arXiv:2301.05495v1 [math.ST] 13 Jan 2023

一类平滑的、可能具有数据自适应性的经验 copula 的重抽样技术

Ivan Kojadinovic[1] **和 Bingqing Yi**[1,2]

[1] *CNRS / Université de Pau et des Pays de l'Adour / E2S UPPA*
Laboratoire de mathématiques et applications IPRA, UMR 5142B.P. 1155, 64013 Pau Cedex, France

[2] *School of Mathematics & Statistics*
The University of Melbourne$_{Parkville}$, VIC 3010, Australia

摘要：我们研究了在利用近期提出的一类平滑的、可能具有数据自适应性的非参数估计量，对基础未知 copula 进行统计推断时，两种重抽样技术的有效性。该类估计量包含经验 Bernstein copula（因此也包含经验贝塔 copula）。遵循 Kiriliouk、Segers 和 Tsukahara (2021) 的做法，第一种重抽样技术基于从平滑估计量中抽取样本，因此只能用于独立观测的情形。第二种技术是所谓的序贯依赖乘子自助法的一种平滑扩展，因而可用于时间序列情形，并可能用于变点分析。我们将所研究的两种重抽样方案分别应用于置信区间构造，以及多元时间序列截面依赖变化的离线检测。蒙特卡洛实验证实，与相应的非平滑推断程序相比，这类平滑推断程序可能具有优势。本研究还考察了两类用于估计 copula 一阶偏导数的平滑估计量的弱相合性和有限样本性能；这些估计量可应用于均值回归和分位数回归。

2010年数学主题分类：主要分类 62G05；次要分类 62G20。**关键词与短语：**数据自适应光滑经验 copula、经验贝塔 copula、copula 一阶偏导数的平滑数据自适应估计量、光滑自助法、平滑序贯依赖乘子自助法、强混合。

目录

1 引言.22 平滑的、可能具有数据自适应性的经验 copula 及其渐近性质 42.1 平滑的、可能具有数据自适应性的非参数 Copula 估计量 52.2 相关序贯过程的渐近性质.73 独立同分布情形下从估计量中抽样进行自助法 . . 103.1 从平滑经验 copula 中抽样.113.2 渐近有效性结果.123.3 两种平滑自助法的有限样本比较 13

4 时间序列情形下的平滑序贯依赖乘子自助法.16

4.1 主要直觉与现有工作.164.2 独立同分布与依赖乘子序列.164.3 非平滑序贯依赖乘子重复样本 . . . . . 174.4 平滑序贯依赖乘子重复样本 . . . . . 184.5 三种乘子自助法的有限样本比较 204.6 在变点检测中的应用.25

5 copula 一阶偏导数的估计量 28
5.1 基于经验 copula 有限差分的估计量 . . 295.2 两类光滑估计量.305.3 弱相合性.325.4 所选估计量的有限样本性能 34

6 结论.38
A 推论 2.13 的证明.39B 命题 3.3 和引理 B.2 的证明.40C 定理 3.5的证明.42D 定理 4.3的证明.46E 命题 5.3、 5.5、 5.9 和 5.10 的证明.48参考文献.57

1. 引言

设 $\mathscr{X}_{1:n} = (\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$ 是一个 d 维平稳时间序列 $(\boldsymbol{X}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 中连续随机向量的一段。根据 Sklar (1959) 提出的著名定理，每个 F 的多元分布函数（d.f.）$\boldsymbol{X}_i$ 均可表示为

$$F(\boldsymbol{x}) = C\{F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)\}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{1.1}$$

通过唯一的 *copula* C 以及 $F_1, \ldots, F_d$ 的单变量边缘分布 F。表示式（1.1）是概率论、统计学及相关领域诸多应用的基础（例如参见 Hofert 等人，2018 及其中的参考文献），因为它表明 F 可以分两个独立步骤建模：第一步（分别地，第二步）是估计单变量边缘分布 $F_1, \ldots, F_d$（分别地，估计 copula$C$）。本文仅关注 copula 的估计。

对未知 copula 进行统计推断 C 通常需要使用其非参数估计量 C。最著名的是经验 *copula*(R¨uschendorf，1976年；Deheuvels，1979年)，我们将其定义为由 $\mathscr{X}_{1:n}$ 缩放 $1/n$后得到的多元秩的经验分布函数。请注意，后者是分段常数函数，因此不可能是真正的 copula。经验 beta copula 是一种很有前景的平滑非参数估计量：当 C 的分量样本中不存在并列值时，它是真正的 copula；与经验 copula 相比，它的小样本性能也显著更好。 $\mathscr{X}_{1:n}$ 该估计量称为经验 *beta copula*，由Segers、Sibuya 和 Tsuka-hara(2017年)提出，是经验 *Bernstein Copula*的一个特例，后者由以下文献研究：

Sancetta 和 Satchell(2004)以及Janssen、Swanepoel 和 Veraverbeke(2012，当所有底层伯恩斯坦多项式的次数均为 n时。基于Segers、Sibuya 和 Tsukahara(2017年)的研究，Kojadinovic 和 Yi(2022年)近期研究了经验 beta copula 的数据自适应推广形式，这些形式在小样本中的表现甚至更佳。

无论在统计推断中使用何种未知 copula 的非参数估计量 C （1.1）来进行统计推断，通常几乎总是有必要依赖重抽样技术来计算相应的置信区间或 p 值。为了近似经典经验 Copula 的“抽样分布”，文献中一种常用的方法是所谓的乘子自助法（例如参见Scaillet，2005；R´emillard and Scaillet，2009）。当 $\mathscr{X}_{1:n}$ 中的随机向量独立同分布（i.i.d.）时，B¨ucherandDette（2010）发现，与采用经验（多项式）自助法的各种方法相比，前述重抽样方案具有更好的有限样本性质。乘子自助法随后被扩展到时间序列和序贯情形，见B¨ucher and Kojadinovic （2016）以及B¨ucher et al. （2014）。

经验 beta copula 的优势之一是，从中抽取样本特别容易。由此得到的平滑自助法可用于近似经验 beta copula 的“抽样分布”，近期已在理论和实证层面得到研究，见Kiriliouk、Segers 和 Tsukahara（2021）。其中报告的蒙特卡洛实验表明，这种方法是乘子自助法的一种有竞争力的替代方案，而且实现起来简单得多。不过，它有一个实际上的不便之处：上述平滑自助法无法直接扩展到时间序列情形。

本研究的首要目标是在独立同分布情形下，针对依照Kiriliouk、Segers 和 Tsukahara（2021）的方法，为Kojadinovic 和 Yi（2022年研究的光滑、可能具有数据自适应性的 copula 非参数估计量构造平滑自助法。第二个目标是提出相依乘子自助法的平滑版本，以便在时间序列情形下近似上述估计量的“抽样分布”。直观而言，与相应的非平滑程序相比，所得的平滑推断程序有望表现更好，尤其是在数据量较少时。事实上，如前所述，只有当 n 较小时，平滑 copula 估计量才可能显著优于经典经验 copula 等粗糙估计量；例如，参见Segers、Sibuya 和 Tsukahara（2017年）、Kiriliouk、Segers 和 Tsukahara（2021）或Kojadinovic 和 Yi（2022年）报告的有限样本实验。另一个可能适合使用光滑估计量的场景是进行变点检测。事实上，变点检测统计量通常涉及比较基于较小观测值子集计算出的估计量。为涵盖这一应用领域，本研究开展的许多理论探讨都采用了序贯形式。

这项研究的一项附带成果，是考察未知 copula C 在（1.1）中一阶偏导数的两类光滑估计量的弱相合性及有限样本表现，因为进行

相依乘子自助法需要这些估计量。例如，正如 Janssen、Swanepoel 和 Veraverbeke（2016）所述，这类估计量可应用于均值回归和分位数回归，因为它们能够得到条件分布函数的估计量。从实践角度看，我们的研究促成了一种平滑数据自适应估计量的提出，用于估计 C 的一阶偏导数；该估计量的表现显著优于其他方法，其中包括 Janssen、Swanepoel 和 Veraverbeke （2016）所考察的伯恩斯坦估计量。

本文结构安排如下。第二节回顾Kojadinovic 和 Yi (2022年中研究的广义光滑经验 copula 类（可能具有数据自适应性）的定义，以及相关序贯经验过程的渐近性质。第三节探讨对Kiriliouk、Segers 和 Tsukahara (2021)提出的平滑自助法的扩展，该方法可用于近似上述光滑估计量在独立同分布情形下的“抽样分布”。在考察其渐近有效性后，本文报告了有限样本实验的结果，对比了基于经验 beta copula 及其数据自适应扩展（由Kojadinovic 和 Yi (2022年)提出）的平滑自助法。第4节中，为涵盖时间序列情形，我们提出了序贯依赖乘子自助法的自然平滑扩展。在给出渐近有效性结果后，我们比较了乘子自助法不同版本的有限样本性能，并将其应用于多元时间序列横截面依赖性变化的离线检测。后者证实了平滑推断程序相较于非平滑方法可能具有的优势。第五节致力于研究两类光滑估计量，用于估计 C的一阶偏导数：我们考察其弱相合性，并研究所选估计量的有限样本性能。

除非另有说明，本文中的所有收敛均指当 $n \to \infty$ 时的收敛。此外，下文中箭头‘$\rightsquigarrow$’表示 van der Vaart 和 Wellner (2000) 中定义 1.3.3 意义下的弱收敛。给定集合 T， $\ell^\infty(T)$（分别为 $\mathscr{C}(T)$）表示定义在 T 上的所有有界（分别为连续）实值函数所构成的空间，并赋予一致度量。

本文所呈现的所有数值实验均使用 R统计环境（R 核心团队，2022年）及其软件包 `copula`(Hofertet al.，2022年）和 `extraDistr` (Wolodzko，2020) 完成。

2. 平滑的、可能具有数据自适应性的经验 copula 及其渐近性质

本节首先定义 Kojadinovic 和 Yi （2022年）中研究的广义光滑经验 copula 类，这类 copula 可能具有数据自适应性。随后，我们回顾同一文献中建立的相关序贯经验过程的渐近性质。

2.1. 平滑的、可能具有数据自适应性的非参数 *Copula* 估计量

由于下一节将陈述的结果具有序贯性质，以下所有量均针对可用数据 $\mathscr{X}_{1:n} = (\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$ 的一个子区间 $\mathscr{X}_{k:l} = (\boldsymbol{X}_k, \ldots, \boldsymbol{X}_l), 1 \le k \le l \le n$ 定义。

对于任意 $j \in \{1, \ldots, d\}$，令 $F_{k:l,j}$ 为根据 $\mathscr{X}_{k:l}$ 的第 j 个分量子样本 $X_{kj}, \ldots, X_{lj}$ 计算得到的经验分布函数。那么，$R_{ij}^{k:l} = (l-k+1) F_{k:l,j}(X_{ij}) = \sum_{t=k}^{l} \mathbf{1}(X_{tj} \le X_{ij})$ 是 X_{ij} 在 $X_{kj}, \ldots, X_{lj}$ 中的（最大）秩。此外，令

$$\boldsymbol{R}_i^{k:l} = \left(R_{i1}^{k:l}, \ldots, R_{id}^{k:l}\right) \qquad \text{and} \qquad \hat{\boldsymbol{U}}_i^{k:l} = \frac{\boldsymbol{R}_i^{k:l}}{l-k+1}, \qquad i \in \{k, \ldots, l\},$$

为根据 $\mathscr{X}_{k:l}$ 得到的多元秩（分别为多元缩放秩）。按照 R¨uschendorf (1976)，的经验 copula $C_{k:l}$ 定义如下：对于任意 $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_d) \in [0,1]^d$，有

$$C_{k:l}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{l-k+1} \sum_{i=k}^{l} \prod_{j=1}^{d} \mathbf{1}\left(\frac{R_{ij}^{k:l}}{l-k+1} \le u_j\right) = \frac{1}{l-k+1} \sum_{i=k}^{l} \mathbf{1}(\hat{\boldsymbol{U}}_i^{k:l} \le \boldsymbol{u}), \tag{2.1}$$

向量之间的不等式均按分量理解。

接下来，按照 Kojadinovic 和 Yi（2022）的做法，对于任意 $m \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{x} \in (\mathbb{R}^d)^m$ 和 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$, $\nu_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{x}}$ 是一个取值于 $[0,1]^d$ 的均值为 $\boldsymbol{u}$ 的随机向量 $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{x}}$ 的分布律。其分量记为 $W_1^{\boldsymbol{x}}, u_1, \ldots, W_d^{\boldsymbol{x}}, u_d$，以表示第 j 个分量取决于 u_j，但不取决于 $u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_d$。令 $p \ge d$ 为一个固定整数，并令 $\boldsymbol{U}$ 为一个 p 维随机向量，其分量相互独立且服从标准均匀分布。Kojadinovic 和 Yi（2022）考虑了以下假设，正如其中的注 3 所讨论的，该假设可能并不构成限制。

条件 2.1 (平滑随机向量的构造)。对于任意 $m \in \mathbb{N}, \boldsymbol{x} \in (\mathbb{R}^d)^m$ 和 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$，存在一个函数 $\mathscr{W}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{x}}\colon [0,1]^p \to [0,1]^d$，使得 $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{x}} = \mathscr{W}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{U})$。

为了能够在同一个概率空间 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ 上定义任意 $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{X}_{1:n}$ 和任意 $m \le n$ 对应的随机向量 $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x} \in (\mathbb{R}^d)^m, \boldsymbol{u} \in [0,1]^d$，我们假设存在乘积结构，即 $\Omega = \Omega_0 \times \Omega_1 \times \ldots$，其概率测度为 $\mathbb{P} = \mathbb{P}_0 \otimes \mathbb{P}_1 \otimes \ldots$；其中，$\mathbb{P}_i$ 表示 Ω_i 上的概率测度，并且对于任意 $\omega \in \Omega$，$\mathscr{X}_{1:n}(\omega)$ 仅取决于 ω 的第一个坐标，$\boldsymbol{U}(\omega)$ 仅取决于 ω 的第二个坐标，而可能用到的“自助法权重”（将在第 3 节和第 4 节介绍）仅取决于 ω 的其余坐标之一。这尤其意味着 $\mathscr{X}_{1:n}$、$\boldsymbol{U}$ 和可能用到的自助法权重彼此独立。于是，(2.1) 中 $C_{k:l}$ 的一大类平滑版本（其中平滑可能是数据自适应的）可表示为

$$C_{k:l}^{\nu}(\boldsymbol{u}) = \int_{[0,1]^d} C_{k:l}(\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{k:l}}(\boldsymbol{w}), \qquad \boldsymbol{u} \in [0,1]^d. \tag{2.2}$$

直观而言，对于给定的 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$，$C^{\nu}_{k:l}(\boldsymbol{u})$ 可以看作是对 $\boldsymbol{w}$ “在 $\boldsymbol{u}$附近”的 $C_{k:l}(\boldsymbol{w})$ 进行的“加权平均”，权重由平滑分布 $\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{k:l}}$ 决定（该分布可能依赖于观测值 $\mathscr{X}_{k:l}$）。注意，若$k > l$，我们采用约定 $C_{k:l} = C^{\nu}_{k:l} = 0$；并且对于任意 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$，$\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{k:l}}$ 是位于 $\boldsymbol{u}$ 处的狄拉克测度。

注 2.2。给定 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$，令 $\mu_{m,\boldsymbol{u}}$ 为 d 维随机向量 $(S_{m,1,u_1}/m, \ldots, S_{m,d,u_d}/m)$ 的分布律，其中随机变量 $S_{m,1,u_1}, \ldots, S_{m,d,u_d}$ 相互独立，并且对每个 $j \in \{1, \ldots d\}$, S_{m,j,u_j}均服从二项分布(m, u_j)。根据 Segers、Sibuya 和 Tsukahara（2017）第 3 节，所有伯恩斯坦多项式的次数均等于 m 的 $\mathscr{X}_{k:l}$ 的经验 Bernstein copula 为

$$C^{\mathrm{Bern}}_{k:l,m}(\boldsymbol{u}) = \int_{[0,1]^d} C_{k:l}(\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\mu_{m,\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}), \qquad \boldsymbol{u} \in [0,1]^d. \tag{2.3}$$

后者显然是 $C^{\nu}_{k:l}$在（2.2）中的特例。若进一步有 $m = l-k+1$，也就是说，若平滑分布满足 $\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{k:l}} = \mu_{l-k+1,\boldsymbol{u}}$, $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$, $C^{\nu}_{k:l}$在（2.2）中，或者等价地，$C^{\mathrm{Bern}}_{k:l:,m}$ 在（2.3）中，则对应于 $\mathscr{X}_{k:l}$ 所研究的 Segers、Sibuya 和 Tsukahara (2017年）。

对于任意 $m \in \mathbb{N}$、$\boldsymbol{x} \in (\mathbb{R}^d)^m$、$\boldsymbol{r} \in [0,m]^d$ 和 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$，令

$$\mathscr{K}^{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{u}) = \int_{[0,1]^d} \mathbf{1}(\boldsymbol{r}/m \le \boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu^{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}) = \mathbb{E}\left\{\mathbf{1}(\boldsymbol{r}/m \le \boldsymbol{W}^{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{u}})\right\}. \tag{2.4}$$

根据积分的线性性，我们随后可以将 $C^{\nu}_{k:l}$ 中的（2.2）表示为

$$C^{\nu}_{k:l}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{l-k+1} \sum_{i=k}^{l} \mathscr{K}^{\mathscr{X}_{k:l}}_{\boldsymbol{R}^{k:l}_i}(\boldsymbol{u}), \qquad \boldsymbol{u} \in [0,1]^d. \tag{2.5}$$

由于 copula 具有标准均匀边缘分布，因此关注具有标准均匀边缘分布的（2.5）形式的估计量尤其有意义。正如 Kojadinovic 和 Yi （2022年）第3.1节所验证的，以下两个假设意味着后者。

条件 2.3（无并列值）。以概率 *1*，每个分量样本 X_{1j}、……、X_{nj}、$j \in \{1, \ldots, d\}$ 中均不存在并列值，其中 $\mathscr{X}_{1:n}$。

条件 2.4（均匀边缘分布条件）。对于任意 $m \in \mathbb{N}$、$\boldsymbol{x} \in (\mathbb{R}^d)^m$、$\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$ 和 $j \in \{1, \ldots, d\}$、$W^{\boldsymbol{x}}_{j,u_j}$ 的取值属于集合 $\{0, 1/m, \ldots, (m-1)/m, 1\}$。

在 2.4 条件下，根据 Kojadinovic 和 Yi (2022年) 的第 3.2 节，对于任意 $m \in \mathbb{N}$，$\boldsymbol{x} \in (\mathbb{R}^d)^m$，$\boldsymbol{r} \in [1,m]^d$ 以及 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$，$\mathscr{K}^{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{u})$ 在 (2.4) 中可写为

$$\mathscr{K}^{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{u}) = \bar{\mathscr{C}}^{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{u}}\left[\bar{\mathscr{F}}^{\boldsymbol{x}}_{1,u_1}\{(r_1-1)/m\}, \ldots, \bar{\mathscr{F}}^{\boldsymbol{x}}_{d,u_d}\{(r_d-1)/m\}\right], \tag{2.6}$$

其中 $\bar{\mathscr{C}}^{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{u}}$（分别$\bar{\mathscr{F}}^{\boldsymbol{x}}_{1,u_1}$，……，$\bar{\mathscr{F}}^{\boldsymbol{x}}_{d,u_d}$）是随机向量 $\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{u}}$的生存 copula（分别是其边缘生存函数）。此外，若再假设 Kojadinovic 和 Yi （2022年）第 3.2 节中考虑的以下两个条件成立，则可证明，形如（2.5）的估计量是真正的 copula。

条件 2.5（关于平滑生存边缘的条件）。对于任意 $m \in \mathbb{N}$,$\boldsymbol{x} \in (\mathbb{R}^d)^m$, $j \in \{1,\ldots,d\}$ 和 $w \in [0,1)$，函数 $t \mapsto \bar{\mathscr{F}}^{\boldsymbol{x}}_{j,t}(w)$ 在 $[0,1]$ 上右连续且递增。

条件 2.6（关于平滑生存 copula 的条件）。对于任意 $m \in \mathbb{N}$，$\boldsymbol{x} \in (\mathbb{R}^d)^m$ 和 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$，式 $\bar{\mathscr{C}}^{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{u}}$ 中的（2.6）不依赖于 $\boldsymbol{u}$，也就是说，$\bar{\mathscr{C}}^{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{u}} = \bar{\mathscr{C}}^{\boldsymbol{x}}$。

以下结果随后由 Kojadinovic 和 Yi（2022年）证明；参见其中的命题 11 和推论 12。

命题 2.7（$C^{\nu}_{k:l}$ 是真正的 copula）。假设条件 2.3、2.4、2.5 和 2.6均成立。那么，对于任意 $C^{\nu}_{k:l}$，式（2.2）或式（2.5）中的平滑经验 *copula* $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$可表示为

$$C^{\nu}_{k:l}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{l-k+1}\sum_{i=k}^{l} \bar{\mathscr{C}}^{\mathscr{X}_{k:l}}\left\{\bar{\mathscr{F}}^{\mathscr{X}_{k:l}}_{1,u_1}\left(\frac{R^{k:l}_{i1}-1}{l-k+1}\right),\ldots,\bar{\mathscr{F}}^{\mathscr{X}_{k:l}}_{d,u_d}\left(\frac{R^{k:l}_{id}-1}{l-k+1}\right)\right\}, \tag{2.7}$$

并且是真正的 *copula*。

根据上文的注 2.2，我们可以推断，Segers、Sibuya 和 Tsukahara（2017）研究的 $\mathscr{X}_{k:l}$ 的经验 beta copula 具有形式 (2.7)，其中 $\bar{\mathscr{C}}^{\mathscr{X}_{k:l}}$为独立 copula；对于任意 $j \in \{1,\ldots,d\}$ 和 $u \in [0,1]$ $\bar{\mathscr{F}}^{\mathscr{X}_{k:l}}_{u,j}$，它是经 $1/(l-k+1)$ 缩放的二项分布$(l-k+1,u)$ 随机变量的生存函数。因此，后文将其记为 $C^{\mathrm{Bin}}_{k:l}$。作为对经验 beta copula $C^{\mathrm{Bin}}_{k:l}$: of$\mathscr{X}_{k:l}$ 的一种可能改进，Kojadinovic 和 Yi（2022）建议考虑一种形式为 (2.7) 的平滑数据自适应经验 copula，其中 $\bar{\mathscr{C}}^{\mathscr{X}_{k:l}}$ 为经验 beta copula $C^{\mathrm{Bin}}_{k:l}$:；对于任意 $j \in \{1,\ldots,d\}$ 和 $u \in [0,1]$，$\bar{\mathscr{F}}^{\mathscr{X}_{k:l}}_{j,u}$为经 $1/(l-k+1)$ 缩放的贝塔分布-二项分布(m,α,β) 随机变量的生存函数，其中 $m = l-k+1$, $\alpha = u(m-\rho)/(\rho-1)$,$\beta = (1-u)(m-\rho)/(\rho-1)$ 和 $\rho = 4$。后文将所得数据自适应估计量记为 $C^{\mathrm{BetaB4}}_{k:l}$:；在 Kojadinovic 和 Yi（2022）考察的所有二元和三元实验中，其积分均方误差均优于经验 beta copula $C^{\mathrm{Bin}}_{k:l}$。

2.2. 相关序贯过程的渐近性质

现在，我们可以定义与 (2.1) 中的经验 copula 及其在 (2.2) 中的光滑推广相对应的序贯经验过程。令 $\Lambda = \{(s,t) \in [0,1]^2 : s \le t\}$ 且令 $\lambda_n(s,t) = (\lfloor nt \rfloor - \lfloor ns \rfloor)/n$, $(s,t) \in \Lambda$。对于任意 $(s,t) \in \Lambda$ and$\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$，相应的双侧序贯经验 Copula过程定义为

$$\mathbb{C}_n(s,t,\boldsymbol{u}) = \sqrt{n}\lambda_n(s,t)\{C_{\lfloor ns \rfloor+1:\lfloor nt \rfloor}(\boldsymbol{u}) - C(\boldsymbol{u})\}, \tag{2.8}$$

$$\mathbb{C}^{\nu}_n(s,t,\boldsymbol{u}) = \sqrt{n}\lambda_n(s,t)\{C^{\nu}_{\lfloor ns \rfloor+1:\lfloor nt \rfloor}(\boldsymbol{u}) - C(\boldsymbol{u})\}, \tag{2.9}$$

其中 $C_{\lfloor ns \rfloor+1:\lfloor nt \rfloor}$ 和 $C^{\nu}_{\lfloor ns \rfloor+1:\lfloor nt \rfloor}$ 分别在（2.1）和（2.2）中作一般性定义。关于 $\mathbb{C}_n$ 的渐近性质由 B¨ucher 和 Kojadinovic 研究确立

（2016年），而 $\mathbb{C}_n^\nu$ 的渐近性质（我们将在定理 2.10 中回顾）则由 Kojadinovic 和 Yi（2022年）通过推广 Segers、Sibuya 和 Tsukahara（2017年）中使用的论证进行了研究。

以下条件曾在Kojadinovic 和 Yi（2022年）中讨论。

条件 2.8（偏导数光滑）。对于任意 $j \in \{1, \ldots, d\}$，偏导数 $\dot{C}_j = \partial C / \partial u_j$ 存在，且在集合 $V_j = \{\boldsymbol{u} \in [0,1]^d : u_j \in (0, 1)\}$上连续。

条件 2.9（方差条件）。存在一个常数 $\kappa > 0$，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{x} \in (\mathbb{R}^d)^n$, $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$和 $j \in \{1, \ldots, d\}$，$\mathrm{Var}(W_{j,u_j}^{\boldsymbol{x}}) \leq \kappa u_j (1 - u_j) / n$。

第一个条件最初由 Segers （2012）提出；正如该文献所解释的，可认为它没有限制性。本文其余部分中，对于任意 $j \in \{1, \ldots, d\}$， C_j 在集合 $\{\boldsymbol{u} \in [0,1]^d : u_j \in \{0,1\}\}$上任意定义为零，这意味着在条件 2.8下， $\dot{C}_j$ 在整个 $[0,1]^d$上都有定义。第二个条件对定义光滑且可能具有数据自适应性的经验 copula 所涉及的平滑分布的离散程度施加了约束。

定理 2.10（ $\mathbb{C}_n^\nu$的渐近性质）。假设条件 *2.8* 和 *2.9*成立，且 $\mathbb{C}_n \rightsquigarrow \mathbb{C}_C$在 $\ell^\infty(\Lambda \times [0,1]^d)$中，其中极限过程 $\mathbb{C}_C$ 的轨迹几乎必然连续。则，

$$\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ \boldsymbol{u}\in[0,1]^d}} |\mathbb{C}_n^\nu(s,t,\boldsymbol{u}) - \mathbb{C}_n(s,t,\boldsymbol{u})| = o_{\mathbb{P}}(1).$$

因此， $\mathbb{C}_n^\nu \rightsquigarrow \mathbb{C}_C$ 在 $\ell^\infty(\Lambda \times [0,1]^d)$中。

因此，当经典序贯经验 copula 过程 $\mathbb{C}_n$ 在 (2.8) 中弱收敛到轨迹几乎必然连续的极限过程时，平滑序贯经验 Copula 过程 $\mathbb{C}_n^\nu$ 在 (2.9) 与其渐近等价。正如B¨ucher andKojadinovic (2016) 第 3 节所讨论的，要保证这种收敛，只需相应的“一致多元序贯经验过程”弱收敛到轨迹几乎必然连续的极限过程。具体而言，设 $\boldsymbol{U}_1, \ldots, \boldsymbol{U}_n$是由 $\mathscr{X}_{1:n} = (\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$ 通过概率积分变换 $U_{ij} = F_j(X_{ij})$、 $i \in \{1, \ldots, n\}$、$j \in \{1, \ldots, d\}$得到的不可观测样本，并令

$$\mathbb{B}_n(s,t,\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=\lfloor ns \rfloor + 1}^{\lfloor nt \rfloor} \{\mathbf{1}(\boldsymbol{U}_i \leq \boldsymbol{u}) - C(\boldsymbol{u})\}, \qquad (s,t,\boldsymbol{u}) \in \Lambda \times [0,1]^d, \tag{2.10}$$

约定 $\mathbb{B}_n(s, t, \cdot) = 0$ if $\lfloor nt \rfloor - \lfloor ns \rfloor = 0$。上述充分条件可表述如下。

条件 2.11 （ $\mathbb{B}_n$（**0**， ·， ·）） 。 序贯经验过程 $\mathbb{B}_n$（**0**， ·， ·）在 ℓ^∞（$[0,1]^{d+1}$）中弱收敛到一个紧的中心高斯过程 $\mathbb{Z}_C$ ， 其集中于

$$\{f \in \mathscr{C}([0,1]^{d+1}) : f(s,\boldsymbol{u}) = 0 \text{ if one of the components of } (s,\boldsymbol{u}) \text{ is 0, and } f(s,1,\ldots,1) = 0 \text{ for all } s \in (0,1]\}.$$

在条件2.11 （例如， 当（$\boldsymbol{X}_i$）$_{i\in\mathbb{Z}}$ 是强混合的时， 该条件成立； 参见例如 B¨ucher(2015）以及即将推出的第4.1节） ， 由连续映射定理可立即得出 $\mathbb{B}_n \rightsquigarrow \mathbb{B}_C$ 在 $\ell^\infty(\Lambda \times [0,1]^d)$中， 其中

$$\mathbb{B}_C(s,t,\boldsymbol{u}) = \mathbb{Z}_C(t,\boldsymbol{u}) - \mathbb{Z}_C(s,\boldsymbol{u}), \qquad (s,t,\boldsymbol{u}) \in \Lambda \times [0,1]^d. \tag{2.11}$$

对于任意 $j \in \{1,\ldots,d\}$ 以及任意$\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$， 令 $\boldsymbol{u}^{(j)}$ 为由 $[0,1]^d$定义的 $u_i^{(j)} = u_j$ （当 $i = j$ 时取值为1， 否则取值为1的向量。于是， 以下结果可由B¨ucher and Kojadinovic (2016中的定理 3.4 以及B¨ucher 等人(2014)中的命题 3.3 立即推出。

定理 2.12 ($\mathbb{C}_n$ 的渐近性质)。 在条件 *2.8* 和 *2.11*下，

$$\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d} \left|\mathbb{C}_n(s,t,\boldsymbol{u}) - \tilde{\mathbb{C}}_n(s,t,\boldsymbol{u})\right| = o_{\mathbb{P}}(1),$$

其中

$$\tilde{\mathbb{C}}_n(s,t,\boldsymbol{u}) = \mathbb{B}_n(s,t,\boldsymbol{u}) - \sum_{j=1}^{d} \dot{C}_j(\boldsymbol{u})\, \mathbb{B}_n(s,t,\boldsymbol{u}^{(j)}), \qquad (s,t,\boldsymbol{u}) \in \Lambda \times [0,1]^d, \tag{2.12}$$

并且 $\mathbb{B}_n$ 定义见 (2.10)。因此， $\mathbb{C}_n \rightsquigarrow \mathbb{C}_C$ 在 $\ell^\infty(\Lambda \times [0,1]^d)$中， 其中

$$\mathbb{C}_C(s,t,\boldsymbol{u}) = \mathbb{B}_C(s,t,\boldsymbol{u}) - \sum_{j=1}^{d} \dot{C}_j(\boldsymbol{u})\, \mathbb{B}_C(s,t,\boldsymbol{u}^{(j)}), \qquad (s,t,\boldsymbol{u}) \in \Lambda \times [0,1]^d, \tag{2.13}$$

并且 $\mathbb{B}_C$ 定义见 (2.11)。

我们以陈述定理2.10和2.12的一个推论来结束本节。鉴于（2.4） ， 对于任意（ $\mathbb{B}_n$ 在（2.10）中的不可观测经验过程， 可以定义两种自然的光滑扩展： s， t， $\boldsymbol{u}$） $\in \Lambda \times [0,1]^d$， 定义如下：

$$\tilde{\mathbb{B}}_n^{\nu}(s,t,\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=\lfloor ns\rfloor+1}^{\lfloor nt\rfloor} \left\{ \int_{[0,1]^d} \mathbf{1}(\boldsymbol{U}_i \le \boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}}(\boldsymbol{w}) - C(\boldsymbol{u}) \right\}, \tag{2.14}$$

$$\bar{\mathbb{B}}_n^{\nu}(s,t,\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=\lfloor ns\rfloor+1}^{\lfloor nt\rfloor} \left\{ \int_{[0,1]^d} \mathbf{1}(\boldsymbol{U}_i \le \boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{1:n}}(\boldsymbol{w}) - C(\boldsymbol{u}) \right\}. \tag{2.15}$$

结合定理2.12 与Kojadinovic 和 Yi （2022年）中用于证明上述定理2.10 的关键中间结果，我们得到以下光滑序贯经验过程的渐近表示 $\mathbb{C}_n^\nu$，见（2.9）。该结果的证明见附录A。

推论 2.13 ($\mathbb{C}_n^\nu$的渐近表示）。在条件 *2.8*、*2.9*和 *2.11*下，

$$\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d}\left|\mathbb{C}_n^\nu(s,t,\boldsymbol{u})-\tilde{\mathbb{C}}_n^\nu(s,t,\boldsymbol{u})\right|=o_{\mathbb{P}}(1),$$
$$\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d}\left|\mathbb{C}_n^\nu(s,t,\boldsymbol{u})-\bar{\mathbb{C}}_n^\nu(s,t,\boldsymbol{u})\right|=o_{\mathbb{P}}(1),$$

其中，对于任意 $(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d$，

$$\tilde{\mathbb{C}}_n^\nu(s,t,\boldsymbol{u})=\tilde{\mathbb{B}}_n^\nu(s,t,\boldsymbol{u})-\sum_{j=1}^d\dot{C}_j(\boldsymbol{u})\,\tilde{\mathbb{B}}_n^\nu(s,t,\boldsymbol{u}^{(j)}),$$
$$\bar{\mathbb{C}}_n^\nu(s,t,\boldsymbol{u})=\bar{\mathbb{B}}_n^\nu(s,t,\boldsymbol{u})-\sum_{j=1}^d\dot{C}_j(\boldsymbol{u})\,\bar{\mathbb{B}}_n^\nu(s,t,\boldsymbol{u}^{(j)}).$$

备注 2.14。遗憾的是，前面的结果无法让我们判断上述两种关于 $\mathbb{C}_n^\nu$ 的渐近表示哪一种更好。要做到这一点，需要了解其背后的收敛速率。正如我们将在第 4 节中看到的，这些表示将成为时间序列情形下对 $\mathbb{C}_n^\nu$ 进行自助法的平滑方案的基础。

3. 独立同分布情形下通过从估计量中抽取样本进行自助法

本节旨在从理论和实证两方面研究一种平滑自助法 `，其方法源自 Kiriliouk、Segers 和 Tsukahara (2021)，即从上一节定义的光滑估计量中抽取样本。正如引言中所提示的，这种方法只能用于独立同分布情形。因此，本节始终假设 $\mathscr{X}_{1:n}$ 中的随机向量独立同分布。注意，这意味着条件 2.3成立。鉴于变点分析主要关注时间序列情形，我们在下文不考虑序贯情形，而只关注 $k=1$ 且 $l=n$的情况。

本节安排如下。在介绍平滑自助法所依据的抽样算法之后，我们将给出其渐近有效的条件，并报告有限样本实验的结果，比较基于经验 beta copula $C_1^{\mathrm{Bin}}{}_{:\,n}$ 以及基于其数据自适应扩展 $C_1^{\mathrm{BetaB4}}{}_{n}{}_{:}$ 的平滑自助法；该扩展由 Kojadinovic 和 Yi (2022年)提出，并在第 2.1 节末尾回顾。

3.1. 从光滑经验 *copula* 中抽取样本

如第 2.1 节所述，经验 beta copula $C_{1:n}^{\mathrm{Bin}}$ 是光滑估计量 $C_{1:n}^{\nu}$ （2.2）中一个特例。根据 Segers、Sibuya 和 Tsukahara(2017年)（另见Kojadinovic 和 Yi 2022年中的引理 1），可得

$$C_{1:n}^{\mathrm{Bin}}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{d} F_{n,R_{ij}^{1:n}}(u_j), \qquad \boldsymbol{u} = (u_1,\ldots,u_d) \in [0,1]^d, \tag{3.1}$$

其中，对于任意 $n \in \mathbb{N}$和 $r \in \{1,\ldots,n\}$， $F_{n,\,r}$表示形状参数为 $\alpha = r$ 和 $\beta = n+1-r$的贝塔分布的分布函数。由（3.1）可知，$C_{1:n}^{\mathrm{Bin}}$ 是 n d维分布的混合分布，这些分布具有贝塔边缘分布，且其 copula 为独立 copula。因此，要从$C_{1:n}^{\mathrm{Bin}}$ 生成一个随机变量，只需通过在 n 上抽取一个均匀随机数，随机选择混合分布中的一个 $\{1,\ldots,n\}$ 分量，然后从选定的 d维分布中生成一个随机变量。Kiriliouk、Segers 和 Tsukahara (2021) 的算法 3.2 对此作了详细说明。

类似地，考虑到（2.5），要能够从 $C_{1:n}^{\nu}$中抽样，只需假设以下条件成立。

条件 3.1. *($C_{1:n}^{\nu}$* （为混合分布）对于任意 $n \in \mathbb{N}$， $\boldsymbol{x} \in (\mathbb{R}^d)^n$ 且 $\boldsymbol{r} \in \{1,\ldots,n\}^d$， $\mathscr{K}_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{x}}$属于 (2.4) 是定义在 $[0,1]^d$ 上的分布函数。

因此，该抽样算法在概念上与Kiriliouk、Segers 和 Tsukahara (2021) 的算法 3.2 相同。

算法 3.2。 *(从 $C_{1:n}^{\nu}$ 在条件 3.1下抽样)*

1. 从 $\{1,\ldots,n\}$上的离散均匀分布生成 I。 *2.* 从一个 d 维分布中生成一个随机变量 $\boldsymbol{V}^{\#}$ ，其分布函数为 $\mathscr{K}^{\mathscr{X}_{1:}\boldsymbol{R}_I^{1:n}{}^n}$ 。

只要知道如何从分布函数 $\mathscr{K}^{\mathscr{X}_{1:}\boldsymbol{R}_i^{1:n}{}^n}$ 、 $i \in \{1,\ldots,n\}$ 中抽样，上述算法就可以在实践中使用。

有趣的是，第 2.1 节中陈述的三个条件蕴含条件 3.1 ，如下一个结果所示；该结果的证明见附录 B。

命题 3.3。条件 2.4、2.5 和 2.6 蕴含条件 3.1。具体而言，在条件 2.4、2.5 和 2.6 下，对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{x} \in (\mathbb{R}^d)^n$ and $\boldsymbol{r} \in \{1,\ldots,n\}^d$, $\mathscr{K}_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{x}}$， (2.4) 中的对象是 $[0,1]^d$ 上的一个分布函数，其 d 单变量边缘分布 （分别记为 $\mathscr{K}_{r_1}^{\boldsymbol{x}},1,\ldots,\mathscr{K}_{r_d,d}^{\boldsymbol{x}}$）满足 $\mathscr{K}_{r_j,j}^{\boldsymbol{x}}(u) = \mathscr{F}_{j,u}^{\boldsymbol{x}}\{(r_j-1)/n\}, u \in [0,1], j \in \{1,\ldots,d\}$，且其 copula 为 $\mathscr{C}^{\boldsymbol{x}}$。

注3.4. 前述结果为 Kojadinovic 和 Yi (2022年) 的命题 3.3提供了一种替代且更简单的证明。事实上，在命题 $C_{1:n}^{\nu}$ （2.5）中的假设下，是定义在 $[0,1]^d$ 上的多元分布函数的凸组合，因此是定义在 $[0,1]^d$上的多元分布函数。由于当前的独立同分布情形满足条件 2.3，根据 Kojadinovic 和 Yi (2022年) 第3.1节，

条件2.4还意味着 $C^{\nu}_{1:n}$ 具有标准均匀边缘分布。因此，在命题 3.3的假设下， $C^{\nu}_{1:n}$ 是真正的 copula。

对于任意一元分布函数 H，令 H^{-1} 表示其对应的分位数函数（广义逆），定义为 $H^{-1}(y) = \text{下确界}\{x \in \mathbb{R} : H(x) \geq y\}$， $y \in [0,1]$，并约定下确界 $\emptyset = \infty$。在条件 2.4、2.5 和 2.6 下，算法 3.2 的第二步便可明确写出：

(i) 从 copula $\mathscr{C}^{\mathscr{X}_{1:n}}$ 中生成一个随机变量 $\boldsymbol{U}^{\#}$，使其与 I独立。(ii) 从分布函数为 $\mathscr{K}^{\mathscr{X}_{1:n}}_{\boldsymbol{R}^{1:n}_I}$ 的分布中抽取的随机变量为

$$\boldsymbol{V}^{\#} = \left(\mathscr{K}^{\mathscr{X}_{1:n},-1}_{R^{1:n}_{I1},1}(U^{\#}_1), \ldots, \mathscr{K}^{\mathscr{X}_{1:n},-1}_{R^{1:n}_{Id},d}(U^{\#}_d)\right). \tag{3.2}$$

本节最后讨论如何实际实现算法 3.2，以应用于 Ko- jadinovic 和 Yi（2022年）提出的平滑数据自适应估计量$C^{\mathrm{BetaB4}}_{1\,n}$，作为经验 beta copula_$C^{\mathrm{Bin}}_{1\,n}$的一种可能改进。回顾第 2.1 节，$C^{\mathrm{BetaB4}}_{1\,n}$具有式（2.7）的形式，其中$\mathscr{C}^{\mathscr{X}_{1:n}}$是经验 beta copula $C^{\mathrm{Bin}}_{1:n}$，并且对于任意 $j \in \{1,\ldots,d\}$和 $u \in [0,1]$，$\bar{\mathscr{F}}^{\mathscr{X}_{1:n}}_{j\,u}$是缩放（乘以 $1/n$）的贝塔-二项分布(n,α,β)随机变量的生存函数，其中 $\alpha = u(n-\rho)/(\rho-1)$， $\beta = (1-u)(n-\rho)/(\rho-1)$且 $\rho = 4$。由此可知，对于任意 $i \in \{1,\ldots,n\}$、 $j \in \{1,\ldots,d\}$ 和 $u \in [0,1]$，

$$\mathscr{K}^{\mathscr{X}_{1:n}}_{R^{1:n}_{ij},j}(u) = \bar{\mathscr{F}}^{\mathscr{X}_{1:n}}_{j,u}\{(R^{1:n}_{ij}-1)/n\} = \mathbb{P}(nW^{\mathscr{X}_{1:n}}_{j,u} > R^{1:n}_{ij}-1) = \bar{\mathscr{B}}_{n,u,\rho}(R^{1:n}_{ij}-1), \tag{3.3}$$

其中，$\mathscr{B}_{n,\,u,\,\rho}$是贝塔-二项分布$(n,\ \alpha,\ \beta)$的生存函数。根据 Kojadinovic 和 Yi (2022年)中的引理 27 以及附录 B 中的引理 B.2 可以验证，式 (3.3) 中的一元分布函数 $\mathscr{K}^{\mathscr{X}_{1:n}}_{R^{1:n}_{ij}}$，$j$ 分别是连续且严格递增的。因此，为了计算式 (3.2) 中所需的相应分位数函数，可以采用数值方法。关于这一点，第一作者的网页上提供了适用于 R 统计环境的算法 3.2 实现，用于估计量 $C^{\mathrm{Bin}}_{1:n}$ 和 $C^{\mathrm{BetaB4}}_{1\,n}$。

3.2. 渐近有效性结果

在 Kiriliouk、Segers 和 Tsukahara（2021）的工作基础上，我们现在将在条件 2.4、2.5 和 2.6 下，为基于从 (2.5) 中的 $C^{\nu}_{1:n}$ 抽取样本的平滑自助法提供渐近有效性结果。回顾一下，根据命题 3.3，后述条件蕴含条件 3.1。设 $\mathscr{V}^{\#}_{1:n} = (\boldsymbol{V}^{\#}_1, \ldots, \boldsymbol{V}^{\#}_n)$ 是从 $C^{\nu}_{1:n}$ 中通过独立应用算法 3.2 n 次获得的随机样本。注意，这意味着 $\mathscr{V}^{\#}_{1:n}$ 的分量样本以概率 1 不含并列值。对于任意 $j \in \{1,\ldots,d\}$，令 $G^{\#}_{1:n,j}$ 表示由 $\mathscr{V}^{\#}_{1:n}$ 中第 j 个分量样本 $V^{\#}_{1j}, \ldots, V^{\#}_{nj}$ 计算得到的经验分布函数。于是， $R^{1:n,\#}_{ij} = nG^{\#}_{1:n,j}(V^{\#}_{ij})$ 是 $V^{\#}_{ij}$ 在 $V^{\#}_{1j}, \ldots, V^{\#}_{nj}$ 中的秩。因此， $\mathscr{V}^{\#}_{1:n}$ 的（经典）经验 copula 定义为

$$C^{\#}_{1:n}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{d}\mathbf{1}\left(\frac{R^{1:n,\#}_{ij}}{n} \leq u_j\right), \qquad \boldsymbol{u} \in [0,1]^d, \tag{3.4}$$

而对于 $\mathscr{V}_{1:n}^{\#}$，$C_{1:n}^{\nu}$ 的平滑对应形式为

$$C_{1:n}^{\#,\nu}(\boldsymbol{u}) = \int_{[0,1]^d} C_{1:n}^{\#}(\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{V}_{1:n}^{\#}}(\boldsymbol{w}), \qquad \boldsymbol{u} \in [0,1]^d. \tag{3.5}$$

为陈述渐近有效性结果，我们考虑 $\mathscr{V}_{1:n}^{\#}$ 的独立副本 $\mathscr{V}_{1:n}^{\#,[1]}, \mathscr{V}_{1:n}^{\#,[2]}, \ldots$。令 $C_{1:n}^{\#,[i]}$（分别为 $C_{1:n}^{\#,\nu,[i]}$）表示从 $\mathscr{V}_{1:n}^{\#,[i]}, i \in \mathbb{N}$ 得到的（3.4）中的 $C_{1:n}^{\#}$ 版本（分别为（3.5）中的 $C_{1:n}^{\#,\nu}$ 版本）。

以下结果可视为对Kiriliouk、Segers 和 Tsukahara (2021) 命题 3.3 的推广，证明见附录C。

定理 3.5。假设 $\mathscr{X}_{1:n}$ 中的随机向量是独立同分布的，并且条件*2.4*、*2.5*、*2.6*、*2.8* 和*2.9* 均成立。则

$$\begin{aligned}
&\big(\mathbb{C}_n(0,1,\cdot), \sqrt{n}(C_{1:n}^{\#,[1]} - C_{1:n}), \sqrt{n}(C_{1:n}^{\#,[2]} - C_{1:n})\big) \\
&\qquad \rightsquigarrow \big(\mathbb{C}_C(0,1,\cdot), \mathbb{C}_C^{[1]}(0,1,\cdot), \mathbb{C}_C^{[2]}(0,1,\cdot)\big), \\
&\big(\mathbb{C}_n^{\nu}(0,1,\cdot), \sqrt{n}(C_{1:n}^{\#,\nu,[1]} - C_{1:n}^{\nu}), \sqrt{n}(C_{1:n}^{\#,\nu,[2]} - C_{1:n}^{\nu})\big) \\
&\qquad \rightsquigarrow \big(\mathbb{C}_C(0,1,\cdot), \mathbb{C}_C^{[1]}(0,1,\cdot), \mathbb{C}_C^{[2]}(0,1,\cdot)\big)
\end{aligned}$$

在 $\{\ell^\infty([0,1]^d)\}^3$，其中 $\mathbb{C}_n$ 和 $\mathbb{C}_n^{\nu}$ 定义于 (2.8) 和 (2.9)中，分别地，而 $\mathbb{C}_C^{[1]}$ 和 $\mathbb{C}_C^{[2]}$ 是 $\mathbb{C}_C$ 在 (2.13)中定义的独立副本。

注 3.6。定理 3.5 中第一个联合弱收敛确立了平滑自助法对（非序贯）经典经验过程的渐近有效性，而第二个则为平滑经验 copula 过程 $\mathbb{C}_n^{\nu}(0,1,\cdot)$ 提供了类似结果。根据 B¨ucher 和 Kojadinovic (2019) 中的引理 3.1，这两个联合弱收敛等价于具有 $B \geq 2$ 自助法重复样本的类似联合弱收敛。进一步地，可以利用连续映射定理或泛函 delta 方法，将后者转移到“统计量层面”；随后可结合 B¨ucher 和 Kojadinovic (2019) 第 4 节中的结果，确立基于自助法的置信区间或检验的有效性。另请注意，根据 B¨ucher 和 Kojadinovic (2019) 中的引理 3.1，定理 3.5 中给出的无条件渐近有效性结果，等价于可能更经典的条件结果；然而，后者依赖于更微妙的收敛模式。例如，第一个断言也可以非正式地表述为：“$\sqrt{n}(C_{1:n}^{\#,[1]} - C_{1:n})$ 在给定数据的条件下依概率弱收敛到 $\mathbb{C}_C(0,1,\cdot)$，收敛发生于 $\ell^\infty([0,1]^d)$ 中”；例如，参见 Kosorok (2008, 第 2.2.3 节) 或附录 C，了解该收敛模式的精确定义。

3.3. 两种光滑自助法的有限样本比较

如引言中所述，Kiriliouk、Segers 和 Tsukahara（2021）在蒙特卡洛实验中发现，基于经验 beta copula $C_{1:n}^{\mathrm{Bin}}$ 的平滑自助法，是许多其他重抽样方案（包括下一节将要研究的乘子自助法）的一种有竞争力的替代方法。由于数据自适应经验 copula $C_{1:n}^{\mathrm{BetaB4}}$ 被发现

TABLE 1
Coverage probabilities (cov.) and average lengths (ave.) of 95%-confidence intervals for Kendall's tau estimated from 1000 random samples of size $n \in \{20, 40, 80, 160\}$ from the bivariate Clayton or Gumbel–Hougaard copula with a Kendall's tau of $\tau \in \{0, 0.5, 0.75, 0.9\}$.

Each confidence interval was computed using 1000 smooth bootstrap samples drawn from either $C_{1\,n}^{\mathrm{Bin}}$ or $C_{1\,n}^{\mathrm{BetaB4}}$ using Algorithm 3.2.

		Clayton				Gumbel–Hougaard			
		Bin		BetaB4		Bin		BetaB4	
τ	n	cov.	ave.	cov.	ave.	cov.	ave.	cov.	ave.
0.00	20	0.973	0.626	0.967	0.615	0.969	0.624	0.962	0.614
	40	0.962	0.428	0.954	0.424	0.950	0.430	0.944	0.425
	80	0.949	0.298	0.943	0.296	0.970	0.297	0.961	0.296
	160	0.944	0.208	0.943	0.207	0.949	0.208	0.949	0.208
0.50	20	0.971	0.513	0.972	0.493	0.978	0.521	0.982	0.498
	40	0.958	0.347	0.954	0.334	0.959	0.345	0.957	0.332
	80	0.946	0.239	0.938	0.233	0.950	0.237	0.947	0.231
	160	0.954	0.168	0.957	0.165	0.954	0.164	0.958	0.162
0.75	20	0.717	0.392	0.899	0.367	0.777	0.391	0.927	0.358
	40	0.728	0.234	0.908	0.221	0.793	0.231	0.954	0.211
	80	0.798	0.151	0.930	0.146	0.844	0.146	0.953	0.137
	160	0.866	0.101	0.943	0.100	0.883	0.098	0.944	0.094
0.90	20	0.000	0.315	0.212	0.272	0.000	0.317	0.270	0.264
	40	0.000	0.160	0.475	0.131	0.000	0.162	0.593	0.127
	80	0.000	0.086	0.692	0.074	0.000	0.087	0.804	0.069
	160	0.000	0.050	0.837	0.047	0.000	0.050	0.902	0.043

在$C_{1}^{\mathrm{Bin}}{}_{:\,n}$ 中报告的实验里表现优于经验 beta copulaKojadinovic 和 Yi (2022年），因此，实证考察基于$C_{1\,n}^{\mathrm{BetaB4}}{}_{:}$ 的平滑自助法与基于$C_{1\,n}^{\mathrm{Bin}}{}_{:}$ 的平滑自助法相比表现如何，似乎是顺理成章的。为此，我们重现了Kiriliouk、Segers 和 Tsukahara (2021）第 4.2 节和第 4.3 节中报告的部分实验。

我们首先从二元 Clayton 或 Gumbel–Hougaard copula 中抽取了 1000 个大小为 $n \in \{20, 40, 80, 160\}$ 、Kendall τ 为 $\tau \in \{0, 0.5, 0.75, 0.9\}$ 的随机样本，并据此估计了 Kendall τ 的 95% 置信区间的覆盖概率和平均长度。每个置信区间均使用从 $C_{1}^{\mathrm{Bin}}{}_{:\,n}$ 或 $C_{1\,n}^{\mathrm{BetaB4}}{}_{:}$ 中抽取的 1000 个平滑自助样本计算得到。结果见表 1。可以看出，在独立或中等依赖（$\tau \in \{0, 0.5\}$）情况下，两种重抽样方案的估计覆盖概率总体上都达到了目标值，并且非常相近。然而，使用基于 $C_{1\,n}^{\mathrm{BetaB4}}{}_{:}$ 的平滑自助法得到的区间，平均而言似乎略短一些。但在强依赖（$\tau = 0.75$）情况下，使用基于$C_{1}^{\mathrm{Bin}}{}_{:\,n}$ 的平滑自助法计算得到的置信区间，其估计覆盖概率显著低于 0.95 的目标值。 $\tau = 0.9$ 的结果实际上表明，基于 $C_{1}^{\mathrm{Bin}}{}_{:\,n}$ 的平滑自助法无法生成具有如此强依赖性的样本。尽管结果并不完美，基于 $C_{1\,n}^{\mathrm{BetaB4}}{}_{:}$ 的平滑自助法对这种情况的处理要好得多

TABLE 2
Coverage probabilities (cov.) and average lengths (ave.) of 95%-confidence intervals for the random samples of size $n \in \{20, 40, 80\}$ from the bivariate Frank copula with a Kendall's tau of $\tau \in \{-0.9, -0.75, -0.5, 0, 0.5, 0.75, 0.9\}$. Each confidence interval was computed using 1000 smooth bootstrap samples drawn from either $C_{1\,n}^{\mathrm{Bin}}$ or $C_{1\,n}^{\mathrm{BetaB4}}$ using Algorithm 3.2.

		Bin		BetaB4	
τ	n	cov.	ave.	cov.	ave.
-0.90	20	0.000	0.194	0.000	0.133
	40	0.000	0.086	0.056	0.051
	80	0.000	0.039	0.313	0.023
-0.75	20	0.731	0.286	0.940	0.237
	40	0.641	0.153	0.939	0.126
	80	0.662	0.088	0.947	0.077
-0.50	20	0.988	0.548	0.981	0.511
	40	0.975	0.342	0.957	0.327
	80	0.957	0.230	0.940	0.224
0.00	20	0.952	1.009	0.946	1.002
	40	0.937	0.681	0.929	0.681
	80	0.941	0.467	0.938	0.469
0.50	20	0.986	0.542	0.970	0.508
	40	0.972	0.344	0.949	0.328
	80	0.959	0.224	0.948	0.219
0.75	20	0.722	0.285	0.938	0.235
	40	0.634	0.154	0.927	0.128
	80	0.671	0.088	0.942	0.077
0.90	20	0.000	0.193	0.000	0.132
	40	0.000	0.086	0.046	0.051
	80	0.000	0.039	0.319	0.023

强依赖性。这可能是由于在 $C_{1\,n}^{\mathrm{BetaB4}}$: 的表达式中使用经验 beta copula 改变了基础平滑分布的“形状”，正如公式（2.7）所推导出的那样。

在第二个实验中，我们参照 Kiriliouk、Segers 和 Tsukahara (2021, 第 4.3 节)，利用从 Kendall τ 为 $\tau \in \{-0.9, -0.75, -0.5, 0, 0.5, 0.75, 0.9\}$ 的二元 Frank copula 中抽取的 1000 个、样本量为 $n \in \{20, 40, 80, 160\}$ 的随机样本，估计了基于最大伪似然估计的二元 Frank copula 参数的 95% 置信区间的覆盖概率和平均长度（见 Genest、Ghoudi 和 Rivest, 1995年）。同样，每个置信区间均使用 1000 个平滑自助样本计算，这些样本分别从 $C_{1}^{\mathrm{Bin}}{}_{:n}$ 或 $C_{1\,n}^{\mathrm{BetaB4}}$: 抽取。结果见表 2 ，主要结论与上一个实验定性相同：基于 $C_{1\,n}^{\mathrm{BetaB4}}$: 的平滑自助法在强依赖情形下的表现远优于基于 $C_{1\,n:}^{\mathrm{Bin}}$ 的平滑自助法。

4. 时间序列情形下的平滑序贯依赖乘子自助法

上一节研究的平滑自助法仅适用于独立同分布观测的情形。幸运的是，乘子自助法是对经典经验 copula 的泛函进行自助法推断的最流行方法之一，也可用于时间序列情形。本节首先介绍一些直观解释并定义 乘子序列，随后回顾 B¨ucher 和 Kojadinovic(2016) 研究的非光滑序贯依赖乘子自助法。接下来，我们提出该方法的光滑扩展，给出渐近有效性结果，并比较三种（平滑）乘子自助法在逼近三种（平滑）经验 copula 过程时的有限样本性能。最后，作为一项应用，我们考虑 B¨ucher 等人 (2014) 提出的变点检测检验的一个平滑版本（基于经验贝塔 copula 及相应的乘子自助法重复样本），并将其有限样本性能与非光滑版本进行比较。

4.1. 主要直觉与已有研究

如第 2.2 节所述，条件2.11 在 强混合条件下成立。给定一个平稳时间序列 $(\boldsymbol{Y}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，记 $\mathscr{F}_j^k$为由 (σ) 生成的 $\boldsymbol{Y}_i$-域$j\le i\le k$，$j,\ k\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty,+\infty\}$，并回顾一下，与平稳序列 $(\boldsymbol{Y}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 相对应的强混合系数定义如下：

$$\alpha_r^{\boldsymbol{Y}} = \sup_{A\in\mathscr{F}_{-\infty}^0, B\in\mathscr{F}_r^{+\infty}} \big|\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\big|, \qquad r\in\mathbb{N},\ r>0,$$

并且，若 $\alpha_r^{\boldsymbol{Y}}\to 0$ 当 $r\to\infty$ 时成立，则称序列 $(\boldsymbol{Y}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 为强混合的 。

根据 B¨ucher（2015），若时间序列 $(\boldsymbol{X}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 的强混合系数满足 $\alpha_r^{\boldsymbol{X}}=O(r^{-a})$，且 $a>1$ 当 $r\to\infty$ 时成立，则条件 2.11 成立。在这种情况下，定理 2.12 表明，为了以渐近有效的方式对式（2.8）中的经典序贯经验 copula 过程 $\mathbb{C}_n$ 进行自助法，只需对式（2.12）中的过程 $\mathbb{C}_n$ 进行 ˜自助法。后者可以通过对式（2.10）中的 $\mathbb{B}_n$ 进行自助法，并估计 C的一阶偏导数 $C_j, j\in\{1,\dots,d\}$ 来实现。这种方法最初由 Scaillet（2005）以及 R´emillard 和 Scaillet（2009）在独立的非序列设置下提出；他们采用 van der Vaart 和 Wellner（2000，第 2.9 章）所述思路的乘子自助法˙对 $\mathbb{B}_n$进行重抽样，并通过有限差分估计偏导数 C_j,$j\in\{1,\dots,d\}$。B¨ucher 和 Kojadinovic（2016）以及 B¨ucher 等人（2014）将这一重抽样方案扩展到了时间序列的序贯情形。

4.2. 独立同分布与依赖乘子序列

对于独立观测，乘子自助法基于独立同分布乘子序列。若随机变量序列 $(\xi_{i,n})_{i\in\mathbb{Z}}$ 满足以下条件，则称其为独立同分布乘子序列：

(M0) $(\xi_{i,n})_{i\in\mathbb{Z}}$ 独立同分布，且独立于 $\mathscr{X}_{1:n}$，其分布不随 n变化，均值为 0、方差为 1，并且满足 $\int_0^\infty\{\mathbb{P}(|\xi_{0,n}|>x)\}^{1/2}\mathrm{d}x<\infty$。

乘子自助法在时间序列中的扩展依赖于依赖乘子序列这一概念。其核心思想源自B¨uhlmann(1993)：用适当的序列相关乘子替代独立同分布乘子，以捕捉数据中的序列依赖。若随机变量序列$(\xi_{i,n})_{i\in\mathbb{Z}}$ 满足以下条件，则称其为依赖乘子序列：

(M1) 随机变量序列$(\xi_{i,n})_{i\in\mathbb{Z}}$ 是平稳的，且 $\mathbb{E}(\xi_{0,n})=0$,$\mathbb{E}(\xi_{0,n}^2)=1$ 并且 $\sup_{n\geq1}\mathbb{E}(|\xi_{0,n}|^\gamma)<\infty$ 对所有 $\gamma\geq1$均成立；该序列与可用样本 $\mathscr{X}_{1:n}$相互独立。(M2) 存在一个由严格正数构成的序列 $\ell_n\to\infty$，使得$\ell_n=o(n)$，且序列$(\xi_{i,n})_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 ℓ_n-依赖的，即对所有 $h>\ell_n$ 和 $i\in\mathbb{N}$，$\xi_{i,n}$ 与$\xi_{i+h,n}$ 相互独立。(M3) 存在一个函数 $\varphi:\mathbb{R}\to[0,1]$，该函数关于0对称，在0处连续，满足 $\varphi(0)=1$，且对所有 $|x|>1$，$\varphi(x)=0$，使得对所有 $h\in\mathbb{Z}$，$\mathbb{E}(\xi_{0,n}\xi_{h,n})=\varphi(h/\ell_n)$。

例如，从下面的（4.1）或（4.2）可以更清楚地看出，带宽参数 ℓ_n 在（M2）中定义，其作用类似于区块自助法中的区块长度。实际上，对于下一节将介绍的非光滑序贯依赖乘子自助法，可以采用 B¨ucher 和 Kojadinovic (2016，第5节）中详细介绍的方法，以数据驱动的方式选取其取值；另见第4.6节。后者还详细介绍了生成依赖乘子序列的方法。

4.3. 非平滑序贯依赖乘子重复样本

令 $(\xi_{i\,n,}^{[1]})_{i\in\mathbb{Z}}$、$(\xi_{i\,n,}^{[2]})_{i\in\mathbb{Z}}$，.....为同一乘子序列的独立副本。文献 $\mathbb{B}_n$（2.10）中的过程的两种不同乘子自助法重复样本分别由 B¨ucher 和 Kojadinovic (2016）和 B¨ucher 等人(2014）提出。对于任意 $b\in\mathbb{N}$，$(s,\ t)\in\Lambda$ 和 $\boldsymbol{u}\in[0,1]^d$，它们定义如下：

$$\hat{\mathbb{B}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{u})=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=\lfloor ns\rfloor+1}^{\lfloor nt\rfloor}\xi_{i,n}^{[b]}\left\{\mathbf{1}(\hat{\boldsymbol{U}}_i^{1:n}\leq\boldsymbol{u})-C_{1:n}(\boldsymbol{u})\right\}\tag{4.1}$$

and

$$\check{\mathbb{B}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{u})=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=\lfloor ns\rfloor+1}^{\lfloor nt\rfloor}\xi_{i,n}^{[b]}\left\{\mathbf{1}(\hat{\boldsymbol{U}}_i^{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}\leq\boldsymbol{u})-C_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{u})\right\},\tag{4.2}$$

分别，其中 $C_{1:n}$ 和 $C_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}$ 在 (2.1) 中作一般定义，并约定当 $\hat{}\,\mathbb{B}_n^{[b]}(s,t,\cdot)=\check{}\,\mathbb{B}_n^{[b]}(s,t,\cdot)=0$。$\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor=0$。

˜为了定义 (2.12) 中 $\mathbb{C}_n$ 的乘子自助法重复样本，还需要进一步估计未知的一阶偏导数 C_j, $j \in$.$\{1,\ldots,d\}$，即 C 的一阶偏导数。在本节余下部分，$C_{j,k:l}$ 表示基于一段观测值 $\mathscr{X}_{k:l} = (\boldsymbol{X}_k,\ldots,\boldsymbol{X}_l)$ 的 C_j 估计量，其中 $1 \le k \le l \le n$，并约定若 $k > l$，则 $C_{j,k:l} = 0$ 。接下来，按照 B¨ucher 和 Kojadinovic（2016）以及 B¨ucher 等人（2014）的做法，我们考虑 (2.8) 中 $\mathbb{C}_n$ 的两类乘子自助法重复样本。对于任意 $b \in \mathbb{N}$、$(s,t) \in \Lambda$ 和 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$，它们定义如下

$$\hat{\mathbb{C}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{u}) = \hat{\mathbb{B}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{u}) - \sum_{j=1}^{d} \dot{C}_{j,1:n}(\boldsymbol{u})\,\hat{\mathbb{B}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{u}^{(j)}) \tag{4.3}$$

and

$$\check{\mathbb{C}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{u}) = \check{\mathbb{B}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{u}) - \sum_{j=1}^{d} \dot{C}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{u})\,\check{\mathbb{B}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{u}^{(j)}), \tag{4.4}$$

分别地，其中 ˆ $\mathbb{B}_n^{[b]}$ （分别为 ˇ $\mathbb{B}_n^{[b]}$）定义见（4.1）（分别见（4.2）。显然，在非序列设置下，两类重复样本一致，因为 ˆ $\mathbb{C}_n^{[b]}(0,1,\cdot)$ =ˇ$\mathbb{C}_n^{[b]}(0,1,\cdot)$. 对于偏导数的估计量，预计其精度越高，乘子重复样本对 $\mathbb{C}_n$ “抽样分布”的近似就越好。第5节将详细讨论这一方面，并介绍两大类光滑估计量，从理论和实证角度加以研究。

4.4. 平滑序贯依赖乘子重复样本

ˆ 现在我们考虑一种类似的构造，但基于 $\mathbb{B}_n^{[b]}$ 在 (4.1) 和 ˇ $\mathbb{B}_n^{[b]}$ 在 (4.2) 中的平滑类比。具体而言，推论 2.13 表明，要对 (2.9) 中的 ˜ _$\mathbb{C}_n^{\nu}$ 进行自助法，第一步是对 (2.14) 中的 $\mathbb{B}_n^{\nu}$ 或 (2.15) 中的 $\mathbb{B}_n^{\nu}$ 进行自助法。类比于 (2.2) 和 (2.5)，对于任意 $b \in \mathbb{N}$、$(s,t) \in \Lambda$ 和 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$，可将 ˆ $\mathbb{B}_n^{[b]}$ 和 ˇ $\mathbb{B}_n^{[b]}$ 的自然平滑类比定义为

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{B}}_n^{[b],\nu}(s,t,\boldsymbol{u}) &= \int_{[0,1]^d} \hat{\mathbb{B}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{w})\mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{1:n}}(\boldsymbol{w}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=\lfloor ns\rfloor+1}^{\lfloor nt\rfloor} \xi_{i,n}^{[b]} \left\{ \mathscr{K}_{\boldsymbol{R}_i^{1:n}}^{\mathscr{X}_{1:n}}(\boldsymbol{u}) - C_{1:n}^{\nu}(\boldsymbol{u}) \right\}\end{aligned} \tag{4.5}$$

and

$$\begin{aligned}\check{\mathbb{B}}_n^{[b],\nu}(s,t,\boldsymbol{u}) &= \int_{[0,1]^d} \check{\mathbb{B}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{w})\mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}}(\boldsymbol{w}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=\lfloor ns\rfloor+1}^{\lfloor nt\rfloor} \xi_{i,n}^{[b]} \left\{ \mathscr{K}_{\boldsymbol{R}_i^{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}}(\boldsymbol{u}) - C_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}^{\nu}(\boldsymbol{u}) \right\},\end{aligned} \tag{4.6}$$

分别，其中 $\mathscr{K}^{\mathscr{X}_{1:n}}_{\boldsymbol{R}^1}$ 和 $\mathscr{K}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}}_{\boldsymbol{R}^{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}_i}$ 定义于 (2.4) 中。将这些要素与 C 的未知偏导数估计量相结合，作为 (4.3) 中 $\hat{}$ $\mathbb{C}_n^{[b]}$ 和 (4.4) 中 $\check{}$ $\mathbb{C}_n^{[b]}$ 的平滑类比，我们得到

$$\hat{\mathbb{C}}_n^{[b],\nu}(s,t,\boldsymbol{u}) = \hat{\mathbb{B}}_n^{[b],\nu}(s,t,\boldsymbol{u}) - \sum_{j=1}^{d} \dot{C}_{j,1:n}(\boldsymbol{u})\, \hat{\mathbb{B}}_n^{[b],\nu}(s,t,\boldsymbol{u}^{(j)}), \tag{4.7}$$

and

$$\check{\mathbb{C}}_n^{[b],\nu}(s,t,\boldsymbol{u}) = \check{\mathbb{B}}_n^{[b],\nu}(s,t,\boldsymbol{u}) - \sum_{j=1}^{d} \dot{C}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{u})\, \check{\mathbb{B}}_n^{[b],\nu}(s,t,\boldsymbol{u}^{(j)}), \tag{4.8}$$

分别地，对于 $b \in \mathbb{N}$，$(s,t) \in \Lambda$ 和 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$。

为了证明这些平滑乘子自助法重复样本的渐近有效性，只需偏导数估计量满足以下相当自然且温和的条件。

条件 4.1 (有界且弱一致的偏导数估计量)。存在一个常数 $\zeta > 0$，使得对于任意 $j \in \{1,\dots,d\}$ 和 $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d} \left|\dot{C}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{u})\right| \le \zeta.$$

此外，对于任意 $\delta \in (0,\ 1)$，$\varepsilon \in (0,\ 1/2)$ 以及 $j \in \{1,\dots,d\}$,

$$\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\ge\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d\\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \left|\dot{C}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{u}) - \dot{C}_j(\boldsymbol{u})\right| = o_{\mathbb{P}}(1).$$

此外，遵循 B¨ucheret 等人 (2014)，我们对观测值和底层乘子序列施加以下条件。

条件 4.2 （强混合与乘子条件）。 以下两个条件之一成立：

(i) $\mathscr{X}_{1:n}$ 中的随机向量是独立同分布的，并且 $(\xi_{i\,n}^{[1]})_{i\in\mathbb{Z}}$、$(\xi_{i\,n}^{[2]})_{i\in\mathbb{Z}}$、... 是满足 *(M0)* 的乘子序列的独立副本。*(ii)* 序列 $\mathscr{X}_{1:n}$ 取自平稳序列 $(\boldsymbol{X}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，其强混合系数满足：对于某个 $a > 3 + 3d/2$，当 $r \to \infty$ 时，$\alpha_r^{\boldsymbol{X}} = O(r^{-a})$。此外，$(\xi_{i\,n}^{[1]})_{i\in\mathbb{Z}}$、$(\xi_{i\,n}^{[2]})_{i\in\mathbb{Z}}$、... 是满足 *(M1)–(M3)* 的依赖乘子序列的独立副本，其中对于某个 $0 < \gamma < 1/2$，$\ell_n = O(n^{1/2-\gamma})$。

以下结果的证明见附录 D。

定理 4.3 (平滑相关乘子自助法的渐近有效性)。 在条件 *2.8*、*2.9*、*4.1* 和 *4.2*下，对于任意 $b \in \mathbb{N}$，均有

$$\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d} \left|\hat{\mathbb{C}}_n^{[b],\nu}(s,t,\boldsymbol{u}) - \hat{\mathbb{C}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{u})\right| = o_{\mathbb{P}}(1), \tag{4.9}$$

$$\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d}\left|\check{\mathbb{C}}_n^{[b],\nu}(s,t,\boldsymbol{u})-\check{\mathbb{C}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{u})\right|=o_{\mathbb{P}}(1). \tag{4.10}$$

此外，

$$(\mathbb{C}_n^{\nu},\hat{\mathbb{C}}_n^{[1],\nu},\hat{\mathbb{C}}_n^{[2],\nu})\rightsquigarrow(\mathbb{C}_C,\mathbb{C}_C^{[1]},\mathbb{C}_C^{[2]}),$$
$$(\mathbb{C}_n^{\nu},\check{\mathbb{C}}_n^{[1],\nu},\check{\mathbb{C}}_n^{[2],\nu})\rightsquigarrow(\mathbb{C}_C,\mathbb{C}_C^{[1]},\mathbb{C}_C^{[2]})$$

在 $\{\ell^\infty(\Lambda\times[0,1]^d)\}^3$，其中 $\mathbb{C}_C^{[1]}$ 和 $\mathbb{C}_C^{[2]}$ 是 $\mathbb{C}_C$ 中定义的 (2.13)的独立副本。

4.5. 三种乘子自助法的有限样本比较

根据定理 2.10，我们知道，在条件 2.8 和 2.9下，经典序贯经验 copula 过程 $\mathbb{C}_n$ （2.8）以及平滑序贯经验 Copula 过程 $\mathbb{C}_n^{\nu}$ （2.9）是渐近等价的。类似地，定理 4.3 给出了相应乘子复制样本与平滑乘子复制样本渐近等价的条件。尽管人们预计， $\mathbb{C}_n^{\nu}$ 最好使用采用相同平滑分布构造的乘子复制样本进行重抽样，也就是说，使用 $\mathbb{C}^{[b]}{}_n{}^{\nu}$（4.7）或 $\check{}\mathbb{C}^{[b]}{}_n{}^{\nu}$（4.8），但我们没有渐近结果来支持这一点（另见注释 2.14）。事实上，鉴于所有版本的乘子复制样本在渐近意义下等价，在某些情况下，例如，经典（非平滑）乘子复制样本在对 $\mathbb{C}_n^{\nu}$进行重抽样时，可能与平滑乘子复制样本等价，甚至更为可取。本节旨在对此进行实证研究。为简单起见，我们将考察范围限制在非序列设置和独立观测值的情形。

具体而言，我们设计了实验，以研究哪种乘子复制样本最适合估计下文定义的三个（非序贯）经验 copula 过程的某些泛函，其中任意 $\boldsymbol{u}\in[0,1]^d$ 均成立：

$$\mathbb{C}_n^{\mathrm{Dirac}}(\boldsymbol{u})=\sqrt{n}\{C_{1:n}(\boldsymbol{u})-C(\boldsymbol{u})\}=\mathbb{C}_n(0,1,\boldsymbol{u}), \tag{4.11}$$
$$\mathbb{C}_n^{\mathrm{Bin}}(\boldsymbol{u})=\sqrt{n}\{C_{1:n}^{\mathrm{Bin}}(\boldsymbol{u})-C(\boldsymbol{u})\}, \tag{4.12}$$
$$\mathbb{C}_n^{\mathrm{BetaB4}}(\boldsymbol{u})=\sqrt{n}\{C_{1:n}^{\mathrm{BetaB4}}(\boldsymbol{u})-C(\boldsymbol{u})\}, \tag{4.13}$$

其中

- $\mathbb{C}_n$ 是经典的（非平滑）序贯经验 copula 过程，定义见（2.8），
- $C^{\text{二项分布}1:n}$ 是式（3.1）中的经验贝塔 copula（其构造方法是采用具有缩放二项边缘分布的平滑分布和独立 copula，如第2.1节所述），
- $C^{\mathrm{BetaB1}\,n}{}^{4:}$ 是 $C_{1:n}^{\nu}$ 在第 2.1 节 中引入的版本，它通过考虑具有缩放贝塔-二项边缘分布和生存 copula 的平滑分布而获得；经验 beta copula $C_{\mathrm{Bin}1:n}$，并在 Kojadi- novic 和 Yi（2022年）的数值实验中表现出最佳的有限样本性能。

如前所述，由于我们处于非序列设置中，在（4.7）和（4.8）中定义的两个通用乘子复制样本是一致的。为了近似上述定义的三个经验 copula 过程的“抽样分布”，我们将使用相同平滑分布定义的乘子复制样本作为候选自助法。下文中，我们将分别用 $\mathbb{C}_{n}^{[b]\,\mathrm{Dirac}}$、$\mathbb{C}_{n}^{[b]\,\mathrm{Bin}}$ 和 $\hat{\mathbb{C}}_{n}^{[b]\,\mathrm{BetaB4}}$、$b \in \mathbb{N}$ 表示它们。为了仅研究定义 $\mathbb{B}_{n}^{[b]\,\nu}$（见（4.5））时所涉及的平滑分布选择的影响，所有三个乘子复制样本均使用真实的偏导数 C_j、$j \in \{1, \ldots, d\}$ 计算。此外，由于我们的实验仅限于独立观测，所有乘子复制样本均基于第 4.2 节（M0）中定义的独立同分布乘子序列。按照 B¨ucher 和 Dette（2010）的做法，这些序列直接取自从 $\{-1, 1\}$ 上的均匀分布中抽取的随机样本。

在设计实验时，我们再次遵循 B¨ucher 和 Dette（2010）的方法。首先，对于 $d = 2$，我们评估了在点 $P = \{(i/3, j/3)\colon\ i, j = 1, 2\}$ 处，经验过程 $\mathbb{C}_{n}^{\mathrm{Dirac}}$（见（4.11））、$\mathbb{C}_{n}^{\mathrm{Bin}}$（见（4.12））和 $\mathbb{C}_{n}^{\mathrm{BetaB4}}$（见（4.13））的协方差能否通过三种可能的乘子自助法重复样本得到良好近似。对于每个目标经验 copula 过程，我们首先使用从二元 copula C 中抽取的 100 000 个相互独立、样本量为 $n \in \{10, 20, 40, 80\}$ 的样本，精确估计其在 P 中各点处的协方差；该 copula 的 Kendall τ 为 $\tau \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75\}$。对于 C，我们考虑了 Clayton copula 和 Gumbel–Hougaard copula。接下来，对于所考虑的每种 C、n、τ、目标过程和乘子过程的组合，我们从 C 中生成 1000 个样本，并针对每个样本计算 $B = 1000$ 个乘子自助法重复样本。利用这些重复样本，我们得到目标过程在 P 中各点处协方差的一个估计值。

当 C 为 Kendall τ 等于 $\tau \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75\}$ 的 Clayton copula 时，结果如图 1 所示。图中的第一列（第二列、第三列）给出了三个候选乘子估计量对 $\mathbb{C}_{n}^{\mathrm{Dirac}}$（$\mathbb{C}_{n}^{\mathrm{Bin}}$、$\mathbb{C}_{n}^{\mathrm{BetaB4}}$）在 P 各点处的协方差进行估计时的经验均方误差 (均方误差) $\times 10^4$ 均值，并将其与样本量 n进行比较。每行图对应 τ的一个不同取值。例如，在左上图中，实线（虚线、点线）表示使用 $\mathbb{C}_{n}^{[b],\,\mathrm{Dirac}}$（$\mathbb{C}_{n}^{[b],\,\mathrm{Bin}}$、$\mathbb{C}_{n}^{[b],\,\mathrm{BetaB4}}$）估计 $\mathbb{C}_{n}^{\mathrm{Dirac}}$协方差时的均方误差均值。

不出所料，可以看到所有曲线整体上都在下降，这证实了对于每个目标过程，随着 n增大，自助法近似会有所改善。更仔细地观察可以发现，在几乎所有情形下，采用与目标过程相同平滑分布构造的乘子自助法能得到最佳估计。实际上，只有当 $\mathbb{C}_{n}^{\mathrm{BetaB4}}$为目标过程时，基于 $\mathbb{C}_{n}^{[b],\,\mathrm{Bin}}$的协方差估计有时才优于基于 $\mathbb{C}_{n}^{[b],\,\mathrm{BetaB4}}$的估计。这种情况主要出现在 n 和 τ较小时。Gumbel–Hougaard copula 的结果（未报告）在定性上并无不同。

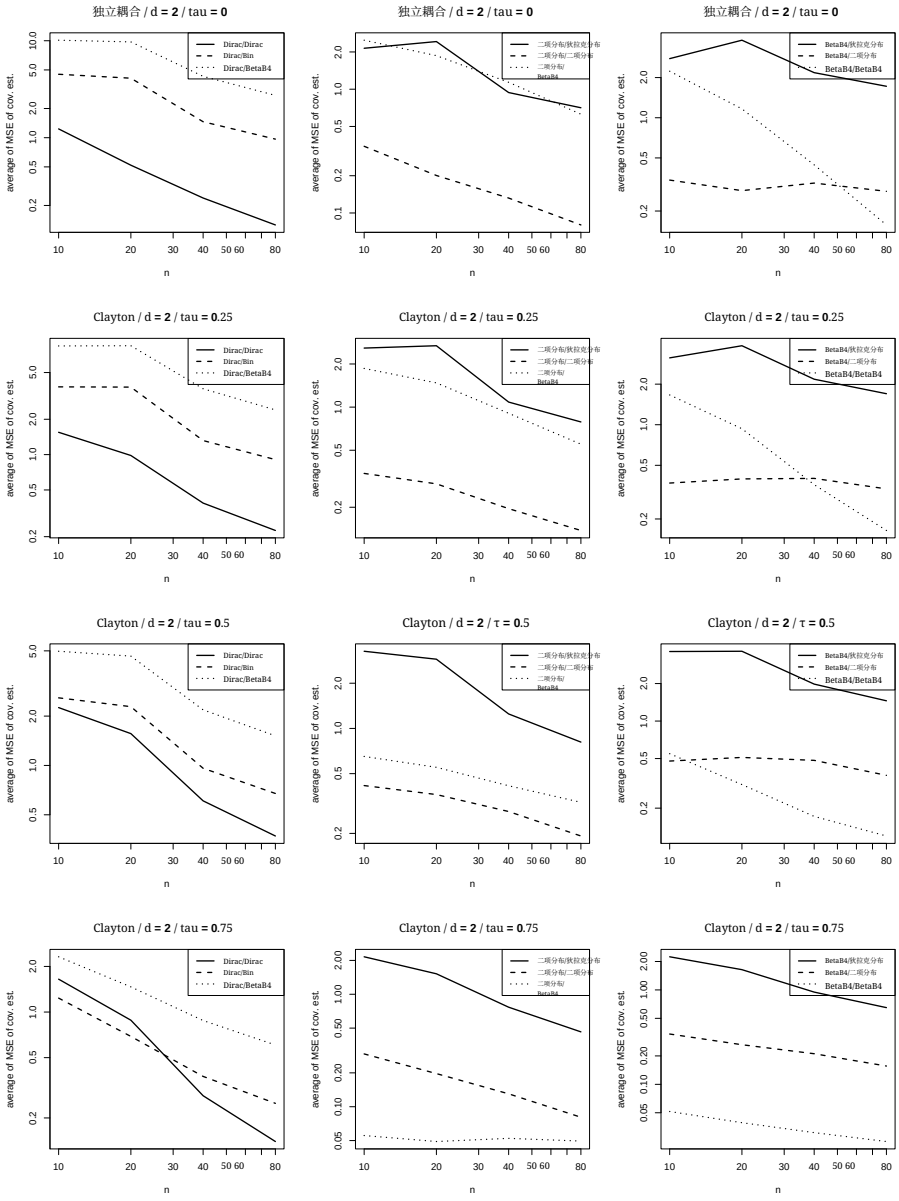

FIG 1. *For observations generated from the bivariate Clayton copula with a Kendall's tau of* $\tau \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75\}$ *and for each combination of target and multiplier process average of, the empirical MSEs* ($\times 10^4$) *of the bootstrap estimators of the covariance of the target process at the points in* P *against the sample size* n*. The legend "Dirac/Bin" for instance refers to the situation when the target process is* $\mathbb{C}_n^{\mathrm{Dirac}}$ *and the multiplier process is* $\hat{\mathbb{C}}_n^{[b],\,\mathrm{Bin}}$.

在第二项实验中，我们评估了高分位数的估计效果

$$KS(f_n) = \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} |f_n(\boldsymbol{u})| \qquad \text{and} \qquad CvM(f_n) = \int_{[0,1]^d} \{f_n(\boldsymbol{u})\}^2 \mathrm{d}\boldsymbol{u} \quad (4.14)$$

对于 $d \in \{2,3\}$ 和 $f_n \in \{\mathbb{C}_n^{\text{Dirac}}, \mathbb{C}_n^{\text{Bin}}, \mathbb{C}_n^{\text{BetaB4}}\}$，三种候选乘子自助法能够在多大程度上进行估计。从实际角度出发，式 (4.14) 中的积分通过在 $(0,1)^d$ 上使用大小为 10^2 的均匀网格计算均值来近似，其中$d = 2$，而当 $d = 3$时使用大小为 5^3 的网格。对于 $d \in \{2,3\}$，C 为 Clayton 或 Gumbel–Hougaard copula，且其二元边缘分布的 Kendall τ 分别为 $\tau \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75\}$和 $n \in \{10, 20, 40, 80\}$，我们首先从 C中抽取 100 000 个大小为 n 的独立样本，精确估计 $CvM(f_n)$ 的 90% 和 95% 分位数。接着，对于 d、C、n、τ、目标过程和乘子过程的每种组合，我们从 C 中生成 1000 个样本，并针对每个样本计算$B = 1000$ 个乘子自助法重复样本。这些 $B = 1000$ 重复样本用于分别估计每个目标分位数。遵循 Kojadinovic 和 Stemikovskaya（2019），所有此类估计均使用 f_n的中心化重复样本完成。例如，当 $f_n = \mathbb{C}_n^{\text{Dirac}}$时，对于任意$\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$和 $b \in \{1, \ldots, B\}$，这相当于使用

$$\hat{\mathbb{C}}_n^{[b],\text{Dirac}}(\boldsymbol{u}) - \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} \hat{\mathbb{C}}_n^{[b],\text{Dirac}}(\boldsymbol{u}),$$

^ ^ 而不是 $\mathbb{C}^{[b]}_{\cdot\ n}{}^{\text{Dirac}}(\boldsymbol{u}) = \mathbb{C}_n^{[b]}(0,1,\boldsymbol{u})$ 见（4.3）。其他重复样本的中心化版本也以类似方式定义。进行中心化的理由是，无论类型如何，这些重复样本都可以视为极限 中心化 高斯过程 $\mathbb{C}_C(0,1,\cdot)$（见2.13）；例如，参见定理 4.3。值得注意的是，在 Kojadinovic 和 Stemikovskaya (2019) 所进行的相关蒙特卡洛实验中，使用中心化重复样本始终能带来更好的有限样本性能。不过，鉴于经验协方差的公式，在前述协方差估计实验中，是否使用中心化重复样本并无影响。

当 C 为三元 Gumbel–Hougaard copula 时，Kolmogorov–Smirnov 泛函的 95% 分位数结果见图 2。总体而言，结论与第一个实验所得结论相似：

- Kolmogorov–Smirnov 泛函的 95% 分位数 $\mathbb{C}_{\text{狄拉克}n}$ 始终最好用同一泛函的经验分位数来估计 $\mathbb{C}^{[b]}_{\cdot\ \text{狄拉克}n}$ 。
- 当目标过程为 $\mathbb{C}_{\text{二项分布}n}$ 时，乘子过程为 $\mathbb{C}^{[b]}_{\cdot\ \text{二项分布}n}$ 可获得最佳结果；但对于强依赖观测，在所考虑的样本量下，$\mathbb{C}^{[b]}_{\cdot\ \text{狄拉克}n}$的估计效果更好。
- 当目标过程为 $\mathbb{C}_{\text{BetaB}_n{}^4}$时，只有当 n 达到 40 或 80 时，使用 $\mathbb{C}^{[b]}_{\cdot\ \text{BetaB}_n{}^4}$才能获得最佳估计。对于较小的 n，使用 $\mathbb{C}^{[b]}_{\cdot\ \text{二项分布}n}$ 效果更好。

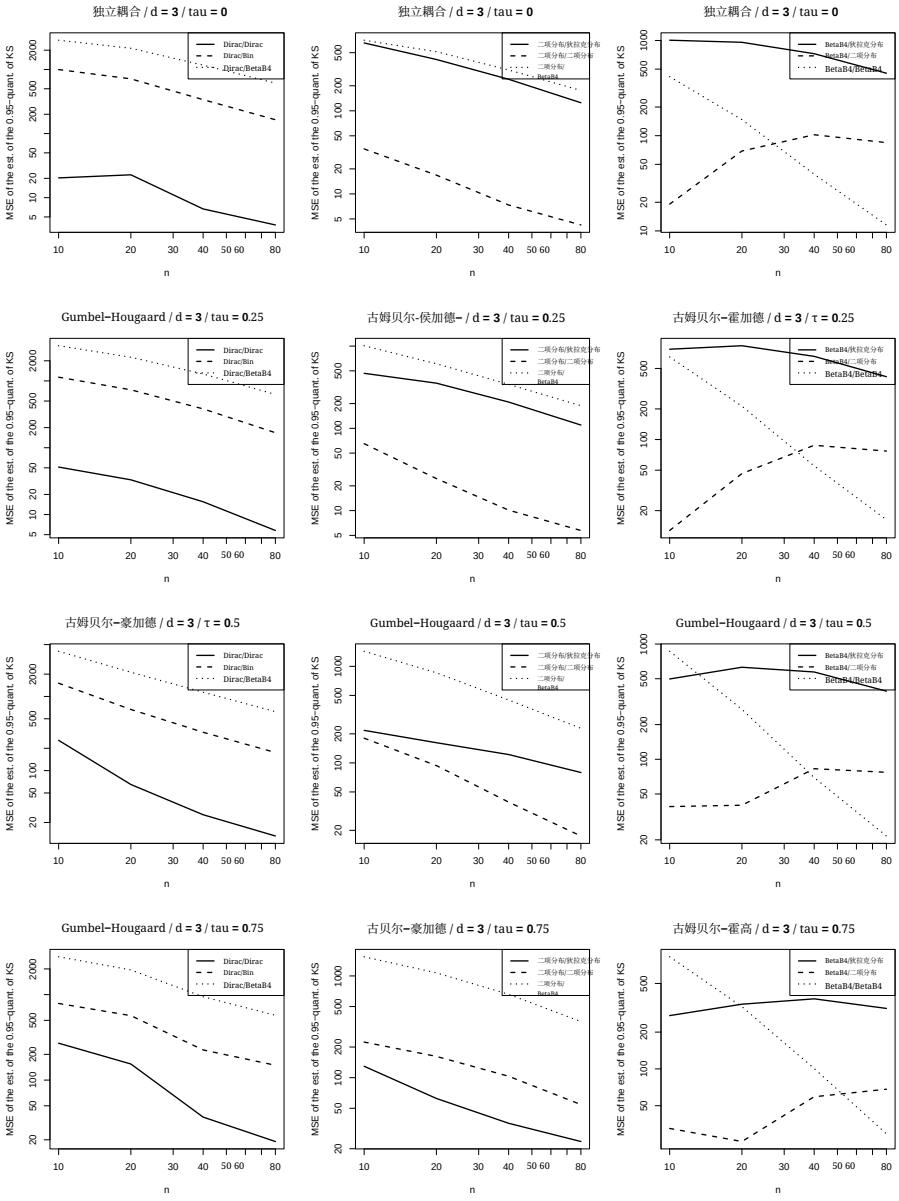

FIG 2. *For observations generated from the trivariate Gumbel–Hougaard copula whose bivariate margins have a Kendall's tau of* $\tau \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75\}$, *empirical MSE* ($\times 10^4$) *of the three candidate multiplier estimators of high quantiles of KS* f_n *in* 4 14 0 (。) *for* $f_n \in \{\mathbb{C}_n^{\mathrm{Dirac}}, \mathbb{C}_n^{\mathrm{Bin}}, \mathbb{C}_n^{\mathrm{BetaB4}}\}$ *against the sample size n. The legend "Dirac/Bin" for instance refers to the situation when the target process is* $\mathbb{C}_n^{\mathrm{Dirac}}$ *and the multiplier process is* $\hat{\mathbb{C}}_n^{[b],\mathrm{Bin}}$.

对于 Clayton copula、90%分位数、维度为 $d = 2$ 或 Cramér–von Mises 泛函（未报告），结果在定性上并无不同。

之前的实验证实，采用由相同平滑分布构造的乘子复制样本进行重抽样似乎是有意义的，具体而言，可以使用 $\mathbb{C}_n^\nu$（2.9）中的乘子复制样本，并采用相同的平滑分布，即使用 $\hat{}_{\mathbb{C}^{[b],\,\nu}_n}$（4.7）或 $\check{}_{\mathbb{C}^{[b],\,\nu}_n}$（4.8）中的乘子复制样本；不过，当 n 较小时，这种选择在某些情况下可能并非最优。

4.6. 变点检测的应用

平滑序贯经验 copula 过程 $\mathbb{C}_n^\nu$（2.9）的一个自然应用领域是变点检测。为说明在推断程序中使用平滑经验 copula 可能带来的优势，本节首先简要介绍如何利用前述推导，得到 Bücher 等人（2014）提出的检验的平滑版本，以检测多元时间序列的截面依赖是否发生变化。随后，我们重现 Bücher 等人（2014）的部分实验，将其提出的（非平滑）检验与基于经验 beta copula 及相应平滑自助法重复样本的平滑版本进行比较。请注意，我们没有考虑使用 Kojadinovic 和 Yi（2022年）提出的替代数据自适应平滑分布，并由此得到估计量 $C_{k\,l}^{\mathrm{BetaB4}}$：这是因为其计算成本显著更高。

此类检验的原假设是，$\mathscr{X}_{1:n}$ 是来自平稳时间序列（由连续随机向量构成）的一段序列；其目的在于对备择假设特别敏感

$$H_1:\ \exists\text{个互不相同的 } C_1,\ C_2 \text{ 和 } k^\star \in \{1,\dots,n-1\},\ \text{使得} \boldsymbol{X}_1,\dots,\boldsymbol{X}_{k^\star} \text{具有 copula } C_1,\ \text{而 } \boldsymbol{X}_{k^\star+1},\dots,\boldsymbol{X}_n \text{具有 copula } C_2. \tag{4.15}$$

平滑版本检验所需的要素，可经过相应调整从Bücher 等人（2014）获得。具体而言，我们将如下定义的最大选取 Cramér–von Mises 泛函作为检验统计量：

$$S_n^\nu = \sup_{s\in[0,1]} \int_{[0,1]^d} \{\mathbb{D}_n^\nu(s,\boldsymbol{u})\}^2 \,\mathrm{d}C_{1:n}(\boldsymbol{u}),$$

其中

$$\mathbb{D}_n^\nu(s,\boldsymbol{u}) = \sqrt{n}\lambda_n(0,s)\lambda_n(s,1)\{C_{1:\lfloor ns\rfloor}^\nu(\boldsymbol{u}) - C_{\lfloor ns\rfloor+1:n}^\nu(\boldsymbol{u})\}, \qquad (s,\boldsymbol{u}) \in [0,1]^{d+1}.$$

如我们所见，后者涉及对根据数据子样本计算出的（平滑）经验 copula 进行比较。注意，在原假设下，

$$\mathbb{D}_n^\nu(s,\boldsymbol{u}) = \lambda_n(s,1)\,\mathbb{C}_n^\nu(0,s,\boldsymbol{u}) - \lambda_n(0,s)\mathbb{C}_n^\nu(s,1,\boldsymbol{u}), \qquad (s,\boldsymbol{u}) \in [0,1]^{d+1},$$

S_n^ν 的可能乘子自助法重复样本可以通过以下方式定义：

$$\hat{S}_n^{[b],\nu} = \sup_{s\in[0,1]} \int_{[0,1]^d} \{\hat{\mathbb{D}}_n^{[b],\nu}(s,\boldsymbol{u})\}^2 \mathrm{d}C_{1:n}(\boldsymbol{u}), \qquad b \in \mathbb{N},$$

或通过

$$\check{S}_n^{[b],\nu} = \sup_{s\in[0,1]} \int_{[0,1]^d} \{\check{\mathbb{D}}_n^{[b],\nu}(s,\boldsymbol{u})\}^2 \mathrm{d}C_{1:n}(\boldsymbol{u}), \qquad b \in \mathbb{N}, \tag{4.16}$$

其中，对于任意 $(s,\boldsymbol{u}) \in [0,1]^{d+1}$，

$$\hat{\mathbb{D}}_n^{[b],\nu}(s,\boldsymbol{u}) = \lambda_n(s,1)\,\hat{\mathbb{C}}_n^{[b],\nu}(0,s,\boldsymbol{u}) - \lambda_n(0,s)\,\hat{\mathbb{C}}_n^{[b],\nu}(s,1,\boldsymbol{u}),$$
$$\check{\mathbb{D}}_n^{[b],\nu}(s,\boldsymbol{u}) = \lambda_n(s,1)\,\check{\mathbb{C}}_n^{[b],\nu}(0,s,\boldsymbol{u}) - \lambda_n(0,s)\,\check{\mathbb{C}}_n^{[b],\nu}(s,1,\boldsymbol{u}),$$

其中 $\hat{\mathbb{C}}_n^{[b],\nu}$ 以及 $\check{\mathbb{C}}_n^{[b],\nu}$ 分别定义于式（4.7）和式（4.8）中。注意，在 $\mathbb{C}_n^\nu$ 的乘子复制样本表达式中，作为 copula 一阶偏导数的估计量，我们使用即将介绍的章节中式（5.8）定义的“截断”有限差分估计量，其带宽为 $h = h' = \min\{(l-k+1)^{-1/2},\ 1/2\}$。正如命题5.5所示，后者满足条件4.1。最后，与 B¨ucher 等人（2014）一样，关于 S_n^ν 的近似 p 值可以通过以下任一方式计算

$$\frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} \mathbf{1}\Big(\hat{S}_n^{[b],\nu} \geq S_n^\nu\Big) \quad \text{or} \quad \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} \mathbf{1}\Big(\check{S}_n^{[b],\nu} \geq S_n^\nu\Big),$$

对于某个较大的整数 B。要证明上述方法在原假设下渐近有效的理论结果，可以从定理4.3出发，按照B¨ucher 等人(2014) 的方法进行，并最终使用B¨ucher 和 Kojadinovic(2019) 第 4 节中陈述的结果。

如果对于任意 $m \in \mathbb{N}$，相应的平滑分布 $\nu_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{x}}$，$\boldsymbol{x} \in (\mathbb{R}^d)^m$，$\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$在 $\boldsymbol{u}$ 处均为狄拉克测度，那么前述要素便是非光滑的，由此得到的检验与B¨ucher 等人(2014) 研究的检验完全一致。在这种情况下，检验统计量自然记为 S_n^{Dirac}。作为替代的平滑分布，我们考虑了那些导出经验 beta copula 的分布，这些分布在备注2.2 以及第2.1节末尾均有说明。此时所得统计量自然记为 S_n^{Bin}。

为了比较基于 S_n^{Bin}的检验与基于 S_n^{Dirac}的检验，我们考虑了与B¨ucher 等人（2014）第 5 节报告的实验类似的实验。两种检验均在 5% 显著性水平下进行，使用形式为（4.16）的重复样本，因为这种形式似乎能带来更好的结果。进行这些检验所需的依赖乘子序列，按照B¨ucher 等人（2014）附录 C 最后一段所述的方法生成。第 4.2 节中（M2）和（M3）出现的带宽参数 ℓ_n，采用中所述的程序选取，B¨ucher 和 Kojadinovic （2016，第 5 节）（不过，这种做法对于平滑乘子自助法重复样本而言可能并非“最优”）。

作为第一项实验，我们估计了在原假设下生成的数据中，平稳性原假设的拒绝率。我们使用二元 AR(1) 模型作为数据生成模型。具体而言，设 $\boldsymbol{U}_i, i \in \{-100,\ldots,n\}$ 是来自 copula C 的二元独立同分布样本。然后，令 $\boldsymbol{\epsilon}_i = (\Phi^{-1}(U_{i1})\ \Phi^{-1}(U_{i2}))$,

TABLE 3 *Percentages of rejection of the null hypothesis of stationarity computed from 1000 samples of size $n \in \{25, 50, 100, 200\}$ generated as explained in Section 4.6, where C is the bivariate Frank copula with a Kendall's tau of $\tau \in \{0, 0.33, 0.66\}$.*

		$n = 25$		$n = 50$		$n = 100$		$n = 200$	
β	τ	S_n^{Dirac}	S_n^{Bin}	S_n^{Dirac}	S_n^{Bin}	S_n^{Dirac}	S_n^{Bin}	S_n^{Dirac}	S_n^{Bin}
0	0.00	17.5	13.3	7.7	8.0	5.5	5.8	3.8	4.4
	0.33	18.7	13.4	7.6	7.3	4.9	6.3	4.2	4.0
	0.66	21.1	11.7	5.6	4.9	3.0	3.1	3.2	3.8
0.3	0.00	18.8	16.1	6.2	7.4	4.3	4.7	6.4	6.0
	0.33	21.4	16.4	7.8	8.7	5.2	5.9	5.4	5.4
	0.66	25.3	16.8	5.4	5.9	2.1	3.0	1.2	1.4
0.5	0.00	26.1	22.8	11.4	11.7	6.1	6.6	6.2	7.2
	0.33	22.9	23.0	10.3	11.2	5.5	7.2	2.4	3.6
	0.66	27.5	20.1	10.5	11.0	2.2	3.6	1.6	1.6

其中 Φ 是标准正态分布的分布函数，且 $\boldsymbol{X}_{-100} = \boldsymbol{\epsilon}_{-100}$。最后，对于任意 $j \in \{1, 2\}$ 和 $i \in \{-99, \ldots, n\}$，递归计算

$$X_{ij} = \beta X_{i-1,j} + \epsilon_{ij},$$

其中前 100 个观测值用作预热样本。

我们将 $n \in \{25, 50, 100, 200\}$，$C$ 视为 Kendall τ 为 $\tau \in \{0, 0.33, 0.66\}$ 且 $\beta \in \{0, 0.3, 0.5\}$ 的二元 Frank copula。相应的拒绝百分比列于表 3 中。可以看出，当 $n \in \{100, 200\}$ 时，两个检验似乎都能较好地控制检验水平。然而，当 $n = 25$ 时，显然不应使用这些检验；但对于序列相关性较弱的数据，在 $n = 50$ 时或许可使用。

作为第二项实验，我们估计了在 (4.15) 中 H_1 生成的数据下，平稳性原假设的拒绝率。为此，我们考虑了与第一项实验类似的数据生成模型，不同之处在于，$i \in \{-100, \ldots, k^\star\}$ 对应的 $\boldsymbol{U}_i$ 独立同分布，且服从 copula C_1；而 $i \in \{k^\star + 1, \ldots, n\}$ 对应的 $\boldsymbol{U}_i$ 独立同分布，且服从 copula $C_2 \neq C_1$。按照 B¨ucher 等人（2014）的做法，我们设定 $k^\star = \lfloor nt \rfloor$，其中 $t \in \{0.1, 0.25, 0.5\}$，并考虑了 $n \in \{50, 100, 200\}$，即 Kendall τ 为 0.2 的二元 Frank copula，以及 C_2，即 Kendall τ 取值属于 $\{0.4, 0.6\}$ 的二元 Frank copula。结果见表 4。如表所示，基于 S_n^{Bin} 的检验整体上似乎比基于 S_n^{Dirac} 的检验更有检验力。检验力差异最大的情况往往出现在 $\tau = 0.6$ 和 $t \in \{0.1, 0.25\}$，这对应于检验统计量应当最大的情形，因为此时由少量观测值（约为 $\lfloor nt \rfloor$）计算出的经验 copula 与由其余观测值计算出的经验 copula 存在差异。虽然不能据此断定，基于 S_n^{Bin} 的光滑变点检测检验在所有情况下都会比基于 S_n^{Dirac} 的非光滑检验更有检验力，但所得结果部分印证了这样的直觉：光滑检验对数据序列开头或结尾处的变化可能更敏感。

TABLE 4
Percentages of rejection of the null hypothesis of stationarity computed from 1000 samples of size $n \in \{50, 100, 200\}$ generated under H_1 as explained in Section 4.6 where $k^\star = \lfloor nt \rfloor$, , C_1 and C_2 are both bivariate Frank copulas such that C_1 has a Kendall's tau of 0.2 and C_2 a Kendall's tau of $\tau \in \{0.4, 0.6\}$.

			$\beta = 0$		$\beta = 0.3$	
τ	n	t	S_n^{Dirac}	S_n^{Bin}	S_n^{Dirac}	S_n^{Bin}
0.4	50	0.10	8.8	8.7	8.0	8.1
		0.25	13.5	16.1	14.0	15.5
		0.50	14.7	15.3	17.5	18.4
	100	0.10	4.0	4.9	5.5	7.6
		0.25	16.9	19.3	14.8	17.9
		0.50	26.6	28.8	22.5	25.3
	200	0.10	6.6	7.4	5.6	6.6
		0.25	29.4	31.8	22.0	24.2
		0.50	51.4	53.8	42.0	43.8
0.6	50	0.10	10.2	13.0	9.1	11.6
		0.25	33.0	39.8	31.6	39.1
		0.50	53.0	56.8	47.0	51.1
	100	0.10	12.1	16.6	8.6	12.5
		0.25	62.6	70.9	51.9	60.3
		0.50	83.1	84.9	75.0	78.6
	200	0.10	30.4	37.8	21.0	28.8
		0.25	95.2	97.0	87.8	91.0
		0.50	99.4	99.4	97.0	97.2

5. copula 一阶偏导数的估计量

上一节定义的乘子自助法重复样本都取决于 C 一阶偏导数估计量的选择。出于渐近理论的考虑，这些估计量需要满足条件 4.1。显然，这类估计量越准确，我们越有理由期待乘子自助法表现越好，无论其中是否涉及平滑。在回顾基于经典经验 copula 有限差分的此类估计量的现有定义后，我们定义了两个相关的光滑估计量类。随后，通过适当选择相应的带宽参数，我们证明了它们在序贯情形下具有弱相合性，这意味着所考虑的许多估计量满足条件 4.1。在最后一小节中，我们报告了二元和三元蒙特卡洛实验的结果，并根据积分均方误差对选定的估计量进行比较。

请注意，正如引言中已经提到的，本节的结果本身也可能具有独立的研究价值，因为正如Janssen、Swanepoel 和 Veraverbeke (2016所讨论的，copula 的一阶偏导数估计量可用于均值回归和分位数回归，因为它们能够得到条件分布函数的估计量。特别是，正如我们将看到的，在我们的蒙特卡洛实验中考察的若干估计量，其有限样本性能优于Janssen,

Swanepoel 和 Veraverbeke (2016).

5.1. 基于经验 *copula* 有限差分的估计量

正如第4.3节已经提到的，在关于经典经验 copula 过程的乘子自助法的开创性研究中，R´emillard 和 Scaillet (2009) 基于经验 copula 的有限差分，考察了一阶偏导数 $C_j, j \in \{1, \ldots, d\}$， C 的估计量。在序贯情形下，给定一段观测值 $\mathscr{X}_{k:l} = (\boldsymbol{X}_k, \ldots, \boldsymbol{X}_l)$，$1 \le k \le l \le n$，以及两个带宽参数 h 和 h'，它们属于 $[0, 1/2]$ 且满足 $h + h' > 0$，前述估计量的一个稍微更一般的定义如下：

$$\dot{C}^{\nabla}_{j,k:l,h,h'}(\boldsymbol{u}) = \frac{C_{k:l}\{(\boldsymbol{u} + h\boldsymbol{e}_j) \wedge \mathbf{1}\} - C_{k:l}\{(\boldsymbol{u} - h'\boldsymbol{e}_j) \vee \mathbf{0}\}}{h + h'}, \qquad \boldsymbol{u} \in [0,1]^d, \tag{5.1}$$

其中 $\boldsymbol{e}_j$ 是 j的标准基的第 $\mathbb{R}^d$， $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$， $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^d$， $\wedge$ (分别表示 $\vee$) 分别表示分量最小值（最大值）算子，且 $C_{k:l}$ 是 $\mathscr{X}_{k:l}$ 在（2.1）中定义的经典经验 copula。符号 ∇ 表示这些估计量基于$C_{k:l}$ 的有限差分，采用“右”（分别为“左”）带宽 h (分别为 h')。

为了减小前一个估计量在评估点$\boldsymbol{u} \in [0,1]$ 满足 $u_j \in [0, h') \cup (1 - h, 1]$, Kojadinovic、Segers 和 Yan (2011) 考虑了（5.1）的以下微小变体：

$$\dot{C}^{\Delta}_{j,k:l,h,h'}(\boldsymbol{u}) = \frac{C_{k:l}\{(\boldsymbol{u} + h\boldsymbol{e}_j) \wedge \mathbf{1}\} - C_{k:l}\{(\boldsymbol{u} - h'\boldsymbol{e}_j) \vee \mathbf{0}\}}{(u_j + h) \wedge 1 - (u_j - h') \vee 0}, \qquad \boldsymbol{u} \in [0,1]^d. \tag{5.2}$$

注意，符号 Δ 仍表示有限差分，但与 ∇ 相比方向相反，以便区分（5.2）与（5.1）。

众所周知，$\dot{C}_j$ 在 $[0,1]^d$ 上几乎处处存在；对于 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$ 中那些使其存在的取值，一般而言，$0 \le \dot{C}_j(\boldsymbol{u}) \le 1$ （例如参见 Nelsen，2006，定理 2.2.7）。因此，对（5.1）中的估计量$\dot{C}^{\nabla}_{j,k:l,h,h'}$ 以及（5.2）中的$\dot{C}^{\Delta}_{j,k:l,h,h'}$ 作一种自然的修正，就是通过截断来确保它们的取值属于 $[0,1]$:

$$\underline{\dot{C}}^{\nabla}_{j,k:l,h,h'} = (\dot{C}^{\nabla}_{j,k:l,h,h'} \vee 0) \wedge 1, \tag{5.3}$$

$$\underline{\dot{C}}^{\Delta}_{j,k:l,h,h'} = (\dot{C}^{\Delta}_{j,k:l,h,h'} \vee 0) \wedge 1. \tag{5.4}$$

注意，前述表达式中与 0 取最大值实际上并无必要，因为（5.1）和（5.2）中的估计量不可能为负，因为经验 copula $C_{k:l}$ 是一个多元分布函数。尽管如此，为了与后续的某些定义保持一致，我们仍保留（5.3）和（5.4）的原样形式。更一般地，在本节余下部分中，下划线将用于表示取值受限于 $[0,1]$ 的估计量。

5.2. 两类光滑估计量

为获得 C的一阶偏导数的光滑估计量，（5.1）和（5.2）中的方法可以通过两种自然的方式加以扩展。第一种方法是考虑 C的光滑估计量的有限差分。给定一段观测值 $\mathscr{X}_{k:l}$，$1 \le k \le l \le n$，以及两个带宽参数 h和 h'，满足 $[0, 1/2]$，使得 $h + h' > 0$，由此得到以下估计量

$$\dot{C}^{\nu,\nabla}_{j,k:l,h,h'}(\boldsymbol{u}) = \frac{C^{\nu}_{k:l}\{(\boldsymbol{u} + h\boldsymbol{e}_j) \wedge \mathbf{1}\} - C^{\nu}_{k:l}\{(\boldsymbol{u} - h'\boldsymbol{e}_j) \vee \mathbf{0}\}}{h + h'}, \qquad \boldsymbol{u} \in [0,1]^d, \tag{5.5}$$

$$\dot{C}^{\nu,\Delta}_{j,k:l,h,h'}(\boldsymbol{u}) = \frac{C^{\nu}_{k:l}\{(\boldsymbol{u} + h\boldsymbol{e}_j) \wedge \mathbf{1}\} - C^{\nu}_{k:l}\{(\boldsymbol{u} - h'\boldsymbol{e}_j) \vee \mathbf{0}\}}{(u_j + h) \wedge 1 - (u_j - h') \vee 0}, \qquad \boldsymbol{u} \in [0,1]^d, \tag{5.6}$$

其中 $C^{\nu}_{k:l}$ 是 $\mathscr{X}_{k:l}$ 在（2.2）中定义的光滑经验 copula。请注意符号 ν 和 ∇（分别为 Δ）的顺序，这表明先对经验 copula 进行平滑，然后再应用有限差分。显然，当式（5.1）（分别为（5.2））中的平滑分布 $\nu^{\mathscr{X}_{k:l}}_{\boldsymbol{u}}$、$\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$在（2.2）中取为位于 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$处的狄拉克测度时，式（5.5）（分别为（5.6））是式（）的特例。

注 5.1。由于 C 是具有标准均匀边缘分布的多元分布函数，因此对于任意 $j \in \{1, \ldots, d\}$和 $\boldsymbol{u} \in V_j$（其中 V_j在条件 2.8 中定义），有 $\dot{C}_j(\boldsymbol{u}^{(j)}) = \lim_{h \to 0}\{C(\boldsymbol{u}^{(j)} + h\boldsymbol{e}_j) - C(\boldsymbol{u}^{(j)})\}/h = 1$（其中符号 $\boldsymbol{u}^{(j)}$ 在定理 2.12 之前定义）。有趣的是，式（5.6）中的估计量 $\dot{C}^{\nu}_{,j\overset{\Delta}{k}l,:,h,h'}$ 可以满足这一边界约束，也就是说，我们可以有$\dot{C}^{\nu}_{,j\overset{\Delta}{k}l,:,h,h'}(\boldsymbol{u}^{(j)}) = 1$。如果 $C^{\nu}_{k:l}$ 是真正的 copula，就确实会出现这种情况。根据命题 2.7，在条件 2.3 下，若对式（2.2）中的平滑分布作出特定选择，便可能得到这一结果，例如导出第 2.1 节中定义的经验 copula$C^{\mathrm{Bin}}_{k:l}$或$C^{\mathrm{BetaB4}}_{k\,l}$。

类比于（5.3）和（5.4），可以直接通过以下方式定义（5.5）和（5.6）中估计量的截断版本

$$\underline{\dot{C}}^{\nu,\nabla}_{j,k:l,h,h'} = (\dot{C}^{\nu,\nabla}_{j,k:l,h,h'} \vee 0) \wedge 1, \tag{5.7}$$

$$\underline{\dot{C}}^{\nu,\Delta}_{j,k:l,h,h'} = (\dot{C}^{\nu,\Delta}_{j,k:l,h,h'} \vee 0) \wedge 1. \tag{5.8}$$

注5.2。 如注5.1所述，平滑分布 $\nu^{\mathscr{X}_{k:l}}_{\boldsymbol{u}}$，$\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$可以选择为使 $C^{\nu}_{k:l}$ 在条件2.3下成为真正的 copula。在这种情况下，利用 $C^{\nu}_{k:l}$ 是具有标准均匀边缘分布的多元分布函数这一事实，我们立即得到（例如，参见Durante 和 Sempi，2015，引理 1.2.14），对于任意 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$和 h，h'属于 $[0, 1/2]$ 且满足 $h + h' > 0$，

$$C^{\nu}_{k:l}\{(\boldsymbol{u} + h\boldsymbol{e}_j) \wedge \mathbf{1}\} - C^{\nu}_{k:l}\{(\boldsymbol{u} - h'\boldsymbol{e}_j) \vee \mathbf{0}\} \le (u_j + h) \wedge 1 - (u_j - h') \vee 0,$$

这意味着 $0 \le \dot{C}^{\nu}_{,j\overset{\Delta}{k}l,:,h,h'} \le 1$ 因此，在这种情况下无需截断 $\dot{C}^{\nu}_{,j\overset{\Delta}{k}l,:,h,h'}$，因为 (5.8) 中的 $\dot{C}^{\nu}_{,j\overset{\Delta}{k}l,\underline{:},h,h'}$ 等于 $\dot{C}^{\nu}_{,j\overset{\Delta}{k}l,:,h,h'}$。

类比于 (2.2)，获得平滑偏导数估计量的第二种自然方法是直接对 (5.1) 和 (5.2) 进行平滑，从而得到以下估计量

$$\dot{C}^{\nabla,\nu}_{j,k:l,h,h'}(\boldsymbol{u}) = \int_{[0,1]^d} \dot{C}^{\nabla}_{j,k:l,h,h'}(\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu^{\mathscr{X}_{k:l}}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}), \qquad \boldsymbol{u} \in [0,1]^d, \tag{5.9}$$

$$\dot{C}^{\Delta,\nu}_{j,k:l,h,h'}(\boldsymbol{u}) = \int_{[0,1]^d} \dot{C}^{\Delta}_{j,k:l,h,h'}(\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu^{\mathscr{X}_{k:l}}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}), \qquad \boldsymbol{u} \in [0,1]^d. \tag{5.10}$$

此时符号 ν 和 ∇ （分别为 Δ）的顺序颠倒，表明这是基于有限差分的估计量 $C^{\nabla}_{j,\,k:\,l,\,h,\,h'}$ 在（5.1）（分别为 $C^{\Delta}_{j,\,k:\,l,\,h,\,h'}$ 在（5.2））中进行了平滑处理。这些估计量的取值必然属于 $[0,1]$ 的版本，可以通过改用截断估计量（5.3）和（5.4）来构造，从而分别得到

$$\underline{\dot{C}}^{\nabla,\nu}_{j,k:l,h,h'}(\boldsymbol{u}) = \int_{[0,1]^d} \underline{\dot{C}}^{\nabla}_{j,k:l,h,h'}(\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu^{\mathscr{X}_{k:l}}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}), \qquad \boldsymbol{u} \in [0,1]^d, \tag{5.11}$$

$$\underline{\dot{C}}^{\Delta,\nu}_{j,k:l,h,h'}(\boldsymbol{u}) = \int_{[0,1]^d} \underline{\dot{C}}^{\Delta}_{j,k:l,h,h'}(\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu^{\mathscr{X}_{k:l}}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}), \qquad \boldsymbol{u} \in [0,1]^d. \tag{5.12}$$

请注意，获得 j 阶偏导数的第三种方法 C_j 是尝试直接对 $C^{\nu}_{k:l}$ 在（2.2）中关于其第 j 个自变量进行求导（当然，前提是 $C^{\nu}_{k:l}$ 可导）。由此得到的估计量

$$\dot{C}^{\nu}_{j,k:l} = \frac{\partial C^{\nu}_{k:l}}{\partial u_j}$$

可能仅存在于集合 V_j 中，该集合在条件2.8中定义。这是 Janssen、Swanepoel 和 Veraverbeke (2016) 所采用的路径。他们从某个整数 $m \geq 2$ 出发，构造经验 Bernstein Copula $C^{\mathrm{Bern}}_{k\,l\,:,\,m}$ 见（2.3）（如备注 2.2所述，这是 $C^{\nu}_{k:l}$ 在（2.2）中的一个特例）。令 $C^{\mathrm{Bern}}_{j\,k\,l,\,:,\,m} = \partial C^{\mathrm{Bern}}_{k\,l\,:,\,m}/\partial u_j$ 为所得的估计量。有趣的是，由附录E 中的引理 E.1，我们得到

$$\dot{C}^{\mathrm{Bern}}_{j,k:l,m}(\boldsymbol{u}) = \int_{[0,1]^d} \dot{C}^{\nabla}_{j,k:l,\frac{1}{m},0}(\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\tilde{\mu}_{j,m,\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}), \qquad \boldsymbol{u} \in V_j, \tag{5.13}$$

其中 $C^{\nabla}_{j\,k,\,:l,\frac{1}{m},0}$ 由（5.1）给出，其中 $h = 1/m$ 和 $h' = 0$，并且对于任意 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$，$\tilde{\mu}_{j,m,\boldsymbol{u}}$，它是随机向量 $(\tilde{S}_{m,1,u_1}/m, \ldots, \tilde{S}_{m,d,u_d}/m)$ 的分布律，其各分量相互独立，且对于 $i \in \{1,\ldots,d\} \setminus \{j\}$，$S_{m,i,u_i}$，服从二项分布 Binomial$(m, u_i)$，而 S_{m,j,u_j} 服从二项分布 Binomial$(m-1, u_j)$。换言之，直接对（2.3）中的经验 Bernstein Copula $C^{\mathrm{Bern}}_{k\,l\,:,m}$ 关于其第 j 个自变量求导，得到的是（5.9）中估计量的一个特例。注意，由于测度 $\tilde{\mu}_{j,m,\boldsymbol{u}}$ 对任意 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$ 都有定义，因此（5.13）中的积分实际上对任意 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$ 都有定义。因此，接下来我们将（5.13）中取 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$ 的情形作为 $\dot{C}^{\mathrm{Bern}}_{j\,k\,l,\,:,m}$ 的定义。

以下结果在附录 E 中得到证明，它表明 $C^{\mathrm{Bern}}_{j\,k\,l,\,:,\,m}$ 可以轻松计算。

命题 5.3。 给定一段 $\mathscr{X}_{k:b}$, $1 \le k \le l \le n$ 个观测值，对于任意 $j \in \{1,\dots,d\}$, $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$ 和整数 $m \ge 2$,

$$\dot{C}^{\mathrm{Bern}}_{j,k:l,m}(\boldsymbol{u}) = \frac{m}{l-k+1} \sum_{i=k}^{l} b_{m-1,u_j}\left\{\lceil mR^{k:l}_{ij}/(l-k+1)\rceil - 1\right\} \times \prod_{\substack{t=1\\ t\neq j}}^{d} \bar{B}_{m,u_t}\left\{\lceil mR^{k:l}_{it}/(l-k+1)\rceil - 1\right\}, \quad (5.14)$$

其中 $\lceil\cdot\rceil$ 表示向上取整函数；对于任意的 $p \in \mathbb{N}$ 和 $u \in [0,1]$, $B_{p,u}$（分别为 $b_{p,u}$）表示二项分布(p,u)的生存函数（分别为概率质量函数）。

5.3. 弱相合性

为了研究上一小节中定义的 C 偏导数估计量的弱相合性，有必要将其表达式中的带宽参数与计算这些估计量所依据的数据（或至少是数据量）联系起来。下文中，对于任意的 $n \in \mathbb{N}$ 以及任意可能的 d维数据集 $\boldsymbol{x} \in (\mathbb{R}^d)^n$, $h(\boldsymbol{x})$ 和 $h'(\boldsymbol{x})$ 分别表示数据集 $\boldsymbol{x}$的左侧和右侧带宽值。基于此，为了使记号更紧凑，在本小节余下部分，我们将用 $\dot{C}^{\nu,\nabla}_{j,k:l}$（分别用 $\dot{C}^{\nu,\Delta}_{j,k:l}$, $\dot{C}^{\nabla,\nu}_{j,k:l}$, …）表示 $\dot{C}^{\nu,\nabla}_{j,k:l,h,h'}$（分别表示 $\dot{C}^{\nu,\Delta}_{j,k:l,h,h'}$, $\dot{C}^{\nabla,\nu}_{j,k:l,h,h'}$, …），并约定 $h = h(\mathscr{X}_{k:l})$ 和 $h' = h'(\mathscr{X}_{k:l})$ 是随机变量。此外，我们对带宽施加以下条件。

条件 5.4（带宽条件）。 存在正数序列 $b_n \downarrow 0$和 $b'_n \downarrow 0$ 以及常数 $L_2 \ge L_1 > 0$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$、 $b_n + b'_n \ge n^{-1/2}$, 以及任意 $\boldsymbol{x} \in (\mathbb{R}^d)^n$, $L_1 b_n \le h(\boldsymbol{x}) \le (L_2 b_n) \wedge 1/2$ 和 $L_1 b'_n \le h'(\boldsymbol{x}) \le (L_2 b'_n) \wedge 1/2$。

正如我们将在第 5.4 节看到的，诸多有意义的可能性之一是，考虑对任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, 数据集 $\boldsymbol{x}$ 的左、右带宽定义为 $h(\boldsymbol{x}) = h'(\boldsymbol{x}) = [M_2\{1-|\tau(\boldsymbol{x})|\}^a + M_1]n^{-1/2} \wedge 1/2$, 其中 $M_1, M_2 > 0$ 为常数， $\tau(\boldsymbol{x}) \in [-1,1]$ 是数据集 $\boldsymbol{x}$的 Kendall τ 某种适当多元扩展的样本版本的值，而 $a \in (0,\infty)$ 是一个固定的幂。粗略地说，对于截面相关性较弱（分别较强）的数据，带宽会较大（分别较小）。容易验证，对于上述定义，条件 5.4 成立。

以下结果在附录E中得到证明，确立了序贯情形下第一类光滑估计量的弱相合性。

命题 5.5（序贯情形下第一类光滑估计量的弱相合性）。 在条件 *2.8*、*2.9*、*2.11* 和 *5.4*下，对任意 $j \in \{1,\dots,d\}$, $\delta \in (0,1)$ 以及 $\varepsilon \in (0,1/2)$,

$$\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\ge\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d\\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \left|\dot{C}^{\nu,\Delta}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{u}) - \dot{C}_j(\boldsymbol{u})\right| = o_{\mathbb{P}}(1), \quad (5.15)$$

其中 $\dot{C}^{\nu,\Delta}_{j,k,l,:}$ 在 (5.6) 中定义，同理，$\dot{C}^{\nu,\nabla}_{j,k,:,l}$ 在 (5.5) 中，$\underline{\dot{C}}^{\nu,\nabla}_{j,k,:,l}$ 在 (5.7) 中，以及 $\underline{\dot{C}}^{\nu,\Delta}_{j,k,l,:}$ 在 (5.8) 中。

注 5.6. 检查前一个结果的证明可知，如果 5.15) 中的第二个上确界可以改为对 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$ 取上确界，条件是 $\dot{C}_j$ 在 $[0,1]^d$ 上连续，而不仅仅是满足条件 2.8；另见 Kojadinovic、Segers 和 Yan (2011).

根据前一个命题，在命题 5.5 的条件下，估计量 $\dot{C}^{\nu,\nabla}_{j,k,:,l}$ 和 $\dot{C}^{\nu,\Delta}_{j,k,:,l}$ 满足条件 4.1，因为根据构造，它们的绝对值有界（不超过一）。

下一个结果直接由命题 5.5 推出，因为（5.1) 中的估计量（分别是（5.2）中的估计量）是（5.5)（分别是（5.6）中的估计量）的一个特例，只要式（2.2）中的平滑分布 $\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{K}_{k:l}}$, $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$ 被选为在 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$ 处的狄拉克测度（后者显然满足条件 2.9）。

推论 5.7（序贯情形下非光滑的基于有限差分的估计量的弱相合性）。 在条件 *2.8*、*2.11* 和 *5.4*下，对于任意 $j \in \{1,\ldots,d\}$, $\delta \in (0,1)$ 以及 $\varepsilon \in (0,1/2)$，

$$\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d \\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \left|\dot{C}^{\Delta}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{u}) - \dot{C}_j(\boldsymbol{u})\right| = o_{\mathbb{P}}(1),$$

其中 $\dot{C}^{\Delta}_{j,k:l}$ 定义见 (5.2)，类似地，$\dot{C}^{\nabla}_{j,k:l}$ 见 (5.1)，$\dot{C}^{\nabla}_{j,k,:,l}$ 见 (5.3)，以及 $\dot{C}^{\Delta}_{j,k,:,l}$ 见 (5.4)。

现在我们转向偏导数的第二类光滑估计量。如下文所示，要证明它们的弱相合性，除其他条件外，只需底层平滑分布满足条件 2.9的以下较弱版本。

条件 5.8（弱方差条件）。 存在一个正数列$a_n \downarrow 0$，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$、$\boldsymbol{x} \in (\mathbb{R}^d)^n$、$\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$和 $j \in \{1,\ldots,d\}$，方差$(W^{\boldsymbol{x}}_{j,u_j}) \leq a_n$。

以下结果在附录 E 中得到证明。

命题 5.9（第二类光滑估计量在序贯情形下的弱相合性）。 在条件 *2.8*、*2.11*、*5.4* 和 *5.8*下，对于任意 $j \in \{1,\ldots,d\}$, $\delta \in (0,1)$ 和 $\varepsilon \in (0,1/2)$,

$$\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d \\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \left|\underline{\dot{C}}^{\Delta,\nu}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{u}) - \dot{C}_j(\boldsymbol{u})\right| = o_{\mathbb{P}}(1), \tag{5.16}$$

其中 $\underline{\dot{C}}^{\Delta,\nu}_{j,k,:,l}$ 定义见 (5.12)，类似地，$\dot{C}^{\nabla,\nu}_{j,k,:,l}$ 见 (5.11)。

或许有人会疑惑，为什么前一个命题未包含估计量 $\dot{C}^{\nabla,\nu}_{j,k,:,l}$（5.9）中的估计量，以及 $\dot{C}^{\Delta,\nu}_{j,k,:,l}$（5.10）中的估计量。事实上，若进一步假设

（将进行平滑的）$C_{j,k:l}^{\nabla}$（5.1）中的左、右带宽与 $C_{j,k:l}^{\Delta}$（5.2）中的左、右带宽相等，且不存在并列值（见条件 2.3），那么也可以用相同的证明技巧证明估计量 $\dot{C}_{j\,k^{\nu},:l}^{\nabla}$ 和 $\dot{C}_{j\,k^{\nu},:l}^{\Delta}$ 的弱相合性。检查证明并进一步思考后可以发现，这是因为在这种情况下，这些估计量在$[0,1]^d$ 上有界。当其中一个带宽为零时，情况则未必如此。这也是为什么不能直接用前一个命题来证明（5.13）中的伯恩斯坦估计量具有弱相合性。对于该估计量，还需利用这样一个事实：经过平滑的基于有限差分的估计量在平滑分布的支撑集上有界。下一命题附录 E 中的证明用到了这一点。

命题 5.10（序贯情形下伯恩斯坦估计量的弱相合性）。假设条件 *2.3*、*2.8* 和 *2.11* 成立，并且对于任意 $i \in \mathbb{N}$，令 $m_i = \lfloor Li^{\theta} \rfloor \vee 2$，其中常数 $L > 0$ 和 $\theta \in (0,\ 1/2]$。那么，对于任意$j \in \{1,\dots,d\}$，$\delta \in (0,\ 1)$ 和 $\varepsilon \in (0,\ 1/2)$，

$$\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d \\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \left| \dot{C}^{\mathrm{Bern}}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor,m_{\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor}} - \dot{C}_j(\boldsymbol{u}) \right| = o_{\mathbb{P}}(1), \tag{5.17}$$

其中 $C^{\mathrm{Bern}}_{j\,k\,l,\,:,\,m}$ 定义见 (5.13)。此外，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，

$$\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d} \left| \dot{C}^{\mathrm{Bern}}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor,m_{\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor}}(\boldsymbol{u}) \right| \leq 1 + L \vee 2. \tag{5.18}$$

请注意，我们的证明技巧使我们能够证明，即使对于 $\theta = 1/2$，估计量也具有一致弱相合性；而 Bouezmarni、El Ghouch 和 Taamouti (2013) 的命题 3.1 证明中采用的方法（针对伯恩斯坦 copula 密度估计量，并可推广至一阶偏导数估计量）只能得到 $\theta < 1/2$ 下的结果。前述结果的另一项推论是，命题 5.10 中参数化的伯恩斯坦偏导数估计量可以满足条件4.1。

5.4. 部分估计量的有限样本性能

本小节旨在比较前文介绍的部分估计量的有限样本性能。具体而言，对于每个 $n \in \{10, 20, \dots, 100\}$、每个数据生成 copula C 以及每个正在考察的偏导数估计量$C_{j,\,1:n}$，我们估计了其积分均方误差

$$\mathrm{IMSE}(\dot{C}_{j,1:n}) = \int_{[0,1]^d} \mathbb{E}\left[\left\{ \dot{C}_{j,1:n}(\boldsymbol{u}) - \dot{C}_j(\boldsymbol{u}) \right\}^2 \right] \mathrm{d}\boldsymbol{u}.$$

为此，我们采用了Segers, Sibuya和 Tsukahara （2017年）的附录 B 中详细介绍的技巧，从而可以将 IMSE($C_{j,\,1:n}$) 作为单一期望来计算

并通过蒙特卡罗模拟进行计算，使用 20 000 个独立的随机样本，每个样本包含 n 个观测值，来自 C。

在第一项实验中，我们将确定性带宽$h = h' = n^{-1/2} \wedge 1/2$下，(5.7) 中形式为 $\dot{C}^{\nu}_{\nabla,j\,1\,n,:,h,h'}$ 的估计量，与 (5.8) 中形式为 $\dot{C}^{\nu}_{j\,1\,\Delta,:,n,h,h'}$ 的估计量进行了比较。具体而言，我们分别考察了基于经典经验 copula $C_{1:n}$ （见 (2.1)）的有限差分、基于 (3.1) 中定义的经验 beta copula $C^{\mathrm{Bin}}_{1:n}$ 的有限差分，以及基于第 2.1 节末尾定义的数据自适应扩展 $C^{\mathrm{BetaB4}}_{1\,n}$: 的有限差分的估计量。作为数据生成 copula C，我们考察了二元或三元 Clayton copula 或 Gumbel–Hougaard copula，其二元边缘分布的 Kendall τ 为 $\tau \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75\}$；此外还考察了 Kendall τ 为 $\tau \in \{0, -0.25, -0.5, -0.75\}$ 的二元 Frank copula。请注意，由于所有数据生成 copula 均具有交换性，因此只需关注一个偏导数估计量，例如第一个。正如预期，形式为 $\dot{C}^{\nu}_{\Delta,j\,1,:,n,h,h'}$ 的估计量的积分均方误差始终（显著）低于对应的估计量 $\dot{C}^{\nu}_{\nabla,j\,1\,n,:,h,h'}$，这证实了与 (5.5) 中的分子相比，(5.6) 中调整后的分子确实有助于提升基于有限差分的估计量的有限样本性能。

在第二个实验中，我们比较了式 (5.8) 中形如 $\dot{C}^{\nu}_{\Delta,j\,1,:,n,h,h'}$ 的上述三个估计量。下文将它们分别记为 $\dot{C}^{\Delta}_{j\,1,:,n,h,h'} = \dot{C}^{\mathrm{Dirac}}_{1\,n,j\,\Delta,h,:,h',\dot{C}^{\mathrm{Bin}},j\perp n\,\Delta,:,h,h'}$ 和 $\dot{C}^{\mathrm{BetaB4}}_{,j\perp n\,h\,\Delta,:,h'}$。正如根据 Kojadinovic 和 Yi（2022）对基础 copula 估计量所做的实验所预期的那样，估计量 $\dot{C}^{\mathrm{BetaB4}}_{,j\,1\,n\,h\,\Delta,:,h'}$ 的积分均方误差始终最低，其次是 $\dot{C}^{\mathrm{Bin}}_{,j\,1\,n\,\Delta,:,h,h'}$ 和 $\dot{C}^{\Delta}_{j\,1,:,n,h,h'}$。

接下来，我们研究了带宽对 $\dot{C}^{\mathrm{BetaB4}}_{\Delta—,、j\,1\,n\,h\,h'、:、}$ 的积分均方误差的影响。考虑了以下形式的确定性带宽 $h = h' = (Ln^{-1/2}) \wedge 1/2$，其中 $L \in \{0.5, 1, 2, 4\}$。当数据生成 copula 为具有负依赖的二元 Frank copula（见图3）或三元 Gumbel–Hougaard copula（见图4）时，相应的积分均方误差分别显示在各图的第一列中。图例“BetaB 0.5”指的是满足 $L = 0.5$ 的估计量，依此类推。可以看出，截面依赖越弱，带宽（表达式中常数L）应越大。

考察（5.9）和（5.10），并经过一些思考后可知，第二类估计量在实际中可能难以计算。因此，在我们的实验中，我们仅关注伯恩斯坦估计量 $C^{\mathrm{Bern}}_{j\,1,:,n,m}$ 在（5.13）中的该估计量可利用（5.14）计算。仿照前一个实验，我们考虑了参数 m 的一个确定性选取，形式为 $m = \lfloor Ln^{1/2} \rfloor \vee 2$，其中 $L \in \{0.5, 1, 2, 4\}$。相应的积分均方误差列于图 3（分别在图 4中），其中数据生成 copula 为具有负依赖的二元 Frank copula（分别为三元 Gumbel–Hougaard copula）。图例“伯努利 0.5”指的是满足 $L = 0.5$ 的估计量，其他情况依此类推。可以看出，这一次，截面依赖越强，表达式中（常数 L 的参数就越大，其中

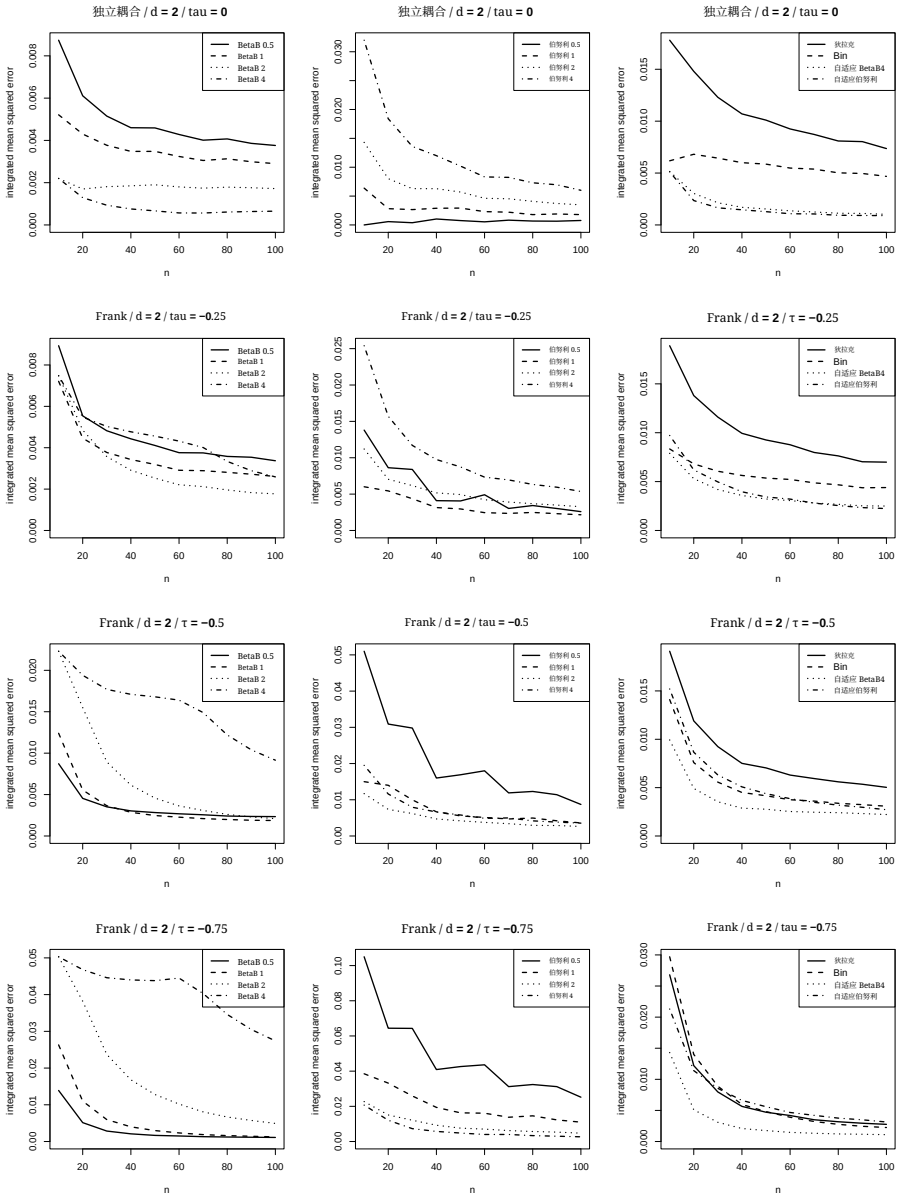

FIG 3. *Estimated integrated mean squared errors against* $n \in \{10, 20, \ldots, 100\}$ *of four estimators of* $\dot{C}_1$ *when* C *is the bivariate Frank copula with a Kendall's tau in* $\{0, -0.25, -0.5, -0.75\}$.

）参数 m 应当取更大值。鉴于前一个实验，且 $1/m$ 起着带宽的作用，这当然并不令人意外。

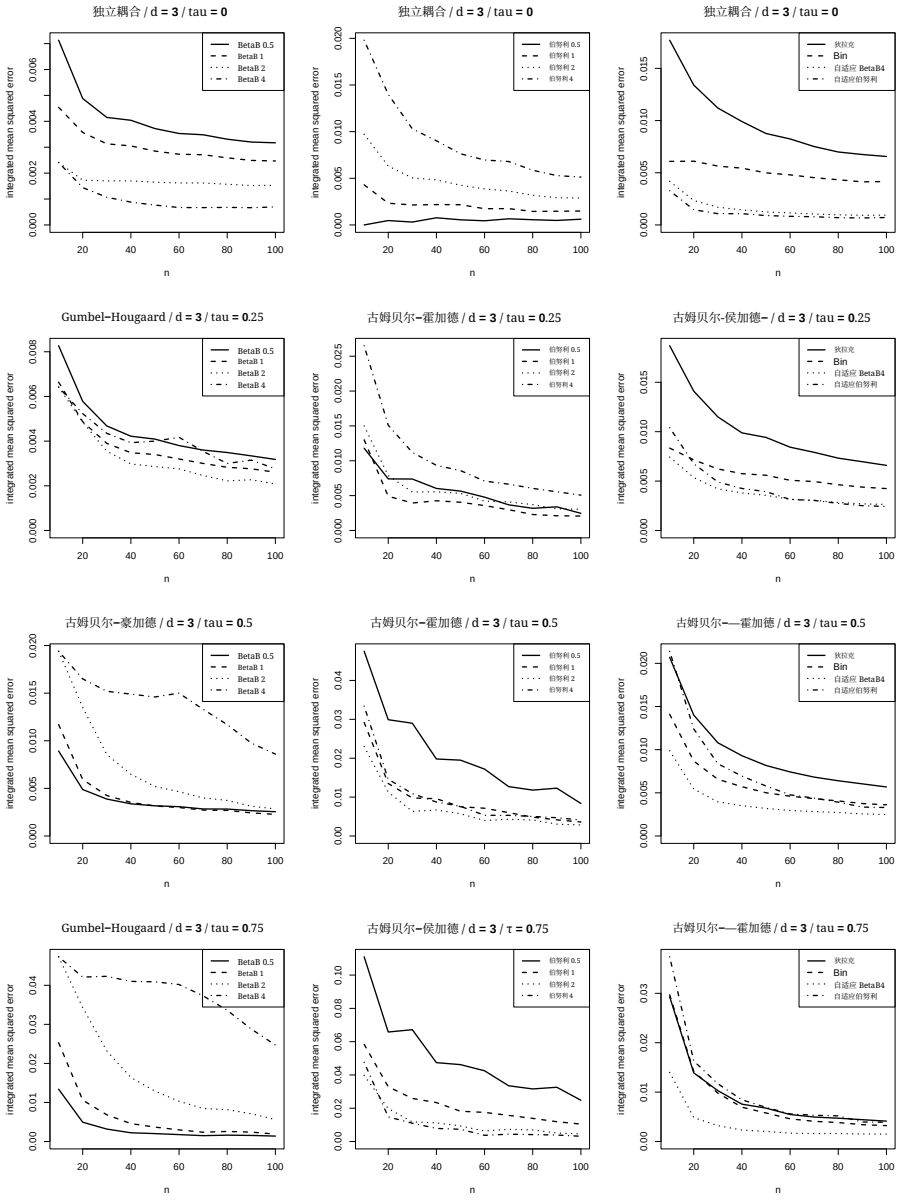

FIG 4. *Estimated integrated mean squared errors against* $n \in \{10, 20, \ldots, 100\}$ *of four estimators of* $\dot{C}_1$ *when* C *is the trivariate Gumbel–Hougaard copula whose bivariate margins have a Kendall's tau in* $\{0, 0.25, 0.5, 0.75\}$.

前两个实验表明，应重点考察估量 $\dot{C}^{\mathrm{BetaB4}}$ 、$j\,1\,n\,h^{\Delta}$ 、：，h' 和 $\dot{C}^{\mathrm{Bern}}_{j\,1}$ 、：n、m的数据自适应带宽。具体而言，对于 $d \in \{2, 3\}$

以及数据集 $\boldsymbol{x} \in (\mathbb{R}^d)^n$，我们考虑了以下设定： $h(\boldsymbol{x}) = h'(\boldsymbol{x}) = ([4\{1 - |\tau(\boldsymbol{x})|\}^6 + 1/2]n^{-1/2}) \wedge 1/2$，其中 $\dot{C}^{\mathrm{BetaB4}}_{\_,j\,1\,n\,h}{}^{\Delta}{}_{,:,,h'}$；以及 $m(\boldsymbol{x}) = \lfloor\{4|\tau(\boldsymbol{x})|^{3/2} + 1/2\}n^{1/2}\rfloor \vee 2$，其中 $C^{\mathrm{Bern}}_{j\,1,:n,m}$。这里， $\tau(\boldsymbol{x}) \in [-1,1]$ 是根据数据集的二元边缘分布计算得到的样本版 Kendall τ 各取值的平均值 $\boldsymbol{x}$。当数据生成 copula 分别为具有负依赖的二元 Frank copula（图 3）和三元 Gumbel–Hougaard copula（图 4）时，所得数据自适应估量的积分均方误差分别显示在图 3（或图 4）的第三列图中。图例“Adap BetaB4”和“Adap Bern”分别指上述估量 $\dot{C}^{\mathrm{BetaB4}}_{,j\,1\,n\,h}{}^{\Delta}{}_{,:,,h'}$ 和 $\dot{C}^{\mathrm{Bern}}_{j\,1,:n,m}$的相应版本；“Dirac”和“Bin”则分别指基准估量 $\dot{C}^{\Delta}_{j\,1,:n,h,h'} = \dot{C}^{\mathrm{Dirac}}_{1\,n,j\,h}{}^{\Delta}{}_{,:,,h'}$ 和 $\dot{C}^{\mathrm{Bin}}_{,j\,1\,n}{}^{\Delta}{}_{,:,h,h'}$，其确定性带宽 $h = h' = n^{-1/2} \wedge 1/2$ 分别基于经验 copula 和经验贝塔 copula。总体而言，数据自适应估量 $\dot{C}^{\mathrm{BetaB4}}_{,j\,1\,n\,h\,h'}{}^{\Delta}{}_{,:,,}$的有限样本表现最佳。只有当数据生成 copula 接近独立 copula 时，数据自适应 Bernstein 估量 $\dot{\mathrm{matr}}\,C^{\mathrm{Bern}}_{j\,1,:n,m}$ 才具有竞争力。

6. 结论

光滑非参数 copula 估计量，例如 Segers、Sibuya 和 Tsukahara (2017年) 提出的经验 beta copula，或 Kojadinovic 和 Yi (2022年) 研究的数据自适应扩展，在小样本中可能是比经典经验 Copula 好得多的估计量。要在统计推断程序中使用这类估计量，通常需要依赖重抽样技术。

如第3节所述，对于独立同分布观测，按照 `*Kiriliouk*、*Segers* 和 *Tsukahara* 提出的平滑自助法(2021) 对于一大类可表示为分布函数的混合的光滑估计量，在渐近意义下是有效的。基于经验 beta copula 时，Kiriliouk、Segers 和 Tsukahara(2021) 发现，这种平滑自助法是乘子自助法的有力替代方案，而且实现起来简单得多。本研究的一个经验发现是，基于 Kojadinovic 和 Yi(2022年) 提出的经验 beta copula 数据自适应扩展的平滑自助法，似乎能得到表现更好的推断程序，因为它能更好地应对更强的依赖。

遗憾的是，这种平滑自助法不再适用于时间序列情形。本研究的第二项贡献是从理论和实证两方面研究了B¨ucherandKojadinovic(2016)提出的序贯依赖乘子自助法的平滑扩展。如第四节末尾所示，后者例如可用于构造平滑变点检测检验。与非平滑检验相比，这类检验可能对早期或晚期变化更加敏感，因为如前所述，基于观测值的小子集计算时，平滑估计量可能比经验 copula 更准确。

关于乘子自助法，本研究的第三项贡献是考察了两种

copula 一阶偏导数的光滑估计量。所得结果可能具有独立的研究价值，因为这类估计量可应用于均值回归和分位数回归，并由此得到条件分布函数的估计量。从经验角度来看，我们的研究促成了一种 copula 一阶偏导数的平滑数据自适应估计量的提出；与其他估计量相比，它的表现显著更优，其中包括 Janssen、Swanepoel 和 Veraverbeke (2016) 中研究的伯恩斯坦估计量。

附录 A：推论 2.13 的证明

推论 2.13 的证明基于以下两个引理。

引理 A.1。 设 $\mathbb{X}_n$ 是 $\ell^\infty(\Lambda \times [0,1]^d)$ 中的一个过程，对所有 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$ 和 $s \in [0,1]$，$\mathbb{X}_n(s,\ s,\ \boldsymbol{u}) = 0$均成立。此外，假设 $\mathbb{X}_n \rightsquigarrow \mathbb{X}$ 在$\ell^\infty(\Lambda \times [0,1]^d)$ 中，其中 $\mathbb{X}$ 几乎必然具有连续轨迹。那么，在条件 5.8 （该条件可由条件 2.9推出）下，

$$\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d} \left| \int_{[0,1]^d} \mathbb{X}_n(s,t,\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}}(\boldsymbol{w}) - \mathbb{X}_n(s,t,\boldsymbol{u}) \right| = o_{\mathbb{P}}(1), \quad \text{(A.1)}$$

$$\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d} \left| \int_{[0,1]^d} \mathbb{X}_n(s,t,\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{1:n}}(\boldsymbol{w}) - \mathbb{X}_n(s,t,\boldsymbol{u}) \right| = o_{\mathbb{P}}(1). \quad \text{(A.2)}$$

证明。 第一个结论已在Kojadinovic 和 Yi 的引理 32 证明中得到证明（2022年）。式（A.2）的证明非常相似。 ■

引理 A.2。 假设条件2.8 和 2.9 成立。则，几乎必然地，

$$\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d} \sqrt{n}\lambda_n(s,t) \left| \int_{[0,1]^d} C(\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}}(\boldsymbol{w}) - C(\boldsymbol{u}) \right| = o(1), \quad \text{(A.3)}$$

$$\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d} \sqrt{n}\lambda_n(s,t) \left| \int_{[0,1]^d} C(\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{1:n}}(\boldsymbol{w}) - C(\boldsymbol{u}) \right| = o(1). \quad \text{(A.4)}$$

证明。 第一个结论已在Kojadinovic 和 Yi （2022年）的引理 33 的证明中得到证明。式（A.4）的证明直接由以下事实得出：式（A.4）的左侧几乎必然小于

$$\sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \sqrt{n} \left| \int_{[0,1]^d} C(\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{1:n}}(\boldsymbol{w}) - C(\boldsymbol{u}) \right|,$$

而后者以概率 1 小于式（A.3）的左侧。 ■

推论的证明 2.13。 结合定理 2.10 和定理2.12，由三角不等式可立即得到

$$\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d} \left| \mathbb{C}_n^{\nu}(s,t,\boldsymbol{u}) - \tilde{\mathbb{C}}_n(s,t,\boldsymbol{u}) \right| = o_{\mathbb{P}}(1),$$

~其中 $\mathbb{C}_n$ 定义见（2.12）。因此，只需证明

$$\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d}\left|\tilde{\mathbb{C}}_n(s,t,\boldsymbol{u})-\tilde{\mathbb{C}}_n^{\nu}(s,t,\boldsymbol{u})\right|=o_{\mathbb{P}}(1),$$
$$\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d}\left|\tilde{\mathbb{C}}_n(s,t,\boldsymbol{u})-\bar{\mathbb{C}}_n^{\nu}(s,t,\boldsymbol{u})\right|=o_{\mathbb{P}}(1).$$

我们只证明第一个结论，第二个结论的证明类似。对于任意 $(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d$，令

$$\breve{\mathbb{B}}_n^{\nu}(s,t,\boldsymbol{u})=\int_{[0,1]^d}\mathbb{B}_n(s,t,\boldsymbol{w})\mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}}(\boldsymbol{w}).$$

在条件 2.11下，$\mathbb{B}_n\rightsquigarrow\mathbb{B}_C$ 在 $\ell^\infty(\Lambda\times[0,1]^d)$ 中，其中 $\mathbb{B}_C$ 几乎必然具有连续轨迹。由引理 A.1 中的式 (A.1) 可得

$$\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d}\left|\breve{\mathbb{B}}_n^{\nu}(s,t,\boldsymbol{u})-\mathbb{B}_n(s,t,\boldsymbol{u})\right|=o_{\mathbb{P}}(1),$$

此外，由于条件 2.8 和 2.9 成立，由引理 A.2中的式 (A.3) 可得

$$\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d}\left|\breve{\mathbb{B}}_n^{\nu}(s,t,\boldsymbol{u})-\tilde{\mathbb{B}}_n^{\nu}(s,t,\boldsymbol{u})\right|=o(1),$$

~以概率论为 1，其中 $\mathbb{B}_n^{\nu}$ 定义见式 (2.14)，这意味着

$$\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d}\left|\tilde{\mathbb{B}}_n^{\nu}(s,t,\boldsymbol{u})-\mathbb{B}_n(s,t,\boldsymbol{u})\right|=o_{\mathbb{P}}(1). \tag{A.5}$$

此外，根据三角不等式，我们有

$$\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ \boldsymbol{u}\in[0,1]^d}}\left|\tilde{\mathbb{C}}_n^{\nu}(s,t,\boldsymbol{u})-\tilde{\mathbb{C}}_n(s,t,\boldsymbol{u})\right|\le\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ \boldsymbol{u}\in[0,1]^d}}\left|\tilde{\mathbb{B}}_n^{\nu}(s,t,\boldsymbol{u})-\mathbb{B}_n(s,t,\boldsymbol{u})\right|$$
$$+\sum_{j=1}^{d}\sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d}\left|\dot{C}_j(\boldsymbol{u})\right|\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ \boldsymbol{u}\in[0,1]^d}}\left|\tilde{\mathbb{B}}_n^{\nu}(s,t,\boldsymbol{u}^{(j)})-\mathbb{B}_n(s,t,\boldsymbol{u}^{(j)})\right|.$$

前一个公式右侧的项根据（A.5）以及 $0\le C_j\le 1$这一事实，在概率论中收敛于零。■

附录 B：命题3.3 和引理 B.2 的证明

命题 3.3 的证明。 固定 $n\in\mathbb{N}$，$\boldsymbol{x}\in(\mathbb{R}^d)^n$并且 $\boldsymbol{r}\in\{1,\ldots,n\}^d$，接下来验证 $\mathscr{K}_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{x}}$，它在条件 2.4下可如式（2.6）表示，是一个多元分布函数。

根据条件 2.5，对于任意 $j\in\{1,\ldots,d\}$，由 $\mathscr{K}_{r_j,j}^{\boldsymbol{x}}(u)=\mathscr{F}_{j,u}^{\boldsymbol{x}}\{(r_j-1)/n\}$, $u\in[0,1]$ 定义的函数 $\mathscr{K}_{r_j,j}^{\boldsymbol{x}}$ 是 $[0,1]$ 上的一元分布函数。事实上，$\mathscr{K}_{r_j,j}^{\boldsymbol{x}}$

它在 $[0,1]$ 上右连续且单调递增，并且根据平滑分布的性质，

$$\mathscr{K}^{\boldsymbol{x}}_{r_j,j}(0) = \bar{\mathscr{F}}^{\boldsymbol{x}}_{j,0}\{(r_j-1)/n\} = \mathbb{P}\{W^{\boldsymbol{x}}_{j,0} > (r_j-1)/n\} = \mathbb{P}\{0 > (r_j-1)/n\} = 0,$$
$$\mathscr{K}^{\boldsymbol{x}}_{r_j,j}(1) = \bar{\mathscr{F}}^{\boldsymbol{x}}_{j,1}\{(r_j-1)/n\} = \mathbb{P}\{W^{\boldsymbol{x}}_{j,1} > (r_j-1)/n\} = \mathbb{P}\{1 > (r_j-1)/n\} = 1.$$

另外利用条件 2.6，式 $\mathscr{K}^{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{r}}$（2.6）中的表达式可进一步简化为

$$\mathscr{K}^{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{u}) = \bar{\mathscr{C}}^{\boldsymbol{x}}\{\mathscr{K}^{\boldsymbol{x}}_{r_1,1}(u_1),\ldots,\mathscr{K}^{\boldsymbol{x}}_{r_d,d}(u_d)\}, \qquad \boldsymbol{u}\in[0,1]^d.$$

由 Sklar 定理（Sklar，1959），$\mathscr{K}^{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{r}}$因此是定义在 $[0,1]^d$ 上的一个分布函数，其单变量边缘分布为$\bar{\mathscr{K}}^{\boldsymbol{x}}_{r_1,\,1}$，…，$\mathscr{K}^{\boldsymbol{x}}_{r_d,\,d}$，copula 为 $\mathscr{C}^{\boldsymbol{x}}$。■

下面引理 B.2 的证明基于以下引理。

引理 B.1. 对于任意 $n\in\mathbb{N}$ 和 $t\in[0,1]$，令 $B_{n,\,t}$ 为二项分布(n,t)的生存函数。于是，对于任意 $n\in\mathbb{N}$和 $w\in[0,n)$，函数$t\mapsto B_{n,\,t}(w)$在 $[0,1]$上严格递增。

证明。 固定 $n\in\mathbb{N}$和 $w\in[0,n)$。由于$t\mapsto B_{n,\,t}(w)$ 在 $[0,1]$, 上连续，因此只需证明对于任意 $t\in(0,\,1)$，$\frac{\partial}{\partial t}\{\bar{B}_{n,t}(w)\}>0$。我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\bar{B}_{n,t}(w)\} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\sum_{k=\lfloor w\rfloor+1}^{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\sum_{k=\lfloor w\rfloor+1}^{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\right\}$$
$$= \sum_{k=\lfloor w\rfloor+1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\{kt^{k-1}(1-t)^{n-k}-(n-k)t^k(1-t)^{n-k-1}\}$$
$$= \sum_{k=\lfloor w\rfloor+1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}kt^{k-1}(1-t)^{n-k} - \sum_{k=\lfloor w\rfloor+1}^{n-1}\frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)t^k(1-t)^{n-k-1}$$
$$= \sum_{k=\lfloor w\rfloor+1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}t^{k-1}(1-t)^{n-k} - \sum_{k=\lfloor w\rfloor+1}^{n-1}\frac{n!}{k!(n-k-1)!}t^k(1-t)^{n-k-1}$$
$$= \sum_{k=\lfloor w\rfloor+1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}t^{k-1}(1-t)^{n-k} - \sum_{k=\lfloor w\rfloor+2}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}t^{k-1}(1-t)^{n-k}$$
$$= \frac{n!}{\lfloor w\rfloor!(n-\lfloor w\rfloor-1)!}t^{\lfloor w\rfloor}(1-t)^{n-\lfloor w\rfloor-1} > 0.$$

■

引理 *B.2*。对于任意 $n\in\mathbb{N}$, $t\in[0,1]$ 和 $\rho\in(1,n)$，设 $\mathscr{B}_{n,t,\rho}$ 为贝塔-二项分布(n,α,β)的生存函数，其中 $\alpha = t(n-\rho)/(\rho-1)$ 且 $\beta = (1-t)(n-\rho)/(\rho-1)$。那么，对于任意 $n\in\mathbb{N}$, $\rho\in(1,n)$ 和 $w\in[0,n)$，函数$t\mapsto\mathscr{B}_{n,t,\rho}(w)$ 在 $[0,1]$上严格递增。

证明。 首先注意，根据贝塔-二项分布的定义，对于任意 $t\in[0,1]$, $\rho\in(1,n)$ 和 $w\in[0,n)$,

$$\bar{\mathscr{B}}_{n,t,\rho}(w) = \mathbb{E}_\Theta\{\bar{B}_{n,\Theta}(w)\}, \tag{B.1}$$

其中，$B_{n,t}$ 是二项分布(n,t)的生存函数，而 Θ 服从贝塔分布(α,β)，且$\alpha = t(n-\rho)/(\rho-1)$，$\beta = (1-t)(n-\rho)/(\rho-1)$。根据 Kojadinovic 和 Yi（2022）中的引理 30，对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $\rho \in (1,n)$ 和 $w \in [0,n)$，函数 $t \mapsto \mathscr{B}_{n,t,\rho}(w)$在 $[0,1]$上递增。因此，只需证明其严格递增性。我们用反证法证明这一点。假设存在 $0 \le t_1 < t_2 \le 1$，使得对于某些 $n \in \mathbb{N}$, $\rho \in (1,n)$ 和 $w \in [0,n)$，有 $\mathscr{B}_{n,t_1,\rho}(w) = \mathscr{B}_{n,t_2,\rho}(w)$。那么，根据 (B.1)，我们有

$$\mathbb{E}_{\Theta_1}\{\bar{B}_{n,\Theta_1}(w)\} = \mathbb{E}_{\Theta_2}\{\bar{B}_{n,\Theta_2}(w)\}, \tag{B.2}$$

其中，Θ_1（分别地，Θ_2）服从 Beta(α_1,β_1)（分别地，Beta(α_2,β_2)），且 $\alpha_1 = t_1(n-\rho)/(\rho-1)$ 和 $\beta_1 = (1-t_1)(n-\rho)/(\rho-1)$（分别地，$\alpha_2 = t_2(n-\rho)/(\rho-1)$ 和 $\beta_2 = (1-t_2)(n-\rho)/(\rho-1)$）。根据 Kojadinovic 和 Yi（2022）中引理 29 的证明，我们有 $\Theta_1 \le_{st} \Theta_2$，其中 $\le_{st}$ 表示通常随机序。此外，利用 (B.2) 以及引理 B.1 中函数 $t \mapsto B_{n,t}(w)$ 在 $[0,1]$ 上严格递增这一事实，根据 Shaked 和 Shanthikumar（2007）的定理 1.A.8，Θ_1 和 Θ_2 具有相同的分布。这与 $t_1 < t_2$ 这一事实相矛盾。■

附录 C：定理3.5的证明

定理 3.5 的证明基于两个引理，我们先给出这两个引理。

令 Φ 为从 $\ell^\infty([0,1]^d)$ 到 $\ell^\infty([0,1]^d)$ 的映射。对于 $[0,1]^d$ 上任意具有不在零点赋予质量的单变量边缘分布 $H_1,\ldots,H_d$ 的 d.f. H，定义为

$$\Phi(H)(\boldsymbol{u}) = H\{H_1^{-1}(u_1),\ldots,H_d^{-1}(u_d)\}, \qquad \boldsymbol{u} \in [0,1]^d. \tag{C.1}$$

引理 C.1。假设 $\mathscr{X}_{1:n}$ 中的随机向量是独立同分布的，且条件 *5.8* 成立。则几乎必然有

$$\sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} |C^{\nu}_{1:n}(\boldsymbol{u}) - C(\boldsymbol{u})| = o(1), \tag{C.2}$$

其中 $C^{\nu}_{1:n}$ 定义于 (2.2)。

证明。左侧的上确界（C.2）小于 $I_n + J_n$，其中

$$I_n = \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \left| \int_{[0,1]^d} C_{1:n}(\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{1:n}}(\boldsymbol{w}) - \int_{[0,1]^d} C(\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{1:n}}(\boldsymbol{w}) \right|,$$

$$J_n = \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \left| \int_{[0,1]^d} C(\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{1:n}}(\boldsymbol{w}) - C(\boldsymbol{u}) \right|.$$

项 I_n：由三角不等式可知，I_n 小于

$$\sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} |C_{1:n}(\boldsymbol{u}) - C(\boldsymbol{u})| \le I'_n + I''_n + I'''_n,$$

其中

$$I'_n = \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} |C_{1:n}(\boldsymbol{u}) - \Phi(G_{1:n})(\boldsymbol{u})|, \qquad I''_n = \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} |\Phi(G_{1:n})(\boldsymbol{u}) - G_{1:n}(\boldsymbol{u})|,$$
$$I'''_n = \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} |G_{1:n}(\boldsymbol{u}) - C(\boldsymbol{u})|,$$

其中映射 Φ 定义于（C.1）中，且 $G_{1:n}$ 是不可观测随机样本 $\boldsymbol{U}_1$，……，$\boldsymbol{U}_n$ 的经验分布函数，它由 $\mathscr{X}_{1:n}$ 通过概率积分变换 $U_{ij} = F_j(X_{ij})$ 得到，其中 $i \in \{1,\ldots,n\}$，$j \in \{1,\ldots,d\}$。利用众所周知的事实（例如参见 Segers，2012），有 $\Phi(G_{1:n}) = \Phi(F_{1:n})$，其中 $F_{1:n}$ 是 $\mathscr{X}_{1:n}$的经验分布函数，且

$$\sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} |C_{1:n}(\boldsymbol{u}) - \Phi(F_{1:n})(\boldsymbol{u})| \le \frac{d}{n},$$

由此得到 $I'_n = o(1)$。此外，根据 Glivenko–Cantelli 引理（例如参见 van der Vaart，1998，定理 19.1），$I'''_n = o$几乎必然满足 (1)。最后，利用多元分布函数的一个众所周知的性质（例如参见 Durante 和 Sempi，2015，引理 1.2.14），以及对任意 $j \in \{1,\ldots,d\}$，$\sup_{u\in[0,1]} |G^{-1}_{1:n:,j}(u) - u| = \sup_{u\in[0,1]} |G_{1:n,j}(u) - u|$（例如参见 Shorack 和 Wellner，1986，第 3 章）中的众所周知事实，再次应用 Glivenko–Cantelli 引理，可得几乎必然有

$$I''_n \le \sum_{j=1}^{d} \sup_{u\in[0,1]} |G^{-1}_{1:n,j}(u) - u| = \sum_{j=1}^{d} \sup_{u\in[0,1]} |G_{1:n,j}(u) - u| = o(1).$$

术语 J_n：我们按照 Segers、Sibuya 和 Tsukahara（2017年）中引理 3.2 的证明 $\eta > 0$ 进行。固定 J_n并证明：只要 η 足够大，n 就可以小于 $|\cdot|_\infty$ 表示 $\mathbb{R}^d$上的最大范数。对于任意 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\begin{aligned} J_n &= \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \left| \int_{[0,1]^d} \{C(\boldsymbol{w}) - C(\boldsymbol{u})\} \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{1:n}}(\boldsymbol{w}) \right| \\ &\le \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \left| \int_{\{\boldsymbol{w}\in[0,1]^d : |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}|_\infty \le \varepsilon\}} \{C(\boldsymbol{w}) - C(\boldsymbol{u})\} \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{1:n}}(\boldsymbol{w}) \right| \\ &\quad + \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \left| \int_{\{\boldsymbol{w}\in[0,1]^d : |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}|_\infty > \varepsilon\}} \{C(\boldsymbol{w}) - C(\boldsymbol{u})\} \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{1:n}}(\boldsymbol{w}) \right| \le J'_n + J''_n, \end{aligned}$$

其中

$$J'_n = \sup_{\substack{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})\in[0,1]^{2d} \\ |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}|_\infty \le \varepsilon}} |C(\boldsymbol{w}) - C(\boldsymbol{u})|,$$
$$J''_n = \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{1:n}}(\{\boldsymbol{w}\in[0,1]^d : |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}|_\infty > \varepsilon\}).$$

令 $\varepsilon = \eta/(2d)$。那么，根据 C 的利普希茨连续性， $J_n' \le \eta/2$。就 J_n'' 而言，在给定 $\boldsymbol{X}_1$ 的条件下， $\boldsymbol{X}_2$，..... 对于几乎任意序列 $\boldsymbol{X}_1$， $\boldsymbol{X}_2$，..... 利用切比雪夫不等式和条件 5.8，可得

$$\begin{aligned} J_n'' &= \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \mathbb{P}\left\{|\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{1:n}} - \boldsymbol{u})|_\infty > \varepsilon \mid \mathscr{X}_{1:n}\right\} \\ &= \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \mathbb{P}\left[\bigcup_{j=1}^{d}\left\{\left|W_{j,u_j}^{\mathscr{X}_{1:n}} - u_j\right| > \varepsilon\right\} \mid \mathscr{X}_{1:n}\right] \\ &\le \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \sum_{j=1}^{d} \mathbb{P}\left\{\left|W_{j,u_j}^{\mathscr{X}_{1:n}} - u_j\right| > \varepsilon \mid \mathscr{X}_{1:n}\right\} \\ &\le \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \sum_{j=1}^{d} \frac{\mathrm{Var}(W_{j,u_j}^{\mathscr{X}_{1:n}} \mid \mathscr{X}_{1:n})}{\varepsilon^2} \le \frac{da_n}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

这意味着，对于足够大的 n， $J_n'' \le \eta/2$。后者在给定 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots$ 的条件下，对几乎任意序列 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots$ 都成立，由此完成证明。■

接下来，我们回顾经典上用于表述处理经验过程时重抽样技术渐近有效性结果的收敛模式；例如，参见van der Vaart 和 Wellner (2000，第 2.9 章) 或Kosorok (2008，第 2.2.3 节）。令

$$\begin{aligned} BL_1 = \{&h : \ell^\infty([0,1]^d) \to [-1,1] \text{ such that,} \\ &\text{for all } x, y \in \ell^\infty([0,1]^d),\ |h(x) - h(y)| \le \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} |x(\boldsymbol{u}) - y(\boldsymbol{u})|\}. \end{aligned}$$

令 $\mathbb{X}_n = \mathbb{X}_n(\mathscr{X}_{1:n}, \mathscr{W}_n)$为一列自助法经验过程，定义在$\ell^\infty([0,1]^d$上，并依赖于另一个随机源 $\mathscr{W}_n$ （通常称为“自助法权重”）。对于这里考虑的光滑自助法，$\mathscr{W}_n$与数据 $\mathscr{X}_{1:n}$ 相互独立，并对应于独立随机变量 n 的独立副本；而 I 和 $\boldsymbol{U}^\#$ 则是独立执行算法3.2（另见（3.2））n 次所需的变量。记号 $\mathbb{X}_n \overset{\mathbb{P}}{\underset{\mathscr{W}}{\rightsquigarrow}} \mathbb{X}$ 于是表示

- $\sup_{h\in BL_1} |\mathbb{E}_{\mathscr{W}}\{h(\mathbb{X}_n)\} - \mathbb{E}\{h(\mathbb{X})\} \to 0$ in outer probability,
- $\mathbb{E}_{\mathscr{W}}\{h(\mathbb{X}_n)^*\} - \mathbb{E}_{\mathscr{W}}\{h(\mathbb{X}_n)_*\} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ for all $h \in BL_1$,

其中 $\mathbb{E}_{\mathscr{W}}$表示仅关于自助法权重 $\mathscr{W}_n$ 的期望，而 $h(\mathbb{X}_n)^*$ 和 $h(\mathbb{X}_n)_*$ 分别表示关于 $(\mathscr{X}_{1:n}, \mathscr{W}_n)$ 的最小可测上界和最大可测下界。

下一个引理与Kiriliouk、Segers 和 Tsukahara (2021) 的命题 3.3 非常接近。

引理 C.2。 假设 $\mathscr{X}_{1:n}$ 中的随机向量是独立同分布的，且条件 *2.4*、*2.5*、*2.6*、*2.8* 和 *2.9*均成立。则

$$\sqrt{n}(C_{1:n}^{\#} - C_{1:n}^{\nu}) \overset{\mathbb{P}}{\underset{\mathscr{W}}{\rightsquigarrow}} \mathbb{C}_C(0,1,\cdot), \tag{C.3}$$

其中 $\mathbb{C}_C$ 定义见 (2.13)。

证明。令 $G_1^{\#}:n$ 为 $\mathscr{V}_1^{\#}:n$的经验分布函数。根据引理 C.1 并按照Kiriliouk、Segers 和 Tsukahara(2021)命题 3.3 的证明中步骤 1 的做法，得到

$$\sqrt{n}(G_{1:n}^{\#} - C_{1:n}^{\nu}) \overset{\mathbb{P}}{\underset{\mathscr{W}}{\rightsquigarrow}} \mathbb{B}_C(0,1,\cdot), \tag{C.4}$$

其中 $\mathbb{B}_C$ 定义见（2.11）。接着，按照Kiriliouk、Segers 和 Tsukahara(2021)命题 3.3 的证明中步骤 2 的做法，即将（C.4）与 Φ 在（C.1）中的映射的 Hadamard 可微性（该性质由B¨ucher 和 Volgushev (2013)的定理 2.4 确立）、自助法的“依概率”泛函 delta 方法（van der Vaart 和 Wellner，2000，定理 3.9.11）以及这一事实结合起来 $\Phi(C_{1:n}^{\nu}) = C_{1:n}^{\nu}$ （因为在所考虑的独立同分布情形下，根据条件 $C_{1:n}^{\nu}$ 具有标准均匀边缘分布2.4 ），可得

$$\sqrt{n}(\Phi(G_{1:n}^{\#}) - C_{1:n}^{\nu}) \overset{\mathbb{P}}{\underset{\mathscr{W}}{\rightsquigarrow}} \mathbb{C}_C(0,1,\cdot). \tag{C.5}$$

所需结果最终由（C.5）以及以下众所周知的事实得出：

$$\sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} |C_{1:n}^{\#}(\boldsymbol{u}) - \Phi(G_{1:n}^{\#})(\boldsymbol{u})| \le \frac{d}{n}$$

因为 $\mathscr{V}_1^{\#}:n$ 的分量样本以概率 1 不存在并列值。 ■

定理3.5的证明。结合引理 C.2 与 B¨ucher 和 Kojadinovic (2019）的引理 3.1，我们得到（C.3）等价于

$$\begin{aligned}\big(\mathbb{C}_n(0,1,\cdot), \sqrt{n}(C_{1:n}^{\#,[1]} - C_{1:n}^{\nu}), \sqrt{n}(C_{1:n}^{\#,[2]} - C_{1:n}^{\nu})\big) \\ \rightsquigarrow \big(\mathbb{C}_C(0,1,\cdot), \mathbb{C}_C^{[1]}(0,1,\cdot), \mathbb{C}_C^{[2]}(0,1,\cdot)\big)\end{aligned} \tag{C.6}$$

在 $\{\ell^\infty([0,1]^d)\}^3$中，其中 $\mathbb{C}_n$ 定义见（2.8）。根据定理 2.10，我们有

$$\sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \sqrt{n}|C_{1:n}^{\nu}(\boldsymbol{u}) - C_{1:n}(\boldsymbol{u})| = \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} |\mathbb{C}_n^{\nu}(0,1,\boldsymbol{u}) - \mathbb{C}_n(0,1,\boldsymbol{u})| = o_{\mathbb{P}}(1), \tag{C.7}$$

其中 $\mathbb{C}_n^{\nu}$ 定义见（2.9）。定理 3.5中的第一个联合弱收敛随后由（C.6）和（C.7）得出。

固定 $j \in \{1,2\}$。由于（C.7）成立，要从第一个联合弱收敛推出第二个联合弱收敛，只需证明

$$\sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \big|\sqrt{n}\{C_{1:n}^{\#,\nu,[j]}(\boldsymbol{u}) - C_{1:n}^{\nu}(\boldsymbol{u})\} - \sqrt{n}\{C_{1:n}^{\#,[j]}(\boldsymbol{u}) - C_{1:n}(\boldsymbol{u})\}\big| = o_{\mathbb{P}}(1). \tag{C.8}$$

(C.8) 左侧的上确界小于 $I_n + J_n$，其中

$$I_n = \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \left| \int_{[0,1]^d} \sqrt{n}\{C_{1:n}^{\#,[j]}(\boldsymbol{w}) - C_{1:n}(\boldsymbol{w})\} \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{V}_{1:n}^{\#,[j]}}(\boldsymbol{w}) - \sqrt{n}\{C_{1:n}^{\#,[j]}(\boldsymbol{u}) - C_{1:n}(\boldsymbol{u})\} \right|,$$

$$J_n = \sqrt{n} \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \left| \int_{[0,1]^d} C_{1:n}(\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{V}_{1:n}^{\#,[j]}}(\boldsymbol{w}) - \int_{[0,1]^d} C_{1:n}(\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{1:n}}(\boldsymbol{w}) \right|.$$

由于根据定理 3.5 的第一个结论，$\sqrt{n}(C^{\#,[j]}_{1:n} - C_{1:n}) \rightsquigarrow \mathbb{C}_C(0, 1, \cdot)$ 在 $\ell^\infty([0,1]^d)$ 中以及 $\mathbb{C}_C(0, 1, \cdot)$ 几乎必然具有连续轨迹，因此可以仿照引理 A.1 的证明进行验证，即 $I_n = o_{\mathbb{P}}(1)$。对于项 J_n，我们有 $J_n \leq K_n + L_n$，其中

$$\begin{aligned} K_n = &\sqrt{n} \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \left| \int_{[0,1]^d} \{C_{1:n}(\boldsymbol{w}) - C(\boldsymbol{w})\} \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{V}_{1:n}^{\#,[j]}}(\boldsymbol{w}) \right. \\ &\left. - \int_{[0,1]^d} \{C_{1:n}(\boldsymbol{w}) - C(\boldsymbol{w})\} \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{1:n}}(\boldsymbol{w}) \right|, \\ L_n = &\sqrt{n} \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \left| \int_{[0,1]^d} C(\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{V}_{1:n}^{\#,[j]}}(\boldsymbol{w}) - \int_{[0,1]^d} C(\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{1:n}}(\boldsymbol{w}) \right|. \end{aligned}$$

项 K_n 小于 $K_n' + K_n''$，其中

$$\begin{aligned} K_n' &= \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \left| \int_{[0,1]^d} \mathbb{C}_n(0,1,\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{V}_{1:n}^{\#,[j]}}(\boldsymbol{w}) - \mathbb{C}_n(0,1,\boldsymbol{u}) \right|, \\ K_n'' &= \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \left| \mathbb{C}_n(0,1,\boldsymbol{u}) - \int_{[0,1]^d} \mathbb{C}_n(0,1,\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{1:n}}(\boldsymbol{w}) \right|. \end{aligned}$$

由引理 A.1中的（A.2）可得，$K_n'' = o_{\mathbb{P}}(1)$，并再次按照该引理的证明进行推导，可以验证 $K_n' = o_{\mathbb{P}}(1)$。项 L_n 小于 $L_n' + L_n''$，其中

$$\begin{aligned} L_n' &= \sqrt{n} \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \left| \int_{[0,1]^d} C(\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{V}_{1:n}^{\#,[j]}}(\boldsymbol{w}) - C(\boldsymbol{u}) \right|, \\ L_n'' &= \sqrt{n} \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \left| C(\boldsymbol{u}) - \int_{[0,1]^d} C(\boldsymbol{w}) \mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{1:n}}(\boldsymbol{w}) \right|. \end{aligned}$$

项 L_n'' 根据引理 A.2中的（A.4）几乎必然收敛于零。后一个结果的证明可以加以调整，从而验证项L_n' 也几乎必然收敛于零。因此，（C.8）成立，证明完毕。■

附录 D：定理 4.3 的证明

定理 4.3 的证明基于以下引理，我们先证明该引理。

引理 D.1. 在条件 *4.2* 和 *5.8*（后者由条件 *2.9*）成立时，对任意 $b \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d} \left| \hat{\mathbb{B}}_n^{[b],\nu}(s,t,\boldsymbol{u}) - \hat{\mathbb{B}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{u}) \right| = o_{\mathbb{P}}(1), \tag{D.1}$$

$$\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d}\left|\check{\mathbb{B}}_n^{[b],\nu}(s,t,\boldsymbol{u})-\check{\mathbb{B}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{u})\right|=o_{\mathbb{P}}(1). \tag{D.2}$$

证明. 固定 $b\in\mathbb{N}$。我们首先证明（D.1）。由（4.5）出发，可得

$$\begin{aligned}&\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d}\left|\hat{\mathbb{B}}_n^{[b],\nu}(s,t,\boldsymbol{u})-\hat{\mathbb{B}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{u})\right|\\&\quad=\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d}\left|\int_{[0,1]^d}\hat{\mathbb{B}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{w})\mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{1:n}}(\boldsymbol{w})-\hat{\mathbb{B}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{u})\right|=o_{\mathbb{P}}(1),\end{aligned}$$

ˆ 其中，最后一个等式由引理 A.1中的（A.2 ）得出，因为 $\mathbb{B}_n^{[b]}\rightsquigarrow\mathbb{B}_C$ 在ℓ^∞（$\Lambda\times[0,1]^d$）中，其中 $\mathbb{B}_C$ 定义于（2.11），且在条件4.2下几乎必然具有连续轨迹。在条件4.2 （ii）下，后者可由 B¨ucher 和 Kojadinovic （2016）中的引理 D.1 和 D.2 以及 B¨ucher 和 Kojadinovic（2016）中的定理 2.1 得出。在条件 4.2 （i）下，也可以改用Holmes、Kojadinovic 和 Quessy （2013）中的定理 1。

（D.2）的证明类似。从（4.6）出发，可得

$$\begin{aligned}&\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d}\left|\check{\mathbb{B}}_n^{[b],\nu}(s,t,\boldsymbol{u})-\check{\mathbb{B}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{u})\right|\\&=\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d}\left|\int_{[0,1]^d}\check{\mathbb{B}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{w})\mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}}(\boldsymbol{w})-\check{\mathbb{B}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{u})\right|=o_{\mathbb{P}}(1),\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由引理 A.1中的（A.1 ）得出，因为ˇ $\mathbb{B}_n^{[b]}\rightsquigarrow\mathbb{B}_C$ 在ℓ^∞（$\Lambda\times[0,1]^d$）中。在条件 4.2 （ii）下，后者可由 B¨ucher 等人 （2014）的命题 4.3 证明中的（B.3）以及B¨ucher 和 Kojadinovic （2016）中的定理 2.1 得出。在条件 4.2 （i）下，也可以再次改用 Holmes、Kojadinovic 和 Quessy （2013）中的定理 1。 ■

定理的证明 4.3。 固定 $b\in\mathbb{N}$。我们只证明（4.10）， （4.9）的证明更简单。从（4.4）和（4.8）出发，我们有

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\\boldsymbol{u}\in[0,1]^d}}\left|\check{\mathbb{C}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{u})-\check{\mathbb{C}}_n^{[b],\nu}(s,t,\boldsymbol{u})\right|&\le\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\\boldsymbol{u}\in[0,1]^d}}\left|\check{\mathbb{B}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{u})-\check{\mathbb{B}}_n^{[b],\nu}(s,t,\boldsymbol{u})\right|\\&+\sum_{j=1}^d\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\\boldsymbol{u}\in[0,1]^d}}\left|\dot{C}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{u})\right|\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\\boldsymbol{u}\in[0,1]^d}}\left|\check{\mathbb{B}}_n^{[b]}(s,t,\boldsymbol{u}^{(j)})-\check{\mathbb{B}}_n^{[b],\nu}(s,t,\boldsymbol{u}^{(j)})\right|.\end{aligned}$$

根据引理 D.2 中的（D.1 ），以及由条件 *4.1*可知 $\sup_{(s,t,\boldsymbol{u})\in\Lambda\times[0,1]^d}\left|\dot{C}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{u})\right|\le\zeta$，上一个公式右侧的各项依概率收敛于零。

定理的最后两个结论直接由（4.9）、（4.10）以及对 B¨ucher 等人（2014）中命题 4.2 和 4.3 的简单推广得出；这些推广针对的是基于满足条件 4.1 的任意偏导数估计量的非平滑乘子复制样本。 ■

附录 E：命题的证明5.3、5.5、5.9 和5.10

引理 *E.1.* 设 f是从 $[0,1]^d$到 $[0,1]$,的任意函数，令 $m \in \mathbb{N}$、 $m \geq 2$，并回顾，对于任意 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$， μ_m，$\boldsymbol{u}$ 是随机向量 $(S_m,1,u_1/m,\ldots,S_m,d,u_d/m)$ 的分布律，其中 S_m、1、u_1、$\ldots S_m$、d、u_d相互独立；对于每个 $k \in \{1,\ldots,d\}$， S_m，k，u_k服从二项分布(m,u_k)。此外，回顾对于任意~ ~$j \in \{1,\ldots,d\}$， $\tilde{\mu}_j$，m，$\boldsymbol{u}$是随机向量 $(S_m,1,u_1/m,\ldots,S_m,d,u_d/m)$ ~的分布律，其分量相互独立；对于 $i \in \{1,\ldots,d\} \setminus \{j\}$， S_m，i，u_i服从~二项分布$($ m u_i $S_m\,j\,u_j$ $m-1$ u_j $j \in,)$，而,,服 $\{1,\ldots,d\}$ $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$ $u_j \in$ $0,1$ 从二项分布$(,)$。那么，对于满足$(\,)$的任意 和，

$$\partial_{u_j}\left\{\int_{[0,1]^d} f(\boldsymbol{w})\mathrm{d}\mu_{m,\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w})\right\} = m\int_{[0,1]^d}\{f(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{e}_j/m)-f(\boldsymbol{w})\}\,\mathrm{d}\tilde{\mu}_{j,m,\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}).$$

证明。固定 $m \geq 2$，不失一般性，固定 $j = 1$。此外，对于任意$u \in [0,1]$，令$b_{m,u}(s) = \binom{m}{s}u^s(1-u)^{m-s}$, $s \in \{0,\ldots,m\}$。于是，对于所有满足 $u_1 \in (0,\ 1)$ 的 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$,

$$\begin{aligned}
&\partial_{u_1}\left\{\int_{[0,1]^d} f(\boldsymbol{w})\mathrm{d}\mu_{m,\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w})\right\} = \partial_{u_1}\left\{\sum_{s_1=0}^{m}\cdots\sum_{s_d=0}^{m} f\Big(\frac{s_1}{m},\ldots,\frac{s_d}{m}\Big)\prod_{j=1}^{d} b_{m,u_j}(s_j)\right\}\\
&=\sum_{s_1=0}^{m}\cdots\sum_{s_d=0}^{m} f\Big(\frac{s_1}{m},\ldots,\frac{s_d}{m}\Big)\partial_{u_1} b_{m,u_1}(s_1)\prod_{j=2}^{d} b_{m,u_j}(s_j)\\
&=\sum_{s_1=0}^{m}\cdots\sum_{s_d=0}^{m} f\Big(\frac{s_1}{m},\ldots,\frac{s_d}{m}\Big)\\
&\quad\times\binom{m}{s_1}\left\{s_1 u_1^{s_1-1}(1-u_1)^{m-s_1}-(m-s_1)u_1^{s_1}(1-u_1)^{m-s_1-1}\right\}\prod_{j=2}^{d} b_{m,u_j}(s_j)\\
&= m\sum_{s_1=1}^{m}\cdots\sum_{s_d=0}^{m} f\Big(\frac{s_1}{m},\ldots,\frac{s_d}{m}\Big)\frac{(m-1)!}{(s_1-1)!(m-s_1)!}u_1^{s_1-1}(1-u_1)^{m-s_1}\prod_{j=2}^{d} b_{m,u_j}(s_j)\\
&\quad- m\sum_{s_1=0}^{m-1}\cdots\sum_{s_d=0}^{m} f\Big(\frac{s_1}{m},\ldots,\frac{s_d}{m}\Big)\frac{(m-1)!}{s_1!(m-s_1-1)!}u_1^{s_1}(1-u_1)^{m-s_1-1}\prod_{j=2}^{d} b_{m,u_j}(s_j)\\
&= m\sum_{s_1=0}^{m-1}\cdots\sum_{s_d=0}^{m} f\Big(\frac{s_1+1}{m},\ldots,\frac{s_d}{m}\Big)\frac{(m-1)!}{s_1!(m-s_1-1)!}u_1^{s_1}(1-u_1)^{m-s_1-1}\prod_{j=2}^{d} b_{m,u_j}(s_j)\\
&\quad- m\sum_{s_1=0}^{m-1}\cdots\sum_{s_d=0}^{m} f\Big(\frac{s_1}{m},\ldots,\frac{s_d}{m}\Big)\frac{(m-1)!}{s_1!(m-s_1-1)!}u_1^{s_1}(1-u_1)^{m-s_1-1}\prod_{j=2}^{d} b_{m,u_j}(s_j)\\
&= m\sum_{s_1=0}^{m-1}\cdots\sum_{s_d=0}^{m}\left\{f\left(\frac{s_1+1}{m},\ldots,\frac{s_d}{m}\right)-f\left(\frac{s_1}{m},\ldots,\frac{s_d}{m}\right)\right\}b_{m-1,u_1}(s_1)\prod_{j=2}^{d} b_{m,u_j}(s_j)\\
&= m\int_{[0,1]^d}\{f(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{e}_1/m)-f(\boldsymbol{w})\}\,\mathrm{d}\tilde{\mu}_{1,m,\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}).
\end{aligned}$$

■

命题 5.3 的证明。 固定 $j \in \{1,\dots,d\}$, $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$和 $m \geq 2$, 并回顾引理 $\tilde{\mu}_{j,\,m,\,\boldsymbol{u}}$ 中给出的测度 E.1的定义。由（5.13），可得

$$\dot{C}^{\mathrm{Bern}}_{j,k:l,m}(\boldsymbol{u}) = m \int_{[0,1]^d} C_{k:l}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{e}_j/m)\mathrm{d}\tilde{\mu}_{j,m,\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}) - m \int_{[0,1]^d} C_{k:l}(\boldsymbol{w})\mathrm{d}\tilde{\mu}_{j,m,\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}).$$

设 $\tilde{\boldsymbol{S}} = (S_{m,1,u_1},\dots,S_{m,d,u_d})$，使得 $\tilde{\boldsymbol{S}}/m$ (E.1) 是一个分布律为 $\tilde{\mu}_{j,m,\boldsymbol{u}}$的随机向量。然后，结合（$C_{k:l}$ 2.1）中的定义，（E.1）右侧的第一个积分可改写为

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,1]^d} \frac{1}{l-k+1} \sum_{i=k}^{l} \mathbf{1}\left\{\boldsymbol{R}_i^{k:l}/(l-k+1) \leq \boldsymbol{w}+\boldsymbol{e}_j/m\right\} \mathrm{d}\tilde{\mu}_{j,m,\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}) \\
&= \frac{1}{l-k+1} \sum_{i=k}^{l} \int_{[0,1]^d} \mathbf{1}\left\{\boldsymbol{R}_i^{k:l}/(l-k+1) - \boldsymbol{e}_j/m \leq \boldsymbol{w}\right\} \mathrm{d}\tilde{\mu}_{j,m,\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}) \\
&= \frac{1}{l-k+1} \sum_{i=k}^{l} \mathbb{P}\left\{\tilde{\boldsymbol{S}} \geq m\boldsymbol{R}_i^{k:l}/(l-k+1) - \boldsymbol{e}_j \mid \mathscr{X}_{k:l}\right\} \\
&= \frac{1}{l-k+1} \sum_{i=k}^{l} \mathbb{P}\left\{\tilde{S}_{m,j,u_j} \geq mR_{ij}^{k:l}/(l-k+1) - 1 \mid \mathscr{X}_{k:l}\right\} \\
&\quad \times \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq j}}^{d} \mathbb{P}\left\{\tilde{S}_{m,t,u_t} \geq mR_{it}^{k:l}/(l-k+1) \mid \mathscr{X}_{k:l}\right\} \\
&= \frac{1}{l-k+1} \sum_{i=k}^{l} \mathbb{P}\left\{\tilde{S}_{m,j,u_j} > \lceil mR_{ij}^{k:l}/(l-k+1) - 1\rceil - 1 \mid \mathscr{X}_{k:l}\right\} \\
&\quad \times \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq j}}^{d} \mathbb{P}\left\{\tilde{S}_{m,t,u_t} > \lceil mR_{it}^{k:l}/(l-k+1)\rceil - 1 \mid \mathscr{X}_{k:l}\right\} \\
&= \frac{1}{l-k+1} \sum_{i=k}^{l} \bar{B}_{m-1,u_j}\left\{\lceil mR_{ij}^{k:l}/(l-k+1)\rceil - 2\right\} \\
&\quad \times \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq j}}^{d} \bar{B}_{m,u_t}\left\{\lceil mR_{it}^{k:l}/(l-k+1)\rceil - 1\right\},
\end{aligned}$$

其中我们利用了以下事实：对于任意 $t \in \{1,\dots,d\}$ 和 $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(S_{m,\,t,\,u_t} \geq x) = \mathbb{P}(S_{m,\,t,\,u_t} > \lceil x\rceil - 1)$ 且 $\lceil x-1\rceil = \lceil x\rceil - 1$。类似地，对于式（E.1）右端的第二个积分，我们有

$$\int_{[0,1]^d} C_{k:l}(\boldsymbol{w})\mathrm{d}\tilde{\mu}_{j,m,\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w})$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{l-k+1} \int_{[0,1]^d} \sum_{i=k}^{l} \mathbf{1}\left\{ \boldsymbol{R}_i^{k:l}/(l-k+1) \le \boldsymbol{w} \right\} \mathrm{d}\tilde{\mu}_{j,m,\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}) \\
&= \frac{1}{l-k+1} \sum_{i=k}^{l} \mathbb{P}\left\{ \tilde{\boldsymbol{S}} \ge m\boldsymbol{R}_i^{k:l}/(l-k+1) \mid \mathscr{X}_{k:l} \right\} \\
&= \frac{1}{l-k+1} \sum_{i=k}^{l} \prod_{t=1}^{d} \mathbb{P}\left\{ \tilde{S}_{m,t,u_t} \ge mR_{it}^{k:l}/(l-k+1) \mid \mathscr{X}_{k:l} \right\} \\
&= \frac{1}{l-k+1} \sum_{i=k}^{l} \bar{B}_{m-1,u_j}\left\{ \lceil mR_{ij}^{k:l}/(l-k+1) \rceil - 1 \right\} \\
&\quad \times \prod_{\substack{t=1 \\ t\neq j}}^{d} \bar{B}_{m,u_t}\left\{ \lceil mR_{it}^{k:l}/(l-k+1) \rceil - 1 \right\}.
\end{aligned}
$$

最后，注意到.....即可得到所需结果。

$$
\begin{aligned}
&\bar{B}_{m-1,u_j}\left\{ \lceil mR_{ij}^{k:l}/(l-k+1) \rceil - 2 \right\} - \bar{B}_{m-1,u_j}\left\{ \lceil mR_{ij}^{k:l}/(l-k+1) \rceil - 1 \right\} \\
&= B_{m-1,u_j}\left\{ \lceil mR_{ij}^{k:l}/(l-k+1) \rceil - 1 \right\} - B_{m-1,u_j}\left\{ \lceil mR_{ij}^{k:l}/(l-k+1) \rceil - 2 \right\} \\
&= b_{m-1,u_j}\left\{ \lceil mR_{ij}^{k:l}/(l-k+1) \rceil - 1 \right\}.
\end{aligned}
$$

■

引理 E.2。 在条件 5.4下，对于任意 $j \in \{1,\dots,d\}$， $\delta \in (0,\ 1)$ 和$\varepsilon \in (0,\ 1/2)$，以概率 *1*，

$$
\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\ge\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d \\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \left| \dot{C}^{\nu,\nabla}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{u}) - \dot{C}^{\nu,\Delta}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{u}) \right| = o(1).
$$

证明。 固定 $j \in \{1,\dots,d\}$， $\delta \in (0,\ 1)$ 以及 $\varepsilon \in (0,\ 1/2)$，并假设$n$ 足够大，使得对于任意满足 $s,\ t) \in \Lambda$ 且满足 $t-s>\delta$， $L_2 b_{\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor}$和 $L_2 b'_{\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor}$ 均小于 ε。然后，利用 $C^{\nu}_{k:l}$ 在 (2.2) 中介于 0 和 1 之间这一事实，我们得到以概率 1，

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\ge\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d \\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \left| \dot{C}^{\nu,\nabla}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{u}) - \dot{C}^{\nu,\Delta}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{u}) \right| \\
&\qquad \le \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\ge\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d \\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \left| \frac{1}{h+h'} - \frac{1}{(u_j+h)\wedge 1 - (u_j-h')\vee 0} \right| = 0.
\end{aligned}
$$

■

命题 5.5 的证明。固定 $j \in \{1,\dots,d\}$，我们首先仿照 B.4 中的证明思路证明 (5.15)。¨ucher 等人 (2014)。

由 (2.9) 可知，对于任意满足 s， t， $\boldsymbol{u}$) 的 $\in \Lambda \times [0,1]^d$，使得 $\lfloor ns \rfloor < \lfloor nt \rfloor$,

$$C^{\nu}_{\lfloor ns \rfloor + 1:\lfloor nt \rfloor}(\boldsymbol{u}) = C(\boldsymbol{u}) + \frac{1}{\sqrt{n}\lambda_n(s,t)} \mathbb{C}^{\nu}_n(s,t,\boldsymbol{u}).$$

固定 $\delta \in (0,1)$，并注意到，根据条件 5.4,

$$d_n = \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} (b_{\lfloor nt \rfloor - \lfloor ns \rfloor} + b'_{\lfloor nt \rfloor - \lfloor ns \rfloor}) \leq \sup_{k \geq \lfloor n\delta \rfloor - 1} (b_k + b'_k) \to 0. \tag{E.2}$$

接下来，固定 $\varepsilon \in (0, 1/2)$，并假设 n 足够大，使得对于任意 $t-s > \delta$, $L_2 b_{\lfloor nt \rfloor - \lfloor ns \rfloor}$ 和 $L_2 b'_{\lfloor nt \rfloor - \lfloor ns \rfloor}$ 均小于 $\varepsilon/2$。那么，对于满足 $u_j \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ 的任意 $t-s > \delta$ 和 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$,

$$\begin{aligned} \dot{C}^{\nu,\Delta}_{j,\lfloor ns \rfloor + 1:\lfloor nt \rfloor}(\boldsymbol{u}) &= \frac{1}{h+h'} \{C(\boldsymbol{u} + h\boldsymbol{e}_j) - C(\boldsymbol{u} - h'\boldsymbol{e}_j)\} \\ &\quad + \frac{1}{(h+h')\sqrt{n}\lambda_n(s,t)} \{\mathbb{C}^{\nu}_n(s,t,\boldsymbol{u} + h\boldsymbol{e}_j) - \mathbb{C}^{\nu}_n(s,t,\boldsymbol{u} - h'\boldsymbol{e}_j)\}. \end{aligned} \tag{E.3}$$

由于根据条件 2.8, $\dot{C}_j$ 在集合 $\{\boldsymbol{u} \in [0,1]^d : u_j \in [\varepsilon/2, 1-\varepsilon/2]\}$上存在（且连续），由中值定理，对于满足 $u_j \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$, 的任意 $t-s > \delta$ 和$\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$,

$$\frac{1}{h+h'} \{C(\boldsymbol{u} + h\boldsymbol{e}_j) - C(\boldsymbol{u} - h'\boldsymbol{e}_j)\} = \dot{C}_j(\boldsymbol{u}^*_{n,s,t}),$$

其中，$\boldsymbol{u}^*_{n,s,t}$ 几乎必然介于 $\boldsymbol{u} - h'\boldsymbol{e}_j$ 和 $\boldsymbol{u} + h\boldsymbol{e}_j$ 之间。因此，以概率 1,

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d \\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \left| \frac{1}{h+h'} \{C(\boldsymbol{u} + h\boldsymbol{e}_j) - C(\boldsymbol{u} - h'\boldsymbol{e}_j)\} - \dot{C}_j(\boldsymbol{u}) \right| \\ &= \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d \\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \left| \dot{C}_j(\boldsymbol{u}^*_{n,s,t}) - \dot{C}_j(\boldsymbol{u}) \right| \leq \sup_{\substack{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in[0,1]^{2d} \\ u_j,v_j\in[\varepsilon/2,1-\varepsilon/2] \\ |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|_\infty \leq L_2 d_n}} \left| \dot{C}_j(\boldsymbol{u}) - \dot{C}_j(\boldsymbol{v}) \right| \to 0, \end{aligned} \tag{E.4}$$

其中 d_n 定义见（E.2）。此外，由于根据条件 2.9 以及定理 2.10， $\mathbb{C}^{\nu}_n$ 依概率渐近一致等度连续，因此我们有

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d \\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} |\mathbb{C}^{\nu}_n(s,t,\boldsymbol{u} + h\boldsymbol{e}_j) - \mathbb{C}^{\nu}_n(s,t,\boldsymbol{u} - h'\boldsymbol{e}_j)| \\ &\qquad \leq \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} \sup_{\substack{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in[0,1]^{2d} \\ u_j,v_j\in[\varepsilon/2,1-\varepsilon/2] \\ |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|_\infty \leq L_2 d_n}} |\mathbb{C}^{\nu}_n(s,t,\boldsymbol{u}) - \mathbb{C}^{\nu}_n(s,t,\boldsymbol{v})| = o_{\mathbb{P}}(1). \end{aligned} \tag{E.5}$$

（5.15）成立这一事实直接由（E.3）、（E.4）、（E.5）以及由条件 5.4，可知

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}}\frac{1}{(h+h')\sqrt{n}\lambda_n(s,t)} &\leq \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}}\frac{1}{L_1(b_{\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor}+b'_{\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor})\sqrt{n}\lambda_n(s,t)}\\ &\leq \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}}\frac{1}{L_1(\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor)^{-1/2}\sqrt{n}\lambda_n(s,t)}\\ &= \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}}\frac{1}{L_1\sqrt{\lambda_n(s,t)}}\leq\frac{1}{L_1\sqrt{\delta-1/n}}.\end{aligned}$$

关于 $\dot{C}^{\nu,\nabla}_{j,k}$、$l$ (关于 $\dot{C}^{\nu,\Delta}_{j,k}$、$l$ 以及 $\underline{\dot{C}}^{\nu,\nabla}_{j,k,l}$、$l$)的结论可由引理 E.2 (或连续映射定理)得到。■

命题 5.9的证明。固定 $j\in\{1,\dots,d\}$、$\delta\in(0,1)$ 以及 $\varepsilon\in(0,1/2)$。我们先证明（5.16）。由（5.12）和三角不等式可得

$$\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}}\sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d\\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}}\left|\underline{\dot{C}}^{\Delta,\nu}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{u})-\dot{C}_j(\boldsymbol{u})\right|\leq I_{j,n,\delta,\varepsilon}+J_{j,n,\delta,\varepsilon},$$

其中

$$I_{j,n,\delta,\varepsilon}=\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}}\sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d\\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}}\left|\int_{[0,1]^d}\left\{\underline{\dot{C}}^{\Delta}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{w})-\dot{C}_j(\boldsymbol{w})\right\}\mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}}(\boldsymbol{w})\right|,$$

$$J_{j,n,\delta,\varepsilon}=\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}}\sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d\\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}}\left|\int_{[0,1]^d}\dot{C}_j(\boldsymbol{w})\mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}}(\boldsymbol{w})-\dot{C}_j(\boldsymbol{u})\right|,$$

其中 $\underline{\dot{C}}^{\Delta}_{j,k,l}$ 定义于（5.4）中。现在我们将证明 $I_{j,n,\delta,\varepsilon}=o_{\mathbb{P}}(1)$ 以及 $J_{j,n,\delta,\varepsilon}=o_{\mathbb{P}}(1)$。

项 $I_{j,n,\delta,\varepsilon}$：根据三角不等式以及 $0\leq\dot{C}^{\Delta}_{j,k,l}\leq 1$ 和 $0\leq C_j\leq 1$，我们有 $I_{j,n,\delta,\varepsilon}$ 小于

$$\begin{aligned}&\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}}\sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d\\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}}\left|\int_{\substack{\{\boldsymbol{w}\in[0,1]^d:\\ w_j\in[\varepsilon/2,1-\varepsilon/2]\}}}\left\{\underline{\dot{C}}^{\Delta}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{w})-\dot{C}_j(\boldsymbol{w})\right\}\mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}}(\boldsymbol{w})\right|\\ &+\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}}\sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d\\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}}\left|\int_{\substack{\{\boldsymbol{w}\in[0,1]^d:\\ w_j<\varepsilon/2\}}}\left\{\underline{\dot{C}}^{\Delta}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{w})-\dot{C}_j(\boldsymbol{w})\right\}\mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}}(\boldsymbol{w})\right|\\ &+\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}}\sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d\\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}}\left|\int_{\substack{\{\boldsymbol{w}\in[0,1]^d:\\ w_j>1-\varepsilon/2\}}}\left\{\underline{\dot{C}}^{\Delta}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{w})-\dot{C}_j(\boldsymbol{w})\right\}\mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}}(\boldsymbol{w})\right|\\ &\leq I'_{j,n,\delta,\varepsilon}+I''_{j,n,\delta,\varepsilon}+I'''_{j,n,\delta,\varepsilon},\end{aligned}$$

其中

$$I'_{j,n,\delta,\varepsilon} = \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{w}\in[0,1]^d \\ w_j\in[\varepsilon/2,1-\varepsilon/2]}} \left|\underline{\dot{C}}^{\Delta}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{w}) - \dot{C}_j(\boldsymbol{w})\right|,$$

$$I''_{j,n,\delta,\varepsilon} = \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d \\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}} \left\{\boldsymbol{w}\in[0,1]^d : w_j < \varepsilon/2\right\},$$

$$I'''_{j,n,\delta,\varepsilon} = \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d \\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}} \left\{\boldsymbol{w}\in[0,1]^d : w_j > 1-\varepsilon/2\right\}.$$

由推论 5.7 可知，$I'_{j,n,\delta,\varepsilon} = o_{\mathbb{P}}(1)$。现在我们将证明，$I''_{j,n,\delta,\varepsilon}$ 和 $I'''_{j,n,\delta,\varepsilon}$ 均几乎必然收敛于零。为此，只需证明，对于几乎任意序列 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots$，在给定 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots$ 的条件下，$I''_{j,n,\delta,\varepsilon}$ 和 $I'''_{j,n,\delta,\varepsilon}$ 收敛于零。关于 $I''_{j,n,\delta,\varepsilon}$，利用切比雪夫不等式和条件 5.8，对于几乎任意序列 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots$，在给定 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots$ 的条件下，我们得到

$$\begin{aligned}
I''_{j,n,\delta,\varepsilon} &= \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} \sup_{u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]} \mathbb{P}\left\{W_{j,u_j}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}} < \varepsilon/2 \mid \mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}\right\} \\
&= \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} \sup_{u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]} \mathbb{P}\left\{W_{j,u_j}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}} - u_j < \varepsilon/2 - u_j \mid \mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}\right\} \\
&\leq \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} \sup_{u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]} \mathbb{P}\left\{-\left|W_{j,u_j}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}} - u_j\right| \leq -u_j + \varepsilon/2 \mid \mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}\right\} \\
&\leq \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} \sup_{u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]} \frac{\operatorname{Var}\left(W_{j,u_j}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}} \mid \mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}\right)}{(u_j-\varepsilon/2)^2} \\
&\leq \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} \sup_{u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]} \frac{a_{\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor}}{(u_j-\varepsilon/2)^2} \leq \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} a_{\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor} \sup_{u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]} \frac{1}{(u_j-\varepsilon/2)^2} \\
&\leq \frac{4}{\varepsilon^2} \sup_{k\geq\lfloor n\delta\rfloor-1} a_k \to 0.
\end{aligned}$$

类似地，关于 $I'''_{j,n,\delta,\varepsilon}$，对于几乎任意序列 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots$，在给定 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots$ 的条件下，我们得到

$$\begin{aligned}
I'''_{j,n,\delta,\varepsilon} &= \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} \sup_{u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]} \mathbb{P}\left\{W_{j,u_j}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}} > 1-\varepsilon/2 \mid \mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}\right\} \\
&= \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} \sup_{u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]} \mathbb{P}\left\{W_{j,u_j}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}} - u_j > 1-\varepsilon/2 - u_j \mid \mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}\right\} \\
&\leq \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} \sup_{u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]} \mathbb{P}\left\{\left|W_{j,u_j}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}} - u_j\right| \geq 1-\varepsilon/2-u_j \mid \mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}\right\} \\
&\leq \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} \sup_{u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]} \frac{\operatorname{Var}\left(W_{j,u_j}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}} \mid \mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}\right)}{(1-\varepsilon/2-u_j)^2}
\end{aligned}$$

$$\leq \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}} \sup_{u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]} \frac{a_{\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor}}{(1-\varepsilon/2-u_j)^2}$$

$$\leq \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}} a_{\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor} \sup_{u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]} \frac{1}{(1-\varepsilon/2-u_j)^2} \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \sup_{k\geq\lfloor n\delta\rfloor-1} a_k \to 0.$$

项 $J_{j,\,n,\,\delta,\,\varepsilon}$：令 $\eta>0$，并证明对于充分大的 n s，有 $J_{j,\,n,\,\delta,\,\varepsilon}\leq\eta$。对于任意 $\rho\in(0,\,1)$，由三角不等式以及 $0\leq C_j\leq 1$ 这一事实可知，$J_{j,\,n,\,\delta,\,\varepsilon}$ 小于

$$\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d\\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \left| \int_{\{\boldsymbol{w}\in[0,1]^d:|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}|_\infty\leq\rho\}} \{\dot{C}_j(\boldsymbol{w})-\dot{C}_j(\boldsymbol{u})\}\mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}}(\boldsymbol{w}) \right|$$

$$+ \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d\\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \left| \int_{\{\boldsymbol{w}\in[0,1]^d:|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}|_\infty>\rho\}} \{\dot{C}_j(\boldsymbol{w})-\dot{C}_j(\boldsymbol{u})\}\mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}}(\boldsymbol{w}) \right|$$

$$\leq J'_{j,\varepsilon,\rho}+J''_{j,n,\delta,\rho},$$

其中

$$J'_{j,\varepsilon,\rho}=\sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d\\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \sup_{\substack{\boldsymbol{w}\in[0,1]^d\\ |\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}|_\infty\leq\rho}} \left|\dot{C}_j(\boldsymbol{w})-\dot{C}_j(\boldsymbol{u})\right|,$$

$$J''_{j,n,\delta,\rho}=\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}} \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} \mathbf{1}\{|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}|_\infty>\rho\}\mathrm{d}\nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}}(\boldsymbol{w}).$$

根据条件 2.8，$\dot{C}_j$ 在集合 $\{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d:\ u_j\in[\varepsilon/2,1-\varepsilon/2]\}$上一致连续。然后我们选择 $\rho=\rho(\varepsilon,\ \eta)>0$ 足够小，使得

$$J'_{j,\varepsilon,\rho}=\sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d\\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \sup_{\substack{\boldsymbol{w}\in[0,1]^d\\ |\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}|_\infty\leq\rho}} \left|\dot{C}_j(\boldsymbol{w})-\dot{C}_j(\boldsymbol{u})\right|\leq\frac{\eta}{2}. \tag{E.6}$$

就$J''_{j\text{、}n\text{、}\delta\text{、}\rho}$而言，使用切比雪夫不等式和条件5.8，对于几乎任意序列 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，…，在给定 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，…的条件下，我们得到

$$J''_{j,n,\delta,\rho}=\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}} \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \nu_{\boldsymbol{u}}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}}(\{\boldsymbol{w}\in[0,1]^d:|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}|_\infty>\rho\})$$

$$=\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}} \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \mathbb{P}\left[\bigcup_{j=1}^d\left\{\left|W_{j,u_j}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}}-u_j\right|>\rho\right\}\mid\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}\right]$$

$$\leq\sum_{j=1}^d \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}} \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \mathbb{P}\left\{\left|W_{j,u_j}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}}-u_j\right|>\rho\mid\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}\right\}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{d} \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} \sup_{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d} \frac{\operatorname{Var}\left(W_{j,u_j}^{\mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}} \mid \mathscr{X}_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}\right)}{\rho^2}$$

$$\leq \frac{d}{\rho^2} \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} a_{\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor} \leq \frac{d}{\rho^2} \sup_{k\geq\lfloor n\delta\rfloor-1} a_k \to 0,$$

这意味着，对于 n 充分大时，以概率 1，$J''_{j,n,\delta,\rho} \leq \eta/2$。此外利用（E.6），我们得到$J_{j,n,\delta,\varepsilon}$ 几乎必然收敛到零，由此完成了（5.16）的证明。对于 $\dot{C}^{\nabla}_{j,k,l,:}$（5.11）中的类似结果，其证明几乎完全相同。■

命题的证明 5.10. 固定 $j \in \{1,\ldots,d\}$, $\delta \in (0,1)$ 和 $\varepsilon \in (0,1/2)$. 由 (5.13) 可知，对于任意 $(s,t) \in \Lambda$ 和 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$,

$$\dot{C}^{\mathrm{Bern}}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor,m_{\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor}}(\boldsymbol{u}) = \int_{[0,1]^d} \dot{C}^{\nabla}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor,1/m_{\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor},0}(\boldsymbol{w})\mathrm{d}\tilde{\mu}_{j,m_{\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor},\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}),$$

其中 $\dot{C}^{\nabla}_{j,k:l,1/m,0}$ 在 (5.1) 中定义，并且对于任意 $m \geq 2$, $\tilde{\mu}_{j,m,\boldsymbol{u}}$，它是随机向量 $(S_{m,1,u_1}/m, \ldots, S_{m,d,u_d}/m)$ 的分布律，其分量相互独立，使得，对于 $i \in \{1,\ldots,d\} \setminus \{j\}$, S_{m,i,u_i}服从二项分布(m,u_i)，而 S_{m,j,u_j}服从二项分布$(m-1,u_j)$。因此，对于任意 $(s,t) \in \Lambda$ 和 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$,

$$\dot{C}^{\mathrm{Bern}}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor,m_{\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor}}(\boldsymbol{u}) = \int_{\mathscr{W}_{j,n,s,t}} \dot{C}^{\nabla}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor,1/m_{\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor},0}(\boldsymbol{w})\mathrm{d}\tilde{\mu}_{j,m_{\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor},\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}), \quad \text{(E.7)}$$

其中 $\mathscr{W}_{j,n,s,t} = \{\boldsymbol{w} \in [0,1]^d : w_j \leq 1 - 1/m_{\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor}\}$。为使记号更加简洁，以下我们将 $m_{s,t}$ 记作 $m_{\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor}$，$(s,t) \in\Lambda$。根据三角不等式，(5.17) 左端小于 $I_{j,n,\delta,\varepsilon} + J_{j,n,\delta,\varepsilon}$，其中

$$I_{j,n,\delta,\varepsilon} = \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d \\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \left| \int_{\mathscr{W}_{j,n,s,t}} \left\{ \dot{C}^{\nabla}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor,1/m_{s,t},0}(\boldsymbol{w}) - \dot{C}_j(\boldsymbol{w}) \right\} \mathrm{d}\tilde{\mu}_{j,m_{s,t},\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}) \right|,$$

$$J_{j,n,\delta,\varepsilon} = \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda \\ t-s\geq\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d \\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \left| \int_{[0,1]^d} \dot{C}_j(\boldsymbol{w})\mathrm{d}\tilde{\mu}_{j,m_{s,t},\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}) - \dot{C}_j(\boldsymbol{u}) \right|.$$

对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{x} \in (\mathbb{R}^d)^n$ 以及 $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$，令 $\nu^{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{u}} = \tilde{\mu}_{j,\lfloor Ln^\theta\rfloor\vee 2,\boldsymbol{u}}$。采用此记号，条件5.8 对所考虑的平滑分布成立，并且

通过完全类似于相应项的命题 5.9 证明的步骤，可以验证 $J_{j,\,n,\,\delta,\,\varepsilon} = o_{\mathbb{P}}(1)$。因此，剩下需要证明的是，$_{n,\,\delta,\,\varepsilon} = o_{\mathbb{P}}(1)$。

由三角不等式可知，$I_{j,\,n,\,\delta,\,\varepsilon}$ 小于

$$\sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d\\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \left| \int_{\substack{\{\boldsymbol{w}\in\mathscr{W}_{j,n,s,t}:\\ w_j\in[\varepsilon/2,1-\varepsilon/2]\}}} \left\{ \dot{C}^{\nabla}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor,1/m_{s,t},0}(\boldsymbol{w}) - \dot{C}_j(\boldsymbol{w}) \right\} \mathrm{d}\tilde{\mu}_{j,m_{s,t},\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}) \right|$$

$$+ \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d\\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \left| \int_{\substack{\{\boldsymbol{w}\in\mathscr{W}_{j,n,s,t}:\\ w_j<\varepsilon/2\}}} \left\{ \dot{C}^{\nabla}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor,1/m_{s,t},0}(\boldsymbol{w}) - \dot{C}_j(\boldsymbol{w}) \right\} \mathrm{d}\tilde{\mu}_{j,m_{s,t},\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}) \right|$$

$$+ \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d\\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \left| \int_{\substack{\{\boldsymbol{w}\in\mathscr{W}_{j,n,s,t}:\\ w_j>1-\varepsilon/2\}}} \left\{ \dot{C}^{\nabla}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor,1/m_{s,t},0}(\boldsymbol{w}) - \dot{C}_j(\boldsymbol{w}) \right\} \mathrm{d}\tilde{\mu}_{j,m_{s,t},\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}) \right|$$

$$\leq I'_{j,n,\delta,\varepsilon} + M_n I''_{j,n,\delta,\varepsilon} + M_n I'''_{j,n,\delta,\varepsilon},$$

其中

$$I'_{j,n,\delta,\varepsilon} = \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{w}\in[0,1]^d\\ w_j\in[\varepsilon/2,1-\varepsilon/2]}} \left| \dot{C}^{\nabla}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor,1/m_{s,t},0}(\boldsymbol{w}) - \dot{C}_j(\boldsymbol{w}) \right|,$$

$$I''_{j,n,\delta,\varepsilon} = \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d\\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \tilde{\mu}_{j,m_{s,t},\boldsymbol{u}} \left\{ \boldsymbol{w}\in[0,1]^d : w_j < \varepsilon/2 \right\},$$

$$I'''_{j,n,\delta,\varepsilon} = \sup_{\substack{(s,t)\in\Lambda\\ t-s\geq\delta}} \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in[0,1]^d\\ u_j\in[\varepsilon,1-\varepsilon]}} \tilde{\mu}_{j,m_{s,t},\boldsymbol{u}} \left\{ \boldsymbol{w}\in[0,1]^d : w_j > 1-\varepsilon/2 \right\},$$

$$M_n = \sup_{(s,t)\in\Lambda} \sup_{\boldsymbol{w}\in\mathscr{W}_{j,n,s,t}} \left| \dot{C}^{\nabla}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor,1/m_{s,t},0}(\boldsymbol{w}) \right|.$$

由于该命题的条件意味着，对于所有 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\boldsymbol{x}\in(\mathbb{R}^d)^n$，条件 5.4 在$h(\boldsymbol{x}) = 1/(\lfloor Ln^{\theta}\rfloor\vee 2)$ 和 $h'(\boldsymbol{x}) = 0$ 下成立，因此由推论 5.7 可得$I'_{j,n,\delta,\varepsilon} = o_{\mathbb{P}}(1)$。此外，鉴于条件 5.8 对所考虑的平滑分布成立，完全按照命题 5.9 的证明中处理类似项的方式，可以验证 $I''_{j,n,\delta,\varepsilon}$ 和 $I'''_{j,n,\delta,\varepsilon}$ 几乎必然收敛于零。为完成 (5.17) 的证明，只需证明存在一个常数 $\zeta>0$，使得对任意 $n\in\mathbb{N}$，$M_n<\zeta$ 几乎必然成立。

固定 $n\in\mathbb{N}$。根据所采用的约定，对于所有满足 $\lfloor ns\rfloor=\lfloor nt\rfloor$的（$s$，$t$），有$C^{\nabla}_{j}$，$_{\lfloor ns\rfloor+1:\,\lfloor nt\rfloor,\,1/m_{s},\,{}_{t},\,0}=0$。固定满足 $\lfloor ns\rfloor<\lfloor nt\rfloor$的（$s$，$t$），并令 $p=\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor$。在（2.1）中一般定义的经验 copula $C_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}$是一个多元分布函数；根据条件 2.3，其 d 单变量边缘分布均等于 $G_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}$，其中 $G_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(u) = \lfloor pu\rfloor/p$，$u\in[0,1]$。根据多元分布函数的一个众所周知的性质（例如，参见 Durante

和 Sempi，2015，引理 1.2.14），可得

$$\left|C_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{u})-C_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{v})\right| \leq \sum_{j=1}^{d}\left|G_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(u_j)-G_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(v_j)\right|$$

对所有 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}\in[0,1]^d$。于是我们得到，对于任意 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{W}_{j,\ n,\ s,\ t}$，

$$\begin{aligned}&\left|C_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{e}_j/m_{s,t})-C_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{u})\right| \\ &\qquad\leq \left|G_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(u_j+1/m_{s,t})-G_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(u_j)\right|,\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}\left|\dot{C}_{j,\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(\boldsymbol{u})\right| &\leq \frac{\left|G_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(u_j+1/m_{s,t})-G_{\lfloor ns\rfloor+1:\lfloor nt\rfloor}(u_j)\right|}{1/m_{s,t}} \\ &= m_{s,t}\left\{\frac{\lfloor p(u_j+1/m_{s,t})\rfloor}{p}-\frac{\lfloor pu_j\rfloor}{p}\right\} \\ &\leq m_{s,t}\left\{\frac{p(u_j+1/m_{s,t})}{p}-\frac{pu_j-1}{p}\right\} \\ &\leq m_{s,t}\left(\frac{1}{m_{s,t}}+\frac{1}{p}\right)\leq 1+\frac{m_{s,t}}{p}=1+\frac{\lfloor Lp^{\theta}\rfloor\vee 2}{p} \\ &\leq 1+Lp^{\theta-1}\vee(2/p)\leq 1+L\vee 2,\end{aligned}$$

由此完成了对（5.17）的证明。（5.18）成立这一事实，最终可直接由前一个居中公式和（E.7）得出。■

参考文献

Bouezmarni, T., El Ghouch, A. 和 Taamouti, A.（2013）。无界 copula 密度的伯恩斯坦估计量。《统计与风险建模》**30** 343–360。Bücher, A.（2015）。强混合条件下序贯多元经验过程弱收敛的一则注记。《理论概率杂志》**28** 1028–1037。Bücher, A. 和 Dette, H.（2010）。关于经验 copula 过程自助法近似的一则注记。《统计与概率快报》**80** 1925–1932。Bücher, A. 和 Kojadinovic, I.（2016）。强混合条件下序贯经验 copula 过程的相依乘子自助法。《伯努利》**22** 927–968。Bücher, A. 和 Kojadinovic, I.（2019）。自助法一致性结果中条件弱收敛与联合无条件弱收敛的一则注记。《理论概率杂志》**32** 1145–1165。Bücher, A. 和 Volgushev, S.（2013）。序列依赖下的经验 copula 过程与序贯经验 copula 过程。《多元分析杂志》**119** 61–70。

Bücher, A., Kojadinovic, I., Rohmer, T. 和 Segers, J. （2014）。检测多元时间序列中的截面依赖变化。《多元分析杂志》132 111–128。Bühlmann, P.（1993）。时间序列与经验过程中的分块自助法，博士论文，苏黎世联邦理工学院博士论文，编号 10354。Deheuvels, P. （1979）。经验依赖函数及其性质：独立性的非参数检验。比利时皇家科学院《公报》，第五辑，65 274–292。Durante, F. 和 Sempi, C. （2015）。《Copula 理论原理》。CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿。Genest, C., Ghoudi, K. 和 Rivest, L. P. （1995）。多元分布族中依赖参数的半参数估计程序。《生物计量学》82 543–552。Hofert, M., Kojadinovic, I., Maechler, M. 和 Yan, J.（2018）。使用 R 进行 copula 建模的要素。施普林格。Hofert, M., Kojadinovic, I., Mächler, M.和 Yan, J. （2022）。copula：使用 copula 进行多元依赖建模，R 软件包，版本 1.1-1。Holmes, M., Kojadinovic, I.和 Quessy, J.-F. （2013）。仿照 Gombay 和 Horváth 的变点检测非参数检验。`《多元分析杂志》115 16–32。Janssen, P., Swanepoel, J. 和 Veraverbeke, N. （2012）。伯恩斯坦 copula 估计量的大样本性质。《统计规划与推断杂志》142 1189–1197。Janssen, P., Swanepoel, J. 和 Veraverbeke, N.（2016）。copula 导数的伯恩斯坦估计及其在条件分布与回归泛函中的应用。《Test》25 351–374。KirilIouk, A., Segers, J.和 Tsukahara, H. （2021）。经验 beta copula 的重抽样程序，载于《极值理论先驱研究：纪念涉谷正昭》27–53。新加坡施普林格。Kojadinovic, I., Segers, J. 和 Yan, J. （2011）。多元 copula 极值依赖的大样本检验。《加拿大统计学杂志》39 703–720。Kojadinovic, I. 和 Stemikovskaya, K.（2019）。经验 copula 过程的子抽样（加权平滑）。《多元分析杂志》173 704-723。Kojadinovic, I. 和 Yi, B. （2022）。一类平滑、可能具有数据自适应特性的非参数 copula 估计量，其中包含经验 beta copula。《多元分析杂志》，即将出版。http://arxiv.org/abs/2106.10726。Kosorok, M. R. （2008）。《经验过程与半参数统计推断导论》。施普林格，纽约。Nelsen, R. B. （2006）。《Copula 导论》。施普林格，纽约，第二版。Rémillard, B. 和 Scaillet, O. （2009）。检验两个 copula 之间的相等性。《多元分析杂志》100 377–386。Rüschendorf, L. （1976）。多元秩次统计量的渐近分布。《统计年刊》4 912–923。

Sancetta, A. 和 Satchell, S. （2004年）。伯恩斯坦 copula 及其在多元分布建模与近似中的应用。《计量经济理论》20 535–562。Scaillet, O. （2005年）。正象限相依的 Kolmogorov-Smirnov 型检验。《加拿大统计学杂志》33 415–427。Segers, J. （2012年）。在非限制性光滑性假设下经验 copula 过程的渐近性质。《伯努利》18 764–782。Segers, J., Sibuya, M. 和 Tsukahara, H. （ 2017 年）。经验贝塔 copula。《多元分析杂志》 155 35–51。Shaked, M.和 Shanthikumar, J. G. （2007年）。随机序。施普林格统计学丛书。施普林格。Shorack, G. R. 和 Wellner, J. A. （1986年）。应用于统计学的经验过程。威立概率与数理统计丛书。约翰·威立父子公司，纽约。Sklar, A. （1959年）。多维分布函数及其边缘分布。巴黎大学统计学院出版物 8 229–231。R Core Team （2022年）。R：用于统计计算的语言与环境。R 统计计算基金会，维也纳，奥地利。van der Vaart, A. W.（ 1998年）。渐近统计学。剑桥大学出版社。van der Vaart, A. W. 和 Wellner, J. A. （2000年）。弱收敛与经验过程。施普林格，纽约。第二版。Wolodzko, T. （2020年）。extraDistr：额外的单变量与多元分布。R 软件包，版本 1.9.1。