arXiv:2301.05470v2 [math.AG] 1 Aug 2023

环群概形与阿布扬卡尔引理

环群概形与阿布扬卡尔引理

Philippe Gille

摘要。我们定义了在正则亨泽尔环 A 沿严格正规交叉除子 D的局部化上定义的环约化群概形的概念。我们给出了判定是否存在给定类型的抛物子群的准则。

摘要。 我们定义了在亨泽尔环 A 沿严格正规交叉除子D的局部化上定义的环约化群概形的概念。我们建立了一个判据，用以判断此类群概形是否包含给定类型的抛物子群概形。

关键词：约化群概形、正规交叉除子、抛物子群。

MSC 2000：14L15，20G15，20G35。

法文摘要

设 A是一个正则亨泽尔局部环，配有一组参数 $f_1,\dots,f_r$。记 k为 A的剩余域，记 D为除子 $D=\mathrm{div}(f_1)+\cdots+\mathrm{div}(f_r)$，它具有严格正规交叉。令 $X=\mathrm{Spec}(A)$，$U=X\setminus D=\mathrm{Spec}(A_D)$。阿布扬卡尔理论描述了 $U=X\setminus D=\mathrm{Spec}(A_D)$的有限连通 étale 覆叠，这些覆叠沿 D [10, XIII.2]温和分歧。这样的对象被一个如下形式的伽罗瓦覆叠支配

$$B_n=B[T_1^{\pm 1},\dots,T_r^{\pm 1}]/(T_1^n-f_1,\dots,T_r^n-f_r)$$

其中 n表示一个与 k的特征互素的整数 ≥ 1，而 B是一个包含单位根的原始 n次根的 A–伽罗瓦代数。伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(B_n/A_D)$是半直积 $\mu_n(B)^r\rtimes\mathrm{Gal}(B/A)$，其中 $\mu_n(B)^r$通过乘法作用于 $T_1,\dots,T_r$。若 G是一个局部有限表示的群概形，则 1-上循环 $z:\mathrm{Gal}(B_n/A_D)\to G(B_n)$若取值于 $G(B)\subset G(B_n)$，就称为环路（英语为 loop）。这一术语的灵感来自与 Laurent 多项式 [7, ch. 3]情形的类比。

记作 $X=\widehat{\mathrm{Spec}(A)}$在其闭点处的爆破是一个正则概形 [9, §8.1，定理 1.19]，且例外因子 $E\subset X$是一个与 $\mathbb{P}_k^{r-1}$同构的 Cartier 因子。于是记 $R=\mathcal{O}_{\hat{X},\eta}$ E的泛点处的局部环为 η。该环 R是离散赋值环，其分式域为 K，剩余域为

日期：2023年8月2日。

$F = k(E) = k(t_1, \dots, t_{r-1})$，其中 t_i 表示 $\frac{f_i}{f_r} \in R$ 在特化映射 $R \to F$ 下的像。于是记 $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ 为与 R 相关的离散赋值，并记 K_v 为 K 的完备化。本文的主要结果如下。

定理 (摘自定理 3.1)。 假设 G 作用于一个 A–概形 Z，且该概形是本征且光滑的。设 ϕ 是关于 G 的一个回路 1-上循环。记 ${}_\phi Z/U$ 为由 ϕ 扭曲得到的 $Z \times_X U$。则以下断言等价：

(a) $({}_\phi Z)(U) \neq \emptyset$;
(b) $({}_\phi Z)(K_v) \neq \emptyset$.

这与关于 Laurent 多项式的一个结果 [7, §，定理 7.1] 相当接近。其主要应用涉及回路约化群概形的情形。根据定义，若一个 U-约化群概形 G 同构于其分裂形式 G_0 经取值于自同构群概形 Aut(G_0) 的回路 1-上循环扭曲后所得的概形，则称其为回路约化群概形。于是，将上述结果应用于给定类型的 G_0 的 A–抛物子群概形（定理 4.1）。由此可得，例如，若 G 是一个 U-回路约化群概形，则 G 存在一个 U–Borel 群概形，当且仅当 K_v–群概形 G_{K_v} 是拟分裂的。更一般地， G 的各向同性受 G_{K_v} 的 Tits 指标控制。

1. 引言

在参考文献 [7], 中，我们研究了 Laurent 多项式环 $k[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ 上的环约化群概形理论。借助 Bruhat–Tits 理论，我们得以将这些群概形的研究与迭代洛朗级数域 $k((t_1)) \dots ((t_n))$ 上约化代数群的研究联系起来。本文的主要目标是，为定义在正则亨泽尔环 A 在严格正规交叉除子 D 处的局部化 A_D 上的约化群概形，开启一种类似的研究方法，并将其与定义在一个自然的域上的代数群联系起来；这个域与 A 和 D 相关，具体而言，是分式域 K 关于由谱 A 沿其极大理想爆破所产生的赋值的完备化 K_v。连接这两种观点的例子是 $k[[t_1, \dots, t_n]][\frac{1}{t_1}, \dots \frac{1}{t_n}]$，其中 $K_v \cong k\big(\frac{t_1}{t_n}, \dots, \frac{t_1}{t_{n-1}}\big)((t_n))$。

在此情形下定义环约化群概形的概念之后，我们证明，对于这类群概形，在局部化 A_D 上存在抛物子群这一性质，由 K_v 上的抛物子群所决定（定理 4.1）。

致谢。 我们感谢 R. Parimala 分享她对本文所呈结果的见解。最后，我们感谢审稿人认真审阅了稿件。

2. 温和基本群

2.1. Abhyankar 引理。

设 $X = \mathrm{Spec}(A)$ 是一个正则局部概形（此处暂不假设其为亨泽尔的）。设 k 为 A 的剩余域， $p \geq 0$ 为其

$\widehat{}$特征。记 $\mathbb{Z}' = \prod_{l\neq p} \mathbb{Z}_l$。设 K 为 A的分式域， K_s 为 K的一个可分闭包。它确定了一个基点 ξ： Spec(K) $\to X$ ，以便我们可以讨论格罗腾迪克基本群 $\Pi_1(X,\xi)$ [10]。

设 $(f_1,\ldots,f_r)$ 是 A 的正则序列，并考虑除子 $D = \sum D_i = \sum \mathrm{div}(f_i)$，它具有严格正规交叉。令 $U = X \setminus D = \mathrm{Spec}(A_D)$。

回忆一下，有限 étale 覆盖 $V \to U$ 相对于 D 是温和分歧的，当且仅当相应的 étale K–代数 $L = L_1 \times \cdots \times L_a$ 在 $D_i's$ 处温和分歧；也就是说， $\widetilde{}$ 对每个 i，都存在 j_i ，使得对于 L_{j_i}/K 的伽罗瓦闭包 L_{j_i}/K ，与 v_{D_i} 相关联的惯性群的阶与 p [10, 互素 XIII.2.0]。

Grothendieck 和 Murre 定义了相对于 $U \subset X$ 的温和（法语为$modéré$）基本群$\Pi_1^D(U,\xi)$，其定义见 [10, XIII.2.1.3] 和 [8, §2]。这是 $\Pi_1(U,\xi)$ 的一个仿有限商，其被开子群取商后给出 U 的有限伽罗瓦温和覆盖。

设 $V \to U$ 是一个有限 étale 驯性覆盖。在这种情况下，Abhyankar 引理断言存在一个平 Kummer 覆盖 $X' =$谱(A') $\to X$ ，其中

$$A' = A[T_1,\ldots,T_r]/(T_1^{n_1} - f_1,\ldots,T_r^{n_r} - f_r)$$

且各个 n_i 与 p 互素，使得 $V' = V \times_X X' \to X'$ 唯一延拓为一个有限 étale 覆盖 $Y' \to X'$ [10, XIII.5.2]。

引理 2.1。 设 $V \to U$ 是一个驯性的有限 *étale* 覆盖。那么 $\mathrm{Pic}(V) = 0$。

证明。 我们沿用上文的记号。我们知道 X' 是正则的 [10, XIII.5.1] ，因此特别是局部唯一分解的。由此可知，限制映射 Pic(X') $\to$ Pic(V') $\to$Pic(V) 是满射 [5, 21.6.11]。由于 A' 是局部环 A上的有限代数，因此它是半局部的，所以 Pic(A') $=$ Pic(X') $= 0$。于是 Pic(V) $= 0$ ，证毕。 □

从现在起，我们假设 A 是亨泽尔的。根据 [5, 18.5.10], ，有限A–环 A' 是亨泽尔局部环的有限直积。注意到 $A' \otimes_A k =$$k[T_1,\ldots,T_r]/($$T_1^{n_1},\ldots,T_r^{n_r}$) 是一个局部阿廷代数，因此 A' 是连通的。由此可知， A' 是一个亨泽尔局部环。其极大理想为 $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}\otimes_A A' + \langle T_1,\ldots,T_r\rangle$，因此 $A'/\mathfrak{m}' = k$。由于 A（分别为 A'）的有限 étale 覆盖范畴与 étale k– 代数 [5, 18.5.15], 的范畴等价，从 A 到 A' 的基变换给出了 A 的有限 étale 覆盖范畴与 A' 的有限 étale 覆盖范畴之间的范畴等价。

由此可知， $Y' \to X'$ 唯一地下降为一个有限 étale 覆盖 $\widetilde{f}: \widetilde{Y} \to X$。从现在起，我们进一步假设 V 是连通的，这意味着

$$H^0(V,\mathcal{O}_V) = B[T_1,\ldots,T_r]/(T_1^n - f_1,\ldots,T_r^n - f_r)$$

其中 B 是 A的有限连通 étale 覆盖。因此， $V \to U$ 是一个具有如下形式的伽罗瓦覆盖的商

$$B_n = B[T_1^{\pm 1},\ldots,T_r^{\pm 1}]/(T_1^n - f_1,\ldots,T_r^n - f_r)$$

其中 B 是 A 的伽罗瓦覆盖，且包含一个本原 n次单位根。注意到， B_n是 $B'_n = B[T_1, \dots, T_r]/(T_1^n - f_1, \dots, T_r^n - f_r)$在 $T_1 \dots T_r$处的局部化。我们有

$$\mathrm{Gal}(B_n/A_D) = \big(\prod_{i=1}^{r} \mu_n(B)\big) \rtimes \mathrm{Gal}(B/A).$$

取归纳极限后，我们得到一个同构

$$\pi_1^t(U, \xi) \cong \big(\prod_{i=1}^{r} \widehat{\mathbb{Z}}'(1)\big) \rtimes \pi_1(X, \xi).$$

我们将 $f\colon U^{sc,\,t} \to U$ 表示与 $\pi_1(U, \xi)$ 的商$\pi_1^t(U, \xi)$ 相关联的有限生成 étale 覆盖。根据 [8, 定理 2.4.2], ，它是 U 的通用温和分歧$\widetilde{\ }$覆盖。它是 B'_n 的归纳极限 B' 的局部化。另一方面$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$，我们考虑 B's 的归纳极限 B ，并注意到 B' 是一个 B-环。

2.2. **爆破**。 我们采用由 [5, 引理 15.1.1.6]$\widehat{\ }$ 导出的爆破构造。我们将 $X = \mathrm{Spec}(A)$ 在其闭点处的爆破记为 X ； 这是一个正则$\widehat{\ }$概形 [9, §8.1，定理 1.19] ，且例外除子 $E \subset X$ 是一个与 $\mathbb{P}_k^{r-1}$ 同构的 Cartier 除子。我们将 E 的一般点 η 处的局部环记为 $R = \mathcal{O}_{\hat{X},\,\eta}$。环 R 是一个分式域为 K、剩余域为 $F = k(E) = k(t_1, \dots, t_{r-1})$ 的离散赋值环，其中 t_i 是 $\frac{f_i}{f_r} \in R$ 在特化映射下的像。我们将与 R 相关联的离散赋值记为 $v : K^\times \to \mathbb{Z}$。

现在我们处理如上所述的 B_n 关于 A_D 的伽罗瓦扩张。由于 B 是 A 的连通有限 étale 覆盖， B 是正则局部环；此外，它还是亨泽尔的 [5, 18.5.10]。我们将 L 记为 B 的分式域，将 L_n 记为 B_n 的分式域。我们有 $[L_n : L] = n^r$。我们希望将赋值 v 延拓到 L 和 L_n。

我们将 B 的剩余域记为 $l = B/\mathfrak{m}_B$ ，这是 k 的有限伽罗瓦域扩张。此外，$(t_1, \dots, t_r)$ 是 B 的一组参数系。我们将 $w : L^\times \to \mathbb{Z}$ 记为与在闭点处对 $\mathrm{Spec}(B)$ 作爆破所得例外除子相关联的离散赋值。于是 w 延拓了 v ，且 L_w/K_v 是一个次数为$[L : K]$ 的非分歧扩张，其剩余域扩张为 $F_l = l(t_1, \dots, t_{r-1})/k(t_1, \dots, t_{r-1})$。

另一方面，我们将与 $\mathrm{Spec}(B_n)$ 在其闭点处爆破所得方案的例外除子相关联的离散赋值记为 $w_n : L_n^\times \to \mathbb{Z}$ 。令 $l_n = B_n/\mathfrak{m}_{B_n}$，则有 $l = l_n$。 L_n 上的赋值 $\frac{w_n}{n}$延拓了 w ，其剩余域扩张为 $F_{l,\,n} = l\Big(t_1^{1/n}, \dots, t_{r-1}^{1/n}\Big)/k\big(t_1, \ldots\ldots, t_{r-1}\big)$ ，因此 $[F_{l,n} : F_l] = n^{r-1}$。此外， L_n/L 的分歧指数 e_n 为 $\geq n$。由于 $n^r \leq e_n\,[F_{l,n} : F_l] \leq [L_n : K] = n^r$（最后一个不等式见 [2, §VI.3，命题 2]） ，可得 $e_n = n$。同一结论表明映射 $L_w \otimes_L L_n \to L_{w_n}$ 是同构。总之， L_{w_n}/L_w是温和分歧的，分歧指数为 n ，次数为 n^r。综上，$L_{w_n} = L_w \otimes_K L_n$ ，因此 L_{w_n} 是群为 $\prod_i \mu_n(B) \rtimes \mathrm{Gal}(B/A) = \prod_i \mu_n(l) \rtimes \mathrm{Gal}(l/k)$ 的 K_v 上的伽罗瓦扩张。

我们将对角嵌入 Δ 记为 $\mu_n(l) \subset \prod_i \mu_n(l)$。令 $L_{w_n}^{\Delta} = L_n^{\Delta(\mu_n(B))}$。由于 K_v的一个一致化参数是 t_r，且对每个 $\zeta \in \mu_n(B)$ 都有 $\Delta(\zeta)\ .t_r = \zeta.t_r$，可得 $(L_{w_n})^{\Delta}$ 是 L_{w_n}/K_v的最大非分歧扩张。

2.3. **环余循环与环挠子**。设 G 是一个局部有限表示的 X–群概形。环余循环是 $Z^1\big(\pi_1^t(U)\ G(\widetilde{B})\big)$ 中的一个元素，并且它定义了 $Z^1(\pi_1^t(U)\ G(U^{sc,\ t}))$ 中的一个伽罗瓦余循环。我们将映射 $Z^1\big(\pi_1^t(U)\ G(\widetilde{B})\big) \to Z^1(\pi_1^t(U)\ G(U^{sc,\ t}))$ 的像记为 $Z^1_{loop}(\pi_1^t(U)\ G(U^{sc,\ t}))$，并将映射的像记为 $H^1_{loop}(U, G)$

$$Z^1\big(\pi_1^t(U), G(\widetilde{B})\big) \to H^1(\pi_1^t(U), G(U^{sc,t})) \to H^1(U, G).$$

我们称 U 上的一个 G-扭子 E（分别地，一个 fppf 层 G-扭子）为环挠子，若其类属于 $H^1_{loop}(U, G) \subset H^1(U, G)$。

给定的类 $\gamma \in H^1_{loop}(U, G)$ 由某个如上所述的覆盖 B_n/A 上的 1–余循环 $\phi : \mathrm{Gal}(B_n/A_D) \to G(B)$ 表示。它在 $\mathrm{Gal}(B_n/A_D)$ 的子群 $\mathrm{Gal}(B/A)$ 上的限制 $\phi^{ar} : \mathrm{Gal}(B/A) \to G(B)$ 称为“算术部分”，另一个限制$\phi^{geo} : \prod_i \mu_n(B) \to \mathfrak{G}(B)$ 称为几何部分。我们注意到 ϕ^{geo} 是一个 B-群同态。

此外，对于 $\sigma \in \mathrm{Gal}(B/A)$ 和 $\tau \in \prod_i \mu_n(B)$，对 [7, 页 16] 的计算表明 $\phi^{geo}(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \phi^{ar}(\sigma)\ {}^{\sigma}\phi(\tau)\ \phi^{ar}(\sigma)^{-1}$，因此 ϕ^{geo}下降为 A-群概形的同态 $\phi^{geo} : \mu_n^r \to {}_{\phi^{ar}}G$。这给出了环余循环的参数化。

引理 2.2. *(1)* 对于上述的 B_n/A_D，映射 $\phi \mapsto (\phi^{ar}, \phi^{geo})$ 在 $Z^1_{loop}\big(\mathrm{Gal}(B_n/A_D)\ G(B)\big)$ 与满足 $z \in Z^1\big(\mathrm{Gal}(B/A)\ G(B)\big)$且 $\eta : \prod_i \mu_n \to {}_zG$ 为 A–群同态的有序对 (z, η) 之间构成一个双射。

(2) 映射 $\phi \mapsto (\phi^{ar}, \phi^{geo})$ 在 $Z^1_{loop}\big(\pi^1(U, \xi)^t, G(\widetilde{B})\big)$ 与满足 $z \in Z^1\big(\pi^1(X, \xi)\ G(\widetilde{B})\big)$ 且 $\eta\colon \prod_{i=1}^r \widehat{\mathbb{Z}}' \to {}_zG$ 为 A–群同态的有序对 (z, η) 之间构成一个双射。

证明. 这与 [7, 引理 3.7] 类似。 □

我们更仔细地考察有限 étale X–群概形 $\mathfrak{F}$ 具有常数次数 d的情形。

~**引理 2.3.** *(1)* $\mathfrak{F}(B) = \mathfrak{F}(X^{sc}) = \mathfrak{F}(U^{sc,t})$.

(2) 我们假设 d与 p互素。我们有 $H^1_{loop}(U, \mathfrak{F}) = H^1(U, \mathfrak{F})$. *(3)* 我们假设 d 与 p互素。设 $f\colon \mathfrak{F} \to \mathfrak{H}$ 是 A–群概形（局部有限型）之间的一个同态。那么 $f_*\Big(H^1(U, \mathfrak{F})\Big) \subset H^1_{loop}(U, \mathfrak{H})$.

证明。(1) 已知存在如上所述的覆盖 B_n/A_D，使得 $\mathfrak{F}_{B_n} \cong \Gamma_{B_n}$ 是有限常值。由于 B 和 B_n 连通，映射 $\mathfrak{F}(B) \to \mathfrak{F}(B_n)$ 可写为

恒等映射 $\Gamma \cong \mathfrak{F}(B) \to \mathfrak{F}(B_n) \cong \Gamma$，因此是双射。取极限可得$\sim\mathfrak{F}(B) = \mathfrak{F}(U^{sc,\,t})$。

(2) 设 $\mathfrak{E}$ 是 $\mathfrak{F}$ 上的一个 U–挠子。这是一个有限 étale U–概形。由于 U 是诺特且连通的，我们有分解 $\mathfrak{E} = V_1 \times_U \cdots \times_U V_l$，其中每个 V_i 都是一个连通的有限 étale U–概形，次数为常数 d_i。我们有 $d_1 + \cdots + d_l = d$，因此可以假设 d_1 与 p 互素。于是有 $\mathfrak{E}(V_1) \neq \emptyset$。

由此可知，$f_1 : V_1 \to U$ 是一个有限 étale 覆盖，因此存在一个分解 U^{sc}, $^t \to V_1 \xrightarrow{h} U$，使得 f 满足 $\mathfrak{E}(U^{sc},^t) \neq \emptyset$。因此，$[\mathfrak{E}]$ 来源于$H^1(\pi_1^t(U,\xi)\ \mathfrak{F}(U^{sc},^t)) \subset H^1(U,\mathfrak{F})$。由此可知，$H^1(\pi_1^t(U,\xi)\ \mathfrak{F}(U^{sc},^t)) \xrightarrow{\sim} H^1(U,\mathfrak{F})$。现在利用 (1)，得到所需的双射 $H^1(\pi_1^t(U,\xi)\ \mathfrak{F}(B)) \xrightarrow{\sim} H^1(U,\mathfrak{F})$。(3) 这可由 (2) 直接得出。 □

2.4. 通过环上扭子进行扭曲。假设 A–群概形 G 作用于一个A–概形 Z上。设 $\phi : (\prod_i^r \mu_n)(B) \rtimes \mathrm{Gal}(B/A) \to G(B)$ 是一个环余循环。它给出 μ_n^r 在 ${}_\phi{}^{ar}Z$上的一个 A–作用。我们将此作用的不动点轨迹记为 $({}_\phi{}^{ar}Z)^{\phi^{geo}}$，它可表示为 ${}_\phi{}^{ar}Z$ [4, A.8.10.(1)]的一个闭 A–子概形。我们有一个 U-概形的闭嵌入 $({}_\phi{}^{ar}Z)^{\phi^{geo}} \times_X U \subset {}_\phi Z$。

3. 不动点方法

定理 3.1。设 $X = \text{谱}(A)$ 是一个亨泽尔正则局部概形，并设 $U = X\backslash D$ 如上。我们将 $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ 记为与在其闭点处对 X 进行爆破所得的例外除子 E 相关联的离散赋值。

设 G 是一个有限表示的仿射 A-群概形，它作用于一个适当光滑的A–概形 Z上。设 ϕ 是 G的一个环余循环。那么 $Y = \left({}_\phi{}^{ar}Z\right)^{\phi^{geo}}$ 是一个光滑适当的A–概形，且以下条件等价：

(i) $({}_\phi Z)(K_v) \neq \emptyset$;
(ii) $Y(k) \neq \emptyset$;
(iii) $Y(U) \neq \emptyset$;
(iv) $({}_\phi Z)(U) \neq \emptyset$。

这与不动点定理 [7, §，定理 7.1] 相当类似。下面的例子阐明了两者之间的联系。

例 3.2。我们假设，对于一个域 k，$A = k[[t_1,\ldots,t_r]]$ 且 $k[U] = k[[t_1,\ldots,t_n]]\left[\frac{1}{t_1},\ldots,\frac{1}{t_r}\right]$。我们考虑一个仿射代数 k群 G，它作用于一个光滑适当的 k概形 Z。在这种情形下，$K = k((t_1,\ldots,t_r))$，且 A 嵌入于$k\left(\frac{t_1}{t_r},\ldots,\frac{t_{r-1}}{t_r}\right)[[t_r]]$，从而 K 嵌入于$k\left(\frac{t_1}{t_n},\ldots,\frac{t_{r-1}}{t_r}\right)((t_r))$，后者正是完备域 K_v。若 Q 是 U上的一个环 G挠子，那么该命题就是说，${}^QZ(U) \neq \emptyset$ 当且仅当 ${}^QZ(K_v) \neq \emptyset$。取一个关于 E的余循环 $\phi \in Z^1(\pi_1(U)^t, G(k_s))$，这可改述为：$({}_\phi Z)(U) \neq \emptyset$ 与$({}_\phi Z)(K_v) \neq \emptyset$等价。

由 [7, 定理 7.1]（在零特征下成立，但可推广到这种驯性情形）可知，$({}_\phi Z)(k[t_1^{\pm 1},\dots,t_r^{\pm 1}]) \neq \emptyset$ 与 $({}_\phi Z)\big(k((t_1))\dots((t_r))\big) \neq \emptyset$ 等价。由于 $({}_\phi Z)(k[t_1^{\pm 1},\dots,t_r^{\pm 1}]) \subset ({}_\phi Z)(U)$，且 $({}_\phi Z)\big(K_v\big) \subset ({}_\phi Z)\big(k((t_1))\dots((t_r))\big)$，因此定理 3.1 的这一特殊情形是 [7] 的不动点结果的推论。

我们继续证明定理 3.1。

证明。根据 [4, A.8.10.(1)]，$Y = \big({}_{\phi^{ar}}(Z^{\phi^{geo}})\big)$ 是一个闭的 A–概形，具有 ${}_{\phi^{ar}}Z$，因此它是适当的。根据同一文献的第 (2) 点，它在 X 上光滑。设 $\phi : \mathrm{Gal}(B_n/A_D) \to G(B)$ 是如上某个伽罗瓦覆盖 B_n/A_D 对应的环路 1-余循环，其中 n 与 p 互素。将 G 替换为 ${}^{\phi^{ar}G}$，并将 G 替换为 ${}^{\phi^{ar}Z}$ 后，不失一般性，我们可以假设 $\phi^{ar} = 1$。

$(ii) \implies (iii)$。由于 Y_k 是光滑 X–概形 Y 的特殊纤维，亨泽尔引理表明 $Y(A) \to Y(k)$ 是满射。由于 $Y(k)$ 非空，因此 $Y(A)$ 非空，故 $Y(U)$ 也非空。

$(iii) \implies (iv)$。由于 $Y(U) \subset {}_\phi Z(U)$，$Y(U) \neq \emptyset$ 意味着 ${}_\phi Z(U) \neq \emptyset$。

$(iv) \implies (i)$。这是显然的。

$(i) \implies (ii)$。我们假设 $({}_\phi Z)(K_v) \neq \emptyset$。根据定义，我们有

$$({}_\phi Z)(K_v) = \big\{ z \in Z(L_{w_n}) \mid \phi(\sigma).\sigma(z) = z \ \ \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(L_n/K) \big\}$$

并且我们的假设是这个集合非空。令 O_{w_n} 为 $Z(L_{w_n})$ 的赋值环。由于 Z 在 X 上是适当的，我们有一个特化映射 $Z(L_{w_n}) = Z(\mathcal{O}_{w_n}) \to Z_k(F_{l,\ n})$。我们得到该集合

$$\big\{ z \in Z_k(F_{l,n}) \mid \phi(\sigma).\sigma(z) = z \ \ \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(L_{w_n}/K_v) \big\}$$

非空。由于我们有一个嵌入

$$F_{l,n} = l\big(t_1^{1/n},\dots,t_{r-1}\big) \ \hookrightarrow \ l\Big(\big(t_1^{1/n}\big)\Big)\dots\Big(\big(t_{r-1}^{1/n}\big)\Big)$$

在更高阶的洛朗级数域中，对坐标 $t_1^{1/n}$,..., $t_{r-1}^{1/n}$ 依次进行特化，同样可以证明该集合

$$\Big\{ z \in (Z_k)\big(l\big) \mid \phi(\sigma).\sigma(z) = z \ \ \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(L_{w_n}/K_v) \Big\} \tag{3.1}$$

非空。由于 $\eta^{ar} = 1$，该集合是 $(Z_k)^{\eta^{geo}}(k)$。因此 $Y(k) = (Z_k)^{\eta^{geo}}(k)$ 非空。□

4. 环约化群概形的抛物子群

4.1. 切瓦莱群。 设 G_0 为定义在 $\mathbb{Z}$ 上的切瓦莱群。设 T_0 为 G_0 的一个极大分裂 $\mathbb{Z}$ 子环面，并设 B_0 为包含它的一个博雷尔子群。我们用 Δ_0 表示 (G_0, B_0, T_0) 的邓金图。我们用 $G_{0,ad}$ 表示伴随

G_0 的商，并用 G_0^{sc}表示 DG_0的单连通覆盖。我们有一个映射 Aut(G_0) → Aut(G_0^{sc}) $\xrightarrow{\sim}$ Aut($G_{0,ad}$)，以及一个基本正合列

$$1 \to G_{0,ad} \to \mathrm{Aut}(G_{0,ad}) \to \mathrm{Out}(G_{0,ad}) \to 1$$

其中 Out($G_{0,ad}$) $\xrightarrow{\sim}$ Aut(Δ_0)。我们回顾一下，在 Δ_0 的有限子集与包含 B_0 [11, XXVI.3.8] 的 G_0 的抛物子群之间存在一个双射 $I \to P_{0,I}$；该双射关于包含序是递增的，特别是 $B_0 = P_{0,\emptyset}$ 和 $G_0 = P_{0,\Delta_0}$。我们考虑 G_0 的抛物子群的总概形 Par$_{G_0}$；它是一个射影光滑的 $\mathbb{Z}$– 概形，并配有类型映射 t : Par$_{G_0}$ →Of(Δ_0)，其中 Of(Δ_0) 表示与 Δ_0 [11,XXVI.3] 的子集集合相对应的有限常概形。I 处的纤维记为 Par$_{G_0,I}$，它的纤维连通，并且是 G_0 的类型为 I 的抛物子群概形。Aut(G_0) 在 Par$_{G_0}$ 上有一个自然作用。与 [6, §5.1], 中一样，我们将 I 在此作用下的稳定子记为 Aut$_I$(G_0)。根据构造，Aut$_I$(G_0) 作用于 Par$_{G_0,I}$。

4.2. **定义**。设 G 是 Demazure-Grothendieck [11, XIX]意义下的约化 U-群概形。由于 U 是连通的，且 G 在 étale 拓扑下局部可分裂 [11, XXII.2.2], 因此 G 是上述定义在 $\mathbb{Z}$上的 Chevalley 群的 étale 形式 G_0 。

若 Aut(G_0)-主丛 Q = Isom(G_0, G)（定义见 [11, XXIV.1.9]）是环 Aut(G_0)-主丛，我们就称 G 为环群概形。记$G_{0,ad}$ 为 G_0 的伴随商，记 G_0^{sc}为 DG_0的单连通覆盖。我们有映射 Aut(G_0) → Aut(G_0^{sc}) $\xrightarrow{\sim}$ Aut($G_{0,ad}$)，由此可将 G_{ad}（分别将 G^{sc}）视为$G_{0,ad}$（分别为 G_0^{sc}）的扭形式，因此 G_{ad} 和 G^{sc} 也是环约化群概形。我们考虑映射 Aut(G_0) → Aut($G_{0,ad}$) → Out($G_{0,ad}$) $\xrightarrow{\sim}$ Aut(Δ_0)。

如果 ϕ : Gal(B_n/A_D) → Aut(G_0)(B) 是一个环余循环，我们便得到 Gal(B_n/A_D) 在 Δ_0 上的一个作用，称为星作用。如果 I 在星作用下稳定，我们可以用 ϕ 扭曲 Par$_{G_0,\ I}$，并考察概形 $_\phi$Par$_{G_0,\ I}$；它是 G 上类型为 I 的抛物子群概形所构成的概形。

4.3. **抛物子群**。

定理 4.1. 设 G 是一个环约化的 U-群概形，并令 ϕ :Gal(B_n/A_D) → Aut(G_0)(B) 为一个环余循环，满足 $G \cong {}_\phi G_0$。令 $I \subset \Delta_0$ 为在由 ϕ 定义的星作用下稳定的子集。则以下条件等价:

(i) G 存在一个类型为 I 的 U–抛物子群; ***(ii)*** k–态射 η_k^{geo} : $\mu_n^r \to \mathrm{Aut}(\ {}_{\eta^{ar}}G_0)_k = \left({}_{\eta^{ar}}\mathrm{Aut}(G_0)\right)_k$ 规范化 $_{\eta^{ar}}G_{0,\ k}$ 的一个类型为 I 的抛物 k–子群; ***(iii)*** G_{K_v} 存在一个类型为 I 的抛物子群。

证明。 不失一般性，我们可以假设 G 是伴随的。关于星作用的假设可改述为: ϕ 的取值属于 Aut$_I$(G_0)。我们将定理 3.1 应用于 Aut$_I$(G_0) 在适当的 A-概形 Par$_{G_0,I}$上的作用。我们考虑

概形 $A(\phi^{ar}\mathrm{Par}_{G_0,I})^{\phi^{geo}}$。定理 3.1 表明，以下陈述等价。

(i') $(\phi\mathrm{Par}_{G_0,I})(U) \neq \emptyset$;
(ii') $Y(k) \neq \emptyset$。(iii') $(\phi$
$\mathrm{Par}_{G_0,I})(K_v) \neq \emptyset$。

显然，(i') 等价于定理的条件 (i)，类似地我们有 $(iii') \Longleftrightarrow (iii)$。剩下的任务是证明 (ii) 与 (ii') 等价。

假设 $(\phi^{ar}\mathrm{Par}_{G_0,I})^{\phi^{geo}}(k)$ 非空，并取一个 k–点 z。那么稳定子 $(_{\phi^{ar}}G_0)_z$ 是 $_{\phi^{ar}}G_0$ 的一个 k– 抛物子群，其类型为 I，并且在 ϕ_k^{geo} 的作用下保持不变。换言之，ϕ_k^{geo} 正规化 $(_{\phi^{ar}}G)_z$。反过来，假设 $_{\phi^{ar}}G$ 存在一个由 ϕ^{geo} 正规化的、类型为 I 的 k– 抛物子群。那么它定义了一个点 $z \in (\phi^{ar}\mathrm{Par}_{G_0,I})(k)$，该点在 ϕ^{geo} 下不变。

□

4.4. 一个例子。 假设剩余域 k 的特征不为 2，并考虑维数为 2^r的对角二次型

$$q = \sum_{I\subset\{1,\dots,r\}} u_I\, t^I(x_I)^2$$

其中 $t_I = \prod_{i\in I} t_i$ 和 $u_I \in A^\times$。那么 $\mathrm{SO}(q)$ 是 U上的环约化群概形。由于射影二次超曲面 $\{q = 0\}$ 是 $\mathrm{SO}(q)$ 的抛物子群概形，定理 4.1 表明，q 在 A_D 上各向同性，当且仅当 q 在 K_v上各向同性。二维情形与 [3, 对定理 3.1]的证明有关。

参考文献

[1] A. Borel，《线性代数群》，第2版，数学研究生教材**126**（Springer，纽约，1991）。[2] N. Bourbaki，《交换代数》，第1至10章，Springer。[3] J.-L. Colliot-Thélène、R. Parimala、V. Suresh，《函数域上的齐性空间的拼接与局部-整体原理》，*p-adic curves*，Comment. Math. Helv. **87**（2012），1011-1033。[4] B. Conrad、O.Gabber、G. Prasad，《伪约化群》，剑桥大学出版社，第二版（2016）。[5] A. Grothendieck（与 J. Dieudonné 合作），《代数几何基础 IV》，高等科学研究所数学出版物，第20、24、28和32号（1964—1967）。[6] P. Gille，《关于半单群概形的分类》，《群概形专题 III》，综述与综合**47**（2015），39-110。[7] P. Gille 和 A. Pianzola，《扭子、约化群概形与扩张仿射李代数》，美国数学会回忆录**1063**（2013）。[8] A. Grothendieck、J. P. Murre，《概形上具有正规交叉的除子的形式邻域的温和基本群》，数学讲义**208**（1971），Springer-Verlag，柏林-纽约。[9] Q. Liu，《代数几何与算术曲线》，牛津数学研究生教材**6**（2002），牛津大学出版社，牛津。

[10] 高等科学研究所代数几何研讨班，《*étale* 覆盖与基本群》，由 *A. Grothendieck* 主持，数学文献第3卷（2003），法国数学学会。[11] 高等科学研究所代数几何研讨班，*1963—1964*年，《群概形》，由 *M. Demazure* 和 *A. Grothendieck* 主持，数学讲义151-153。Springer（1970）。

UMR5208 卡米耶·若尔当研究所 - 里昂第一大学 11月11日大道43号 69622 维勒班邮政代办处 - 法国电子邮箱地址：gille@math.univ-lyon1.fr