arXiv:2301.05507v1 [stat.OT] 13 Jan 2023

基于相关性的与运算可以是联结函数：证明

Enrique Miralles-Dolz[1,2], Ander Gray[1,2],Edoardo Patelli[3], Scott Ferson[2], Vladik Kreinovich[4], 和 Olga Kosheleva[5]1利物浦大学风险与不确定性研究所，英国利物浦， {enmidol,akgray,ferson}@liverpool.ac.uk2英国原子能管理局，英国阿宾顿3斯特拉斯克莱德大学智能基础设施中心，英国格拉斯哥，edoardo.patelli@strath.ac.uk4德克萨斯大学埃尔帕索分校计算机科学系，美国得克萨斯州埃尔帕索 79968，vladik@utep.edu5德克萨斯大学埃尔帕索分校教师教育系，美国得克萨斯州埃尔帕索 79968，olgak@utep.edu

摘要

在许多实际情形中，我们知道两个事件 A 和 B 的概率 a 和 b，并希望估计它们的联合概率 Prob(A& B)。根据已知值 a 和 b 估计联合概率的算法称为与运算。在这类重建可以实现的一种重要情形中，我们知道 A 和 B 之间的相关性；我们将由此得到的与运算称为基于相关性的与运算。另一方面，在统计学中，有一类广泛使用的与运算，称为联结函数。经验证据似乎表明， [4] 中推导出的基于相关性的与运算是一个 Copula，但迄今为止，还没有关于这一说法的证明。本文给出了这样的证明。

1 问题的表述

基于相关性的“与”运算。在许多实际情形中，我们知道两个事件 A 和 B 的概率 a 和 b，并需要估计它们的联合概率 Prob(A& B)。将已知值 a 和 b 转换为此类估计的算法 $f_{\&}(a,b)$ 通常称为与运算。

在某些情形下，可以进行这样的估计。其中一个重要情形是：除了概率 a 和 b之外，我们还知道相应两个随机事件之间的相关性 ρ。众所周知（例如，参见 [3, 4]），在这种情形下，我们可以唯一确定概率 Prob(A& B)，其值为

$$a \cdot b + \rho \cdot \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)}. \tag{1}$$

虽然只要已知相关性，这个公式就成立，但它无法得出一个处处有定义的与运算。例如，对于 $a = b = 0.1$ 和 $\rho = -1$，这个公式会得出一个毫无意义的负概率

$$0.1 \cdot 0.1 + (-1) \cdot \sqrt{0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.9} = 0.01 - 0.09 = -0.08 < 0.$$

为避免这种毫无意义的估计，我们需要考虑到，联合概率 Prob(A& B) 必须满足 Fr´echet 不等式（例如，参见 [2]）：

$$\max(a + b - 1, 0) \le \mathrm{Prob}(A \,\&\, B) \le \min(a, b). \tag{2}$$

因此，如果专家声称知道相关性 ρ，而基于该值 ρ 对 Prob(A& B) 的估计小于下界 max($a + b - 1$, 0)——这是不可能的——那么一个合理的做法是取联合概率最接近的可行值，即 max($a + b - 1$, 0)。类似地，如果基于专家提供的值 ρ 对 Prob(A& B) 的估计大于上界 min(a, b)——这同样不可能——那么一个合理的做法是取联合概率最接近的可行值，即 min(a, b)。因此，我们得到如下与运算——称之为基于相关性的与运算：

$$f_\rho(a, b) = T_{a,b}\left(a \cdot b + \rho \cdot \sqrt{a \cdot (1 - a) \cdot b \cdot (1 - b)}\right), \tag{3}$$

其中

$$\begin{gathered} T_{a,b}(c) = \max(a + b - 1, 0) \text{ if } c < \max(a + b - 1, 0); \\ T_{a,b}(c) = c \text{ if } \max(a + b - 1, 0) \le c \le \min(a, b); \text{ and} \\ T_{a,b}(c) = \min(a, b) \text{ if } \min(a, b) < c. \end{gathered} \tag{4}$$

问题：这个与运算是 Copula 吗？在概率论中，有一类已知的与运算称为联结函数（例如，参见 [5, 6]）。这些函数 $C(a, b)$ 满足：对于某个二维随机向量 (X, Y)，其联合累积分布函数 $F_{XY}(x, y)$ 定义 = 概率($X \le x$& $Y \le y$) 的形式为 $F_{XY}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$，其中 $F_X(x)$ 定义 = 概率($X \le x$) 和 $F_Y(y)$ 定义 = 概率 ($Y \le y$) 称为边缘分布。

公式 (3)-(4) 的一个重要特点是，这些公式可以表示为 [4]，中所述的 Copula（二元联结函数）族，因此我们不仅可以处理精确概率，还可以处理区间概率和概率盒。二维联结函数必须满足以下性质：

1. Grounded: $C(0, b) = C(a, 0) = 0$
2. 均匀边缘： $C(a, 1) = a$； $C(1, b) = b$
3. 二维递增： $C(\overline{a}, \overline{b}) + C(\underline{a}, \underline{b}) - C(\overline{a}, \underline{b}) - C(\underline{a}, \overline{b}) \ge 0$ 对所有 $\underline{a} < \overline{a}$ 和 $\underline{b} < \overline{b}$

很容易看出，(3)-(4) 满足前两个性质。在 [4] 中，第三个性质已针对元组 $(\underline{a}, \overline{a}, \underline{b}, \overline{b}, \rho)$ 的一个稠密集进行了检验，而且对所有这些元组，不等式都成立。然而，当时我们无法证明基于相关性的与运算确实是一个二维联结函数。本文给出了缺失的证明。

2 主要结果

命题。对于每个 $\rho \in [-1, 1]$，由公式 (3)-(4) 描述的相关与运算 $f_\rho(a, b)$ 是一个 Copula。

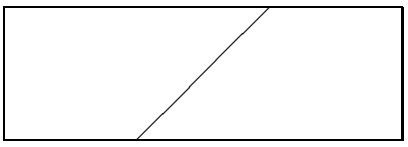
证明。
1°。众所周知，所需不等式具有以下性质——如果将盒 $[\underline{a}, \overline{a}] \times [\underline{b}, \overline{b}]$ 表示为若干子盒的并集，那么所需不等式左端等于各子盒对应的左端之和。

事实上，容易验证，可加性如下：对于由若干子盒组成的每个盒，与较大盒对应的不等式 (4a) 左端，等于各子盒对应的表达式 (4a) 之和。因此，如果与各子盒对应的表达式均非负，那么与较大盒对应的表达式 (4a) 也非负。

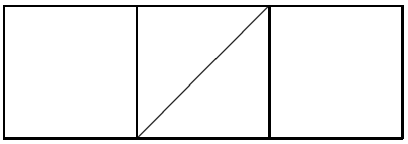
一般来说，公式（4）所描述的与运算有三种不同的表达式。因此，为了证明与此表达式对应的表达式（4a）也非负，我们需要考虑这样的情形：盒子的不同顶点处可能对应不同的表达式。好消息是，每个顶点对应不同表达式的盒子，都可以表示为若干子盒的并集，其中：

- 要么所有顶点都对应同一个表达式
- 要么有两个顶点位于不同表达式对应区域之间的边界上。

从图示中很容易看出这一点：下图中的盒子里，斜线表示不同表达式对应区域之间的边界



可以表示为具有所需性质的子盒的并集：



因此，要证明我们的与运算是 Copula，只需考虑以下类型的盒子：

- 四个顶点都属于同一区域的盒子，以及
- 两个顶点属于两个区域之间边界的盒子 .

函数 $\max(a+b-1, 0)$ 和 $\min(a, b)$ 已知是 Copula，因此，如果四个顶点都属于其中一个区域，那么所需不等式 (4a) 就成立。因此，只需考虑：

- 四个顶点都属于新区域的盒子，在该区域中，与运算由表达式 (1) 描述；我们将在此证明的第2–4部分中考虑这类盒子，以及
- 两个顶点属于两个区域之间边界的盒子；将在证明接下来的部分中考虑这些盒子。

2°。我们先考虑四个顶点都属于与运算由公式（1）描述的区域的盒子。

众所周知 [1] ——并且很容易通过考察无穷小差分$\overline{x}-\underline{x}$和 $\overline{y}-\underline{y}$——证明，对于光滑函数，所需不等式等价于偏导数

$$\frac{\partial C}{\partial a}$$

关于 b是非递减的；换言之，等价地，混合偏导数非负：

$$d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 C}{\partial a\, \partial b} \geq 0.$$

因此，要证明 $f_\rho(a, b)$是一个Copula，只需证明在应用新公式的所有位置，其混合偏导数均非负。

事实上，在应用公式（1）的各点处，$f_\rho(a, b)$关于 a 的导数具有如下形式

$$\frac{\partial f_\rho}{\partial a} = b + \rho \cdot \frac{1-2\cdot a}{2\cdot\sqrt{a\cdot(1-a)}} \cdot \sqrt{b\cdot(1-b)}, \tag{4b}$$

因此，混合偏导数具有以下形式：

$$d = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial f_\rho}{\partial a}\right) = 1 + \rho \cdot \frac{(1-2\cdot a)\cdot(1-2\cdot b)}{4\cdot\sqrt{a\cdot(1-a)\cdot b\cdot(1-b)}}. \tag{5}$$

由于交换 a 和 b 不会改变表达式 (1)，因此只需考虑 $a \leq b$ 的情形。

当 $\rho = 0$ 时，我们得到一个已知的 Copula $f_0(a, b) = a \cdot b$。因此，只需考虑 $\rho \neq 0$ 的情形。这可能发生在 $\rho > 0$ 和 $\rho < 0$ 时。我们逐一考虑这些情形。

3°。我们先考虑 $\rho >$ 的情形 $0.$

在这种情形下，由于 $a \leq b$，我们有 $\min(a, b) = a$，因此该条件可写为 (4)

$$a \cdot b + \rho \cdot \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)} \leq a, \tag{6}$$

即，等价地，

$$\rho \cdot \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)} \leq a - a \cdot b = a \cdot (1-b) \tag{7}$$

因此，

$$\rho \leq \frac{a \cdot (1-b)}{\sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)}} = \frac{\sqrt{a \cdot (1-b)}}{\sqrt{(1-a) \cdot b}}. \tag{8}$$

对于所有这样的 ρ，我们需要证明表达式 (5) 非负。

当 a 和 b 都大于 0.5，或都小于 0.5 时，差值 $1 - 2a$ 和 $1 - 2b$ 具有相同的符号，因此它们的乘积为非负，表达式 (5) 也为非负。因此，唯一需要检查 $d \geq 0$ 的情形是：两个值 a 和 b 中的一个小于 0.5，而另一个大于 0.5。由于 $a \leq 0.5$，这意味着 $a < 0.5 < b$。在此情形下，条件 $d \geq 0$ 可写为

$$1 - \rho \cdot \frac{(1 - 2 \cdot a) \cdot (2 \cdot b - 1)}{4 \cdot \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)}} \geq 0, \tag{9}$$

即，等价地，

$$\rho \cdot \frac{(1 - 2 \cdot a) \cdot (2 \cdot b - 1)}{4 \cdot \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)}} \leq 1, \tag{10}$$

and

$$\rho \leq \frac{4 \cdot \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)}}{(1 - 2 \cdot a) \cdot (2 \cdot b - 1)}. \tag{11}$$

因此，要证明我们总有 $d \geq 0$，就需要证明每个满足不等式 (8) 的 ρ 也满足不等式 (11)。显然，如果某个值 ρ 满足不等式 (11)，那么任何更小的值 ρ 也满足这个不等式。因此，要证明所需推论，只需检验满足不等式 (8) 的最大可能值 ρ 是否满足不等式 (11)，也就是说，检验等于不等式 (8) 右端的值 ρ。对于这个 ρ，所需不等式 (11) 可写为

$$\frac{\sqrt{a \cdot (1-b)}}{\sqrt{(1-a) \cdot b}} \leq \frac{4 \cdot \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)}}{(1 - 2 \cdot a) \cdot (2 \cdot b - 1)}. \tag{12}$$

两边同时除以 $\sqrt{a \cdot (1-b)}$，得到一个等价不等式

$$\frac{1}{\sqrt{(1-a)\cdot b}} \le \frac{4\cdot\sqrt{(1-a)\cdot b}}{(1-2\cdot a)\cdot(2\cdot b-1)}. \tag{13}$$

将两边同时乘以两个分母，得到以下等价不等式：

$$(1-2\cdot a)\cdot(2\cdot b-1) \le 4\cdot(1-a)\cdot b. \tag{14}$$

展开括号后，这个不等式可写成等价形式

$$2\cdot b-4\cdot a\cdot b-1+2\cdot a \le 4\cdot b-4\cdot a\cdot b, \tag{15}$$

也就是说，两边加上 $4\cdot a\cdot b-2\cdot b$ 后，得到形式

$$-1+2\cdot a \le 2\cdot b. \tag{16}$$

我们考虑 $a \le b$ 的情形——因为正如前面提到的，只需考虑这种情形。因此，等价不等式 (12) 也成立，所以当 $\rho > 0$ 时，确实有 $d \ge 0$。

4°。要完成证明，现在只需考虑 $\rho < 0$ 的情形。

在这种情形下，如果 a 和 b 中一个小于 0.5，另一个大于 0.5，那么差值 $1-2\cdot a$ 和 $1-2\cdot b$ 的符号不同，因此表达式 (5) 中 d 的右侧大于 1，因而非负。所以，只需考虑以下情形：

- 或者 a 和 b 都大于 0.5
- 或者 a 和 b 都小于 0.5。

我们逐一考虑这两种情形。

4.1°。我们先考虑 $a > 0.5$ 和 $b > 0.5$的情形。

在这种情形下，$a+b-1>0$，因此不等式 (4) 可写为

$$a\cdot b+\rho\cdot\sqrt{a\cdot(1-a)\cdot b\cdot(1-b)} \ge a+b-1, \tag{17}$$

即，等价地，

$$|\rho|\cdot\sqrt{a\cdot(1-a)\cdot b\cdot(1-b)} \le a\cdot b-a-b+1=(1-a)\cdot(1-b), \tag{18}$$

或者说

$$|\rho| \le \frac{(1-a)\cdot(1-b)}{\sqrt{a\cdot(1-a)\cdot b\cdot(1-b)}} = \frac{\sqrt{(1-a)\cdot(1-b)}}{\sqrt{a\cdot b}}. \tag{19}$$

在这种情形下，$d \ge 0$ 值 (5) 非负这一条件可表示为

$$1-|\rho|\cdot\frac{(2\cdot a-1)\cdot(2\cdot b-1)}{4\cdot\sqrt{a\cdot(1-a)\cdot b\cdot(1-b)}}, \tag{20}$$

也就是说，等价地，

$$|\rho| \cdot \frac{(2 \cdot a - 1) \cdot (2 \cdot b - 1)}{4 \cdot \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)}} \leq 1 \tag{21}$$

and

$$|\rho| \leq \frac{4 \cdot \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)}}{(2 \cdot a - 1) \cdot (2 \cdot b - 1)}. \tag{22}$$

与 $\rho > 0$ 的情形类似，要验证所有满足不等式（19）的 $|\rho|$ 也满足不等式（22），只需验证满足不等式（19）的最大可能值 $|\rho|$ 满足不等式（22），也就是说，

$$\frac{\sqrt{(1-a) \cdot (1-b)}}{\sqrt{a \cdot b}} \leq \frac{4 \cdot \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)}}{(2 \cdot a - 1) \cdot (2 \cdot b - 1)}. \tag{23}$$

将两边同时除以 $\sqrt{(1-a) \cdot (1-b)}$，得到以下等价不等式

$$\frac{1}{\sqrt{a \cdot b}} \leq \frac{4 \cdot \sqrt{a \cdot b}}{(2 \cdot a - 1) \cdot (2 \cdot b - 1)}. \tag{24}$$

将两边同时乘以两个分母，得到以下等价不等式

$$(2 \cdot a - 1) \cdot (2 \cdot b - 1) \leq 4 \cdot a \cdot b. \tag{25}$$

展开括号，得到

$$4 \cdot a \cdot b - 2 \cdot a - 2 \cdot b + 1 \leq 4 \cdot a \cdot b. \tag{26}$$

两边同时加上 $2 \cdot a + 2 \cdot b - 4 \cdot a \cdot b$，得到一个等价不等式

$$1 \leq 2 \cdot a + 2 \cdot b, \tag{27}$$

由于我们考虑的是 $a + b > 1$ 的情形，因此该式成立。所以，在这种情形下，我们确实有 $d \geq 0$。

4.2°。现在我们来考虑 $a < 0.5$ 和 $b < 0.5$ 的情形。

在这种情形下，$a + b - 1 < 0$，因此不等式 (4) 的形式为

$$a \cdot b + \rho \cdot \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)} \geq 0, \tag{28}$$

也就是说，等价地，

$$|\rho| \cdot \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)} \leq a \cdot b, \tag{29}$$

或者该

$$|\rho| \leq \frac{a \cdot b}{\sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)}} = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt{(1-a) \cdot (1-b)}}. \tag{30}$$

在这种情形下，条件 $d \geq 0$ 即值 (5) 为非负的条件，形式为

$$1 - |\rho| \cdot \frac{(1-2\cdot a)\cdot(1-2\cdot b)}{4\cdot\sqrt{a\cdot(1-a)\cdot b\cdot(1-b)}}, \tag{31}$$

也就是说，等价地，

$$|\rho| \cdot \frac{(1-2\cdot a)\cdot(1-2\cdot b)}{4\cdot\sqrt{a\cdot(1-a)\cdot b\cdot(1-b)}} \leq 1 \tag{32}$$

and

$$|\rho| \leq \frac{4\cdot\sqrt{a\cdot(1-a)\cdot b\cdot(1-b)}}{(1-2\cdot a)\cdot(1-2\cdot b)}. \tag{33}$$

与 $\rho > 0$ 的情形和 $a + b > 1$的情形类似，要验证所有$|\rho|$ 满足不等式 (30) 的值也满足不等式 (33)，只需验证满足不等式 (30) 的最大可能值 $|\rho|$ 满足不等式 (33)，也就是说，

$$\frac{\sqrt{a\cdot b}}{\sqrt{(1-a)\cdot(1-b)}} \leq \frac{4\cdot\sqrt{a\cdot(1-a)\cdot b\cdot(1-b)}}{(1-2\cdot a)\cdot(1-2\cdot b)}. \tag{34}$$

如果将两边都除以 $\sqrt{a\cdot b}$，就得到以下等价不等式

$$\frac{1}{\sqrt{(1-a)\cdot(1-b)}} \leq \frac{4\cdot\sqrt{(1-a)\cdot(1-b)}}{(1-2\cdot a)\cdot(1-2\cdot b)}. \tag{35}$$

将两边同时乘以两个分母，就得到以下等价不等式

$$(1-2\cdot a)\cdot(1-2\cdot b) \leq 4\cdot(1-a)\cdot(1-b). \tag{36}$$

展开括号，得到

$$1 - 2\cdot a - 2\cdot b + 4\cdot a\cdot b \leq 4 - 4\cdot a - 4\cdot b + 4\cdot a\cdot b. \tag{37}$$

在两边都加上 $4\cdot a + 4\cdot b - 4\cdot a\cdot b - 1$，得到一个等价不等式

$$2\cdot a + 2\cdot b \leq 3, \tag{38}$$

这是成立的，因为我们考虑的是 $a + b < 1$ 的情形。因此，在这种情形下，我们确实有 $d \geq 0$。

在所有满足 $d \geq 0$ 的情形下，因此，与运算 $f_\rho(a, b)$ 确实是一个 Copula。因此，对于四个顶点都属于表达式 (1) 所描述区域的盒子，不等式 (4a) 总是成立。

5°。现在考虑两个顶点位于两个区域之间边界上的盒子。首先，我们考虑 $\rho > 0$ 的情形，然后再考虑 $\rho < 0$ 的情形。

6°。我们先考虑 $\rho > 0$ 的情形。对于这种情形，我们先描述各区域之间的边界。

6.1°。我们来分析公式（4）中列出的三个区域在这种情形下哪些是可能的。

当 $\rho > 0$ 时，我们有

$$a \cdot b + \rho \cdot \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)} \geq a \cdot b,$$

并且，由于已知我们总有 $a \cdot b \geq \max(a + b - 1, 0)$，因此我们有

$$a \cdot b + \rho \cdot \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)} \geq \max(a + b - 1, 0).$$

因此，对于 $\rho > 0$，公式（4）所描述的三种情形中的第一种不可能出现。所以，我们只有两个区域：

- 与运算由公式（1）描述的区域，以及
- 与运算由公式 $\min(a, b)$ 描述的区域。

6.2°。下面我们来描述这两个可能的区域及它们之间的边界。

第一区域由不等式刻画

$$a \cdot b + \rho \cdot \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)} \leq \min(a, b). \tag{39}$$

与证明的前一部分类似，在不失一般性的情况下，我们可以考虑 $a \leq b$ 的情形。在这种情形下，描述第一区域的不等式（39）具有以下形式：

$$a \cdot b + \rho \cdot \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)} \leq a. \tag{40}$$

如果从该不等式两边减去 $a \cdot b$，我们可以得到以下等价不等式：

$$\rho \cdot \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)} \leq a \cdot (1-b). \tag{41}$$

该不等式两边均为非负数，因此对两边取平方即可得到一个等价不等式：

$$\rho^2 \cdot a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b) \leq a^2 \cdot (1-b)^2. \tag{42}$$

当 a 或 b 等于 0 或 1 时，可以通过对 a 和 b 均位于区间（0, 1）内的情形取极限得到。对于这些值，我们可以将不等式两边分别除以正数 a^2、b 和 $1 - b$，从而得到以下等价不等式：

$$\rho^2 \cdot \frac{1-a}{a} \leq \frac{1-b}{b}, \tag{43}$$

也就是说，等价地，

$$\rho^2 \cdot \frac{1-a}{a} \leq \frac{1}{b} - 1. \tag{44}$$

将不等式两边都加上 1，得到

$$\frac{a+\rho^2\cdot(1-a)}{a}\leq\frac{1}{b}, \tag{45}$$

即，等价地，

$$b\leq\frac{a}{a+\rho^2\cdot(1-a)}. \tag{46}$$

该不等式描述第一区域，其中与运算由公式（1）描述。因此，两个区域之间的边界由等式描述

$$b=\frac{a}{a+\rho^2\cdot(1-a)}. \tag{47}$$

注。可以看出，对于 $a=0$ ，我们得到 $b=0$；对于 $a=1$，我们得到 $b=1$。

6.3°。下面证明，对于所有 a，对应的边界值 b 大于或等于 a ——也就是说，对于边界上的所有点（a， b），都有$a\leq b$。

事实上，对于表达式（47），所需不等式 $a\leq b$ 可写为

$$a\leq\frac{a}{a+\rho^2\cdot(1-a)}. \tag{48}$$

如果将两边同时除以 a ，再将两边同时乘以右侧的分母，就得到以下等价不等式

$$a+\rho^2\cdot(1-a)\leq 1. \tag{49}$$

如果我们将所有项移到右边，就得到一个等价不等式

$$0\leq 1-a-\rho^2\cdot(1-a)=(1-\rho^2)\cdot(1-a). \tag{50}$$

这个不等式始终成立，因为 $\rho^2\leq 1$ 和 $a\leq 1$，因此对于所有边界点，我们确实有 $a\leq b$。

6.4°。我们来证明，边界将 b 描述为关于 a的递增函数。

对描述边界的等式 (47) 应用与证明不等式 (43) 和 (46) 等价的相同变换，我们可以得出，等式 (47)等价于

$$\rho^2\cdot\frac{1-a}{a}=\frac{1-b}{b}, \tag{51}$$

即，至

$$\rho^2\cdot\left(\frac{1}{a}-1\right)=\frac{1}{b}-1. \tag{52}$$

左侧随 a 增大而减小，右侧是关于 b 的递减函数。因此，随着 a 增大，左侧减小，右侧也随之减小，从而 b 的值也增大。

6.5°。对于 $\rho = 1$，描述第一区域的条件 (46) 可写为 $b \leq a$。由于我们有 $a \leq b$，这意味着该条件仅在 $a = b$ 时成立。对于这些值，表达式 (4a) 等于

$$a \cdot a + \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot a \cdot (1-a)} = a^2 + a \cdot (1-a) = a^2 + a - a^2 = a = \min(a, b), \tag{53}$$

这意味着我们的与运算始终等于 $\min(a, b)$。已知表达式 $\min(a, b)$ 是一个 Copula。

因此，我们只需证明：当 $\rho < 1$ 时，我们的与运算是一个 Copula。接下来我们将考虑这种情形。

6.6°。下面证明，对于 $\rho < 1$，满足 $a = b$ 的边界点只有那些满足 $a = b = 0$ 和 $a = b = 1$ 的点。

如前所述，点 (0, 0) 和 (1, 1) 是边界点。下面用反证法证明，不存在其他满足 $a = b$ 的边界点。事实上，当 $a = b$ 时，描述边界的等式 (52) 可写为：

$$\rho^2 \cdot \left(\frac{1}{a} - 1\right) = \frac{1}{a} - 1. \tag{54}$$

将等式两边同时除以非零的右边，得到$\rho^2 = 1$。这与我们所考虑的$\rho < 1$ 情形矛盾，因此， $\rho^2 < 1$。这一矛盾表明，其他满足 $a = b$ 的边界点是不可能存在的。

6.7°。边界由一条曲线构成，它与直线 $a = b$ 分离——端点除外。因此，如果我们将范围限制在某个子盒 $[\varepsilon, 1-\varepsilon] \times [\varepsilon, 1-\varepsilon]$内，其中 $\varepsilon > 0$足够小，那么边界曲线就与直线 $a = b$ 分离——这两条线上的点之间存在最小距离 $\delta > 0$ 。因此，如果有一个盒同时包含满足 $a \leq b$ 和满足 $a \geq b$的点，我们就可以将这个盒划分为线性尺寸为 $< \delta/2$ 的子盒，从而确保每个包含满足 $a \leq b$ 的边界点的子盒都不包含任何满足 $a = b$的点——因此，其中只包含满足 $a \leq b$的点。

因此，由于可加性，只需证明满足以下条件的盒子所对应的不等式 (4a)：

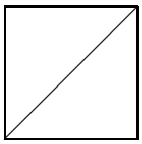
- 两个顶点位于边界上，并且
- 对于这个子矩形中的所有点，我们都有 $a \leq b$ 。

这将使我们能够证明正方形$[\varepsilon, 1-\varepsilon] \times [\varepsilon, 1-\varepsilon]$的所有子矩形都满足不等式 (4a)。对于任意 ε，我们都可以进行证明；因此，在取极限时，也能得到原正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ 中所有子矩形所满足的所需不等式。

那么，假设我们有一个满足以下条件的盒：

- 两个顶点位于边界上，并且
- 对于该盒中的所有点，我们有 $a \le b$。

由于边界描述了 a 的递增函数，相应的盒具有以下形式



因此，在相应的盒中：

- 两个顶点（$\underline{a}$，$\underline{b}$）和（$\overline{a}$，$\overline{b}$）位于边界上，
- 顶点（$\overline{a}$，$\underline{b}$）位于第一区域中，也就是说，对于这个点，我们有表达式（1），并且
- 顶点（$\underline{a}$，$\overline{b}$）位于第二区域中，也就是说，此处 C（$\underline{a}$，$\overline{b}$）$= \min$（$\underline{a}$，$\overline{b}$）。

所需不等式 (4a) 的形式为

$$C(\overline{a},\underline{b}) - C(\underline{a},\underline{b}) \le C(\overline{a},\overline{b}) - C(\underline{a},\overline{b}). \tag{55}$$

点 $(\overline{a},\overline{b})$ 和 $(\underline{a},\overline{b})$ 都位于第二区域，其中 $C(a,b) = \min(a,b)$——更准确地说，后一个点位于边界上，这意味着它也满足条件 $C(a,b) = \min(a,b)$。对于盒中的所有点，$a \le b$，因此我们有

$$C(\overline{a},\overline{b}) - C(\underline{a},\overline{b}) = \min(\overline{a},\overline{b}) - \min(\underline{a},\overline{b}) = \overline{a} - \underline{a}. \tag{56}$$

另一方面，对于公式 (55) 左侧的差，我们有

$$C(\overline{a},\underline{b}) - C(\underline{a},\underline{b}) = \int_{\underline{a}}^{\overline{a}} \frac{\partial C}{\partial a}\, da. \tag{57}$$

因此，如果我们证明偏导数 $\partial C/\partial a$始终小于或等于 1，就可以得出

$$C(\overline{a},\underline{b}) - C(\underline{a},\underline{b}) = \int_{\underline{a}}^{\overline{a}} 1\, da = \overline{a} - \underline{a}, \tag{58}$$

也就是说，这恰好就是所需不等式 (55)。

对于点（$\overline{a},\underline{b}$）和（$\underline{a},\underline{b}$），以及连接这两点的区间中的各点，表达式 $C(a,b)$ 可由公式（1）表示。因此，$C(a,b)$ 关于 a 的偏导数可由公式（4b）表示。因此，不等式

$$\frac{\partial C}{\partial a}(a,b) \le 1, \tag{59}$$

可写成

$$b+\rho\cdot\frac{1-2\cdot a}{2\cdot\sqrt{a\cdot(1-a)}}\cdot\sqrt{b\cdot(1-b)}\le 1. \tag{60}$$

从（60）的两边减去 b，得到一个等价不等式

$$\rho\cdot\frac{1-2\cdot a}{2\cdot\sqrt{a\cdot(1-a)}}\cdot\sqrt{b\cdot(1-b)}\le 1-b. \tag{61}$$

为了分离变量，我们可以将两边除以$\sqrt{b\cdot(1-b)}$，于是得到一个等价不等式

$$\rho\cdot\frac{1-2\cdot a}{2\cdot\sqrt{a\cdot(1-a)}}\le\sqrt{\frac{1-b}{b}}. \tag{62}$$

对不等式（46）的两边开平方，我们得出：

$$\rho\cdot\sqrt{\frac{1-a}{a}}\le\sqrt{\frac{1-b}{b}}. \tag{63}$$

因此，如果我们证明不等式（62）左边小于或等于不等式（63）左边，即证明

$$\rho\cdot\frac{1-2\cdot a}{2\cdot\sqrt{a\cdot(1-a)}}\le\rho\cdot\sqrt{\frac{1-a}{a}}; \tag{64}$$

这就证明了不等式（62），从而得到了偏导数所需的上界（60）。将不等式（64）的两边除以 ρ，再将两边乘以$2\cdot\sqrt{a\cdot(1-a)}$，即可化简该不等式。于是得到一个等价不等式

$$1-2\cdot a\le 2\cdot(1-a)=2-2\cdot a, \tag{65}$$

这与 $1\le 2$ 等价，因此始终成立。由此，（55）成立，所以对于两个顶点位于边界上的所有盒子，不等式（4a）均成立。

这就完成了 $\rho>0$ 情形下命题的证明。

7°。现在我们来考虑 $\rho<0$ 的情形。对于这种情形，我们先描述各区域之间的边界。

7.1°。我们来分析公式（4）中列出的三个区域在这种情形下哪些是可能的。

当 $\rho<0$ 时，我们有

$$a\cdot b+\rho\cdot\sqrt{a\cdot(1-a)\cdot b\cdot(1-b)}\le a\cdot b,$$

并且由于已知我们总有 $a\cdot b\le\min(a,b)$，因此我们有

$$a\cdot b+\rho\cdot\sqrt{a\cdot(1-a)\cdot b\cdot(1-b)}\le\min(a,b).$$

因此，对于 $\rho<0$，公式（4）所描述的三种情形中的第三种不可能成立。因此，我们只有两个区域：

- 与运算由公式（1）描述的区域，以及
- 与运算由公式描述的区域

$$\max(a+b-1,0).$$

7.2°。我们来描述这两个可能的区域以及它们之间的边界。

第一区域由不等式 $C(a,b) \geq \max(a+b-1,0)$ 表征，换言之，等价地由以下两个不等式表征

$$a \cdot b - |\rho| \cdot \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)} \geq 0 \tag{66}$$

and

$$a \cdot b - |\rho| \cdot \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)} \geq a+b-1. \tag{67}$$

我们来逐一考察这两个不等式。

7.2.1°。(66) 式的不等价于：

$$a \cdot b \geq |\rho| \cdot \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)}. \tag{68}$$

为了分离变量，我们将这个不等式两边同时除以

$$a \cdot \sqrt{b \cdot (1-b)},$$

于是我们得到一个等价不等式

$$\sqrt{\frac{b}{1-b}} \geq |\rho| \cdot \sqrt{\frac{1-a}{a}}. \tag{69}$$

这个不等式两边均非负，因此将两边平方后，我们得到一个等价不等式

$$\frac{b}{1-b} \geq \rho^2 \cdot \frac{1-a}{a}. \tag{70}$$

将两边反转后，我们得到一个等价不等式

$$\frac{1-b}{b} \leq \frac{a}{\rho^2 \cdot (1-a)}, \tag{71}$$

也就是说，等价地，

$$\frac{1}{b} - 1 \leq \frac{a}{\rho^2 \cdot (1-a)}. \tag{72}$$

两边同时加上 1，得到

$$\frac{1}{b} \leq \frac{\rho^2 \cdot (1-a) + a}{\rho^2 \cdot (1-a)}, \tag{73}$$

也就是说，等价地，

$$b \geq \frac{\rho^2 \cdot (1-a)}{\rho^2 \cdot (1-a) + a}. \tag{74}$$

7.2.2°。不等式 (67) 等价于

$$a \cdot b - a - b + 1 \geq |\rho| \cdot \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)}, \tag{75}$$

即，

$$(1-a) \cdot (1-b) \geq |\rho| \cdot \sqrt{a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b)}. \tag{76}$$

为了分离变量，将两边同时除以 $(1-a) \cdot \sqrt{b \cdot (1-b)}$，得到一个等价不等式

$$\sqrt{\frac{1-b}{b}} \geq |\rho| \cdot \sqrt{\frac{a}{1-a}}. \tag{77}$$

这个不等式两边均为非负数，因此两边平方后，得到一个等价不等式

$$\frac{1-b}{b} \geq \rho^2 \cdot \frac{a}{1-a}, \tag{78}$$

即，等价地，

$$\frac{1}{b} - 1 \geq \rho^2 \cdot \frac{a}{1-a}. \tag{79}$$

两边同时加 1，得到

$$\frac{1}{b} \geq \frac{\rho^2 \cdot a + (1-a)}{1-a}, \tag{80}$$

即，等价地，

$$b \leq \frac{1-a}{\rho^2 \cdot a + (1-a)}. \tag{81}$$

7.2.3°。结合不等式（74）和（81），我们得到以下区域描述：与运算由公式（1）定义：

$$\frac{\rho^2 \cdot (1-a)}{\rho^2 \cdot (1-a) + a} \leq b \leq \frac{1-a}{\rho^2 \cdot a + (1-a)}. \tag{82}$$

因此，两个区域之间的边界由以下两条曲线组成：

$$b = \frac{\rho^2 \cdot (1-a)}{\rho^2 \cdot (1-a) + a} \tag{83}$$

and

$$b = \frac{1-a}{\rho^2 \cdot a + (1-a)}. \tag{84}$$

7.3°。让我们证明：

- 曲线 (83) 位于 $a+b\leq 1$ 所在的区域内，并且
- 曲线 (84) 位于满足 $a+b\geq 1$ 的区域内。

7.3.1°。我们先证明，对于公式 (83) 所描述的每个值 b ，都有 $a+b\leq 1$。

我们需要证明不等式

$$a+\frac{\rho^2\cdot(1-a)}{\rho^2\cdot(1-a)+a}\leq 1. \tag{85}$$

两边同时减去 a ，得到一个等价不等式

$$\frac{\rho^2\cdot(1-a)}{\rho^2\cdot(1-a)+a}\leq 1-a. \tag{86}$$

两边同时除以 $1-a$ ，并同时乘以左边的分母，得到以下等价不等式:

$$\rho^2\leq \rho^2\cdot(1-a)+a=\rho^2+(1-\rho^2)\cdot a, \tag{87}$$

显然，这总是成立的，因为 $\rho^2\leq 1$ 且 $a\geq 0$。命题得证。

7.3.2°。现在我们来证明，对于公式 (84) 所描述的每个值 b ，都有 $a+b\geq 1$。

我们需要证明不等式

$$a+\frac{1-a}{\rho^2\cdot a+(1-a)}\geq 1. \tag{88}$$

两边减去 a ，得到一个等价不等式

$$\frac{1-a}{\rho^2\cdot a+(1-a)}\geq 1-a. \tag{89}$$

两边除以 $1-a$ ，再乘以左边分母，得到以下等价不等式:

$$1\geq \rho^2\leq a+(1-a)=1-(1-\rho^2)\cdot a, \tag{90}$$

这当然总是成立的。命题得证。

7.4°。与本证明的第6部分类似，只需证明对于两个顶点位于边界上且满足以下条件的盒子，不等式 (4a) 成立:

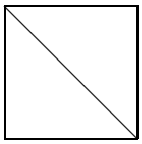
- 或者，对于盒中的所有点，我们都有 $a+b\leq 1$ ，
- 或者，对于盒中的所有点，我们都有 $a+b\geq 1$ 。

让我们逐一考虑边界的两个部分。

7.4.1°。我们先考虑对于盒中的所有点都有 $a+b\le 1$ 的情形。在这种情形下，边界的相应部分由公式 (83) 描述。将此表达式改写为等价形式

$$b=\frac{1}{1+\dfrac{a}{\rho^2\cdot(1-a)}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{\rho^2}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}-1}}, \tag{91}$$

我们可以看到，b 是 a 的递减函数。因此，相应的盒具有以下形式



因此，在相应的盒中：

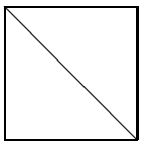
- 两个顶点 $(\underline{a},\overline{b})$ 和 $(\overline{a},\underline{b})$ 位于边界上，
- 顶点 $(\overline{a},\overline{b})$ 位于第一区域，即对于该点，我们有表达式 (1)，并且
- 顶点 $(\underline{a},\underline{b})$ 位于第二区域，即此处 $C(\underline{a},\overline{b})=\max(\underline{a}+\underline{b}-1,0)$。

因此，对于三个顶点，我们有 $C(a,b)=\max(a+b-1,0)$。由于盒中的所有点都满足 $a+b\le 1$，这意味着，对于三个顶点，我们有 $C(a,b)=0$。在这种情形下，不等式 (4a) 显然成立。

7.4.2°。现在考虑对于盒中的所有点都有 $a+b\ge 1$ 的情形。在这种情形下，相应的边界部分由公式 (84) 描述。将该表达式改写为等价形式

$$b=\frac{1}{1+\rho^2\cdot\dfrac{a}{1-a}}=\frac{1}{1+\rho^2\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}-1}}, \tag{91}$$

我们可以看到，b 也是 a的减函数。因此，相应的盒与情形 $a+b\le 1$中的形式相同：



因此，在相应的盒中：

- 两个顶点（$\underline{a}$，$\overline{b}$）和（$\overline{a}$，$\underline{b}$）位于边界上，
- 顶点（$\underline{a}$，$\underline{b}$）位于第一区域，也就是说，对于该点，我们有表达式（1），并且
- 顶点（$\overline{a}$，$\overline{b}$）位于第二区域，也就是说，此处 $C(\underline{a}, \overline{b}) = \max(\underline{a}+\underline{b}-1, 0)$。

与证明的第6部分类似，我们可以证明：如果相应的偏导数小于或等于 1，则所需不等式（4a）成立，即

$$\frac{\partial C}{\partial a} = b - |\rho| \cdot \frac{1-2\cdot a}{2\cdot\sqrt{a\cdot(1-a)}} \cdot \sqrt{b\cdot(1-b)} \le 1. \tag{92}$$

从两边减去 b，得到一个等价不等式

$$-|\rho| \cdot \frac{1-2\cdot a}{2\cdot\sqrt{a\cdot(1-a)}} \cdot \sqrt{b\cdot(1-b)} \le 1-b. \tag{93}$$

如果两边都除以 $\sqrt{b\cdot(1-b)}$，就可以分离变量，从而得到一个等价不等式

$$-|\rho| \cdot \frac{1-2\cdot a}{2\cdot\sqrt{a\cdot(1-a)}} \le \sqrt{\frac{1-b}{b}}. \tag{94}$$

我们知道右侧表达式的一个下界——它由不等式（77）给出。因此，要证明不等式（94），只需证明公式（94）的左侧小于或等于这个下界，即证明

$$-|\rho| \cdot \frac{1-2\cdot a}{2\cdot\sqrt{a\cdot(1-a)}} \le |\rho| \cdot \sqrt{\frac{a}{1-a}}. \tag{95}$$

我们来证明这个不等式。将（95）的两边除以 $|\rho|$ 并将两边乘以 $2\cdot\sqrt{a\cdot(1-a)}$，得到一个等价不等式 $-(1-2\cdot a) \le 2\cdot a$，即 $2\cdot a - 1 \le 2\cdot a$，而这总是成立的。因此，不等式（94）成立，从而不等式（92）也成立，因此，在这种情形下，描述 Copula 的不等式（4a）也成立。

8°。我们已经考虑了所有可能的情形，并且在所有这些情形下都证明了定义 Copula 的不等式（4a）成立。因此，我们的与运算确实是一个 Copula。命题得证。

致谢

本研究部分由英国工程与自然科学研究委员会以及利物浦大学风险与不确定性博士培训中心（EP/L015927/1）资助，该中心设立于风险与

不确定性研究所。本研究是在 EUROfusion联盟框架内开展的，该联盟由欧盟通过欧原子能研究与培训计划资助（拨款协议编号：101052200 - EUROfusion）。

然而，文中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧盟委员会的观点。欧盟和欧盟委员会均不对这些观点和意见承担责任。

V.K.获得了美国国家科学基金会部分资助，包括项目1623190（为新一代计算机科学专业实践人才培养做好变革准备的模型）以及HRD-1834620和HRD-2034030（CAHSI Inclusiveness计划）；此外还获得了AT&T信息技术奖学金的资助。他还获得了伏尔加联邦区科学教育数学中心发展计划的资助，项目编号为075-02-2020-1478，并获得了匈牙利国家研究、发展与创新办公室（NRDI）的资助。

参考文献

[1] F. Durante和P. Jaworski，《二元联结函数的新刻画》，《统计通讯——理论与方法》，2010年，第39卷，第16期，第2901–2912页。[2] M. Fr´echet，《全概率定理的推广》，《数学基础》，1935年，第1卷（第25期），第379–387页。[3] D. J. Lucas，《违约相关性与信用分析》，《固定收益杂志》，1995年，第4卷，第4期，第76–87页。[4] E. Miralles-Dolz、A. Gray、E. Patelli和S. Ferson，《不确定性逻辑的相关布尔算子》，载于：D. Ciucci等人（编），《2022年不确定性处理与管理国际会议论文集》（IPMU’2022），意大利米兰，2022年7月11日至15日，施普林格，2022年，第798–811页。[5] R. B. Nelsen，《联结函数导论》，施普林格，纽约，2007年。[6] B. Schweizer和A. Sklar，《概率度量空间》，Courier Corporation，2011年。