arXiv:2301.05529v3 [math.DS] 5 Mar 2024

Koopman算子框架下切换非线性系统的一致全局稳定性*

CHRISTIAN MUGISHO ZAGABE† 和ALEXANDRE MAUROY ‡

摘要。本文为切换非线性系统的全局一致稳定性这一开放问题提供了一种新颖的解决方案。我们的结果基于Koopman 算子方法；据我们所知，这是在该框架下针对这一开放问题的首个理论贡献。通过研究多圆盘（或实超立方体）上 Hardy 空间中的 Koopman 生成元的伴随算子，我们定义了等价的线性（但无限维）切换系统，并在由线性化向量场生成的李代数满足可解性条件的前提下，为这些系统构造了公共李雅普诺夫泛函。利用 Hardy 空间的再生核性质，可由该李雅普诺夫泛函推导出原始切换非线性系统的公共李雅普诺夫函数。我们证明，该李雅普诺夫函数在状态空间的有界区域内收敛，从而证明了特定切换非线性系统在有界不变集上的全局一致稳定性。

关键词。Koopman算子、多圆盘上的 Hardy 空间、切换系统、一致稳定性、公共李雅普诺夫函数。

AMS 分类号。47B32, 47B33, 47D06, 70K20, 93C10, 93D05。

1. 引言。切换系统是一类混合型模型，常见于动力学会从一种行为突然跳变为另一种行为的应用场景。它们通常由一族子系统描述，这些子系统按照给定的切换律交替运行。切换系统的稳定性一直是研究的热点（综述见 [37] ）。在此背景下，一个自然的问题是：具有平衡点的切换系统是否一致稳定，即对于任意切换律都稳定？事实证明，一致稳定性问题颇具反直觉性，也颇具挑战。在线性情形中，众所周知，稳定子系统可能导致切换系统不稳定。然而，如果与子系统相关的矩阵均为稳定矩阵且两两可交换，则可保证一致稳定性 [24], ；这一结果在 [15] 中推广至由生成可解李代数的稳定矩阵描述的子系统。后一结果可以由矩阵可解李代数与这些矩阵存在公共不变旗这一众所周知的等价关系来解释；这使得我们能够为这些子系统构造公共李雅普诺夫函数 [40]。

对于切换非线性系统， [12] 提出了一个开放问题，探讨向量场的李代数条件与全局一致稳定性的相关性。在这一背景下，人们提出了一些部分解答。 [17] 证明，若各向量场分别稳定且彼此可交换，则系统一致稳定，此时可以构造一个公共李雅普诺夫函数 [35, 39]。此外，对于生成三阶幂零李代数的一对向量场 [34]，以及某些特定的 r阶幂零李代数 [18]，也证明了系统具有一致稳定性。然而，目前尚无结果仅依赖于子系统向量场所生成李代数的更一般的可解性。关于这一开放问题的历史回顾，见 [14] 。

*提交给编辑

†那慕尔大学数学系及那慕尔复杂系统研究所（naXys）（christian.mugisho@unamur.be），

‡那慕尔大学数学系及那慕尔复杂系统研究所（naXys）（alexandre.mauroy@unamur.be）

本文通过证明在李代数满足一般可解性条件时切换非线性系统的全局一致稳定性结果，对 [12] 中提出的问题给出了部分解答。为此，我们采用Koopman算子框架 [2, 20]：我们不再采用对动力系统的经典逐点描述，而是转而考察可观测函数的演化。首先假设这些函数属于一般的再生核希尔伯特空间，随后则假设它们属于定义在复多圆盘或实超立方体上的全纯函数的 Hardy 空间。这一方法与此前研究定义在这些空间上的 Koopman算子的工作 [8, 26, 28, 27]相关。在这一框架下，线性 Koopman 生成元生成等价的无限维动力学，因此非线性系统可表示为 Koopman线性系统，从而便于进行全局稳定性分析 [19]。具体而言，基于 [40], 中得到的初步结果，我们为切换 Koopman线性系统构造了一个公共李雅普诺夫泛函。关键在于考察 Koopman 生成元的伴随算子，并注意到：如果子系统的线性部分生成一个可解李代数，那么这些算子就具有公共不变极大旗；这一条件比 [12]中提出的原始假设更宽松。最后，我们为原始切换非线性系统构造了一个以收敛无穷级数形式表示的公共李雅普诺夫函数。由此可以得到单位多圆盘内的一个有界不变区域，在该区域内切换非线性系统全局一致渐近稳定。此外，公共李雅普诺夫函数级数可以截断，并作为候选公共李雅普诺夫函数，从而有望将吸引域的近似范围扩展到多圆盘之外。据我们所知，这是首次在Koopman算子框架内为一个开放的理论问题提出新解。

本文其余部分安排如下。在第2节，我们介绍切换非线性系统一致稳定性的一些预备概念，并概述 Koopman 算子框架，以及解析函数再生核希尔伯特空间的一些具体性质，特别是多圆盘（或实超立方体）上的（加权）Hardy 空间。在第3节，我们陈述并证明主要结果。我们将 [12] 中提出的开放问题改写为关于不变极大旗是否存在的问题，并构造性地证明公共李雅普诺夫函数的存在性。此外，我们还给出若干推论，着重讨论特定类别的向量场。第4节通过两个示例阐释主要结果。最后，第5节给出总结性评论和展望。

符号。本文通篇使用以下符号。对于多重指标记号 $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$，定义 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ 和$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$。复数 a 的复共轭和实部分别记为 $\bar{a}$ 和 $\Re(a)$。矩阵（或向量） A 的共轭转置记为 $A^\dagger$。向量场 F 在 x 处的雅可比矩阵为 $JF(x)$。以 0 为中心、半径为 ρ 的复多圆盘定义为

$$\mathbb{D}^n(\rho) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| < \rho, \cdots, |z_n| < \rho\}.$$

以 0 为中心、边长为 2ρ 的实超立方体定义为

$$\mathbb{X}^n(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| < \rho, \cdots, |x_n| < \rho\}.$$

特别地， $\mathbb{D}^n$ （分别为 $\mathbb{X}^n$）表示单位多圆盘（即 $\rho = 1$）和单位超立方体，而 $\partial\mathbb{D}^n$ （分别为 $\partial\mathbb{X}^n$）表示它们的边界。同理，

$$\mathbb{B}^n(\rho) = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < \rho\}$$

表示以 0 为中心、半径为 ρ 的球。特别地， $\mathbb{B}^n$ 表示单位球。最后，实数的下取整函数记为 $\lfloor x \rfloor$。

2. 预备知识。本节介绍切换系统稳定性理论及 Koopman 算子框架的相关预备概念和结果。

2.1. 切换系统的稳定性。我们重点关注切换系统的一致渐近稳定性，以及公共李雅普诺夫函数的存在性。本文分别在线性情形和非线性情形下介绍了关联这两个主要概念的一些已有结果。

DEFINITION 2.1（切换系统）。切换系统 $\dot{x} = F^{(\sigma)}(x)$ 是由一组（有限个）子系统构成的集合

$$\left\{\dot{x} = F^{(i)}(x),\, x \in X \subset \mathbb{R}^n\right\}_{i=1}^{m} \tag{2.1}$$

并与切换律 $\sigma\colon\ \mathbb{R}^+ \to \{1, \cdots, m\}$ 相关联，该切换律指明在给定时刻激活哪个子系统。

在本文中，我们作出以下基本假设。

ASSUMPTION 1。切换律 σ 是分段常值函数，且在每个有界时间区间内只有有限个不连续点（例如参见 *[11]*）。

ASSUMPTION 2。向量场 $F^{(i)}$ 在 X 上存在唯一的双曲稳定平衡点 $x_e = 0 \in X$ （不失一般性），即 $F^{(i)}(x_e) = 0$，且雅可比矩阵 $JF^{(i)}(x_e)$ 的特征值 $\tilde{\lambda}_j^{(i)}$ 满足 $\Re\left(\tilde{\lambda}_j^{(i)}\right) < 0$。

2.1.1. 一致稳定性。根据 [16], ，切换系统的稳定性分析围绕三个重要问题展开:

- 判断在任意 切换律 σ作用下，平衡点是否稳定；若是，则称该平衡点一致稳定，
- 确定使平衡点稳定的切换律，并且
- 构造使平衡点稳定的切换律。

本文关注与一致稳定性相关的第一个问题。

DEFINITION 2.2（一致稳定性）。假设对于所有 $i = 1, \ldots, m,\ F^{(i)}(x_e) = 0$ 成立。平衡点 $x_e = 0$ 是

- 一致渐近稳定（*UAS*），若 $\forall \epsilon > 0,\, \exists \delta > 0$ 存在使得

$$\|x(0) - x_e\| \le \delta \ \Rightarrow\ \|x(t) - x_e\| \le \epsilon,\ \forall t > 0,\, \forall \sigma$$

并且 $\forall \epsilon > 0,\, \exists \delta > 0, T > 0$ 使得

$$\|x(0) - x_e\| \le \delta,\, t > T \Rightarrow \|x(t) - x_e\| \le \epsilon,\, \forall \sigma,$$

- 全局一致渐近稳定 （*GUAS*）于 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 当它是一致渐近稳定且 $\forall \epsilon > 0,\, \exists T > 0$ 使得

$$x(0) \in X,\, t > T \Rightarrow \|x(t) - x_e\| \le \epsilon,\, \forall \sigma,$$

- 全局一致指数稳定 （*GUES*）于 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 若 $\exists \beta,\ \lambda > 0$ 使得

$$x(0) \in X \Rightarrow \|x(t) - x_e\| \leq \beta \|x(0) - x_e\| e^{-\lambda t},\ \forall t > 0, \forall \sigma.$$

根据此定义，各子系统具有一个公共平衡点。此外，一个必要条件是，该平衡点相对于所有单个子系统的动力学都渐近稳定。然而，这一条件并不充分，因为对于某个特定的切换律，切换系统可能不稳定。保证一致渐近稳定的一个充分条件是存在一个公共李雅普诺夫函数 （控制李雅普诺夫函数）。

Definition 2.3（公共李雅普诺夫函数 [11]）。正 $\mathcal{C}^1$函数 $V\colon\ X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 若公共李雅普诺夫函数在 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 上对由子系统（*2.1*）构成的族成立，则

$$\nabla V \cdot F^{(i)}(x) < 0 \quad \forall x \in X \setminus \{x_e\}, \quad \forall i = 1, \ldots, m.$$

对于具有有限个子系统的切换系统，逆李雅普诺夫结果也成立（[11], [17]）。

Theorem 2.4（[17]）。假设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 是紧集，并且相对于子系统（*2.1*）所诱导的流正向不变。切换系统（*2.1*）在 X 上全局一致渐近稳定，当且仅当所有子系统在 X上共享一个控制李雅普诺夫函数。

2.1.2. 线性情形下的李代数条件。 对于切换线性系统 $\{\dot{x} = A^{(i)}x, A^{(i)} \in \mathbb{C}^{n\times n}\}_{i=1}^m$，已有若干与一致稳定性相关的结果（综述请参见 [37]）。本文着重讨论基于李代数条件的具体结果。

令 $\mathfrak{g} = \text{span}\left\{A^{(i)}\right\}_{Lie}$ 表示由矩阵 $A^{(i)}$ 生成的李代数，其中 $i = 1,\ \cdots,\ m$，并赋予李括号 $[A^{(i)}, A^{(j)}] = A^{(i)}A^{(j)} - A^{(j)}A^{(i)}$。

Definition 2.5（可解李代数）。 赋予李括号 $[.,.]$ 的李代数 $\mathfrak{g}$ 称为可解的，如果存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathfrak{g}^k = 0$，其中$\{\mathfrak{g}^j\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ 是由以下方式定义的理想的导出序列:

$$\begin{cases} \mathfrak{g}^1 := \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^{j+1} := \left[\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^j\right]. \end{cases}$$

切换线性系统一致指数（渐近）稳定性的一般李代数判据 of 如下定理给出了切换线性系统的判据。

Theorem 2.6 ([15]). 若所有矩阵 $A^{(i)},\ i = 1, \cdots, m$ 均为稳定矩阵（即其特征值 $\tilde{\lambda}_j^{(i)}$ 满足 $\Re\left(\tilde{\lambda}_j^{(i)}\right) < 0$），且李代数 $\mathfrak{g}$ 可解，则切换线性系统 $\{\dot{x} = A^{(i)}x\}_{i=1}^m$ 为全局一致指数稳定。

如 [23, 36], 所示，该结果可由矩阵 $A^{(i)}$ 的同时三角化推出，这是可解李代数的一个众所周知的性质（参见李定理 A.4 ，附录A）。事实上，该性质等价于复矩阵 存在公共不变旗 [5]。

Definition 2.7（不变旗）。矩阵集合 $\{A^{(i)}\}_{i=1}^m$ 的一个不变极大旗是由子空间 $\{S_j\}_{j=1}^n \subseteq \mathbb{C}^n$ 组成的集合，满足 ***(i)*** $A^{(i)}S_j \subset S_j$ 对所有 i, j均成立，***(ii)*** $\dim(S_j) = j$ 对所有 j均成立，以及 ***(iii)*** $S_j \subset S_{j+1}$ 对所有 $j < n$均成立。

子空间 S_j 可通过标准正交基（$v_1, \cdots, v_n$）来描述，使得S_j = span $\{v_1, \cdots, v_j\}$。注意，向量 v_1 是矩阵 $A^{(i)}$的公共特征向量。该基可用于构造控制李雅普诺夫函数。

PROPOSITION 2.8 ([40]). 设

$$\left\{\dot{x} = A^{(i)}\, x,\ A^{(i)} \in \mathbb{C}^{n\times n},\, x \in \mathbb{C}^n\right\}_{i=1}^{m} \tag{2.2}$$

是一个切换线性系统。假设所有矩阵 $A^{(i)}$ 均稳定，且具有一个公共不变极大旗

$$\{0\} \subset S_1 \subset \cdots \subset S_n = \mathbb{C}^n, \quad S_j = span\{v_1, \ldots, v_j\}.$$

那么存在 $\epsilon_j > 0,\ j = 1, \ldots, n,$ 使得

$$V(x) = \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j |v_j^\dagger x|^2 \tag{2.3}$$

是（2.2）的控制李雅普诺夫函数。

数值 ϵ_j 必须满足条件

$$\epsilon_j > \max_{\substack{i\in\{1,\ldots,m\}\\ k\in\{1,\ldots,j-1\}}} \epsilon_k \frac{(n-1)^2}{4} \frac{\left|v_k^\dagger A^{(i)} v_j\right|^2}{\left|\Re\left(\tilde{\lambda}_j^{(i)}\right)\right|\left|\Re\left(\tilde{\lambda}_k^{(i)}\right)\right|} \tag{2.4}$$

其中， $\tilde{\lambda}_j^{(i)}$ 是 $A^{(i)}$的特征值。它们可以从任意值 $\epsilon_1 > 0$开始迭代求得。[40] 中采用的几何方法提供了一种构造控制李雅普诺夫函数（CLF）的方法；我们将在切换非线性系统的无限维情形中借鉴这一结果。

2.1.3. 非线性情形下的李代数条件。在切换非线性系统中，需要考虑向量场的李代数

$$\mathfrak{g}_F = \operatorname{span}\left\{F^{(i)}, i = 1, \ldots, m\right\}_{\text{Lie}} \tag{2.5}$$

其运算由李括号给出

$$[F^{(i)}, F^{(j)}](x) = JF^{(j)}(x)\, F^{(i)}(x) - JF^{(i)}(x)\, F^{(j)}(x). \tag{2.6}$$

文献 [12] 曾提出猜想，关于（2.5）的李代数条件可用于刻画一致稳定性。文献 [34] 针对三阶幂零李代数部分解决了这一问题，而文献 [18] 则针对特定的 r 阶幂零李代数取得了进展。文献 [40], 基于所谓的 Koopman算子框架给出了初步结果，在基于可解性建立更一般的李代数条件方面又迈进了一步。然而，文献 [40] 所获结果仅适用于可表示为有限维线性系统的特定切换非线性系统。本文在这项初步工作的基础上，进一步运用 Koopman算子框架，获得了刻画切换非线性系统 GUAS 性质的一般条件。

2.2. 动力系统的 Koopman 算子方法。 本节介绍 Koopman算子框架，这是将命题2.8 的结果推广到切换非线性系统的关键。我们将介绍 Koopman 半群及其 Koopman 生成元，在李群的背景下阐述该框架，并描述该算子的有限维近似。

2.2.1. Koopman 算子。 考虑一个连续时间动力系统

$$\dot{x} = F(x), \qquad x \in X \subset \mathbb{R}^n, \quad F \in \mathcal{C}^1 \tag{2.7}$$

它生成流 $\varphi_t : X \to X$，其中 $t \in \mathbb{R}^+$。*Koopman*算子 定义在（Banach）空间 $\mathcal{F}$ 上，并作用于观测函数，即函数 $f : X \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}$。

DEFINITION 2.9（Koopman 半群 [10]）。 *Koopman* 算子半群（简称 *Koopman* 半群）是由线性算子组成的族 $(U_t)_{t\geq 0}$ ， 定义为

$$U_t : \mathcal{D}(U_t) \to \mathcal{F}, \quad U_t f = f \circ \varphi_t$$

其定义域为 $\mathcal{D}(U_t) = \{f \in \mathcal{F} : U_t f \in \mathcal{F}\}$。我们还可以定义相应的 Koopman 生成元。

DEFINITION 2.10（Koopman 生成元 [10]）。与向量场 (2.7) 相关联的 *Koopman* 生成元是线性算子

$$L_F : \mathcal{D}(L_F) \to \mathcal{F}, \quad L_F f := F \cdot \nabla f \tag{2.8}$$

定义域为 $\mathcal{D}(L_F) = \{f \in \mathcal{F} : \ F \cdot \nabla f \in \mathcal{F}\}$。
如下所示（见引理 2.14），Koopman 半群与 Koopman 生成元之间存在直接联系。当 Koopman 半群强连续时[6], 即 $\lim_{t\to 0^+} \|U_t f - f\|_{\mathcal{F}} = 0$，Koopman 生成元就是 $L_F f := \lim_{t\to 0^+} (U_t f - f)/t$的无穷小生成元。由于 Koopman算子 U_t和生成元 L_F 都是线性的，因此我们可以通过线性抽象常微分方程来描述可观测量$f \in \mathcal{D}(L_F)$。

$$\dot{f} = L_F f. \tag{2.9}$$

我们还可以简要讨论 Koopman算子的谱性质。

DEFINITION 2.11（Koopman 特征函数与特征值 [2, 21]）。*Koopman*算子的一个特征函数是满足以下条件的可观测量 $\phi_\lambda \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$

$$L_F \phi_\lambda = \lambda \phi_\lambda.$$

值 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是相应的 *Koopman* 特征值。

$$U_t \phi_\lambda = e^{\lambda t} \phi_\lambda, \quad \forall t \geq 0.$$

对于线性系统 $\dot{x} = Ax$，其中 $x \in \mathbb{R}^n$，我们将 A 的一个特征值记为 λ_j，其对应的左特征向量记为 w_j。那么 λ_j 是一个 Koopman 特征值，其对应的 Koopman 特征函数为 $\phi_{\lambda_j}(x) = w_j^\dagger x$ [22]。对于形式为（2.7）、具有稳定平衡点 x_e的非线性系统，$JF(x_e)$ 的特征值通常是 Koopman 特征值，其对应的特征函数称为主 *Koopman* 特征函数。

2.2.2. 再生核希尔伯特空间上的 Koopman 算子。 从这里开始，我们将在再生核希尔伯特空间（RKHS）上定义 Koopman 算子。对于特定情形，我们将使用多圆盘（或超立方体）上的特定（加权）Hardy 空间。

如需了解更多细节，请读者参阅文献 [8]，该文在一般的再生核希尔伯特空间框架下研究了 Koopman 算子，[26, 28, 27] 该文则在特定的再生核希尔伯特空间上研究了 Koopman 生成元（称为 Liouville 算子）。

DEFINITION 2.12（再生核希尔伯特空间）。定义在集合 X 上的再生核希尔伯特空间（*RKHS*）$\mathcal{H}(X)$ 是一个由从 X 到 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$ 的函数构成的希尔伯特空间，并且对于每个 $x \in X$，线性求值泛函 $E_x\colon \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$，定义为 $E_x(f) = f(x)$，都是有界的。

由此定义可直接推出，对于每个 $x \in X$，存在唯一的 $k_x \in \mathcal{H}(X)$，使得 $E_x(\cdot) = \langle k_x, \cdot \rangle$（Riesz 表示定理）。

DEFINITION 2.13（再生核希尔伯特空间的核）。函数 k_x 称为 x 的再生核（或者稍微滥用术语，称为在 x 处的求值泛函），函数 $k\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$，定义为 $k(x, y) = k_y(x)$，称为 $\mathcal{H}(X)$ 的再生核。

一般再生核希尔伯特空间上的Koopman算子。 为了在再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}(D)$ 上定义Koopman算子，其中 $D \subseteq X$，我们将作出以下假设。

ASSUMPTION 3。

(i) 向量场 F 的分量 F_ℓ、$\ell = 1$、$\cdots$、n 属于 $\mathcal{H}(D)$。*(ii)* 存在 $\mathcal{H}(D)$ 的标准正交基 $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$，使得对所有 $\ell = 1$、$\cdots$、n 以及所有 $k \in \mathbb{N}$，均有 $F_\ell \dfrac{\partial e_k}{\partial z_\ell} \in \mathcal{H}(D)$。*(iii)* 向量场 F 生成一个流，该流将 D 映射到 D（正向不变性）。

若上述假设成立，则可根据定义 2.9 和 2.10定义Koopman 半群 (U_t) 和Koopman 生成元，其中可观测函数空间为 $\mathcal{F} = \mathcal{H}(D)$。虽然我们假设向量场属于$\mathcal{H}(D)$，但不要求它生成的流属于 $\mathcal{H}(D)$。这意味着Koopman 半群可能并未在 $\mathcal{H}(D)$ 上处处有定义。如下面所示，我们只考虑其作用于求值泛函的伴随算子 U_t^*。

现在，我们回顾一些将用于证明结果的重要性质。

LEMMA 2.14（RKHS 上 Koopman算子的基本性质）。设函数 $f \in \mathcal{H}(D)$、再生核希尔伯特空间 $\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$ 上的 $\mathcal{H}(D)$ 标准正交基 k_z以及求值泛函 $z \in D$，且 。假设假设条件 *3* 成立。则

1. $L_F e_k \in \mathcal{H}(D)$ 且定义域 $\mathcal{D}(L_F)$ 在 $\mathcal{H}(D)$ 中稠密，
2. $U_t^* k_z = k_{\varphi_t(z)}$，3. $\dfrac{d}{dt}\langle U_t^* k_z, f\rangle = \langle L_F^* U_t^* k_z, f\rangle$。

—

证明。 1. 对所有 $z \in D$，我们有

$$L_F e_k(z) = F(z) \cdot \nabla e_k(z) = \sum_{\ell=1}^{n} F_\ell(z)\, \frac{\partial e_k(z)}{\partial z_\ell}.$$

由假设3（ii）可知

$$\|L_F e_k\| = \left\| \sum_{\ell=1}^{n} F_\ell \frac{\partial e_k}{\partial z_\ell} \right\| \le \sum_{\ell=1}^{n} \left\| F_\ell \frac{\partial e_k}{\partial z_\ell} \right\| < \infty.$$

此外，由于 $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是完备基， $\mathcal{D}(L_F)$ 在 $\mathcal{H}(D)$ 中稠密。2. 对于所有 $f \in \mathcal{H}(D)$，我们有

$$\langle U_t^* k_z, f\rangle = \langle k_z, U_t f\rangle = (U_t f)(z)$$

and

$$\left\langle k_{\varphi_t(z)}, f\right\rangle = f(\varphi_t(z)) = (U_t f)(z),$$

因此

$$U_t^* k_z = k_{\varphi_t(z)}.$$

3. 对所有 $z \in \mathcal{D}$ 以及所有 $f \in \mathcal{D}(L_F)$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle U_t^* k_z, f\rangle &= \frac{d}{dt}\left\langle k_{\varphi_t(z)}, f\right\rangle \\
&= \frac{d}{dt} f\circ\varphi_t(z) \\
&= F(\varphi_t(z)).\nabla f(\varphi_t(z)) \\
&= \left\langle k_{\varphi_t(z)}, L_F f\right\rangle \\
&= \langle L_F^* U_t^* k_z, f\rangle .
\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{D}(L_F)$ 在 $\mathcal{H}(D)$ 中稠密，因此该结果对所有 f 均成立。 □

在前一个引理中，第二个性质是再生核希尔伯特空间上的复合算子的一个众所周知的性质。第三个性质在强连续半群理论的背景下也已为人所知（参见 [6]）。请注意，如 [31]关于解析函数空间的命题 2 中所述，Koopman 生成元 L_F 仅当向量场 F具有受限形式时才是稠密定义的。在我们的情形中，假设3 (ii) 保证了这一性质。

Koopman 无限矩阵。 由于假设 $\mathcal{H}(D)$ 存在标准正交基，因此它与 l^2 同构，Koopman 生成元可以表示为 Koopman 无限矩阵

$$\bar{L}_F = \begin{pmatrix}
\langle L_F e_0, e_0\rangle & \langle L_F e_1, e_0\rangle & \langle L_F e_2, e_0\rangle & \langle L_F e_3, e_0\rangle & \cdots \\
\langle L_F e_0, e_1\rangle & \langle L_F e_1, e_1\rangle & \langle L_F e_2, e_1\rangle & \langle L_F e_3, e_1\rangle & \cdots \\
\langle L_F e_0, e_2\rangle & \langle L_F e_1, e_2\rangle & \langle L_F e_2, e_2\rangle & \langle L_F e_3, e_2\rangle & \cdots \\
\langle L_F e_0, e_3\rangle & \langle L_F e_1, e_3\rangle & \langle L_F e_2, e_3\rangle & \langle L_F e_3, e_3\rangle & \cdots \\
\langle L_F e_0, e_4\rangle & \langle L_F e_1, e_4\rangle & \langle L_F e_2, e_4\rangle & \langle L_F e_3, e_4\rangle & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots
\end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

其中，第 k 列包含 $L_F e_k$ 在标准正交基 $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ 中的分量。对于 $f = \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k e_k$，我们还有

$$\langle L_F f, e_j\rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k \langle L_F e_k, e_j\rangle.$$

解析函数再生核希尔伯特空间上的Koopman算子。 本文重点研究解析向量场，因此自然会考虑有界域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 上解析函数的再生核希尔伯特空间。在这种情况下，对于实权重系数 $\omega_\alpha \geq 0, \alpha \in \mathbb{N}^n$ 的适当选取，加权单项式族 $\{e_\alpha(z) =$

$\sqrt{\omega_\alpha}z^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{N}^n\}$ 构成标准正交基。著名示例包括多圆盘上的*Hardy* 空间，其权重为 $\omega_\alpha=1$ （见下文）；多圆盘上的*Bergman* 空间，其权重为$\omega_\alpha=|\alpha|+1$；以及 *Segal-Bargmann*（或*Fock-Bargmann*）空间，其定义域为 $\mathbb{R}^n$，权重为 ω_α =$1/\alpha!$ 其他示例可以通过考虑 D 上的幂级数构造（见 [25]定理 4.12 或 [38] 引理 4.8）。

对于再生核希尔伯特空间（RKHS），其标准正交基由加权单项式 $\sqrt{\omega_\alpha}z^\alpha \qquad \omega_\alpha\neq 0$ $e_k\ z\ =\sqrt{\omega_{\alpha(k)}}z^{\alpha(k)}$ $e_\alpha\ z\ =$ ( ) 给出，其中，单项式记为 ( )，映射 $\alpha:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^n,\ k\mapsto\alpha(k)$ 定义了单项式上的字典序 $\prec$，即 $e_{k_1}\prec e_{k_2}$ 当 $|\alpha(k_1)|<|\alpha(k_2)|$ 时；或者，当 $|\alpha(k_1)|=|\alpha(k_2)|$ 且 $\alpha_j(k_1)>\alpha_j(k_2)$ 时，对于最小的 j，有 $\alpha_j(k_1)\neq\alpha_j(k_2)$。换言之，我们有 $1\prec z_1\prec z_2\prec\cdots\prec z_n$，并且若 $e_{k_1}\preceq e_{k_2}$，则对于任意其他单项式 e_{k_3}，有 $e_{k_1}e_{k_3}\preceq e_{k_2}e_{k_3}$。例如，对于二维单项式，我们有 $1\prec z_1\prec z_2\prec z_1^2\prec z_1z_2\prec z_2^2\prec z_1^3\prec z_1^2z_2\prec z_1z_2^2\prec z_2^3\prec z_1^4\prec z_1^3z_2\prec z_1^2z_2^2\prec z_1z_2^3\prec z_2^4\prec\cdots$。

备注2.15. 对于具有加权单项式标准正交基的再生核希尔伯特空间这一特殊情形，假设3(ii) 可直接由假设3(i)（以及引理2.14.1）推出，因为导数 $\partial e_\alpha/\partial z_\ell$ 是属于 $\mathcal{H}(D)$的单项式。这意味着，对于所有 $\partial e_\alpha/\partial z_\ell f\in\mathcal{H}(D)$，均有 $f\in\mathcal{H}(D)$，包括 $f=F_l\in\mathcal{H}(D)$的情形。

Koopman（或复合）算子已在多圆盘上的 Hardy 空间中得到广泛研究（更多详情参见 [29, 30, 33] ）。对于存在稳定双曲平衡点的解析向量场（见假设2），这种空间选择十分合适，因为它可以利用算子的良好谱性质。特别是，在这种情形下，可以利用由非加权单项式构成的标准正交基，从而得到我们主要结果的实用推论。

由于我们将重点讨论 Hardy 空间作为主要结果的一个特例，因此下面对其进行详细介绍。多圆盘上解析函数的 Hardy 空间$\mathbb{D}^n$ 是如下空间

$$\mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n)=\left\{f:\mathbb{D}^n\to\mathbb{C},\text{holomorphic}:\|f\|^2<\infty\right\},$$

其中

$$\|f\|^2=\lim_{r\to1^-}\int_{(\partial\mathbb{D})^n}|f\left(r\omega\right)|^2dm_n(\omega)$$

且 m_n 是 $(\partial\mathbb{D})^n$上的归一化勒贝格测度。该空间配备了如下定义的内积

$$\langle f,g\rangle=\int_{(\partial\mathbb{D})^n}f\left(\omega\right)\bar{g}\left(\omega\right)dm_n(\omega),$$

因此，单项式集合 $\{z^\alpha:\ z\in\mathbb{D}^n,\ \ \alpha\in\mathbb{N}^n\}$ 是 $\mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n)$上的标准正交基。

对于 f 和 g，若它们属于 $\mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n)$，且 $f=\sum_{k\in\mathbb{N}}f_ke_k$ 和 $g=\sum_{k\in\mathbb{N}}g_ke_k$，则同构

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}f_k\,e_k\mapsto(f_k)_{k\geq0}$$

$\mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n)$ 与 l^2-空间之间的关系使我们可以将范数和内积改写为

$$\|f\|^2=\sum_{k\in\mathbb{N}}|f_k|^2\quad\text{and}\quad\langle f,g\rangle=\sum_{k\in\mathbb{N}}f_k\,\bar{g}_k.$$

我们还注意到 $\mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n)$ 是一个再生核希尔伯特空间（RKHS），其核为（[29,第 1]章）

$$k(z,\xi)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\bar{z}_i\xi_i},\ z,\xi\in\mathbb{D}^n. \tag{2.11}$$

因此，可以定义有界的求值泛函 $f(z)=\langle f,\ k_z\rangle$ 其中$k_z(\omega)=k(z,\ \omega)$。

令 $\mathbb{X}^n$ 为 $\mathbb{D}^n$ 的（实）子集，即，$\mathbb{X}^n$ 是边长为 2 的 $n-$（超）立方体的内部。可以定义限制在 $\mathbb{X}^n$ 上的函数 $f\in\mathbb{D}^n$ 的 Hardy 空间（这里的限制通过取 $z\in\mathbb{D}^n$ 的实部获得），记为 $\mathbb{H}^2(\mathbb{X}^n)$。在这种情况下，$\mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n)$ 上定义的范数、内积、标准正交基和核在 $\mathbb{H}^2(\mathbb{X}^n)$ 上仍然有效（关于这种再生核希尔伯特空间的构造，参见例如 [25, 推论 5.8]或 [38, 引理 4.3] ）。

备注 2.16. 对于 Hardy 空间，假设 2和 3 施加在单位多圆盘（或超立方体）上并不失一般性。它们也可以施加在更大的或更小的多圆盘 $\mathbb{D}^n(\rho)$（或超立方体 $\mathbb{X}^n(\rho)$）上，其中 $\rho\neq 1$，然后通过适当地重新缩放状态变量，将其重新表示在单位多圆盘（或超立方体）上。贯穿全文所推导出的稳定性结果同样如此：它们也可以在不失一般性的情况下应用于单位多圆盘。

当向量场生成在 $\mathbb{D}^n$（或 $\mathbb{X}^n$）中不变的全纯流时，我们可以在 $\mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n)$ 上（或 $\mathbb{H}^2(\mathbb{X}^n)$ 上）定义 Koopman 半群。然而，我们在此不要求该流在 $\mathbb{D}^n$ 上是全纯的，主要是因为这是一个强条件，会限制向量场的形式（参见文献 [3, 4]），从而限制我们结果的适用范围。此外，根据 [31], ，除非动力学是线性的，否则不能假定 Koopman 生成元和半群具有强性质（例如有界性、紧性等）。然而，如注 2.15 所示，Koopman 生成元 L_F 是 $\mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n)$ 上的稠密定义算子。此外，由于 Hardy 空间由 $\mathbb{D}^n$ 上的解析函数构成，且根据假设 3，Koopman 算子 L_F 的定义域非平凡，因此 L_F 是 $\mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n)$ 上的闭算子（参见 [28]定理 4.2）。

Koopman 无限矩阵。现在，我们推导以单项式为基底时 Koopman 矩阵的形式。首先注意到 $L_Fe_0=0$ 因此，Koopman 矩阵的第一行和¯列 L_F 仅包含零元素。将它们去除后，可得到 Koopman 生成元在满足 f 的函数子空间上的限制表示 $f(0)=0$。该子空间由基底 $(e_k)_{k\geq 1}$张成。注意，k_z-k_0属于这个子空间，因为 (2.11) 意味着 $k_z(0)-k_0(0)=0$。

Koopman 矩阵（2.10）的各项可以用向量场 F 的系数表示。事实上，对于 $F_\ell(z)=\sum a_{\ell,\ \beta}z^\beta,\ |\beta|\geq 1$

Koopman算子作用于单项式的结果为

$$\begin{aligned} L_F z^{\alpha} &= \sum_{\ell=1}^{n} F_\ell(z)\,\alpha_\ell\, z^{(\alpha_1,\dots,\alpha_{\ell-1},\alpha_\ell-1,\alpha_{\ell+1},\dots,\alpha_n)} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{|\beta|\geq 1} a_{\ell,\beta} z^{\beta}\,\alpha_\ell\, z^{(\alpha_1,\dots,\alpha_{\ell-1},\alpha_\ell-1,\alpha_{\ell+1},\dots,\alpha_n)} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\alpha_\ell\left(\sum_{(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbb{N}^n} a_{\ell,(\beta_1,\dots,\beta_n)} z^{(\beta_1+\alpha_1,\dots,\beta_\ell+\alpha_\ell-1,\beta_{\ell+1}+\alpha_{\ell+1},\dots,\beta_n+\alpha_n)}\right). \end{aligned}$$

令 $\gamma_1=\beta_1+\alpha_1,\dots,\gamma_\ell=\beta_\ell+\alpha_\ell-1,\dots,\gamma_n=\beta_n+\alpha_n$，可得

$$\begin{aligned} L_F z^{\alpha} &= \sum_{\ell=1}^{n}\alpha_\ell \sum_{|\gamma|\geq|\alpha|} a_{\ell,(\gamma_1-\alpha_1,\dots,\gamma_\ell-\alpha_\ell+1,\dots,\gamma_n-\alpha_n)} z^{(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\alpha_\ell \sum_{|\gamma|\geq|\alpha|} a_{\ell,(\gamma-\alpha)_\ell} z^{\gamma}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

按照约定，假设若 α 含有负分量，则 $a_{\ell,\alpha}=0$，并记

$$(\gamma-\alpha)_\ell=(\gamma_1-\alpha_1,\cdots,\gamma_\ell-\alpha_\ell+1,\cdots,\gamma_n-\alpha_n). \tag{2.13}$$

由此可知（2.10）的各项为

$$\langle L_F e_k, e_j\rangle = \begin{cases} \sum_{\ell=1}^{n}\alpha_\ell(k)\, a_{\ell,(\alpha(j)-\alpha(k))_\ell} & \text{if } |\alpha(j)|\geq|\alpha(k)| \\ 0 & \text{if } |\alpha(j)|<|\alpha(k)|. \end{cases} \tag{2.14}$$

对于其他具有加权单项式基的解析函数再生核希尔伯特空间，各项仍由上述公式给出，但非对角项要乘以比值 $\sqrt{\omega_{\alpha(k)}}/\sqrt{\omega_{\alpha(j)}}$。

注释 2.17。对于向量场 F 的线性部分，其中 $|\alpha(j)|=1$, $j=1,\cdots,n$，显然 $\alpha(j)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的标准基向量，即 $\alpha_i(j)=\delta_{ij}$，且有 $a_{\ell,\alpha(j)}=[JF(0)]_{\ell j}$。此外，若 $|\alpha(j)|=|\alpha(k)|$，则对于某个 $r\leq n$（即 $|\alpha(r)|=1$），有 $(\alpha(j)-\alpha(k))_\ell=\alpha(r)$，其中 $\alpha_r(j)=\alpha_r(k)+1$, $\alpha_\ell(j)=\alpha_\ell(k)-1$，并且对所有 $i\notin\{l,r\}$，$\alpha_i(j)=\alpha_i(k)$。因此，由（2.14）可得

$$\langle L_F e_k, e_j\rangle = \begin{cases} \sum_{\ell=1}^{n}\alpha_\ell(j)\,[JF(0)]_{\ell\ell} & \text{if } j=k \\ \alpha_\ell(k)\,[JF(0)]_{\ell r} & \text{if } \alpha(j)=(\alpha_1(k),\cdots,\alpha_\ell(k)-1,\cdots,\alpha_r(k)+1,\cdots,\alpha_n(k)), \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases} \tag{2.15}$$

2.2.3. 切换Koopman系统与李代数条件。对于切换非线性系统（2.1），Koopman算子描述给出了如下形式的切换线性无限维系统（简称切换*Koopman*系统）：

$$\left\{\dot f = L_{F^{(i)}} f,\ f\in\mathcal{D}\right\}_{i=1}^{m} \tag{2.16}$$

其中 $\mathcal{D} = \cap_{i=1}^{m} \mathcal{D}(L_{F^{(i)}})$。同样，由 $F^{(i)}$ 张成的李代数 $\mathfrak{g}_F$（见（2.5））被替换为 $\mathfrak{g}_\ell =$ 张成空间 $\{L_{F^{(i)}}, i = 1, \ldots, m\}_{\text{Lie}}$，其配备李括号

$$[L_{F^{(i)}}, L_{F^{(j)}}] = L_{F^{(i)}} L_{F^{(j)}} - L_{F^{(j)}} L_{F^{(i)}} .$$

特别地，我们有众所周知的关系

$$[L_{F^{(i)}}, L_{F^{(j)}}] = L_{[F^{(i)}, F^{(j)}]} \tag{2.17}$$

因此，两个代数 $\mathfrak{g}_F$ 和 $\mathfrak{g}_\ell$ 同构。由此可见，$\mathfrak{g}_F$ 中的李代数条件可以改写为 $\mathfrak{g}_\ell$中的李代数判据；在这一框架下，我们有望获得关于切换系统的新结果，这些结果与线性情形中的结果相似。特别地，由于 $\mathfrak{g}_F$ 的可解性等价于 $\mathfrak{g}_\ell$的可解性，我们将探究后一个条件是否意味着切换 Koopman 系统（2.16）存在一个共同的 Lyapunov 函数。

3. 主要结果。本节介绍我们的主要结果。首先，我们通过一个说明性示例表明，李定理A.4 不能用于非线性向量场，这与线性情形不同（见命题2.8）。随后，我们放宽 [12] 中提出的代数条件，以便在 Koopman 矩阵表示（2.10）中得到三角形式；这一性质等价于伴随算子 L_F^*存在不变旗标。最后，我们证明在这些条件下切换非线性系统的一致稳定性。

3.1. 关于公共不变旗存在性的初步说明。下面的例子表明，李定理并不适用于无限维切换Koopman系统。

EXAMPLE 1。考虑以下两个向量场

$$F^{(1)}(x_1, x_2) = (-\alpha x_1, -\alpha x_2) \quad and \quad F^{(2)}(x_1, x_2) = (-\beta x_1 + \gamma\left(x_1^2 - x_2^2\right), -\beta x_2 + 2\gamma x_1 x_2),$$

其中，α、β 和 γ 为实参数。这两个向量场生成李代数 $\mathfrak{g} = span\left\{F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}\right\}_{Lie}$ with $F^{(3)}(x_1, x_2) = (\alpha\gamma(x_1^2 - x_2^2)\ 2\alpha\gamma x_1 x_2)$，因为$[F^{(1)}, F^{(2)}] = F^{(3)}$、$[F^{(1)}, F^{(3)}] = \alpha F^{(3)}$以及 $[F^{(2)}, F^{(3)}] = \beta F^{(3)}$。此外，还有 $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = span\left\{F^{(3)}\right\}_{Lie}$ 和 $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^1] = 0$，这意味着 $\mathfrak{g}$ 是一个可解李代数。然而，与这两个向量场相关的*Koopman*生成元$L_{F^{(1)}}$ 和$L_{F^{(2)}}$ 没有公共特征函数，因此不可能具有公共不变旗。事实上，$L_{F^{(1)}}$ 的主特征函数为$\phi_{\tilde{\lambda}_1^{(1)}}(x_1, x_2) = x_1$和 $\phi_{\tilde{\lambda}_2^{(1)}}(x_1, x_2) = x_2$，而 $L_{F^{(2)}}$ 的主特征函数则为

$$\phi_{\tilde{\lambda}_1^{(2)}}(x_1, x_2) = \frac{\beta\gamma\left(\beta x_1 - \gamma\left(x_1^2 - x_2^2\right)\right)}{(\beta - \gamma x_1)^2 + \gamma^2 x_2^2} \quad and \quad \phi_{\tilde{\lambda}_2^{(2)}}(x_1, x_2) = \frac{\beta^2\gamma x_2}{(\beta - \gamma x_1)^2 + \gamma^2 x_2^2}.$$

由此我们得出，李定理 A.4 在上述例子中并不成立，因此无法将命题2.8 直接推广到这种情形。两个 Koopman 生成元不能同时三角化，也没有公共不变旗（关于算子的同时三角化及其与不变无限极大旗存在性的联系，详见 [9] ）。然而，很容易看出，与向量场 $F^{(1)}$和 $F^{(2)}$相关的 Koopman 无限矩阵（2.10）在再生核希尔伯特空间中的解析函数表示下均为下三角矩阵，因此存在公共无限不变极大旗。事实上，这

意味着，伴随算子 $L^*_{F^{(i)}}$ 存在由标准正交基 e_k生成的公共不变旗，即 $S_k = \text{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$。事实上，$L^*_{F^{(i)}} e_j \in \text{span}\{e_1, \ldots, e_j\}$，因为 $\langle e_k, L^*_{F^{(i)}} e_j \rangle = 0$，对所有 $k > j$均成立。因此，我们将不再要求向量场（即 Koopman 生成元）满足可解性条件，而改为要求 Koopman 生成元的伴随算子存在公共不变旗。

ASSUMPTION 4。 *Koopman* 矩阵(2.10) 是下三角的，即 $\langle L_{F^{(i)}} e_k, \ e_j \rangle = 0$ 对所有 $k < j$ 以及 i。

在下面的引理3.3 中，我们将看到，对于标准正交基由加权单项式 $e_\alpha(z) = \sqrt{\omega_\alpha} z^\alpha$给出的再生核希尔伯特空间，假设4 等价于向量场 F的雅可比矩阵具有三角结构，这一条件比向量场的可解性条件更弱。

3.2. 切换非线性系统的公共李雅普诺夫函数。现在，我们的目标是证明，对于某个正数序列 $(\epsilon_k)_{k=1}^\infty$，级数

$$\mathcal{V}(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \left| \langle f, e_k \rangle \right|^2 \tag{3.1}$$

是切换Koopman系统（2.16）的李雅普诺夫泛函。在开始主要结果之前，我们需要以下引理。

LEMMA 3.1. 设 $\dot{z} = F(z)$ 是定义在 D 上的非线性系统，且 $f = L_F f$ 是其定义在 $\mathcal{D}(L_F) \subset \mathcal{H}^2(D)$ 对应的 *Koopman* 系统，并满足假设 *3-4* 。

若级数

$$\mathcal{V}(k_z - k_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \left| \langle k_z, e_k \rangle \right|^2 \tag{3.2}$$

and

$$\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \frac{d}{dt} \left| \langle U_t^*(k_z - k_0), e_k \rangle \right|^2 \tag{3.3}$$

对所有 $t > 0$，在 $S \subseteq D \subseteq \mathbb{B}^n$ 中绝对一致收敛，那么，对于所有正实数的双重序列$(b_{jk})_{j \geq 1, \ k \geq 1}$ 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{jk} \leq 1, \tag{3.4}$$

则对于所有 $z \in S \subseteq D \subseteq \mathbb{B}^n$，有

(3.5)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{V}\left(U_t^*(k_z - k_0)\right) \leq & 2 \sum_{j=1}^{\infty} b_{jj} \epsilon_j \left| c_j \right|^2 \Re\left(\lambda_j\right) \\ & + 2 \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{j-1} \left(b_{jk} \epsilon_j \left| c_j \right|^2 \Re\left(\lambda_j\right) + b_{kj} \epsilon_k \left| c_k \right|^2 \Re\left(\lambda_k\right) + \epsilon_k \Re\left(c_j \bar{c}_k \left\langle e_j, L_F e_k \right\rangle \right) \right), \end{aligned}$$

其中 $c_j = \langle U_t^* (k_z - k_0) \ \ e_j \rangle$ 以及 $\lambda_j = \langle L_F e_j, e_j \rangle$。

证明。 假设 $z \in S \subseteq D \subseteq \mathbb{B}^n$ 使级数 (3.2) 和 (3.3) 绝对一致收敛。那么，利用引理 2.14 (3)，可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\epsilon_k \left|\langle U_t^*(k_z - k_0), e_k\rangle\right|^2 &= 2\epsilon_k \Re\left(\left\langle \frac{d}{dt}U_t^*(k_z - k_0), e_k\right\rangle \overline{\langle U_t^*(k_z - k_0), e_k\rangle}\right)\\ &= 2\epsilon_k \Re\left(\langle L_F^* U_t^*(k_z - k_0), e_k\rangle \overline{\langle U_t^*(k_z - k_0), e_k\rangle}\right)\\ &= 2\epsilon_k \sum_{j=1}^{\infty} \Re\left(c_j \bar{c}_k \langle e_j, L_F e_k\rangle\right)\end{aligned}$$

∞其中我们使用了分解 $U_t^*(k_z - k_0) = \sum c_j e_j$。 由于 (3.3) 绝对$_{j=1}$且一致收敛，逐项求导可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{V}\left(U_t^*(k_z - k_0)\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt}\epsilon_k \left|\langle U_t^*(k_z - k_0), e_k\rangle\right|^2\\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_k \Re\left(c_j \bar{c}_k \langle e_j, L_F e_k\rangle\right)\\ &= 2\sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j \left|c_j\right|^2 \Re\left(\lambda_j\right) + 2\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{j-1} \epsilon_k \Re\left(c_j \bar{c}_k \langle e_j, L_F e_k\rangle\right)\end{aligned}$$

¯其中我们使用了 L_F(假设4) 的三角形式以及 $\lambda_j = \langle L_F e_j,\ e_j\rangle$。
利用 (3.4)，可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{V}\left(U_t^*(k_z - k_0)\right) &\le 2\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{j} b_{jk} + \sum_{k=j+1}^{\infty} b_{jk}\right)\epsilon_j \left|c_j\right|^2 \Re\left(\lambda_j\right) + 2\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{j-1} \epsilon_k \Re\left(c_j \bar{c}_k \langle e_j, L_F e_k\rangle\right)\\ &= 2\sum_{j=1}^{\infty} b_{jj}\epsilon_j \left|c_j\right|^2 \Re\left(\lambda_j\right) + 2\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}\epsilon_j \left|c_j\right|^2 \Re\left(\lambda_j\right)\\ &\quad + 2\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=j+1}^{\infty} b_{jk}\epsilon_j \left|c_j\right|^2 \Re\left(\lambda_j\right) + 2\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{j-1} \epsilon_k \Re\left(c_j \bar{c}_k \langle e_j, L_F e_k\rangle\right)\\ &= 2\sum_{j=1}^{\infty} b_{jj}\epsilon_j \left|c_j\right|^2 \Re\left(\lambda_j\right)\\ &\quad + 2\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{j-1}\left(b_{jk}\epsilon_j \left|c_j\right|^2 \Re\left(\lambda_j\right) + b_{kj}\epsilon_k \left|c_k\right|^2 \Re\left(\lambda_k\right) + \epsilon_k \Re\left(c_j \bar{c}_k \langle e_j, L_F e_k\rangle\right)\right).\end{aligned}$$

□

需要注意的是，当 $\Re\{\lambda_j\} < 0$ 对所有 j成立时，李雅普诺夫泛函的时间导数 (3.5) 为负，当对角元素 $\langle L_F e_j,\ e_j\rangle$ 和 $\langle L_F e_k,\ e_k\rangle$ 相关的（负）项补偿了与 $\langle e_j,\ L_F e_k\rangle$相关的交叉项（可能为正）。我们注意到，与某个对角元素相关的一项将用于补偿无穷多个交叉项（这些交叉项与 Koopman 矩阵相应行和列中的元素相关），而数值 b_{jk} 在补偿过程中起权重的作用。

现在我们可以陈述主要结果了。

THEOREM 3.2. 设

$$\left\{\dot{z}=F^{(i)}(z)\right\}_{i=1}^{m} \tag{3.6}$$

设 D 上存在一个切换非线性系统，并假设

- 假设1-4 成立，
- （3.6）的所有子系统(3.6) 具有一个公共的双曲平衡点 $z_e=0$ 该点在 D上全局渐近稳定，
- $\Re\{\langle L_{F^{(i)}}e_j,\ e_j\rangle\}<0$ 对所有 $j\in\mathbb{N}$ 和 $i\in\{1,\cdots,m\}$，
- 存在 $\rho\in]0,\ 1]$，使得集合 $S\subseteq D\subseteq\mathbb{B}^n(\rho)$ 关于 $F_{(i)}$ 的流 $\varphi_{(i)\ t}$ 正向不变。

考虑一个由正实数构成的双重序列 $\left(b_{jk}^{(i)}\right)_{j\geq 1},_{k\geq 1}$，其中 $i=1,\ldots,m,\infty$满足：若 $\langle L_{F^{(i)}}e_k$，则 $b_{jk}^{(i)}b_{kj}^{(i)}>0$； $e_j\rangle\neq 0$，并且 $\sum b_{jk}^{(i)}\leq 1$，并定义该双重序列$_{k=1}$

(3.7)

$$\left(Q_{jk}^{(i)}\overset{def}{=}\begin{cases}\dfrac{\left|\langle L_{F^{(i)}}e_k,e_j\rangle\right|^2}{4\left|\Re\left(\langle L_{F^{(i)}}e_j,e_j\rangle\right)\right|\left|\Re\left(\langle L_{F^{(i)}}e_k,e_k\rangle\right)\right|}\dfrac{1}{b_{jk}^{(i)}b_{kj}^{(i)}} & if\ \langle L_{F^{(i)}}e_k,e_j\rangle\neq 0\\ 0 & otherwise\end{cases}\right)_{j\geq 2,1\leq k\leq j-1}.$$

若级数 (3.2) 和 (3.3) 在 $S\subseteq D\subseteq\mathbb{B}^n$上对所有 $t>0$绝对一致收敛，且满足

$$\epsilon_j=\max_{\substack{i=1,\cdots,m\\ k=1,\ldots,j-1}}\epsilon_k\,Q_{jk}^{(i)}, \tag{3.8}$$

则切换系统 (3.6) 在 $S\subseteq D$上全局一致渐近稳定。此外，级数

$$V(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\epsilon_k\left|z^{\alpha(k)}\right|^2$$

是 $S\subseteq D$ 上的一个公共全局李雅普诺夫函数）。

证明。 考虑切换系统

$$\left\{\dot{z}=F^{(i)}(z)\right\}_{i=1}^{m} \tag{3.9}$$

定义在 D 上，并生成在 $S\subseteq D\subseteq\mathbb{B}^n$ 上不变的流 $\varphi_t^{(i)}$ 。根据假设 4，标准正交基 $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为 $L_{F^{(i)}}$ 生成一个公共的无限不变极大旗标$^{-}$。我们首先证明候选李雅普诺夫泛函 $\mathcal{V}(f)=$
$\sum_{k=1}^{\infty}\epsilon_k\left|\langle f,e_k\rangle\right|^2$ satisfies

$$\frac{d}{dt}\mathcal{V}\left((U_t^{(i)})^*\left(k_z-k_0\right)\right)<0$$

对所有 $i=1,\ \cdots,\ m$ 以及所有 $z\in S\subseteq D$，其中 $U_t^{(i)}$ 表示与子系统 $\dot{z}=F_{(i)}(z)$ 相关联的 Koopman 半群。由于根据假设，级数（3.2）

和（3.3）在 S上绝对收敛，因此由引理 3.1 可知，对所有$z \in S \subseteq D$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{V}\left((U_t^{(i)})^*\left(k_z-k_0\right)\right) \leq & 2\sum_{j=1}^{\infty} b_{jj}^{(i)}\epsilon_j\left|c_j^{(i)}\right|^2\Re\left(\lambda_j^{(i)}\right) \\ & +2\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}^{(i)}\epsilon_j\left|c_j^{(i)}\right|^2\Re\left(\lambda_j^{(i)}\right)+b_{kj}^{(i)}\epsilon_k\left|c_k^{(i)}\right|^2\Re\left(\lambda_k^{(i)}\right)+\epsilon_k\Re\left(c_j^{(i)}\bar{c}_k^{(i)}\left\langle e_j, L_{F^{(i)}}e_k\right\rangle\right)\end{aligned}$$

其中 $c_j^{(i)}=\left\langle (U_{(i)t})^*(k_z-k_0)\quad e_j\right\rangle$ 以及 $\lambda_j^{(i)}=\langle L_{F^{(i)}}e_j,e_j\rangle$。由于 $\Re\{\lambda_j^{(i)}\}<0$,
需要找到一个正数序列 $(\epsilon_j)_{j\geq 1}$，使得

$$b_{jk}^{(i)}\epsilon_j\left|c_j^{(i)}\right|^2\left|\Re\left(\lambda_j^{(i)}\right)\right|+b_{kj}^{(i)}\epsilon_k\left|c_k^{(i)}\right|^2\left|\Re\left(\lambda_k^{(i)}\right)\right|\geq\epsilon_k\left|\Re\left(c_j^{(i)}\bar{c}_k^{(i)}\left\langle e_j,L_{F^{(i)}}e_k\right\rangle\right)\right|$$

对于所有 $i=1,\cdots,m$，以及对于所有 j,k，满足 $j>k$，使得

$$\left\langle e_j, L_{F^{(i)}}e_k\right\rangle\neq 0. \tag{3.10}$$

利用不等式

$$\left|\Re\left(c_j^{(i)}\bar{c}_k^{(i)}\left\langle e_j,L_{F^{(i)}}e_k\right\rangle\right)\right|\leq\left|c_j^{(i)}\right|\left|c_k^{(i)}\right|\left|\left\langle e_j,L_{F^{(i)}}e_k\right\rangle\right|,$$

需要满足

$$b_{jk}^{(i)}\epsilon_j\left|c_j^{(i)}\right|^2\left|\Re\left(\lambda_j^{(i)}\right)\right|+b_{kj}^{(i)}\epsilon_k\left|c_k^{(i)}\right|^2\left|\Re\left(\lambda_k^{(i)}\right)\right|\geq\epsilon_k\left|c_j^{(i)}\right|\left|c_k^{(i)}\right|\left|\left\langle L_{F^{(i)}}e_k,e_j\right\rangle\right|$$

或者等价地

$$\epsilon_j\geq\epsilon_k\left(-\frac{b_{kj}^{(i)}}{b_{jk}^{(i)}}\frac{\left|\Re\left(\lambda_k^{(i)}\right)\right|}{\left|\Re\left(\lambda_j^{(i)}\right)\right|}\left|\frac{c_k^{(i)}}{c_j^{(i)}}\right|^2+\frac{\left|\left\langle L_{F^{(i)}}e_k,e_j\right\rangle\right|}{b_{jk}^{(i)}\left|\Re\left(\lambda_j^{(i)}\right)\right|}\left|\frac{c_k^{(i)}}{c_j^{(i)}}\right|\right)\overset{\text{def}}{=}\epsilon_k\,h\left(\left|\frac{c_k^{(i)}}{c_j^{(i)}}\right|\right). \tag{3.11}$$

容易看出，实二次函数 h 具有最大值

$$Q_{jk}^{(i)}=\frac{\left|\left\langle L_{F^{(i)}}e_k,e_j\right\rangle\right|^2}{4\left|\Re\left(\lambda_j^{(i)}\right)\right|\left|\Re\left(\lambda_k^{(i)}\right)\right|}\frac{1}{b_{jk}^{(i)}b_{kj}^{(i)}}$$

因此，若根据 (3.11) 迭代选取 ϵ_j，使其符合 (3.8)，则该条件成立。最后可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{V}(\left(U_t^{(i)})^*\left(k_z-k_0\right)\right) &< 2\sum_{j=1}^{\infty} b_{jj}^{(i)}\epsilon_j\left|c_j^{(i)}\right|^2\Re\left(\lambda_j^{(i)}\right) \\ &< -\min_j\left\{b_{jj}^{(i)}\left|\Re\left(\lambda_j^{(i)}\right)\right|\right\}\sum_{j=1}^{\infty}\epsilon_j\left|c_j^{(i)}\right|^2 \\ &= -\min_j\left\{b_{jj}^{(i)}\left|\Re\left(\lambda_j^{(i)}\right)\right|\right\}\mathcal{V}\left((U_t^{(i)})^*\left(k_z-k_0\right)\right).\end{aligned}$$

利用求值泛函 k_z，我们可以定义

$$V: S\subseteq D\to\mathbb{R}^+,\quad V(z)=\mathcal{V}\left(k_z-k_0\right)$$

并利用引理 2.14，我们验证可得

$$V\left(\varphi_t^{(i)}(z)\right)=\mathcal{V}\left(k_{\varphi_t^{(i)}(z)}-k_0\right)=\mathcal{V}\left(k_{\varphi_t^{(i)}(z)}-k_{\varphi_t^{(i)}(0)}\right)=\mathcal{V}\left((U_t^{(i)})^*\left(k_z-k_0\right)\right)$$
$$<\mathcal{V}\left(k_z-k_0\right)=V(z).$$

因此，我们得到控制李雅普诺夫函数

$$V(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\epsilon_k\left|\langle k_z-k_0,e_k\rangle\right|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\epsilon_k\left|\langle k_z,e_k\rangle\right|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\epsilon_k\left|z^{\alpha(k)}\right|^2 \tag{3.12}$$

对于切换非线性系统（3.6）。最后，由于 $S\subseteq D$ 相对于 $\varphi_t^{(i)}$ 正向不变，因此切换系统（3.6）在 $S\subseteq D$上全局一致渐近稳定。 □

请注意，如果定理3.2 的假设成立，但集合 $S\subseteq D$ 相对于子系统生成的流并非正向不变，那么切换系统在包含于 D中的李雅普诺夫函数最大次水平集内全局一致渐近稳定。

双重序列（3.7）有界这一条件，可解释为矩阵$L_{F^{(i)}}$ 的负对角元素相对于其他元素占主导。此外，需要补偿的非零交叉项（3.10）的数量会影响权重序列 $b_{jk}^{(i)}$ 的定义方式，从而影响式（ϵ_j 3.8）中的序列。如果双重序列（3.7）有上界 $Q<1$，则可以对所有 $\epsilon_k=Q$ 设定 k。然而，这种情况很少出现。相反，若 $Q>1$，则可能有 $\epsilon_k=\mathcal{O}(Q^k)$，且级数（3.2）和（3.3）可能不收敛。下一节将重点讨论一些具体情形，在这些情形下，我们可以找到合适的序列$b_{jk}^{(i)}$ ，使级数收敛。

3.3. Hardy 空间情形下主要结果的推论。现在，我们聚焦于多圆盘（或超立方体）上的 Hardy 空间情形，并由此推导出定理3.2的两个推论。首先，我们回顾一下，假设3(i)（即解析向量场）意味着假设3 (ii)成立（见上文注释2.15 ）。接下来，我们证明，如果雅可比矩阵是三角矩阵，那么假设4 也成立。

LEMMA 3.3. 设 F 是定义在 $\mathbb{D}^n$ 上的解析向量场，且其雅可比矩阵$JF(0)$ 为上三角矩阵。则 *Koopman* 矩阵(2.10) 为下三角矩阵，即$\langle L_F e_k,\ e_j\rangle=0$ 对所有 $k<j$ 均成立。此外，*Koopman* 生成元的伴随算子 L_F^*存在一个由单项式 e_k生成的无限不变极大旗，即 S_k =张成$\{e_1,\dots,e_k\}$。

证明。由 (2.14) 可知 $\langle L_F e_k,e_j\rangle=0$ if $|\alpha(k)|>|\alpha(j)|$（即，Koopman 矩阵 (2.10) 始终按与总次数相同的单项式相关的矩阵块呈下三角形式）。在 $|\alpha(k)|=|\alpha(j)|$ 且 $k>j$ 的情形下，字典序意味着只有当 $r<l$ 时，才有 $\alpha(j)=(\alpha_1(k)\ \cdots,\alpha_\ell(k)-1,\cdots,\alpha_r(k)+1,\ \cdots,\alpha_n(k))$。由于对所有 $l>r$ 都有 $[JF(0)]_{\ell r}=0$，由 (2.15) 可得，当 $k>j$ 时，$\langle L_F e_k,e_j\rangle=0$。最后，显然 $L_F^* e_j\in$张成$\{e_1,\dots,e_j\}$，因为对所有 $k>j$ 都有 $\langle e_k,L_F^* e_j\rangle=0$。 □

注意，前述引理对任何以加权单项式为标准正交基的解析函数再生核希尔伯特空间仍然成立。

注 3.4. 当雅可比矩阵为上三角矩阵时，众所周知$[JF(0)]_{jj}=\lambda_j$。在这种情况下，由（2.15）可知，（下三角）Koopman 矩阵的对角元素为

$$\lambda_j = \langle L_F e_j, e_j \rangle = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell(j)\tilde{\lambda}_\ell. \tag{3.13}$$

注意，在非共振[1]特征值 λ_j的情况下，这些值就是 Koopman 特征值。

由引理 3.3 可知，我们可以保证 Koopman 生成元的伴随算子族存在一个公共不变极大旗。

Corollary 3.5. 设 $\left\{F^{(i)}\right\}_{i=1}^{m}$ 是定义在 $\mathbb{D}^n$ （或 $\mathbb{X}^n$）上的切换非线性系统，并假设矩阵 $\left\{JF^{(i)}(0)\right\}_{Lie}$ 张成的李代数是可解的。那么存在一个变量替换 $z \mapsto \widehat{z} = P^{-1}z$，将 $\mathbb{C}^n$ （或 $\mathbb{R}^n$）映射到 $\mathbb{C}^n$，使得 *Koopman* 生成元的伴随算子 $L^*_{\widehat{F}^{(i)}}$（其中 $\widehat{F}_{(i)}(\widehat{z}) = P^{-1}F_{(i)}(P\widehat{z})$）具有一个公共无限不变极大旗。此外，$\left\{\widehat{F}^{(i)}\right\}_{i=1}^{m}$ 是定义在 $S = P^{-1}(\mathbb{D}^n) \subseteq \mathbb{D}^n \left(\|P^{-1}\|_\infty\right)$上的切换非线性系统。

证明。由于 span $\left\{JF^{(i)}(0)\right\}_{Lie}$ 是可解的，李定理 A.4 表明，矩阵 $JF_{(i)}(0)$ 可同时三角化，即存在一个（复）矩阵 P，使得对所有 i， $JF_{(i)}(0) = PT_{(i)}P^{-1}$，其中 $T^{(i)}$ 是上三角矩阵。令 $F_{(i)}(z) = JF_{(i)}(0)z + \tilde{F}_{(i)}(z)$，以分离动力学的线性部分与非线性部分。在新坐标 $\widehat{z} = P^{-1}z$ 中，我们得到动力学$\widehat{F}^{(i)}(\widehat{z}) = P^{-1}JF_{(i)}(0)P\widehat{z} + P^{-1}\tilde{F}_i(P\widehat{z}) = T_{(i)}\widehat{z} + \tilde{F}_i(\widehat{z})$。由引理 3.3 可知，单项式 $\widehat{e}_k$（其中 $\widehat{e}_k(\widehat{z}) = (\widehat{z})^{\alpha(k)}$）为 $L^*_{\widehat{F}^{(i)}}$生成一个公共不变极大旗。此外，对于所有 $z \in \mathbb{D}^n$ 以及所有 $j = 1$、.....、n，我们有

$$|\widehat{z}_j| \leq \|\widehat{z}\|_\infty = \left\|P^{-1}z\right\|_\infty \leq \left\|P^{-1}\right\|_\infty \|z\|_\infty < \|P^{-1}\|_\infty.$$

□

显然，坐标变换 $z \mapsto \widehat{z} = P^{-1}z$ 只在相差一个乘法常数的意义下确定。不失一般性，以下我们将考虑$\|P^{-1}\|_\infty = 1$，因此 $\left\{\widehat{F}^{(i)}\right\}_{i=1}^{m}$ 是定义在 $S = P^{-1}(\mathbb{D}^n) \subseteq \mathbb{D}^n$上的切换非线性系统。

注3.6. 即使系统定义在实超立方体上，矩阵 P 也可能是复矩阵，因此仅使用实坐标可能无法实现雅可比矩阵的同时三角化性质。由此可知，生成元 $L^*_{\widehat{F}^{(i)}}$ 的公共不变极大旗通常是在 $\mathbb{H}^2(\mathbb{D}^n)$上获得，而不是在 $\mathbb{H}^2(\mathbb{X}^n)$上获得。

我们不要求向量场 $F^{(i)}$满足幂零性或可解性条件，而只要求雅可比矩阵 $JF^{(i)}(x_e)$ 满足较弱的可解性条件，以保证 Koopman 矩阵（2.10）具有三角形式。值得注意的是，这个局部条件的限制远低于原开放问题 [12]中提到的 [1] 全局可解性条件。文献 [1] 还表明，向量场（因而雅可比矩阵）具有三角形式，并不足以保证切换非线性系统在 $\mathbb{R}^n$上的 GUAS 性质。在接下来的推论中，

[1]The eigenvalues $\tilde{\lambda}_j$ are non-resonant if $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \tilde{\lambda}_j = 0$ with $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ implies that $\alpha = 0$.

然而，我们利用雅可比矩阵的可解性条件，证明了状态空间的有界不变区域内具有 GUAS 性质。这一结果与文献 [13]导出的局部稳定性结果一致。

最后，我们证明以下引理，该引理与级数(3.2)和(3.3)的收敛性有关，是引理 3.1 和定理 3.2所需的。

LEMMA 3.7. 设 $\dot{z} = F(z)$ 为在 $\mathbb{D}^n$ 上的一个向量场，它生成流 φ_t。假设存在一个正数序列 $(\epsilon_k)_{k\geq 1}$ 以及 $\rho \in]0,1]$，使得集合 $S \subseteq \mathbb{D}^n(\rho)$ 相对于 φ_t 是正向不变的，并且级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha(k)| \epsilon_k \rho^{2|\alpha(k)|} \tag{3.14}$$

收敛。那么，级数

$$\mathcal{V}(k_z - k_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \left| \langle k_z, e_k \rangle \right|^2 \tag{3.15}$$

and

$$\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \frac{d}{dt} \left| \langle U_t^*(k_z - k_0), e_k \rangle \right|^2 \tag{3.16}$$

在 S 上对所有 $t > 0$绝对一致收敛。

证明。 对于第一个级数，我们有

$$\epsilon_k \left| \langle k_z - k_0, e_k \rangle \right|^2 = \epsilon_k \left| \langle k_z, e_k \rangle \right|^2 = \epsilon_k \left| z^{\alpha(k)} \right|^2 < \epsilon_k \rho^{2|\alpha(k)|} \leq |\alpha(k)| \epsilon_k \rho^{2|\alpha(k)|}$$

对于所有 $z \in S$ 和所有 $k \geq 1$。对于第二个级数，我们有

$$\begin{aligned}
\epsilon_k \left| \frac{d}{dt} \left| \langle U_t^*(k_z - k_0), e_k \rangle \right|^2 \right| &= \epsilon_k \left| \frac{d}{dt} \left| (\varphi_t(z))^{\alpha(k)} - (\varphi_t(0))^{\alpha(k)} \right|^2 \right| \\
&= 2\epsilon_k \left| \Re \left(\frac{d}{dt} (\varphi_t(z))^{\alpha(k)} \cdot \left(\overline{\varphi_t(z)} \right)^{\alpha(k)} \right) \right| \\
&\leq 2\epsilon_k \left| \frac{d}{dt} (\varphi_t(z))^{\alpha(k)} \right| \cdot \left| \left(\overline{\varphi_t(z)} \right)^{\alpha(k)} \right| \\
&< 2\epsilon_k \rho^{|\alpha(k)|} \left| \frac{d}{dt} (\varphi_t(z))^{\alpha(k)} \right| \\
&\leq 2\epsilon_k \rho^{|\alpha(k)|} \sum_{s=1}^{n} \alpha_s(k) \left| F^{(s)}(\varphi_t(z)) \right| \left| (\varphi_t(z))_s \right|^{\alpha_s(k)-1} \prod_{\ell=1, l\neq s}^{n} \left| (\varphi_t(z))_\ell \right|^{\alpha_\ell(k)} \\
&< 2\epsilon_k \rho^{2|\alpha(k)|-1} \sum_{s=1}^{n} \alpha_s(k) \left| F^{(s)}(\varphi_t(z)) \right|
\end{aligned}$$

对于所有 $z \in S$， $t > 0$ 以及 $k \geq 1$。利用 S 关于 φ_t的不变性，以及有界域上 A.1 的最大模原理（其全纯函数为 $F^{(s)}$），可记为

$$M = \max_{z \in \partial S, s=1,\cdots,n} \left| F^{(s)}(\varphi_t(z)) \right|$$

并得到

$$\epsilon_k \left| \frac{d}{dt} \left| \langle U_t^*(k_z - k_0), e_k \rangle \right|^2 \right| < 2M|\alpha(k)|\epsilon_k \rho^{2|\alpha(k)|-1}.$$

最后，根据魏尔斯特拉斯判别法，两个级数都绝对收敛且一致收敛（A.3）。

□

3.3.1. 多项式向量场的全局一致渐近稳定性。$_r$对于形如 $F_\ell^{(i)}(z) = \sum a_\ell^{(i)}{}_k z^{\alpha(k)}$的多项式向量场，我们用 $K^{(i)}{}_{k=1}$表示非零项的数量（不计单项式 z_ℓ 在 $F_\ell^{(i)}$ 中的项数），即

$$K^{(i)} = \sum_{\ell=1}^{m} \# \left\{ k \neq \ell : a_{\ell,k}^{(i)} \neq 0 \right\} \tag{3.17}$$

其中，# 表示集合的基数。在这种情况下，我们有以下结果。

COROLLARY 3.8. 设

$$\left\{ \dot{z} = F^{(i)}(z) \right\}_{i=1}^{m} \tag{3.18}$$

为定义在 $\mathbb{D}^n$ （或 $\mathbb{X}^n$）上的切换非线性系统，其中 $F^{(i)}$ 为多项式向量场。假设

- 的所有子系统（3.18）都有一个共同的双曲平衡点 $z_e = 0$ 且在 $\mathbb{D}^n$ （或在 $\mathbb{X}^n$）上全局渐近稳定，
- 李代数张成空间 $\left\{ JF\ (i)\ (0) \right\}_{Lie}$ 是可解的（因此存在一个矩阵 P使得 $PJF\ (i)\ (0)P^{-1}$ 为上三角矩阵），
- 多圆盘 $\mathbb{D}^n$ （或超立方体 $\mathbb{X}^n$）相对于由 $F\ (i)$ 生成的流 $\varphi\ (i)\ t$ 是正向不变的。

If

$$Q = \max_{i=1,\cdots,m} \limsup_{j\in\mathbb{N}} \max_{k=1,\ldots,j-1} \frac{(\widehat{K}^{(i)})^2 \left| \left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}} \widehat{e}_k, \widehat{e}_j \right\rangle \right|^2}{\left| \Re\left(\left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}} \widehat{e}_j, \widehat{e}_j \right\rangle \right) \right| \left| \Re\left(\left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}} \widehat{e}_k, \widehat{e}_k \right\rangle \right) \right|} < 1, \tag{3.19}$$

其中 $\widehat{K}^{(i)}$ 是 $\widehat{F}\ (i)\ (\widehat{z}) = P^{-1}F\ (i)\ (P\widehat{z})$ （参见（3.17））中非零项的数量，其中 $\widehat{e}_j\ (\widehat{z}) = \widehat{z}^{\alpha(j)}$ 是新坐标 $\widehat{z} = P^{-1}z$中的单项式，则（3.18）在 $\mathbb{D}^n$ （或在 $\mathbb{X}^n$）上全局一致渐近稳定。此外，级数

$$V(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \left| \left(P^{-1}z\right)^{\alpha(k)} \right|^2$$

是 $\mathbb{D}^n$ （或 $\mathbb{X}^n$）上的公共李雅普诺夫函数。

证明。 由引理3.7、推论 3.5和注 2.15 可知，假设 3-4 成立。此外，显然 $\langle L_{\widehat{F}^{(i)}} e_j, e_j \rangle < 0$对所有 j均成立（见注 3.4）。于是，由定理 3.2 及序列

$$\begin{cases} b_{jj}^{(i)} = (1-\xi) & \\ b_{jk}^{(i)} = \dfrac{\xi}{2\widehat{K}^{(i)}} & \text{if } j \neq k \text{ with } \left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}} \widehat{e}_k, \widehat{e}_j \right\rangle \neq 0 \text{ or } \left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}} \widehat{e}_j, \widehat{e}_k \right\rangle \neq 0 \\ b_{jk}^{(i)} = 0, & \text{if } j \neq k \text{ with } \left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}} \widehat{e}_k, \widehat{e}_j \right\rangle = 0 \text{ or } \left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}} \widehat{e}_j, \widehat{e}_k \right\rangle = 0, \end{cases} \tag{3.20}$$

与 $\xi \in]0,1[$。由（2.14）可知，对于固定的 j 以及所有 $k \in \mathbb{N} \setminus \{j\}$，非零值 $\widehat{K}^{(i)}$ 至多有 $\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_k, \widehat{e}_j\rangle$，且非零值 $K^{(i)}$ 至多有$\infty\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_j, \widehat{e}_k\rangle$，因此序列（3.20）满足 $\sum b_{jk}^{(i)} \leq 1$。双重序列（的元素 3.7）定义为

$$Q_{jk}^{(i)} = \frac{(\widehat{K}^{(i)})^2 \left|\left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_k, \widehat{e}_j\right\rangle\right|^2}{\xi^2 \left|\Re\left(\left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_j, \widehat{e}_j\right\rangle\right)\right| \left|\Re\left(\left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_k, \widehat{e}_k\right\rangle\right)\right|}. \tag{3.21}$$

条件（3.19）意味着 $\max_{i=1,\ \cdots,\ m} \limsup_{j\in\mathbb{N}} \max_{k=1,\ldots,j-1} Q_{jk}^{(i)} \overset{\text{def}}{=} Q < 1$ 对于某个$\xi \in]0,\ 1[$, 因此（3.8）意味着，对于任意选取的 $\epsilon_1 = 1$，有

$$\epsilon_j = \max_{k\in\mathcal{K}_j} \{\epsilon_k\, Q\} = Q \tag{3.22}$$

对于 $j > 1$，其中 $\mathcal{K}_j = \{k \in \{1,\ldots,j-1\}\colon\ \langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_k, \widehat{e}_j\rangle \neq 0$对于某个 $i \in \{1,\ldots,m\}\}$。由此可知，对于任意 $\rho < 1$，(3.14) 都收敛，因此引理 3.7 意味着，对于任意 $\rho < 1$, (3.15) 和 (3.16) 都收敛。定理 3.2 意味着切换系统$\left\{\dot{\widehat{z}} = \widehat{F}^{(i)}(z)\right\}_{i=1}^{m}$ 在 $S = P^{-1}(\mathbb{D}^n) \subseteq \mathbb{D}^n$（或在 $S = P^{-1}(\mathbb{X}^n) \subseteq \mathbb{X}^n$）上全局一致渐近稳定，进而系统 (3.18) 在 $\mathbb{D}^n$（或在 $\mathbb{X}^n$）上全局一致渐近稳定。

此外，由定理 3.2 可推得

$$\widehat{V}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \left|\widehat{z}^{\alpha(k)}\right|^2$$

是 $\left\{\dot{\widehat{z}} = \widehat{F}^{(i)}(z)\right\}_{i=1}^{m}$ 在 S 上的控制李雅普诺夫函数。若定义 $V = \widehat{V} \circ P^{-1}$: $\mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^+$（或$\mathbb{X}^n \to \mathbb{R}^+$），则得到控制李雅普诺夫函数

$$V(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \left|\left(P^{-1}z\right)^{\alpha(k)}\right|^2$$

对于切换非线性系统（3.18）。 □

注 3.9. 我们可以使用（截断的）级数

$$V(z) = \sum_{k=1}^{k_{max}} \epsilon_k \left|\left(P^{-1}z\right)^{\alpha(k)}\right|^2 \tag{3.23}$$

（例如，$\epsilon_1 = 1$ 和 $\epsilon_k = Q$ 对应于 $k > 1$），它们由推论 3.8 得到，可作为候选控制李雅普诺夫函数，用于数值估计吸引域（其范围可能大于单位多圆盘）。第 4 节将对此进行说明。在这种情况下，无需要求流在多圆盘（或超立方体）上具有不变性。

3.3.2. 解析向量场的全局一致渐近稳定性。当假设雅可比矩阵 $JF^{(i)}(0)$ 满足对角占优性质时，可得到另一个结果。

Corollary 3.10. 设

$$\left\{\dot{z} = F^{(i)}(z)\right\}_{i=1}^{m} \tag{3.24}$$

$+\infty$是定义在 $\mathbb{D}^n$ （或 $\mathbb{X}^n$）上的切换非线性系统，其中 $F_\ell^{(i)}(z) = \sum a_\ell^{(i)}$，
$k z^{\alpha(k)}$ 且$k=1$
$+\infty\sum |a_\ell^{(i)}{}_{,\ k}| < \infty$ 对所有 $i = \{1,\dots,m\}$ 和 $l \in \{1,\dots,n\}$。假设
$k=1$

- 所有子系统 (3.24) 都具有一个共同的双曲平衡点 $z_e = 0$ 且该平衡点在 $\mathbb{D}^n$ (或在 $\mathbb{X}^n$) 上全局渐近稳定，
- 李代数张成空间 $\left\{JF_{(i)}(0)\right\}_{Lie}$ 是可解的（因此存在一个矩阵 P使得 $PJF_{(i)}(0)P^{-1}$ 为上三角形式），
- 存在 $\rho \in]0,1]$ 使得 $\mathbb{D}^n(\rho)$ （或 $\mathbb{X}^n(\rho)$）相对于由 $F_{(i)}$生成的流 $\varphi_{(i)\ t}$ 是正向不变的。

如果存在 $\xi \in]0,1[$和 $\kappa \in]0,1[$，且 $\xi + \kappa < 1$满足：对于所有 $q,r \in \{1,\cdots,n\}$，当 $q<r$时（当 $n>1$），

$$\left|J\widehat{F}^{(i)}(0)]_{qr}\right|^2 < \left(\frac{2\xi}{n^2-n}\right)^2 \left|\Re([J\widehat{F}^{(i)}(0)]_{rr})\right| \left|\Re([J\widehat{F}^{(i)}(0)]_{qq})\right|, \tag{3.25}$$

$$\left|[J\widehat{F}^{(i)}(0)]_{qr}\right| < \frac{2\xi}{n^2-n} \left|\Re([J\widehat{F}^{(i)}(0)]_{qq})\right| \tag{3.26}$$

and

$$\max_{i=1,\cdots,m} \limsup_{j\in\mathbb{N}} \max_{\substack{k=1,\dots,j-1 \\ \langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_k,\widehat{e}_j\rangle\neq 0}} \frac{\sum_{\ell=1}^\infty \left|\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_\ell,\widehat{e}_j\rangle\right| \sum_{\ell=1}^\infty \left|\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_k,\widehat{e}_\ell\rangle\right|}{\kappa^2 \left|\Re\left(\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_j,\widehat{e}_j\rangle\right)\right| \left|\Re\left(\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_k,\widehat{e}_k\rangle\right)\right|} < \frac{1}{\rho^2}, \tag{3.27}$$

其中 $\widehat{e}_j(\widehat{z}) = \widehat{z}^{\alpha(j)}$ 是新坐标 $\widehat{z} = P^{-1}z$中的单项式，则(3.24) 在 $\mathbb{D}^n(\rho)$ 上（或在 $\mathbb{X}^n(\rho)$上）是全局一致渐近稳定的。此外，级数

$$V(z) = \sum_{k=1}^\infty \epsilon_k \left|\left(P^{-1}z\right)^{\alpha(k)}\right|^2$$

是 $\mathbb{D}^n(\rho)$ （或在 $\mathbb{X}^n(\rho)$）上的公共李雅普诺夫函数。

证明。 我们将 $N \overset{\text{def}}{=} (n^2-n)/2$ 记为雅可比矩阵 $J\widehat{F}^{(i)}(0)$ 中上方非对角项的数量。由引理 3.7、推论 3.5和注释 2.15 可知，假设 3-4 成立。此外，显然 $\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}e_j, e_j\rangle < 0$对所有 j 以及 i (见注释 3.4）。根据定理 3.2 及序列

(3.28)
$$\begin{cases} b_{jj}^{(i)} = (1-\xi-\kappa) & \\ b_{jk}^{(i)} = \dfrac{\xi}{2N} & \text{if } j\neq k \text{ with } |\alpha(j)| = |\alpha(k)|, \text{ and if } \left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_k,\widehat{e}_j\right\rangle \neq 0 \text{ or } \left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_j,\widehat{e}_k\right\rangle \neq 0 \\ b_{jk}^{(i)} = 0 & \text{if } |\alpha(j)| = |\alpha(k)|, \left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_k,\widehat{e}_j\right\rangle = 0 \text{ and } \left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_j,\widehat{e}_k\right\rangle = 0 \\ b_{jk}^{(i)} = \dfrac{\kappa}{2}\dfrac{\left|\left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_k,\widehat{e}_j\right\rangle\right|}{\sum_{\ell=1}^\infty \left|\left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_\ell,\widehat{e}_j\right\rangle\right|} & \text{if } |\alpha(k)| < |\alpha(j)| \\ b_{jk}^{(i)} = \dfrac{\kappa}{2}\dfrac{\left|\left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_j,\widehat{e}_k\right\rangle\right|}{\sum_{\ell=1}^\infty \left|\left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_j,\widehat{e}_\ell\right\rangle\right|} & \text{if } |\alpha(k)| > |\alpha(j)| \end{cases}$$

其中 $\xi \in]0,1[$ 和 $\kappa \in]0,1[$。由注释 2.17 中的 (2.15) 以及雅可比矩阵 $J\widehat{F}^{(i)}(0)$ 为上三角矩阵这一事实可知，对于固定的 j，以及所有满足 $|\alpha(k)| = |\alpha(j)|$ 的 $k \neq j$，至多有 N 个非零值 $\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_k, \widehat{e}_j\rangle$，且至多有 N 个非零值 $\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_j, \widehat{e}_k\rangle$。因此，序列 $b_{jk}^{(i)}$ 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{jk}^{(i)} < (1-\xi-\kappa) + \xi + \frac{\kappa}{2}\frac{\sum_{k=1}^{j}\left|\left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_k, \widehat{e}_j\right\rangle\right|}{\sum_{\ell=1}^{\infty}\left|\left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_\ell, \widehat{e}_j\right\rangle\right|} + \frac{\kappa}{2}\frac{\sum_{k=j+1}^{\infty}\left|\left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_j, \widehat{e}_k\right\rangle\right|}{\sum_{\ell=1}^{\infty}\left|\left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_j, \widehat{e}_\ell\right\rangle\right|} < 1.$$

元素 $Q_{jk}^{(i)}$ 由双重序列 (3.7) 给出，见 3.29

( )

$$Q_{jk}^{(i)} = \begin{cases} \dfrac{D^2\left|\left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_k, \widehat{e}_j\right\rangle\right|^2}{\xi^2\left|\Re\left(\left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_j, \widehat{e}_j\right\rangle\right)\right|\left|\Re\left(\left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_k, \widehat{e}_k\right\rangle\right)\right|} & \text{if } |\alpha(j)| = |\alpha(k)| \\ \dfrac{\sum_{\ell=1}^{\infty}\left|\left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_\ell, \widehat{e}_j\right\rangle\right|\sum_{\ell=1}^{\infty}\left|\left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_k, \widehat{e}_\ell\right\rangle\right|}{\kappa^2\left|\Re\left(\left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_j, \widehat{e}_j\right\rangle\right)\right|\left|\Re\left(\left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_k, \widehat{e}_k\right\rangle\right)\right|} & \text{if } |\alpha(k)| \neq |\alpha(j)| \text{ and } \left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_k, \widehat{e}_j\right\rangle \neq 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

∞ ∞我们注意到， $\sum\left|\left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_\ell,\ \widehat{e}_j\right\rangle\right|$和 $\sum\left|\left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_k,\ \widehat{e}_\ell\right\rangle\right|$根据该假设均为有限值。

接下来，我们证明条件（ 3 25 3 26 $Q_{jk}^{(i)} < 1$ $|\alpha\ j\ | =$。）和 $|\alpha\ k\ |$ 2 15 3 29 （。）意味着如果（） （）。事实上，由（。）和（。）可知，后一个不等式等价于

$$\alpha_q^2(k)|[J\widehat{F}^{(i)}(0)]_{qr}|^2 < \frac{\xi^2}{N^2}\left|\sum_{\ell=1}^{n}\alpha_\ell(j)\Re([J\widehat{F}^{(i)}(0)]_{\ell\ell})\right|\left|\sum_{\ell=1}^{n}\alpha_\ell(k)\Re([J\widehat{F}^{(i)}(0)]_{\ell\ell})\right|$$

对于所有满足 $\alpha(j) = (\alpha_1(k)\ \cdots,\ \alpha_q(k)-1,\ \cdots,\ \alpha_r(k)+1,\ \cdots,\ \alpha_n(k))$ 的 $j > k$，其中某个$q < r$。由于（上三角）雅可比矩阵 $J\widehat{F}^{(i)}(0)$ 的对角元素就是特征值，因此其具有负实部，所以最严格的情况是对所有 $l \neq q$ 均有 $\alpha_\ell(k) = 0$，由此得到

$$\alpha_q^2(k)|[J\widehat{F}^{(i)}(0)]_{qr}|^2 < \frac{\xi^2}{N^2}\left|(\alpha_q(k)-1)\Re([J\widehat{F}^{(i)}(0)]_{qq}) + \Re([J\widehat{F}^{(i)}(0)]_{rr})\right|\left|\alpha_q(k)\Re([J\widehat{F}^{(i)}(0)]_{qq})\right|.$$

当 α_q（k） $= 1$时，该不等式等价于（3.25）。当 α_q（k） > 1时，我们可以改写为

$$(\alpha_q(k)-1)|[J\widehat{F}^{(i)}(0)]_{qr}|^2 + |[J\widehat{F}^{(i)}(0)]_{qr}|^2 < \frac{\xi^2}{N^2}\left((\alpha_q(k)-1)\left|\Re([J\widehat{F}^{(i)}(0)]_{qq})\right|^2 + \left|\Re([J\widehat{F}^{(i)}(0)]_{rr})\right|\left|\Re([J\widehat{F}^{(i)}(0)]_{qq})\right|\right).$$

利用（3.25），上述不等式成立的条件是

$$(\alpha_q(k)-1)|[J\widehat{F}^{(i)}(0)]_{qr}|^2 < \frac{\xi^2}{N^2}(\alpha_q(k)-1)\left|\Re([J\widehat{F}^{(i)}(0)]_{qq})\right|^2,$$

这等价于（3.26）。

当 $Q_{jk}^{(i)} < 1$ 对于 $|\alpha(j)| = |\alpha(k)|$时，很容易看出 $Q_{jk}^{(i)} > 1$ 对于$|\alpha(j)| > |\alpha(k)|$。因此，条件（3.27）意味着 $\max_{i=1,\ \cdots,\ m}$ 上极限$_{j\in\mathbb{N}}\max_{k=1,\ldots,j-1} Q_{jk}^{(i)} \overset{\text{def}}{=} Q < 1/\rho^2$

并且（3.8）得出

$$\epsilon_j \sim \max_{k\in\mathcal{K}_j}\{\epsilon_k Q\} \tag{3.30}$$

对于 $j \gg 1$，其中

$$\mathcal{K}_j = \{k \in 1,\dots,j-1 : \left\langle L_{\widehat{F}^{(i)}}\widehat{e}_k, \widehat{e}_j\right\rangle \neq 0 \text{ for some } i \in \{1,\dots,m\} \text{ and } |\alpha(k)| < |\alpha(j)|\}.$$

因此，序列 (3.30) 得出 $\epsilon_j = \mathcal{O}(Q^{|\alpha(j)|})$。由此可知，(3.14) 在 $S = P^{-1}(\mathbb{D}^n) \subseteq \mathbb{D}^n$（或在 $S = P^{-1}(\mathbb{X}^n) \subseteq \mathbb{X}^n$）上收敛，而引理 3.7 表明 (3.15) 和 (3.16) 在 S 上收敛。定理 3.2 表明，切换系统 $\left\{\dot{\hat{z}} = \widehat{F}_{(i)}(\hat{z})\right\}_{i=1}^{m}$ 在 S 上全局一致渐近稳定，因此系统 (3.24) 在 $\mathbb{D}^n(\rho)$（或在 $\mathbb{X}^n(\rho)$）上全局一致渐近稳定。

此外，由定理 3.2 可推得

$$\widehat{V}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \left|\hat{z}^{\alpha(k)}\right|^2$$

是 $\left\{\dot{\hat{z}} = \widehat{F}_{(i)}(z)\right\}_{i=1}^{m}$ 在 S 上的控制李雅普诺夫函数。如果定义 $V = \widehat{V} \circ P^{-1}$：$\mathbb{D}^n(\rho) \to \mathbb{R}^+$（或$\mathbb{X}^n(\rho) \to \mathbb{R}^+$），则得到控制李雅普诺夫函数

$$V(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \left|\left(P^{-1}z\right)^{\alpha(k)}\right|^2$$

对于切换非线性系统 (3.24)。 □

备注3.11. 推论 3.8 和 3.10 的结果有可能推广至其他具有加权单项式基底的解析函数再生核希尔伯特空间。为此，应根据单项式的权重系数调整序列 $b_{jk}^{(i)}$ ω_α，同时仍满足定理 3.2中要求的条件。

对于雅可比矩阵 $JF^{(i)}(0)$ 可同时对角化（即它们可对角化且彼此可交换）的特殊情形，对角占优条件 (3.25) 和 (3.26) 显然成立。需要指出的是，交换这一李代数性质仅适用于雅可比矩阵$JF^{(i)}(0)$，这一假设与 [17], [35] 和 [39]中对向量场施加的交换性质形成对比。

备注 3.12. 与备注 3.9类似，我们可以使用（截断）级数

$$V(z) = \sum_{k=1}^{k_{max}} Q^{2|\alpha(k)|}\left|\left(P^{-1}z\right)^{\alpha(k)}\right|^2 \tag{3.31}$$

在推论 3.10中得到，并作为候选控制李雅普诺夫函数来估计吸引域。同样，无需要求流在多圆盘（或超立方体）上的不变性。

注3.13. 在 $n = 1$ 的情形下，我们可由推论 ∞3.10 得到切换3.10 系统显然具有 GUAS 性质。事实上，考虑向量场 $F^{(i)}(z) = \sum a_k^{(i)} z^k{}_{k=1}$

∞在 $\mathbb{D}$（或在 $]-1,1[$）上，其中 $\sum|a_k^{(i)}|<\infty$，并假设子系统在原点处具有一个$_{k=1}$全局稳定平衡点。由标量$JF^{(i)}$(0)生成的李代数显然是可解的，并且 $\mathbb{D}(\rho)$（或在 $]-\rho,\rho[$）对所有 ρ 都是正向不变的。此外，条件 (3.25) 和 (3.26) 显然成立。因此，推论 3.10 表明，切换系统在 $\mathbb{D}(\rho)$（或在 $]-\rho,\rho[$）上对于满足 (3.27) 的 $\rho\in]0,1]$ 是 GUAS 的。由 (2.14) 可得

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}|\langle L_{F^{(i)}}e_\ell,e_j\rangle|=\sum_{\ell=1}^{j}\ell|a_{j-\ell+1}^{(i)}|=\sum_{\ell=1}^{j}(j-\ell+1)|a_\ell^{(i)}|,$$

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}|\langle L_{F^{(i)}}e_k,e_\ell\rangle|=k\sum_{\ell=1}^{\infty}|a_\ell^{(i)}|,$$

并且 $|\Re(\langle e_j,\ L_{F^{(i)}}e_j\rangle)|=j\left|\Re(a_1^{(i)})\right|$。由于 κ 可以任意接近于 1（因为 ξ 在（3.25）和（3.26）中可以任意小），条件（3.27）可改写为

$$\max_{i=1,\cdots,m}\limsup_{j\in\mathbb{N}}\frac{\sum_{\ell=1}^{j}(j-\ell+1)|a_\ell^{(i)}|\sum_{\ell=1}^{\infty}|a_\ell^{(i)}|}{j\left|\Re(a_1^{(i)})\right|^2}<\frac{1}{\rho^2}$$

并且，利用 $(j-\ell+1)|a_\ell^{(i)}|\le j|a_\ell^{(i)}|$ 对所有 $\ell\le j$ 均成立，可得

$$\rho<\min_{i=1,\cdots,m}\frac{\sum_{\ell=1}^{\infty}|a_\ell^{(i)}|}{\left|\Re(a_1^{(i)})\right|}.$$

4. 示例。本节给出两个示例来说明我们的结果。我们将重点讨论满足推论3.8 和 3.10 假设的具体情形，并且不失一般性，直接考虑具有三角形式的雅可比矩阵。

4.1. 示例 1：多项式向量场。考虑正方形上的向量场 $\mathbb{X}^2$

$$\begin{aligned}F^{(1)}(x_1,x_2)&=\left(-x_1,-x_2-0.1x_1^3\right)\\F^{(2)}(x_1,x_2)&=\left(-x_1,-x_2-0.1x_1^4\right).\end{aligned}\tag{4.1}$$

对于两个子系统，原点是唯一的平衡点，并且全局渐近稳定。正方形 $\mathbb{X}^2$ 相对于 $F^{(i)}$的流是不变的。实际上，对于所有 $x\in\partial\mathbb{X}^2$（即对于某个 l，有 $|x_\ell|=1$），需要验证 $F_\ell^{(i)}(x)\ x_\ell\le 0$。我们有

- $|x_1|=1\Rightarrow F_1^{(1)}(x)x_1=-x_1^2=-1<0,$
- $|x_2|=1\Rightarrow F_2^{(1)}(x)x_2=-x_2^2-0.1x_1^3x_2=-1-0.1x_1^3x_2<0,$ since $|x_1|^3<1.$

对于 F，同样可以得到这一结果。

根据（2.14），Koopman 矩阵 $L_{F^{(1)}}$ 和 $L_{F^{(2)}}$ 的各项为

$$\langle L_{F^{(1)}}e_k,e_j\rangle=\begin{cases}-|\alpha(j)| & \text{if } k=j\\ -0.1\,(\alpha_2(j)+1) & \text{if } \alpha_1(k)=\alpha_1(j)-3\ge 0 \text{ and } \alpha_2(k)=\alpha_2(j)+1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

and

$$\langle L_{F^{(2)}} e_k, e_j \rangle = \begin{cases} -|\alpha(j)| & \text{if } k = j \\ -0.1\,(\alpha_2(j)+1) & \text{if } \alpha_1(k) = \alpha_1(j) - 4 \geq 0 \text{ and } \alpha_2(k) = \alpha_2(j) + 1 \\ 0 & \text{otherwise .} \end{cases}$$

此外， $K^{(1)} = K^{(2)} = 1$ 并且条件（3.19）可改写为

$$Q = \limsup_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ |\alpha(j)|>4}} \max \left\{ \frac{0.01\,(\alpha_1(j)+1)^2}{|\alpha(j)|\,(|\alpha(j)|-3)}, \frac{0.01\,(\alpha_2(j)+1)^2}{|\alpha(j)|\,(|\alpha(j)|-4)} \right\} = 0.01.$$

因此，根据推论 3.8 可知，切换系统（4.1）在 $\mathbb{X}^2$ 中是全局一致渐近稳定的。如备注 3.9所述，我们有以下候选控制李雅普诺夫函数

$$V(x) = \sum_{k=1}^{k_{max}} \epsilon_k \left| x^{\alpha(k)} \right|^2, \tag{4.2}$$

其中 $\epsilon_1 = 1$ 且 $\epsilon_k = Q$ 对所有 $k > 1$。位于 V 中的区域 $\dot{V} < 0$ 的最大水平集给出了原点吸引域的内近似。如图 1所示，该近似比通过线性化切换系统计算得到的二次控制李雅普诺夫函数所获得的近似更大。

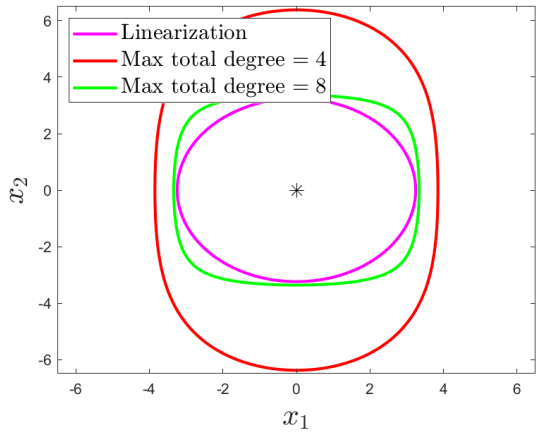

FIG. 1。 *For the switched system 4 1 the region of attraction is estimated with the quadratic (。) CLF V x1 x2 = x1^2 + x2^2 (magenta curve) with the CLF 4 2truncated to the total degree 4 (i.e. (,), (。) kmax = 5) (red curve) and with 4 2 truncated to the total degree 8 (i.e. kmax = 14) (green curve). , (。)*

4.2. 示例 2：解析向量场。以下示例的灵感源自 [1] 和 [11]。

考虑由以下向量场定义的切换系统

$$\begin{aligned} F^{(1)}(x_1, x_2) &= \left(-x_1 + \eta \sin^2(x_1) x_2^2, -x_2\right) \\ F^{(2)}(x_1, x_2) &= \left(-x_1 + \eta \cos^2(x_1) x_2^2, -x_2\right), \end{aligned} \tag{4.3}$$

其中 $\eta \in]0,\ 1]$。两个子系统都在原点处有一个平衡点，该平衡点在 $\mathbb{R}^2$ 中全局渐近稳定（参见 [11] 中的类似论证）。对于所有 $\rho \leq 1$，正方形 $\mathbb{X}^2(\rho)$ 相对于 $F^{(i)}$ 的流是不变的。事实上，我们有

- $|x_1| = \rho \Rightarrow F_1^{(1)}(x)x_1 = -\rho + \eta x_1 x_2^2 \sin^2(x_1) < 0$ since

$$\left|\eta x_1 x_2^2 \sin^2(x_1)\right| \leq \eta\rho \left|x_2^2\right| < \eta\rho^3 \leq \rho.$$

- $|x_2| = 1 \Rightarrow F_{(1)\ 2}(x)x_2 = -\rho < 0.$

$F^{(2)}$ 也可得出相同的结果。向量场的泰勒展开为

$$\begin{aligned} F^{(1)}(x) &= \left(-x_1 + \eta \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} 2^{2p-1}}{(2p)!} x_1^{2p} x_2^2, -x_2\right) \\ F^{(2)}(x) &= \left(-x_1 + \eta x_2^2 + \eta \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p} 2^{2p-1}}{(2p)!} x_1^{2p} x_2^2, -x_2\right). \end{aligned}$$

根据（2.14），Koopman 矩阵 $L_{F^{(1)}}$ 和 $L_{F^{(2)}}$ 的各项为

$$\langle L_{F^{(1)}} e_k, e_j\rangle = \begin{cases} -|\alpha(k)| & \text{if } k = j \\ \eta\alpha_1(k) \dfrac{(-1)^{p+1} 2^{2p-1}}{(2p)!} & \text{if } \alpha_1(k) = \alpha_1(j) + 1 - 2p \geq 0 \text{ and } \alpha_2(k) = \alpha_2(j) - 2 \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$\langle L_{F^{(2)}} e_k, e_j\rangle = \begin{cases} -|\alpha(k)| & \text{if } k = j \\ \eta\alpha_1(k) & \text{if } \alpha_1(k) = \alpha_1(j) + 1 \text{ and } \alpha_2(k) = \alpha_2(j) - 2 \geq 0 \\ \eta\alpha_1(k) \dfrac{(-1)^{p} 2^{2p-1}}{(2p)!} & \text{if } \alpha_1(k) = \alpha_1(j) + 1 - 2p \geq 0 \text{ and } \alpha_2(k) = \alpha_2(j) - 2 \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 $p = 1, \cdots, \left\lfloor \frac{\alpha_1(j)}{2} - 1 \right\rfloor$。这意味着我们有

(4.4)

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{\infty} |\langle L_{F^{(1)}} e_\ell, e_j\rangle| &= |\alpha(j)| + \eta \sum_{\ell=1}^{\lfloor \frac{\alpha_1(j)-1}{2} \rfloor} \frac{(\alpha_1(j) + 1 - 2l) 2^{2l-1}}{(2l)!} \\ \sum_{\ell=1}^{\infty} |\langle L_{F^{(2)}} e_\ell, e_j\rangle| &= |\alpha(j)| + \eta\left(\alpha_1(j) + 1\right) + \eta \sum_{\ell=1}^{\lfloor \frac{\alpha_1(j)-1}{2} \rfloor} \frac{(\alpha_1(j) + 1 - 2l) 2^{2l-1}}{(2l)!} \\ \sum_{\ell=1}^{\infty} |\langle L_{F^{(1)}} e_k, e_\ell\rangle| &= |\alpha(k)| + \eta\alpha_1(k) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2^{2p-1}}{(2p)!} = |\alpha(k)| + \eta\alpha_1(k) \frac{\cosh(2) - 1}{2} \\ \sum_{\ell=1}^{\infty} |\langle L_{F^{(2)}} e_k, e_\ell\rangle| &= |\alpha(k)| + \eta\alpha_1(k) \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2^{2p-1}}{(2p)!}\right) = |\alpha(k)| + \eta\alpha_1(k) \frac{\cosh(2) + 1}{2}. \end{aligned}$$

由于雅可比矩阵 $JF^{(i)}(0)$ 为对角矩阵，因此条件（3.25）和（3.26）显然成立（ξ 可任意小）。此外，由（4.4）可知

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} |\langle L_{F^{(1)}} e_\ell, e_j\rangle| \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} |\langle L_{F^{(2)}} e_\ell, e_j\rangle| \text{ and } \sum_{\ell=1}^{\infty} |\langle L_{F^{(1)}} e_k, e_\ell\rangle| \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} |\langle L_{F^{(2)}} e_k, e_\ell\rangle| \text{ for}$$

对所有 k， j。因此，当 κ 任意接近 1 时，条件（3.27）可改写为

$$\limsup_{j\in\mathbb{N}} \max_{k=1,\dots,j-1} \frac{\sum_{\ell=1}^{\infty} |\langle L_{F^{(2)}} e_\ell, e_j\rangle| \sum_{\ell=1}^{\infty} |\langle L_{F^{(2)}} e_k, e_\ell\rangle|}{|\Re\left(\langle L_{F^{(2)}} e_j, e_j\rangle\right)| \, |\Re\left(\langle L_{F^{(2)}} e_k, e_k\rangle\right)|} < \frac{1}{\rho^2},$$

该条件可验证为 $\rho = \left(1 + \frac{\eta}{2}(\cosh(2)+1)\right)^{-1}$。事实上，由（4.4）可得

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{\infty} |\langle L_{F^{(2)}} e_\ell, e_j\rangle| &< |\alpha(j)| + \eta\,(\alpha_1(j)+1)\left(1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2^{2l-1}}{(2l)!}\right) \\
&= |\alpha(j)| + \eta\,(\alpha_1(j)+1)\,\frac{\cosh(2)+1}{2} \\
&\le |\alpha(j)|\left(1 + \frac{\eta}{2}(\cosh(2)+1)\right).
\end{aligned}$$

and

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} |\langle L_{F^{(2)}} e_k, e_\ell\rangle| \le |\alpha(k)|\left(1 + \frac{\eta}{2}(\cosh(2)+1)\right).$$

由推论 3.10 可知，该切换系统在 $\mathbb{X}^2$(ρ 上全局一致渐近稳定。不同 2 取值下 ρ 的变化见 η。

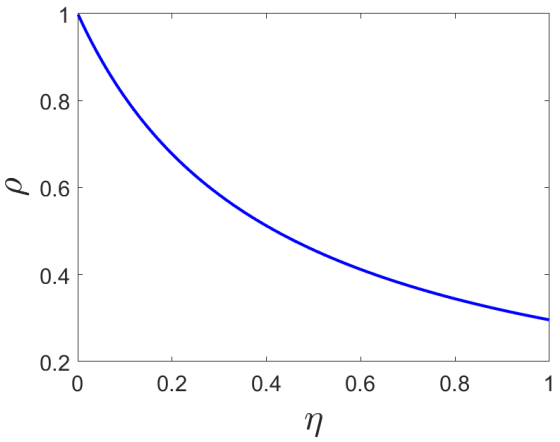

FIG. 2。

The switched system is shown to be GUAS on a hypercube of edge length 2ρ *that depends on the parameter* η.

如注 3.12所示，我们有候选控制李雅普诺夫函数

$$V(x) = \sum_{k=1}^{k_{max}} Q^{2|\alpha(k)|} \left|x^{\alpha(k)}\right|^2 \tag{4.5}$$

其中 $Q = 1/\rho$。相应的吸引域估计如图 3 所示，并可与利用线性化切换系统计算得到的二次控制李雅普诺夫函数所给出的（较小）近似结果进行比较。

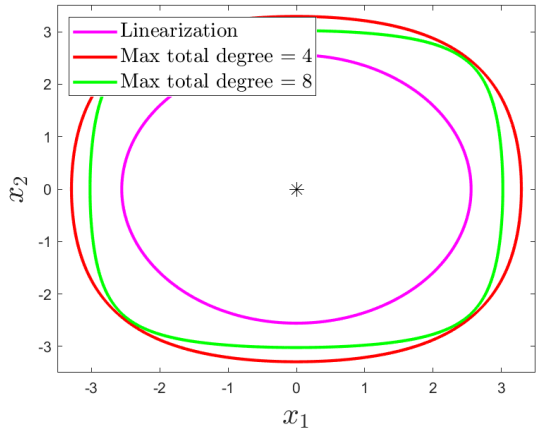

FIG. 3. *For the switched system (4.3) with $\eta = 1$, the region of attraction is estimated with (a), the quadratic CLF $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ (magenta curve), with the CLF (4.5) truncated to the total degree 4 ($k_{max} = 5$) (red curve), and with (4.5), (b) truncated to the total degree 8 ($k_{max} = 14$) (green curve).*

5. 结论与展望。 本文针对满足李代数可解性条件的切换非线性系统的一致稳定性问题取得了新的进展。首先，我们证明了对非线性向量场施加可解性条件并不能保证公共不变旗的存在，因此，我们仅对向量场的线性部分施加可解性条件。随后，我们利用再生核希尔伯特空间上的Koopman生成元的伴随算子，构造了一个等价的无限维切换线性系统，并为其构造了公共李雅普诺夫泛函；具体而言，所考虑的空间为多圆盘上的Hardy空间（或实超立方体上的相应空间）。最后，我们通过求值泛函导出了公共李雅普诺夫函数，从而证明特定的切换非线性系统在不变集上一致全局渐近稳定。我们的研究充分依托Koopman算子框架，这一框架似乎能够从全新的角度有效解决理论问题。

我们展望了未来研究的几个方向。首先，我们的结果可以推广到其他具有加权单项式基的解析函数空间。由于我们的主要结果涵盖了一般的再生核希尔伯特空间，因此我们还可以更进一步，考虑解析函数空间之外的其他空间，从而研究其他类型的（非解析）向量场。在此背景下，应当考察我们的一般假设（例如存在不变旗）的保守性。同样，我们的结果适用于李代数可解性条件框架内特定类型的切换非线性系统。它们可以推广到更一般的动力学，包括具有极限环或一般吸引子的动力学。同样，本文提出的基于Koopman算子的技术也可以用于研究一致稳定性以外的其他稳定性类型。更重要的是，所得稳定性结果仅适用于有界不变集，这主要是由于李雅普诺夫函数的收敛性质，以及多圆盘（或实超立方体）上 Hardy 空间的定义本身所致。我们设想，这些结果或许可以推广，以推断 $\mathbb{R}^n$ 中的全局稳定性。最后，我们的结果并不局限于切换系统，并且对以下系统

的全局稳定性性质也有直接启示：非线性动力系统；相关内容将在未来的论文中进行研究。

附录 A. 一般定理。
这里回顾一些用于证明我们结果的一般性结论。

THEOREMA.1（有界域的最大模原理 [32]）。设$D \subset \mathbb{C}^n$ 为有界域，且 $f : D \to \mathbb{C}$ 为连续函数，其在 D 上的限制是全纯的。那么 $|f|$ 在边界 ∂D上取得最大值。

THEOREMA.2（阿贝尔多维引理 [32] 第 36 页）。设 $\sum a_\alpha z^\alpha$ 为$\alpha\in\mathbb{N}^n$幂级数。若存在 $r \in \mathbb{C}^n$ 使得 $\sup|a_\alpha r^\alpha| < \infty$，则级数$\alpha\in\mathbb{N}^n\sum a_\alpha z^\alpha$ 对所有满足 $|z_1| < |r_1|$, $\cdots, |z_n| < |r_n|$ 的 $z \in \mathbb{C}^n$ 都正规收敛。$\alpha\in\mathbb{N}^n$

$+\infty$THEOREM A.3（魏尔斯特拉斯 M 判别法）。设 $\sum f_n(z)$ 是定义在$k=1$域 D 上的 $\mathbb{C}^n$函数级数。若存在实数序列 M_k 使得

- $M_k > 0$ 对所有 k,$+\infty$
- 数项级数 $\sum M_k$ 收敛，且$k=1$
- $\forall k, \forall z \in D, |f_k(z)| \leq M_k$.

$+\infty$那么级数 $\sum f_n(z)$ 在 D上一致绝对收敛。$k=1$

THEOREMA.4（李定理 [7] 第49页）。设 X 是一个非零的 n复向量空间，且 $\mathfrak{g}$ 是 $n \times n$ 复矩阵李代数中的一个可解李子代数。那么 X 存在一组基$(v_1, \ldots, v_n)$ 使得相对于该基， $\mathfrak{g}$ 的每个元素都具有上三角形式。

参考文献

[1] D. ANGELI AND D. LIBERZON, *A note on uniform global asymptotic stability of nonlinear switched systems in triangular form* 14 , 载于数学网络与系统理论国际研讨会（MTNS）论文集，2000年。[2] M. BUDIŠIĆ, R. MOHR, AND I. MEZIĆ, *Applied Koopmanism*, 《Chaos：非线性科学跨学科期刊》，22（2012年），第047510页。[3] R.-Y. CHEN AND Z.-H. ZHOU, *Parametric representation of infinitesimal generators on the polydisk* 10 2016 725 735 , 《复分析与算子理论》， （），第–页。[4] M. CONTRERAS, C. DE FABRITIIS, AND S. DÍAZ-MADRIGAL, *Semigroups of holomorphic func-tions in the polydisk*, 《美国数学会会刊》，139（2011年），第1617–1624页。[5] C. DUBI, *An algorithmic approach to simultaneous triangularization*, 《线性代数及其应用》，430（2009年），第2975–2981页。[6] K.-J. ENGEL, R. NAGEL, AND S. BRENDLE, *One-parameter semigroups for linear evolution equations* 194, 2000 , 第卷。Springer，。[7] K. ERDMANN AND M. J. WILDON, *Introduction to Lie algebras*，第122卷，Springer，2006年。[8] M. IKEDA, I. ISHIKAWA, AND C. SCHLOSSER, *Koopman and perron–frobenius operators on reproducing kernel banach spaces*, 《Chaos：非线性科学跨学科期刊》，32（2022年），第123143页。[9] A. KATAVOLOS AND H. RADJAVI, *Simultaneous triangularization of operators on a banach space*, 《伦敦数学会杂志》，2（1990年），第547–554页。[10] A. LASOTA AND M. C. MACKEY, *Chaos, fractals, and noise: stochastic aspects of dynamics*，第97卷，施普林格科学与商业媒体，1998年。

[11] D. Liberzon, *Switching in systems and control*, 第190卷, Springer, 2003年。[12] D. Liberzon, *Lie algebras and stability of switched nonlinear systems*, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州/牛津, 2004年, 第203–207页。[13] D. Liberzon, *Switched systems : Stability analysis and control synthesis*, 2013年。[14] D. Liberzon, *Commutation relations and stability of switched systems: a personal history*, arXiv预印本 arXiv:2304.11155, (2023年)。[15] D. Liberzon, J. P. Hespanha, and A. S. Morse, *Stability of switched systems: a Lie-algebraic condition* 37 1999 117 122 , 《系统与控制快报》, ()，第–页。[16] D. Liberzon and A. S. Morse, *Basic problems in stability and design of switched systems*, 《IEEE控制系统杂志》, 19（1999年）, 第59–70页。[17] J. L. Mancilla-Aguilar, *A condition for the stability of switched nonlinear systems*, 《IEEE自动控制汇刊》, 45（2000年）, 第2077–2079页。[18] M. Margaliot and D. Liberzon, *Lie-algebraic stability conditions for nonlinear switched systems and differential inclusions* 55 2006 8 16 , 《系统与控制快报》, ()，第–页。[19] A. Mauroy and I. Mezić, *Global stability analysis using the eigenfunctions of the Koopman operator* 61 2016 3356 3369 , 《IEEE自动控制汇刊》, ()，第–页。[20] A. Mauroy, Y. Susuki, and I. Mezić, *Koopman operator in systems and control*, Springer, 2020年。[21] I. Mezić, *Spectral properties of dynamical systems, model reduction and decompositions*, 《非线性动力学》, 41（2005年）, 第309–325页。[22] I. Mezić, *Analysis of fluid flows via spectral properties of the Koopman operator*, 《流体力学年度评论》, 45（2013年）, 第357–378页。[23] Y. Mori, T. Mori, and Y. Kuroe, *A solution to the common Lyapunov function problemfor continuous-time systems*, 载于第36届IEEE决策与控制会议论文集, 第4卷, 1997年, 第3530–3531页, 第4卷, https://doi.org/10.1109/CDC.1997.652397。[24] K. S. Narendra and J. Balakrishnan, *A common Lyapunov function for stable lti systems with commuting a-matrices* 39 1994 2469 , 《IEEE自动控制汇刊》, ()，第–2471页。[25] V. I. Paulsen and M. Raghupathi, *An introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces* 152, 2016 , 第卷。剑桥大学出版社, 。[26] J. A. Rosenfeld, R. Kamalapurkar, L. F. Gruss, and T. T. Johnson, *Dynamic mode decomposition for continuous time systems with the liouville operator*, 《非线性科学杂志》, 32（2022年）, 第1–30页。[27] J. A. Rosenfeld, R. Kamalapurkar, B. Russo, and T. T. Johnson, *Occupation kernels and densely defined liouville operators for system identification*, 载于2019年IEEE第58届决策与控制会议（CDC）论文集, IEEE, 2019年, 第6455–6460页。[28] J. A. Rosenfeld, B. Russo, R. Kamalapurkar, and T. T. Johnson, *The occupation kernel method for nonlinear system identification* 1909 11792, 2019 , arXiv预印本 arXiv:。()。[29] W. Rudin, *Function Theory in Polydiscs*, 数学讲义系列, W. A. Benjamin, 1969年, https://books.google.be/books?id=9waoAAAAIAAJ。[30] W. Rudin, *Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$*, 施普林格科学与商业媒体, 2008年。[31] B. P. Russo and J. A. Rosenfeld, *Liouville operators over the hardy space*, 《数学分析与应用杂志》, 508（2022年）, 第125854页。[32] V. Scheidemann, *Introduction to complex analysis in several variables*, Springer, 2005年。[33] J. H. Shapiro, *Composition operators: and classical function theory*, 施普林格科学与商业媒体, 2012年。[34] Y. Sharon and M. Margaliot, *Third-order nilpotency, finite switchings and asymptotic sta-bility*, 载于第44届IEEE决策与控制会议论文集, IEEE, 2005年, 第5415–5420页。[35] H. Shim, D. Noh, and J. H. Seo, *Common Lyapunov function for exponentially stable non-linear systems* 2001 , 。[36] R. Shorten and K. Narendra, *On the stability and existence of common Lyapunov functions for stable linear switching systems*, 载于第37届IEEE决策与控制会议论文集（目录编号98CH36171）, 第4卷, IEEE, 1998年, 第3723–3724页。[37] R. Shorten, F. Wirth, O. Mason, K. Wulff, and C. King, *Stability criteria for switched and hybrid systems* 49 2007 545 592 , 《SIAM评论》, ()，第–页。[38] I. Steinwart and A. Christmann, *Support vector machines*, 施普林格科学与商业媒体, 2008年。[39] L. Vu and D. Liberzon, *Common Lyapunov functions for families of commuting nonlinear systems* 54 2005 405 416 , 《系统与控制快报》, ()，第–页。[40] C. M. Zagabe and A. Mauroy, *Switched nonlinear systems in the Koopman operator framework: Toward a Lie-algebraic condition for uniform stability*, 载于2021年欧洲控制

会议（ECC），IEEE，2021，第 281–286 页。