_2$ 群作用作用于 $\mathbb{T}^2$，其定义为

$$h(x,y) = (x+\frac{1}{2}, 1-y) \mod \mathbb{Z}^2,$$

其中，h 是 $\mathbb{Z}_2$中的非单位元。容易看出，该作用是自由且适当不连续的，并且商空间 $\mathbb{T}^2/\mathbb{Z}_2$ 是克莱因瓶 $\mathbb{K}^2$。

现在，对于 $\mathbb{T}^2$上的同胚 T，若它与 h 交换，即 $Th = hT$，则它在 $\mathbb{K}^2$上诱导出一个同胚 $\tilde{T}$。

设 α 为一个无理数，并设 $\phi\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 为一个连续映射。此外，定义同胚 $T\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 为

$$T(x,y) = (x+\alpha, y+\phi(x)) \mod \mathbb{Z}^2.$$

系统 $(\mathbb{T}^2, T)$ 是一个斜积系统。众所周知，由于它是一个极小等度连续系统的群扩张，因此该系统是远距的。以下定理刻画了此类斜积系统的极小性。

定理 4.1. [1, 第 5 章，定理 10] 上述定义的系统 $(\mathbb{T}^2, T)$ 是极小的，当且仅当对于每个 $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$，不存在连续函数 $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 使得 $f(x+\alpha) = f(x) + k\phi(x)$ 对每个 $x \in \mathbb{T}$均成立。

现在我们取 $\phi\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 为 $\phi(x) = 1 - |1-2x|$，其中 $x \in [0,1)$。通过比较傅里叶系数可知，不存在连续函数 $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 使得 $f(x+\alpha) = f(x) + k\phi(x)$ 对每个 $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$均成立。因此，根据定理 4.1，系统 $(\mathbb{T}^2, T)$ 是极小的。容易计算得，对于每个 $(x, y) \in \mathbb{T}^2$，$Th(x, y) = (x+\alpha+\frac{1}{2}, 1-y+\phi(x+\frac{1}{2}))$，且 $hT(x, y) = (x+\alpha+\frac{1}{2}, 1-y-\phi(x))$。注意，

$$\phi(x+\frac{1}{2}) = \begin{cases} 1-2x, & x \in [0,1/2) \\ 2x-1, & x \in [1/2,1) \end{cases} \text{ and } -\phi(x) = \begin{cases} -2x, & x \in [0,1/2) \\ 2x-2, & x \in [1/2,1) \end{cases}.$$

因此可知，T 与 h 可交换，故其在$\mathbb{K}^2$ 上诱导的同胚 $\tilde{T}$ 也是极小且远距的。

参考文献

[1] J. Auslander，《极小流及其扩张》。荷兰北部数学研究丛书，第 153 卷。数学札记 ´，[数学札记], 122。荷兰北部出版公司，阿姆斯特丹，1988年。

[2] E. Breuillard、T. Gelander，《李群中的稠密自由子群》。《代数学杂志》261（2003），448—467。

[3] I. Bronˇsteˇın, 《极小变换群的扩张》, Suthoff & Noordhoff, 1979年。[4] H. Furstenberg, 《远距流的结构》。《美国数学杂志》85（1963年）, 477—515。[5]A. Knapp, 《李群导论》（第二版）。PM 140, Birkhäuser, 2002年。[6] D. Montgomery、L. Zippin, 《拓扑变换群》。Interscience Publishers, 纽约—伦敦, 1955年。[7] S. Nadler, 《连续统理论》, 载于《纯粹与应用数学专著和教科书》第158卷。Marcel Dekker, Inc., 纽约, 1992年。导论。[8] M. Rees, 《以流形为相空间的极小远距变换群的结构》, 学位论文, 华威大学, 考文垂, 英格兰。[9]E. Shi, 《具有可 amenable 群远离极小作用的连续统》。arXiv:2001.03755。[10] E. Shi, 《曲面上的远距高秩格作用》。arXiv:2001.01183。[11] F. Warner, 《可微流形与李群基础》。Springer-Verlag, GTM 94, 1983年。
（E.H. Shi）苏州大学数学科学学院, 苏州 215006, 中华人民共和国电子邮件地址：ehshi@suda.edu.cn（H. Xu）中国科学院吴文俊数学重点实验室, 中国科学技术大学, 合肥, 安徽 230026, 中国电子邮件地址：huixu2734@ustc.edu.cn