arXiv:2301.05534v1 [math.DS] 13 Jan 2023

全局动力学与全纯叶状结构奇点的视角

JULIO REBELO 和 HELENA REIS

Abstract. 在维数大于或等于 3 的情形下，奇异全纯叶状结构的局部结构中蕴含着一个定义在低一维射影空间上的全局叶状结构。本文将探讨后者的全局动力学如何影响若干表面上具有纯局部性质的问题。在讨论过程中，我们还将回顾该领域近期的一些成果和未决问题。

Contents

1. 引言 1 2. 叶状结构局部理论基础及二维这一特殊情形 3 3. 问题分解：核心动力学与消解 7 4. 三维消解定理 14 5. 不变解析集 21 6. 半完备向量场、自同构群与分离曲线 30 参考文献 42

1. Introduction

本文所讨论的所有叶状结构均为全纯且（可能）奇异。尽管我们的主要研究对象是一维全纯叶状结构以及全纯/亚纯向量场，余维 1 叶状结构在讨论中也发挥着重要作用，尤其是在环境空间为三维时；准确的定义见第2节。定义在某个复流形 M 上的一维叶状结构通常记作 $\mathcal{F}$，而 $\mathcal{D}$ 则表示余维 1 叶状结构。本文旨在讨论环境流形 M 的维数为 3 时一维叶状结构局部理论的近期成果与未决问题，不过偶尔也会涉及高维情形下的结果与问题。

本文基本上不讨论定义在复曲面（即二维复流形）上的叶状结构，主要是因为它们的局部理论远比高维情形成熟。事实上，第 2 节只提及这些奇点，目的也仅仅是指出若干使其十分特殊、因而适合进行极其细致分析的问题。这样一来，我们便能挑出一个贯穿本文讨论的最根本问题：在满足 $n \geq 3$ 的条件下，定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的一维叶状结构的芽 $\mathcal{F}$ 所固有地关联的一种全局动力学现象。换言之，虽然这种说法略显含糊，却更为直截了当：要理解定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的 $\mathcal{F}$ 一维叶状结构的芽 $n \geq 3$，就必须描述定义在 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 上的叶状结构；作为一个全局对象，它可能呈现出极其复杂的动力学行为（参见第 3 节）。我们通常将这里所说的全局叶状结构称为该（局部）

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 34M35，32M25；次要分类 34M45，32M05。

叶状结构 $\mathcal{F}$的核心叶状结构。我们也会用“ $\mathcal{F}$ 的核心动力学”来指与 $\mathcal{F}$相关联的核心叶状结构的动力学。

本文的核心主线是：对于定义在 $(\mathbb{C}^n,0)$ 上的一维全纯叶状结构的奇点，在 $n \geq 3$ 的条件下，存在一种内在附属于其结构的全局动力系统，而这一系统也有相应的影响。基本上，我们将讨论：如果能够准确描述上述动力学，可以证明哪些类型的结果；类似地，哪些一般性问题可以为我们提供工具，以确保这种动力学“足够温和”，从而能够被描述，同时也要牢记，在一般情形下，这种动力学可能极其复杂。

本文结构如下。第2节将介绍标准术语，并回顾奇异叶状结构的一些基本特征，尤其指出一维叶状结构与余维 1 叶状结构之间的根本区别。随后，我们聚焦于定义在 $(\mathbb{C}^2,0)$ 上的叶状结构奇点这一特殊情形。尽管这一情形的显著特点在于叶状结构同时具有一维和余维 1 的性质，我们仍将相当深入地探讨那些使这一精妙理论得以建立、并能涵盖真正细致问题的主要二维问题。

在第 3 节中，我们介绍一个基本对象：对于定义在 $(\mathbb{C}^n)$ 上且满足 $n \geq 3$ 的（一维）叶状结构的奇点，该对象是存在的，即核心动力学。这是定义在 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 上的全局叶状结构，其（全局）动力学构成了彻底理解初始奇点的根本障碍。特别地，我们解释了这一核心动力学如何在研究 $(\mathbb{C}^3,0)$ 上余维一叶状结构的分离曲线存在性问题时发挥主要作用。此外，我们还展示了它本身的存在基本上排除了彻底理解大类奇点的任何希望。

本综述的其余部分 посвящ于更为高级的内容，尤其涉及一些当前备受关注的开放问题。第 4 节详细回顾了 $(\mathbb{C}^3, 0)$ 上 1 维叶状结构奇点的消解定理。在这一背景下，第一个具有决定性意义的消解定理由 McQuillan 和 Panazzolo 在 [37] 中获得；而这又在很大程度上依赖于 Panazzolo 在 [39] 中提出的 Panazzolo 算法。最近，基于 Zariski 的一般点观点又得到了一种不同的证明，见 [49] ；这一证明可被视为对 Cano-Roche-Spivakovsky 在 [9] 中开展的前期工作的完成。尽管消解定理的重要性毋庸置疑，但这些结果似乎仍未像人们所预期的那样广为人知。因此，我们认为有必要对 [37] 和 [49], 中消解定理的内容进行全面讨论，并突出其优点与潜在局限性。

在第5节中，我们考察分离曲线存在性的基本问题。粗略地说，这个问题关注解析集的芽是否存在，并且这些芽在奇异叶状结构（的芽）下不变。讨论主要在 $(\mathbb{C}^3, 0)$ 中展开。承接第 3 节的讨论，我们考察由两个对易向量场张成的余维一叶状结构是否存在分离曲线，并陈述定理 5.3，对这一问题给出肯定回答。我们还详细介绍了证明该定理的一般策略；这一策略也凸显了叶状结构消解定理中一些常被忽视的要点，以及“驯化核心动力学”这一一般问题所发挥的重要作用。本节的第二部分回顾了一些关于一维叶状结构存在分离曲线的结果。第二个问题的性质更偏向拓扑／几何，“核心动力学”所起的作用小得多。不过，部分结果将在最后一节得到应用。

最后，在第6节中，我们将讨论一类特殊的一维叶状结构奇点，即支持半完备向量场的那些奇点。尽管从某种恰当的意义上说，这类奇点范围很小，但它们具有相当独特的性质，并有不少应用，值得深入研究。本节将从严格的定义和对应用的总体讨论开始。确立基本框架后，我们将继续讨论两个

该领域的基本问题：第一个问题可以粗略地表述为，在这类叶状结构中，核心动力学可以有多么复杂？这里的主要成果源自 A. Guillot 关于 Halphen 向量场及其在 SL (2, $\mathbb{C}$)-作用中所起作用的开创性论文，参见[17]。第二个问题旨在量化这类奇点可能有多么“退化”。这一问题源于 E. Ghys 很久以前提出的一个著名问题，该主题在紧致复流形自同构群的研究中有应用。

致谢。多年来，我们与许多同事进行了多次讨论，在此谨致谢意。特别感谢 D. Panazzolo，他帮助我们理解了其关于消奇点定理的基础性著作中的许多微妙之处。我们还感谢 J.-F. Mattei，感谢他多次与我们讨论并讲解他与合作者在奇点理论领域完成的浩瀚而基础性的工作。

J. Rebelo 和 H. Reis 获得了 CIMI 通过项目“群作用的复动力学、Halphen 与 Painlev´e 系统”提供的部分资助。H. Reis 还获得了项目“动力系统中的均值与极值”的部分资助，项目编号为 PTDC/MAT- PUR/4048/2021；此外，他还获得了 CMUP 的资助。CMUP 是 LASI 的成员，由国家基金通过 FCT Funda˜c˜ao para a Ciˆencia e Tecnologia, I.P. 提供经费，项目编号为 UIDB/00144/2020；同时也获得了其他资助。

2. Basics in the local theory of foliations and the special case of dimension 2

我们先回顾 1 维奇异全纯叶状结构的定义。首先，设 $X = f_1\partial/\partial x_1 + \cdots + f_n\partial/\partial x_n$ 是定义在 V（$\mathbb{C}^n$ 的开集）上的非平凡全纯向量场。于是，X 的奇异集 Sing（X）由 $\bigcap_{i=1}^{n}\{f_i = 0\}$ 给出。它是 V 的一个（真）解析子集，并且众所周知，Sing（X）具有余维 1，当且仅当坐标函数 f_i 存在一个非平凡公因子。

于是，我们可以定义本文中所研究的奇异全纯叶状结构。设 M 为一个复流形，并考虑由坐标图构成的覆盖 $\{(U_k, \varphi_k)\}$，覆盖 M。我们用 n 表示 M 的维数，因此 $\varphi_k(U_k)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个开集。

定义 2.1. 设 M 和 $\{(U_k, \varphi_k)\}$ 如上所述。M 上的 1 维奇异全纯叶状结构 $\mathcal{F}$ 由一组满足以下条件的全纯向量场 Y_k 构成：

- 对于每个 k，Y_k 都是定义在 $\varphi_k(U_k) \subset \mathbb{C}^n$ 上的全纯向量场，其奇异集的余维至少为 2。
- 每当 $U_{k_1} \cap U_{k_2} \neq \emptyset$ 时，对于某个处处不为零的全纯函数 $g_{k_1k_2}$，都有 $Y_{k_1} = g_{k_1k_2}\cdot(\varphi_{k_2} \circ \varphi_{k_1}^{-1})^* Y_{k_2}$。

叶状结构 $\mathcal{F}$ 的奇异集 Sing ($\mathcal{F}$) 定义为对 k 取并集所得的集合 $\varphi_k^{-1}(\text{Sing}\,(Y_k)) \subset M$。因此，任何全纯叶状结构的奇异集的余维至少为 2。特别地，叶状结构没有零点除子。

反过来，若全纯向量场 Y 与 $\mathcal{F}$ 相切，且 Y 的奇异集的余维至少为 2，则称其为 1 维叶状结构 $\mathcal{F}$ 的局部代表 Y。显然，代表向量场在局部意义下唯一，差别至多是相差一个可逆全纯函数的乘积。

类似地，我们也可以考虑 $V \subseteq \mathbb{C}^n$ 上的微分1-形式 ω，$\omega = g_1dx_1 + \cdots + g_ndx_n$。同样，$\omega$ 的奇异集 Sing (ω) 由交集 $\bigcap_{i=1}^{n}\{g_i = 0\}$ 给出，它是一个余维为 V 的解析集，当且仅当函数 g_1、……、g_n 存在非平凡的公因子时，其余维为 1。在奇点之外，ω 的核定义了 V 上由复超平面构成的分布。若在定义 2.1 中将“局部向量场”替换为“可积局部1-形式”，便可得到余维一叶状结构的概念。更准确地说，我们有：

定义 2.2. 设 M 是一个复流形，且 $\{(U_k, \varphi_k)\}$ 是 M 的一个坐标图覆盖。 M 上的余维 1 奇异全纯叶状结构 $\mathcal{D}$ 由一组微分一形式 Ω_k 构成，并满足以下条件：

- 对于每个 k，Ω_k 是定义在 $\varphi_k(U_k) \subset \mathbb{C}^n$ 上的微分1-形式，其奇异集的余维至少为 2，且 $\Omega_k \wedge d\Omega_k$ 恒等于零。
- 每当 $U_{k_1} \cap U_{k_2} \neq \emptyset$时，对于某个处处不为零的全纯函数 $g_{k_1k_2}$，都有 $\Omega_{k_1} = g_{k_1k_2}.(\varphi_{k_2} \circ \varphi_{k_1}^{-1})^* \Omega_{k_2}$。

特别地， $\mathcal{D}$ 的奇异集 Sing ($\mathcal{D}$) 的余维也至少为 2。余维一叶状结构 $\mathcal{D}$ 的代表一形式的概念，与 1 维叶状结构的代表向量场概念类似。

虽然本文主要关注叶状结构的芽，或者更具体地说，关注定义在 $\mathbb{C}^n$中原点邻域上的叶状结构，但读者会注意到，定义 2.1 和 2.2 中采用的整体观点对于研究奇点的局部结构确实不可或缺。事实上，全局定义的叶状结构——尤其是引言中提到的“整体动力学现象”——将在叶状结构双有理理论的背景下凸显出来；例如，若要“消解奇点”，就需要用到这一理论。

在上述定义的基础上补充几点说明也很有帮助。

注2.3。在（$\mathbb{C}^n$，0）上， $n \geq 3$，很容易看出，由弗罗贝尼乌斯条件产生的一维叶状结构与余维一叶状结构之间存在一个根本区别。为说明这一点，注意，任意选取局部全纯函数 f_1、……、f_n，自然会得到两个（奇异）分布：一个由直线构成，另一个由超平面构成。事实上，对于函数组 f_1、……、 f_n，我们可以关联向量场 $Y = f_1\partial/\partial x_1 + \cdots + f_n\partial/\partial x_n$ 或 1-形式 $\Omega = f_1dx_1 + \cdots + f_ndx_n$。虽然 Y 的局部积分曲线总会给出一个 1 维叶状结构 $\mathcal{F}$，但要使 Ω 给出余维 1 叶状结构，弗罗贝尼乌斯条件并非平凡；它要求三形式 $\Omega \wedge d\Omega$ 恒等于零，而这又导致一个涉及函数 f_1、……、 f_n 的高度非平凡偏微分方程组。

注 2.4. 一般而言，一维叶状结构十分常见，至少在代数流形中如此，而且其动力学行为可能极其复杂；关于这一点，详见第 3 节，也可参见 [24], [28]。相比之下，余维一叶状结构要刚性得多，在若干情形下还可以进行分类；至少在猜想层面上，例如， $\mathbb{CP}^n$ 上的所有余维一叶状结构都应当是横截齐性的，或者可以由定义在某个曲面上的叶状结构适当地拉回得到。关于余维一叶状结构若干整体性质的有趣讨论，请参阅 [58]。

叶状结构局部理论中的一个基本对象，也是其早期发展的重要推动因素，是分离曲线的概念。尽管分离曲线的定义取决于叶状结构的维数，但一维叶状结构与余维一叶状结构这两种情形可以自然地统一表述。

定义 2.5. 设 $\mathcal{F}$（分别为 $\mathcal{D}$）是 ($\mathbb{C}^n$, 0) 上的 1 维（分别为余维 1）叶状结构。 $\mathcal{F}$（分别为 $\mathcal{D}$）的分离曲线 S 是一个包含 $0 \in \mathbb{C}^n$ 且在 $\mathcal{F}$（分别为 $\mathcal{D}$）作用下不变的 1 维（分别为余维 1）不可约解析集的芽。

分离曲线是自然引人关注的对象，因为它们符合动力系统中“不变流形”的框架。尤其是，它们的存在可能使人能够降低相关系统相空间的维数。然而，在这里讨论的叶状结构局部理论中，分离曲线这一概念最早出现在 Briot 和 Bouquet 的经典著作中[2] ，其中声称 ($\mathbb{C}^2$,0) 上的每个叶状结构都至少存在一条分离曲线。很

后来，R. Thom 尝试将分离曲线存在性推广至 $(\mathbb{C}^3, 0)$ 上的每个余维一叶状结构。然而，第一个没有分离曲线的 $(\mathbb{C}^3, 0)$ 上的余维一叶状结构例子，是由 J.-P. Jouanolou [26]发现的。正如下一节将要看到的，Jouanolou 的反例依赖于 $(\mathbb{C}^3, 0)$ 上某些一维叶状结构的核心动力学。我们还要指出，后来人们发现 Briot 和 Bouquet 的论证存在漏洞，而 Camacho 和 Sad 在[5]中确立了 $(\mathbb{C}^2, 0)$ 上的叶状结构确实存在分离曲线。

叶状结构奇点理论中的另一个基本概念，是叶状结构在奇点处的特征值。为简化讨论，暂且只考虑一维叶状结构的情形（更一般的讨论见第 4 节）。不失一般性，只需考虑定义在 $(\mathbb{C}^n, 0)$ 上的 1 维叶状结构 $\mathcal{F}$。给定上述的 $\mathcal{F}$，适当缩小原点邻域后，存在一个全纯向量场 Y，其零点集的余维至少为 2，并且 $\mathcal{F}$ 恰好是由 Y 的局部轨道诱导的叶状结构。如前所述，Y 称为 $\mathcal{F}$ 的代表向量场；尽管 Y 并不唯一，同一叶状结构 $\mathcal{F}$ 的两个代表向量场只相差一个可逆全纯函数因子。

定义 2.6. 设 $\mathcal{F}$ 是 $(\mathbb{C}^n, 0)$ 上的 1 维全纯叶状结构，并令 Y 表示 $\mathcal{F}$ 的一个代表向量场。假设 $\mathcal{F}$ 在原点处是奇异的，即 $Y(0) = 0$。那么 $\mathcal{F}$ 在 $0 \in \mathbb{C}^n$ 处的特征值，就是雅可比矩阵 D_0Y 的特征值。

由于 Y 在乘以一个可逆全纯函数后仍然定义良好，因此 $\mathcal{F}$ 在 $0 \in \mathbb{C}^n$ 处的特征值仅在同时乘以一个非零常数的意义下定义良好。

2.1. 爆破与 dicritical 奇点。爆破是构造非平凡双有理映射以及理解奇点局部结构的标准工具，无论这些奇点是“环境空间的奇点”，还是“光滑空间上的叶状结构的奇点”。叶状结构在爆破映射下的变换称为叶状结构的爆破。然而，爆破空间包含一个例外除子，它可能是不变的，也可能不是变换后的叶状结构的不变除子。这一问题引出了奇点处非不变叶丛的概念。

定义 2.7. 设 M 是一个带有全纯叶状结构 $\mathcal{H}$ 的复流形，并考虑一个以 $C \subset$ 为中心的爆破映射 $\pi : M \to M$，其中 $C \subset$ 属于 Sing($\mathcal{H}$)，Sing($\mathcal{H}$) 表示 $\mathcal{H}$ 的奇异集。若叶状结构 $\mathcal{H}$ 所对应的爆破 $\widetilde{\mathcal{H}}$ 不使例外除子 π^{-1}（C）保持不变，则称 $\mathcal{H}$ 关于 π 是 dicritical 的。

只要不会引起误解，我们就简称某个叶状结构是或不是 dicritical，而不具体提及爆破映射。此外，在我们的大部分讨论中，只需考虑以单个点为中心的爆破（有时称为单点爆破）。对于这类爆破，一维非不变型叶状结构的刻画非常简单。更确切地说，设 $\mathcal{F}$ 是 $(\mathbb{C}^n, 0)$ 上的一个一维叶状结构，并固定 $\mathcal{F}$ 的一个代表向量场 Y。令 Y_k 为 Y 在 $0 \in \mathbb{C}^n$ 处的泰勒级数中次数最低的非零齐次分量。那么，我们有：

引理 2.8。叶状结构 $\mathcal{F}$ 关于以 $0 \in \mathbb{C}^n$ 为中心的爆破是 dicritical，当且仅当 Y_k 是径向向量场 $R = x_1\partial/\partial x_1 + \cdots + x_n\partial/\partial x_n$ 的倍数。

证明。只需计算在坐标 $(x_1, u_2, \ldots, u_n)$ 下，对 $\mathbb{C}^n$ 进行爆破时 Y的拉回，其中爆破映射 π 由 $\pi(x_1, u_2, \ldots, u_n) = (x_1, x_1u_2, \ldots, x_1u_n)$ 给出，参见例如 [23] 或 [43]。□

更一般地说，如果存在一列以中心 C 为起点的爆破，并最终得到一个不使全局例外因子的所有不可约分支都保持不变的叶状结构，那么称叶状结构 $\mathcal{F}$ 在中心 C 处是 dicritical（关于详情，参见第 4 节）。由于爆破映射是固有的，爆破映射的复合也因此是固有的，根据 Remmert 定理可知，叶状结构 $\mathcal{F}$ 中与例外除子（的某个分支）横截的叶必定投影为初始叶状结构 $\mathcal{F}$的一条分离曲线。由此我们得到一维非不变型叶状结构的以下简单特征：

引理 2.9. 若叶状结构 $\mathcal{F}$ 在中心 C 处是 dicritical，则经过 C 中各点的 $\mathcal{F}$ 的分离曲线之并构成一个内部非空的集合。□

已知引理 2.9 的逆命题对于维数不超过 3 的环境空间成立，这可由“消解定理”直接推出，参见第 4 节。尽管这一结果很可能普遍成立，但文献中似乎仍缺少一种不依赖“消解”结果的证明。

上述引理表明，一维 dicritical 叶状结构在某种意义上非常特殊。具体而言，“一般叶状结构”在其奇点处并非 dicritical。此外，得益于引理 2.9，对于此处讨论的大多数涉及一维叶状结构的问题，我们可以不失一般性地假设相关叶状结构不是 dicritical。

注 2.10. 当我们考虑三维环境空间中的余维 1 叶状结构时，非不变叶丛的例子要丰富得多。尤其是，我们不清楚是否存在某种合理的意义，能够声称“泛叶状结构”是非 dicritical 的。事实上，构造非不变叶丛的一个良好例子来源，是利用由齐次多项式向量场和径向向量场生成的仿射李代数，见第 3 节。

2.2. $(\mathbb{C}^2, 0)$ 上的叶丛奇点。如前所述，$(\mathbb{C}^2, 0)$ 上的叶丛奇点是一个研究高度发展的理论对象，至少在非 dicritical 叶状结构这一非常一般的情形下是如此。本段将归纳这一领域取得如此多进展的若干原因，并将其与 $(\mathbb{C}^3, 0)$ 上叶状结构的情形进行比较。

(A) Seidenberg 定理。人们普遍认为，奇点理论中的一般性定理都离不开恰当的“奇点消解定理”。然而，在叶状结构理论中，一般而言并不可能真正消解叶状结构，即通过双有理变换得到叶状结构的非奇异模型。事实上，“奇点消解定理”这一说法有时被当作一种宽泛的用语；更准确的术语应是“奇点约化定理”。换言之，我们不寻求非奇异叶状结构，而是寻求其奇点“尽可能表现良好”的叶状结构。通常，我们希望找到一种叶状结构，使其所有奇点都是初等的，也就是说，每个奇点至少有一个非零特征值。

Seidenberg 定理 [55] 提供了一种适当的步骤，用于约化 $(\mathbb{C}^2, 0)$ 上全纯叶状结构的奇点。设 $\mathcal{F}$ 表示定义在 $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ 的某个邻域上的奇异全纯叶状结构。Seidenberg 定理断言，存在有限序列的爆破映射，以及变换后的叶状结构 $\mathcal{F}_i (i = 1, \ldots, n)$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \xleftarrow{\pi_1} \mathcal{F}_1 \xleftarrow{\pi_2} \cdots \xleftarrow{\pi_n} \mathcal{F}_n$$

使得以下结论成立：

- 每个爆破映射 $\pi_i (i = 1, \ldots, n)$ 的中心都是 $\mathcal{F}_{i-1}$ 的一个奇点。
- $\mathcal{F}_n$ 的所有奇点都是初等的，也就是说，叶状结构 $\mathcal{F}_n$ 在每个奇点处都至少有一个非零特征值。

用 D_1、……、 D_n 表示与 $\mathcal{F}_n$相关的总例外除子的不可约分支。因此，每个 D_i 都是自交数严格为负的有理曲线，相应的 Dynkin 图是一棵树。

（B）一个全局伪群——Mattei-Moussu 技巧。接下来假设叶状结构$\mathcal{F}$不是 dicritical。那么，对于每个 $i = 1$，……， n， $D_i \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F}_n)$ 都是 $\mathcal{F}_n$的正则叶，其中 $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}_n)$ 表示 $\mathcal{F}_n$的奇异集。特别是，与叶状结构 $\mathcal{F}_n$ 相关的所有非平凡动力学都是横截的。此外，这种横截动力学自然源自各叶 $D_i \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F}_n)$ 、 $i = 1$、……、 n的 holonomy 表示。进而，至少在相当程度上，只要$D_i \cap D_j \neq \emptyset$，就可以通过“角点过渡”（又称“Dulac 变换”）这一论证，将这些表示的动力学合并起来。

可以将上述内容概括为： $\mathcal{F}_n$ 的所有奇点都是“动力学相连”的，也就是说，它们的局部动力学融合成一个良好的、作用于（$\mathbb{C}$，0）的映射伪群。此外，该伪群的动力学几乎编码了初始叶状结构 $\mathcal{F}$局部结构的全部信息。

上述研究（$\mathbb{C}^2$, 0）上叶状结构奇点的方法，已在 Mattei 和 Moussu 的开创性论文 [35] 中基本确立。这项技术在二维的各种情形中屡次证明极为有效，参见 [5] 和 [19] ，其中给出了两个运用这一方法解决问题的例子。下一节我们将讨论这种方法在多大程度上可以推广到高维。

（C）作用于（$\mathbb{C}$, 0）上的伪群动力学。尽管这一问题在许多问题中相对次要，我们仍要指出，作用于（$\mathbb{C}$, 0）上的伪群动力学本身是一个发展十分成熟的主题。这类动力学最早由 Huddai-Verenov 在 [22] 中研究，随后 Il’yashenko 在 [24] 中考察了由双曲微分同胚生成的群的“一般情形”。相比之下， [35], 中的作者研究了所有轨道均为有限集的子群。随后，Shcherbakov 和 Nakai 关于一般非可解子群的研究取得了重大突破，参见 [53], [54], [38]。关于非可解情形下这类动力学的更全面介绍，读者可参阅 [42] 及其中的参考文献；可解伪群则在 [11] 中得到了详细讨论。

注 2.11. 值得指出的是，近年来，在构造 ($\mathbb{C}^2$, 0) 上叶状结构的模空间以及描述叶的拓扑方面，已经取得了很大进展，主要归功于 Mar´ın、Mattei 和 Salem。虽然本综述主要致力于高维情形，不会讨论这些方面，但对叶的拓扑感兴趣的读者可以在 [30], [31], 和 [57]中找到更新的信息。关于模空间的构造，请参阅 [32] 以及预印本 [33] 和 [34]。

3. Splitting the problem: core dynamics and resolution

本节的主要研究对象是 $\mathbb{C}^n$原点附近定义的、针对 $n \geq 3$ 的一维叶状结构。不过，大部分讨论都可以在不失一般性的前提下针对情形$n = 3$进行。

先回顾一些关于复射影空间上的叶状结构的众所周知的事实，会很有帮助。将 $\mathbb{CP}^n$ 视为穿过 $\mathbb{C}^{n+1}$ 原点的径向直线空间，并记$\Pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$ 为典范投影。此外，对于 $\lambda \in \mathbb{C}^*$，记 $h_\lambda : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$为由 $h_\lambda(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_{n+1})$定义的位似变换。最后，令 R 表示径向向量场 $R = x_1\partial/\partial x_1 + \cdots + x_{n+1}\partial/\partial x_{n+1}$，并考虑一个齐次多项式向量

场

$$X = P_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + P_{n+1}\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$$

在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上次数为 d。换言之，对于每个 $i = 1$，....., $n+1$，每个 P_i 都是次数为 d 的齐次多项式。下文始终假设 X 满足以下条件：

（1） $\mathbb{C}^{n+1}$ 上 X 的奇异集的余维至少为 2。（2）向量场 X 和 R

在一般点处线性无关。

接下来注意到我们有

$$h_\lambda^* X = \lambda^{d-1} X$$

因此，对于 $\lambda \in \mathbb{C}^*$ 的任意固定值，向量场 $h_\lambda^* X$ 和 X 处处平行。特别地，如果 $p \in \mathbb{C}^{n+1}$ 是 $X(p)$ 和 $R(p)$ 线性无关的点，那么 $X(p)$ 在 $T_{q=\Pi(p)}\mathbb{CP}^n$ 中诱导出一个方向；从如下意义上说，该方向是良定义的：它不依赖于 $p \in \Pi^{-1}(q)$。由此很容易推出， X 在 $\mathbb{CP}^n$ 上诱导出一个 $\mathcal{F}$ 的奇异全纯叶状结构，其意义见定义 2.1。应用塞尔的 GAGA 原理这一标准方法，可得到上述构造的某种逆命题，即有如下命题成立，参见例如 [23], [43]。

命题 3.1. 设 $\mathcal{F}$ 表示 $\mathbb{CP}^n$上的一个奇异全纯叶状结构。那么，存在一个定义在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的齐次多项式向量场 X，其奇异集的余维至少为 2，并通过上述构造在 $\mathbb{CP}^n$ 上诱导出叶状结构 $\mathcal{F}$。□

然而，给定 $\mathcal{F}$，命题 3.1 中提到的齐次向量场 X 并非唯一确定；但两个奇异集余维至少为 2、且在 $\mathbb{CP}^n$ 上诱导出相同叶状结构的齐次多项式向量场，必定具有相同的次数。因此，我们可以如下定义 $\mathbb{CP}^n$ 上叶状结构的次数：

定义 3.2. $\mathbb{CP}^n$ 上叶状结构 $\mathcal{F}$ 的次数，是定义在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的齐次多项式向量场的次数；该向量场的奇异集余维至少为 2，并在视为 $\mathbb{C}^{n+1}$的径向直线空间的 $\mathbb{CP}^n$ 中诱导出 $\mathcal{F}$。

自然地，爆破为实现由定义在 $\mathbb{C}^{n+1}$上的齐次多项式向量场 X 所诱导的 $\mathbb{CP}^n$ 上的叶状结构，提供了另一种方式。设 $\widetilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ 表示在原点处对 $\mathbb{C}^{n+1}$进行爆破所得的空间，并考虑如上所述定义在 $\mathbb{C}^{n+1}$上的齐次向量场 X。 X 的爆破 $\widetilde{X}$在 $\widetilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ 上诱导出由 X 在 $\mathbb{C}^n$上诱导的叶状结构 $\mathcal{F}$ 的爆破 $\widetilde{\mathcal{F}}$。由于根据假设， X 并非处处与径向向量场 R平行，因此叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 使例外除子 $\pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{CP}^n$保持不变。于是， $\widetilde{\mathcal{F}}$ 在例外除子 $\pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{CP}^n$ 上的限制，自然可以通过前述构造与由 X 在 $\mathbb{CP}^n$ 上诱导的叶状结构相认同；其中 $\mathbb{CP}^n$ 被视为 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的径向直线空间。

请注意，爆破解构实际上并不要求向量场是齐次的。事实上，如引理 2.8 所示，考虑一个在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的原点附近定义的全纯向量场 Y，其泰勒级数具有形式 $Y = \sum_{i=k}^{\infty} Y_i$，其中 Y_i 表示该泰勒级数的次数为 i 的齐次分量，且 Y_k 不恒为零。与引理 2.8 中一样，我们假设 Y_k 并非处处平行于径向向量场 R。对 Y 的~爆破在例外除子 $\pi^{-1}(0) \subset \widetilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ 的邻域上诱导出一个全纯叶状结构 $\mathcal{F}$。此外，由于 Y_k 不是 R 的倍数，该叶状结构使 $\pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{CP}^n$ 不变；并且不难验证， $\widetilde{\mathcal{F}}$ 在 $\pi^{-1}(0)$ 上的限制，与仅对 Y_k 进行爆破所诱导的 $\widetilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ 上的叶状结构在 $\pi^{-1}(0)$ 上的限制相同。特别地， $\widetilde{\mathcal{F}}$ 在 $\pi^{-1}(0)$ 上的限制可视为由齐次向量场 Y_k 在 $\mathbb{CP}^n$ 上诱导的叶状结构，其中 $\mathbb{CP}^n$ 被视为 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的直线空间。

前面的内容引出了如下定义。

定义 3.3. 设 $\mathcal{F}$ 是定义在 $\mathbb{C}^n$ 原点附近的一维全纯叶状结构，并假设 $\mathcal{F}$ 在原点处的爆破 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 使例外除子 $\pi^{-1}(0)$ 不变。那么，由 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 的限制在 $\mathbb{CP}^{n-1} \simeq \pi^{-1}(0)$ 上诱导出的叶状结构称为 $\mathcal{F}$ 的核心叶状结构，其全局动力学称为 $\mathcal{F}$ 的核心动力学。

同样，若 Y 是 $\mathcal{F}$ 的一个代表，且 Y_k 如上所述（$Y = \sum_{i=k}^{\infty} Y_i$），那么前面的论述表明，$\mathcal{F}$ 的核心叶状结构不过是由齐次向量场 Y_k 在 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 上诱导的叶状结构。

3.1. $\mathbb{C}^3$ 上的一维叶状结构与 dicritical 余维 1 叶状结构。前面对射影空间上叶状结构的讨论同样适用于 $(\mathbb{C}^n, 0)$ 上的余维一 dicritical 叶状结构。更具体地说，$(\mathbb{C}^n, 0)$ 上的余维一 dicritical 叶状结构 $\mathcal{D}$ 也会通过以原点为中心的单点爆破，在 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 上诱导出一个叶状结构，这也称为 $\mathcal{D}$ 的核心叶状结构。可以说，Jouanolou [26] 在其著名的反例中首次利用了这一现象及其相应的动力学；该反例针对的是 R. Thom 提出的问题。下文将回顾这一问题，并进一步利用 [28] 中的结果，考察情况可能变得多么复杂。

接下来，我们用 $n = 3$ 简化记号。首先，我们来刻画在以原点为中心对 $\mathbb{C}^3$ 进行爆破时为 dicritical 的余维一叶状结构。由于文献中似乎并未准确表述下面的引理，下面给出一个详细但直接的证明。

引理 3.4. 假设 $\mathcal{D}$ 是定义在 $(\mathbb{C}^3, 0)$ 上的奇异余维 1 叶丛，并记 $\widetilde{\mathcal{D}}$ 为其以原点为中心的爆破。那么，例外除子 $\pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{CP}^2$ 在 $\mathcal{D}$ 下不变~，当且仅当不存在与 $\mathcal{D}$ 相切的全纯向量场 Z，使其在原点处的首个非零齐次分量是径向向量场 R的倍数。

证明。设 $\mathcal{D}$由全纯 1-形式 $\Omega = F\,dx + G\,dy + H\,dz$ 定义，其奇异集的余维至少为 2。记 Ω_k 为 Ω 在原点处的首个非零齐次分量，其中 k 表示 Ω_k的次数。接下来，令 $\Omega_k = F^k dx + G^k dy + H^k dz$。直接观察可知，$\pi^{-1}(0)$ 在 $\widetilde{\mathcal{D}}$ 下不不变，当且仅当

$$xF^k + yG^k + zH^k = 0\,. \tag{1}$$

现在注意，如果 Z 是与 $\mathcal{D}$ 相切的任意向量场，且其第一个非零齐次分量记为 Z^l，那么 Z^l 自然为 $\{\Omega_k = 0\}$ 提供一个解，即有 $\Omega_k.Z^l = 0$。然而，如果 Z^l 恰好是径向向量场的倍数，那么 $\Omega_k.Z^l = 0$ 等价于公式（1），因而该公式成立。因此，例外除子并非~由 $\mathcal{D}$不变。

为了证明存在满足上述条件的向量场 Z 也是必要的，我们如下进行。假设 $\mathcal{D}$ 是 dicritical，即公式（1）成立，并将 $\wedge$ 记为 $\mathbb{C}^3$ 上两个向量的标准外积。接下来，通过令 $v(p) = R(p) \wedge (F(p)\ G(p)\ H(p))$ 来定义向量场v，然后令 $Z(p) = v(p) \wedge (F(p)\ G(p)\ H(p))$。显然，$Z$ 与叶状结构 $\mathcal{D}$ 相切。为了完成该引理的证明，只需验证 Z 在原点处的第一个非零齐次分量是径向向量场的倍数。为此，注意到我们有

$$Z = (zFH + yFG - x(H^2 + G^2)\,, xFG + zHG - y(F^2 + H^2)\,, yHG + xFH - z(G^2 + F^2)) \tag{2}$$

特别地，Z 在原点处的阶至少为 $2k + 1$。次数为 $2k + 1$ 的齐次分量则可用向量记法表示为

$$(xF^k + yG^k + zH^k)(F^k, G^k, H^k) - ((F^k)^2 + (G^k)^2 + (H^k)^2)(x, y, z)\ .$$

根据公式（1），我们得出 Z 在原点处次数为 $2d+1$ 的分量可表示为 $-((F^k)^2+(G^k)^2+(H^k)^2)R$。

要完成该引理的证明，只需证明多项式 $(F^k)^2+(G^k)^2+(H^k)^2$ 不可能恒等于零。不过，使用变量 (x,t,u) 很容易做到这一点；在这些变量下，爆破映射变为 $\Pi(x,t,u)=(x,xt,xu)$。在这些变量中，dicritical 条件（即公式（1））意味着 $F^k(1,t,u)+tG^k(1,t,u)+uH^k(1,t,u)$ 必须恒等于零。现在，反设 $(F^k)^2+(G^k)^2+(H^k)^2$ 也恒等于零。那么，这两个方程合在一起便推出 $(t^2+1)(G^k)^2+2tu(G^k)(H^k)+(u^2+1)(H^k)^2$ 也恒等于零。通过对相应的最后一个方程求解 G^k，我们便与 G^k 本身是变量 t、u 的多项式这一事实矛盾。引理得证。□

接下来，我们再次考虑上一小节中满足条件 (1) 和 (2) 的齐次多项式向量场 X，其定义在 $\mathbb{C}^3$ 上；也就是说，X 的奇异集余维至少为 2，且向量场 X 和 R 在一般点处线性无关（注意，对于次数至少为 2 的齐次向量场，条件 (1) 和 (2) 等价）。由于 X 是齐次的，我们有

$$[R,X]=(d-1)X$$

其中 d 表示 X 的次数。因此，X 和 R 生成仿射群的李代数。特别地，由 X 和 R 张成的二维平面分布是对合的，因而是可积的。于是，记由 X 和 R 张成的余维一叶状结构为 $\mathcal{D}$。

Let $\widetilde{\mathcal{D}}$ 根据引理 3.4，例外除子 进行爆破，因此在 $\widetilde{\mathcal{D}}$ 下不是不变的。此外，叶状结构 $\mathcal{D}$ 的 $\widetilde{\ }$ 结构（因而 $\mathcal{D}$ 的结构）本质上与 $\mathcal{F}$ 的爆破 $\mathcal{F}$ 的结构 $\widetilde{\ }$ 一样复杂，其中 $\mathcal{F}$ 表示由 X 诱导的叶状结构。这一观察值得进一步讨论。

首先回顾一下，$\widetilde{\mathbb{C}}^3$ 也可以看作是 $\pi^{-1}(0)\simeq\mathbb{CP}^2$上的典范线丛。丛投影记为 $\widetilde{\Pi}:\widetilde{\mathbb{C}}^3\to\pi^{-1}(0)$，因为它可以自然地与典范投影 $\Pi:\mathbb{C}^3\setminus\{(0,0,0)\}\to\mathbb{CP}^2$相识别。接下来回顾一下，与$\sim$ $\sim\mathcal{D}$不同，叶状结构 $\mathcal{F}$ 使例外除子保持不变。特别地，在$\pi^{-1}(0)\simeq\mathbb{CP}^2$ 上的一点 p 处，若该点对 $\widetilde{\mathcal{F}}$而言是正则的，则此叶状结构定义了一个方向 $u_p\in T_p\pi^{-1}(0)$。接下来，对于“充分一般”的 p，$\widetilde{\mathcal{D}}$ 的叶与 $\pi^{-1}(0)$横截相交。这个横截交点自然定义了一个方向 $v_p\in T_p\pi^{-1}(0)$。显然可以验证，v_p的方向与 $\widetilde{\mathcal{F}}$所定义的方向一致。将$\widetilde{\mathcal{F}}_{|\pi^{-1}(0)}$ 记为通过 $\widetilde{\ }$限制 $\mathcal{F}$而在 $\pi^{-1}(0)$上得到的叶状结构，我们有如下结论：

引理 3.5。叶状结构 $\widetilde{\mathcal{D}}$ 的叶具有如下形式：$\widetilde{\Pi}^{-1}(L)$，其中 L 是 $\widetilde{\mathcal{F}}_{|\Pi^{-1}(0)}$ 的一片叶。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$类似地，$\mathcal{D}$ 的每一片叶都被叶状结构 $\mathcal{F}$ 不变。□

回顾一下，射影空间上的每个叶状结构都是由一个齐次多项式向量场诱导的，引理 3.5 的意义实际上可由以下略显宽泛的说法概括：$\mathbb{CP}^2$ 上的每个叶状结构自然都是 $(\mathbb{C}^3,0)$ 上 1 维与余维 1 叶状结构奇点的核心叶状结构。

在探讨前述观察的一些具体应用之前，我们先指出，上述构造使我们能够如下定义 $(\mathbb{C}^3,0)$ 上 dicritical 余维 1 叶状结构的核心。

定义 3.6. 设 $\mathcal{D}$ 是定义在$\mathbb{C}^3$ 原点附近的余维 1 全纯叶状结构，并假设 $\mathcal{D}$ 在原点处的爆破 $\widetilde{\mathcal{D}}$ 不离开例外除子

$\pi^{-1}(0)$ 不变。由 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 的限制在 $\mathbb{CP}^{n-1} \simeq \pi^{-1}(0)$上诱导的叶状结构称为 $\mathcal{F}$ 的核心叶状结构，其全局动力学称为 $\mathcal{F}$的核心动力学。

3.2. Jouanolou例子、混沌动力学及其对奇点理论的意义。让我们回到 R. Thom 关于 $(\mathbb{C}^3, 0)$ 上余维一叶状结构是否存在分离曲线的问题，参见定义 2.5。如第2节所指出的，由于相关平面分布必须满足 Frobenius可积条件，构造余维一叶状结构并非总是容易。不过，围绕引理 3.5 的讨论也表明，有一种简单的方法可以在 $\mathbb{C}^3$ 上构造大量 dicritical 余维 1 叶状结构。更确切地说， $\mathbb{CP}^2$ 上的每个叶状结构都会导出一个这样的 dicritical 余维 1 叶状结构。

设 $\mathcal{D}$ 是上述 dicritical 余维 1 叶状结构，并假定 $\mathcal{D}$ 存在分离曲线。再设 S 表示 $\mathcal{D}$ 的一个不可约分离曲线芽。由于 S 的余维为 1，因此存在一个不可约全纯函数芽 $f : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$，使得 S 与集合 $\{f = 0\}$ 重合。用泰勒级数表示，我们令 $f = \sum_{i\geq l}^{\infty} f_i$，其中 l 是 f 的第一个非零齐次分量的次数。令 $\mathcal{C} \subset \mathbb{CP}^2$ 为射影平面上由齐次方程 $\{f_l = 0\}$ 定义的曲线（即 S 的切锥）。若以 $\mathcal{F}$ 表示 $\mathcal{D}$ 的核心（回想一下， $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{CP}^2$ 上的一维叶状结构），则可以得出如下结论：

引理 3.7. 使用前述记号，曲线 $\mathcal{C} \subset \mathbb{CP}^2$ 由 $\mathcal{F}$ 保持不变。

证明. 叶状结构 $\mathcal{D}$ 由可积1-形式 Ω 定义，其泰勒级数形式为 $\Omega = \sum_{i=k}^{\infty} \Omega_i$，其中 k 仍表示 Ω 的第一个非零齐次分量。根据次数进行简单论证可知，1-形式 Ω_k 也可积，即满足 Frobenius方程 $\Omega_k \wedge d\Omega_k = 0$。类似地，可以验证由 $\{f_l = 0\}$ 定义的（齐次）曲面是余维 1 叶状结构 $\mathcal{D}_k$ 的一条分离曲线，该叶状结构由 Ω_k诱导。令 $\Omega_k = F^k dx + G^k dy + H^k dz$，并按惯例用 R 表示 $\mathbb{C}^3$上的径向向量场。

接下来回顾一下，表示 $\mathcal{F}$ 的 $\mathbb{C}^3$ 齐次向量场仅在相差一个乘法常数和一个径向向量场的倍数的意义下才是唯一确定的。现在，由于 Ω_k是齐次的，向量 $R(p)$ 位于点 p处由 $\Omega_k(p)$ 的核定义的平面内。因此，除去乘法因子后，可令 $X(p) = R(p) \wedge (F^k(p)\ G^k(p)\ H^k(p))$，从而得到 $\mathcal{F}$的一个代表向量场 X。特别地， $X(p)$ 属于 $\Omega_k(p)$ 的核，即 X 与叶状结构 $\mathcal{D}_k$相切。最后，由于在正则点$p \in \{f_l = 0\}$ 处， $\{f_l = 0\}$ 的切空间与 $\Omega_k(p)$ 的核重合，我们得出X 与曲面 $\{f_l = 0\}$相切。引理随即得证。□

鉴于引理 3.7，Jouanolou 关于 Thom 猜想的基本见解如下：如果我们能找到一个定义在 $\mathbb{CP}^2$ 上的叶状结构 $\mathcal{F}$，使其没有任何代数曲线保持不变，那么由 $\mathbb{C}^3$ 的径向向量场与 $\mathcal{F}$ 的齐次向量场的一个代表元组合而成的余维一叶状结构 $\mathcal{D}$ （dicritical）将不存在分离曲线。

Jouanolou 的这一见解或许是核心动力学的存在实际影响叶状结构奇点研究的首个实例。从这个角度来看，Jouanolou 在 [27] 中的主要结果可表述如下：

定理 3.8. [27] 对于每个 $d \geq 2$，由以下向量场在 $\mathbb{CP}^2$ 上诱导的叶状结构

$$X_d = y^d \partial/\partial x + z^d \partial/\partial y + x^d \partial/\partial z$$

没有任何代数曲线是不变的。

Jouanoulou 定理意味着，特别地，对于每个固定的 $d \geq 2$，都存在次数为 d且不与任何 $\mathbb{CP}^2$ 代数曲线相切的叶状结构。

有了上述定理，根据前文可知，由 X_d 和径向向量场张成的奇异叶状结构，即余维 1 Jouanolou叶状结构 J_d, $d \geq 2$，其 $\mathbb{C}^3$ 是 Thom问题的一个反例。众所周知的显式 1-形式 Ω,

$$\Omega = (yx^d - z^{d+1})\,dx \;+\; (zy^d - x^{d+1})\,dy \;+\; (xz^d - y^{d+1})\,dz\;,$$

定义叶状结构 J_d，可以直接通过对 X_d 和 R 取向量积得到。

接下来的问题是，核心动力学究竟能在多大程度上影响对叶状结构奇点的研究，例如 $\mathbb{C}^n$、$n \geq 3$ 上的 1 维叶状结构。换句话说，鉴于本节的讨论，要深入理解这类叶状结构的局部结构，似乎必然要先整体描述其核心叶状结构。尤其是，这种理解需要对核心叶状结构的动力学进行（整体）控制。此时，我们或许会想知道，能否对例如 $(\mathbb{C}^3, 0)$ 上的所有一维叶状结构作出如此精确的局部描述。从上文强调的角度来看，一个较容易的问题是，对 $\mathbb{CP}^2$ 上所有或几乎所有叶状结构作出合理的整体描述。遗憾的是，正如下文所述的 Loray-Rebelo定理 [28] 所示，后一个问题似乎无法得到肯定的回答。

固定正整数 n 和 d，且 $\min\{n, d\} \geq 2$。通过直接的参数计数可知，$\mathbb{CP}^n$ 上次数为 d 的叶状结构空间 $\mathrm{Fol}_{\mathbb{CP}}^{(d)(n)}$ 可视为维数为

$$(d+n+1)\frac{(d+n-1)!}{d!(n-1)!} - 1.$$

随后可进一步将该叶状结构空间对 $\mathbb{CP}^n$ 的自同构群 $\mathrm{PSL}\,(n+1, \mathbb{C})$ 的作用取商，不过下文不会用到这一点。这里的主要结论是，$\mathrm{Fol}_{\mathbb{CP}}^{(d)(n)}$ 可由一个有限维复流形参数化，因此自然地带有一种拓扑。采用这一记号，[28] 的主要结果如下：

定理 3.9. [28] 固定 $n, d \geq 2$后，存在一个非空开子集 $\mathcal{U} \subset \mathrm{Fol}_{\mathbb{CP}}^{(d)(n)}$，使得每个属于 $\mathcal{U}$ 的叶状结构 $\mathcal{F}$ 都满足以下所有条件：

(1) $\mathcal{F}$ 的所有奇点都是双曲型的。特别地，它们构成一个有限集。(2) 极小性：$\mathcal{F}$ 的每一条叶在 $\mathbb{CP}^n$中都是稠密的。(3) 遍历性：每个可测的叶集要么具有零勒贝格测度，要么具有全部勒贝格测度。(4) 刚性：如果 $\mathcal{F}' \in \mathrm{Fol}_{\mathbb{CP}}^{(d)(n)}$ 通过一个接近恒等映射的同胚 $h : \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^n$ 与 $\mathcal{F}$ 共轭，那么 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}'$ 也可由 $\mathrm{PSL}\,(n+1, \mathbb{C})$中的一个元素共轭。

上述叶状结构所呈现的动力学复杂程度，使得对其进行任何准确描述基本上都遥不可及。此外，即使只考虑拓扑共轭，由于上述刚性现象，也无法得到一份合理的“模型”或“标准形”清单。

从维数为 3 及以上空间上一维叶状结构的奇点理论角度来看，阐述定理 3.9 的一些推论是有益的。现在考虑定理 3.9 所给出的集合 $\mathcal{U} \subset \mathrm{Fol}_{\mathbb{CP}}^{(d)(n)}$ 中的一个叶状结构。作为定义在 $\mathbb{CP}^n$上的叶状结构，它可以表示为 $\mathbb{C}^{n+1}$上的某个齐次多项式向量场 X。换言之，若 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上由 X 的局部轨道诱导的叶状结构，那么 $\widetilde{\mathcal{F}}$在原点处进行单点爆破后，使例外除子 $\pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{CP}^n$ 保持不变，并且 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 在 $\pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{CP}^n$ 上的限制可自然地识别为 $\mathcal{U} \subset \mathrm{Fol}_{\mathbb{CP}}^{(d)(n)}$ 中的初始叶状结构。

现在回想一下，向量场 X 并非唯一确定：最显著的是，我们可以给 X加上任意一个由次数为 $d-1$的齐次多项式乘以径向向量场得到的项。由于在

此外， $\mathcal{U}$ 中的初始叶状结构的奇点全都是双曲型，因此很容易得出结论：可以选择向量场 X 使其满足以下条件：

(1) 叶状结构 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的原点处有一个孤立奇点。~(2) 将叶状结构 $\mathcal{F}$ 视为维数为 $n+1$ 的流形上的叶状结构时，它仍然只有双曲奇点。

此外，在 $\mathcal{U}$ 中对初始叶状结构以及向量场 X 作一般性选择，~使我们能够排除 $\mathcal{F}$ 的奇点处存在共振的可能性。因此， $\mathcal{F}$ 的所有~奇点实际上都是可线性化的。此外，代表向量场的高阶扰动不会改变上述所有特征。因此，这种情形可以概括为以下命题。

定理 3.10。（ [28] 的推论）对于每个次数 $d \geq 2$，在 $\mathfrak{X}(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ 中都存在一个非空开集 V，其中包含次数为 d 的齐次向量场；使得每个由具有如下形式的全纯向量场 X 所代表的叶状结构芽 $\mathcal{F}$： $X = X^d + \text{h.o.t.}$，其中 $X^d \in V$，且 h.o.t. 表示高阶项，均满足以下所有条件：

(1) 在原点对 $\mathcal{F}$ 进行单点爆破 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 后，例外除子 $\pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{CP}^n$ 保持不变。(2) $\mathcal{F}$ 的所有奇点都是双曲型且可线性化。特别地， $\mathcal{F}$ 恰有

$$\frac{d^{n+1}-1}{d-1}$$

个奇点，且它们都位于 $\pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{CP}^n$。

(3) 将 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 限制在 $\pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{CP}^n$ 上，得到 $\mathbb{CP}^n$ 的一个次数为 d 的叶状结构。该叶状结构属于定理 3.9 所给出的开集 $\mathcal{U} \subset \text{Fol}_{\mathbb{CP}}^{(d)(n)}$。

~需要指出的是，第 (2) 条中关于 $\mathcal{F}$ 的奇点数量的公式，也就是关于 $\mathbb{CP}^n$ 上一个所有奇点均为双曲型的次数为 d 的叶状结构的公式，广为人知，且可以通过多种方式证明。例如，可以选取仿射坐标，使叶状结构在由此确定的“无穷远超平面”上没有奇点，然后对表示该叶状结构的相应多项式向量场应用贝祖定理。

注 3.11. 自然地，定理 3.10 的内容可以推广到 $(\mathbb{C}^3, 0)$ 上余维 1 dicritical 叶状结构的芽。

作为本节的结尾，我们不妨将其与第 2.2 节中关于 $(\mathbb{C}^2,0)$ 上叶丛奇点的讨论进行对比，以便更好地理解命题 3.10 所述的野性核心动力学带来的困难。

（A’）Seidenberg 定理在 $(\mathbb{C}^n,0)$ 上的推广。对于$n \geq 4$，这个问题仍未解决，尽管如今针对 $n = 3$ 已经建立了精确的消奇点定理。这个课题无疑十分重要，因为几乎所有关于奇点的一般性论述都直接或间接地依赖于某种适当的“消解定理”。然而，对于 $n \geq 3$，即便能够得到叶状结构的一个模型，使其中所有奇点都“足够简单”，距离准确描述相关奇点仍可能相去甚远。

为证实上述论断，只需考虑定理 3.10 在 $\mathbb{C}^n$、0 上给出的局部叶状结构 $\mathcal{F}$~。对原点 $\mathcal{F}$ 进行爆破 $\mathcal{F}$，为具有仅有“ 简单奇点 ”的 $\mathcal{F}$ 提供了一个双有理模型~：事实上， $\mathcal{F}$ 的所有奇点都是双曲型且可线性化的。换言之， $\mathcal{F}$ 在其每个奇点附近的局部行为基本上是平凡的，并且可以立即获得。 $\mathcal{F}$ 极其复杂的动力学行为

然而，在原点附近的动力学行为被编码于其核心动力学中（参见引理 3.5），但核心动力学的整体性质使消解定理无法对这一动力系统提供任何洞见。

(B') 驯服核心动力学。若要充分理解奇点周围叶状结构的构造，就需要对其核心动力学作出精确描述。命题 3.10 告诉我们，这一目标有些不切实际，但同时也引出了一个问题：如何“筛选”出那些能够进行更详细描述的奇点类。这是一个非常有趣的问题，因为它提示我们考虑奇点理论与数学其他分支，乃至物理学之间的联系。在几何学、复分析和/或可积系统中的问题里发挥特殊作用的奇点，可能更适合进行全面分析。接下来的几节将讨论这类情形的实例。

就“驯服核心动力学”而言，理想情况下，核心叶状结构应当以某种合适的意义定义一个“可积系统”。或者，对于许多问题而言，只需确保存在“足够多”的代数不变曲线即可。关于不变曲线的一个重要问题是，通常可以在这些曲线的邻域内更详细地考察相关叶状结构的动力学；当这些曲线的基本群包含多个生成元时，尤其如此。这项研究的性质更为全局，但在某种程度上类似于第2.2节中提到的“Mattei-Moussu 伪群技术”。成功采用这一观点的有趣实例——甚至包括奇点理论范畴之外的实例——有 [24], [28], 和 [19]。

(C') 作用于 $(\mathbb{C}^n, 0)$ 上的伪群动力学。着眼于高维中由不变代数曲线的全纯所产生的局部动力学，这一视角自然引导我们考察 Diff $(\mathbb{C}^n, 0)$ 的子群的动力学，$n \geq 2$。正如预期的那样，与 $n = 1$的情形相比，$n \geq 2$ 会出现许多新的动力学现象。正如第2节 2.2 所指出的，关于 Diff $(\mathbb{C}, 0)$ 子群的动力学已有许多研究，而对于 Diff $(\mathbb{C}^n, 0)$ 的子群，相关理论仍处于起步阶段。

尽管如此，我们还是要提及，Mattei-Moussu 关于有限轨道群的定理在高维情形下的推广如今已得到充分理解，参见 [46], [48], [52]。这些结果可能会对第一积分存在性问题产生影响，也可能有助于深入理解所谓“解析极限集”在高维中的对应版本，参见 [3]。

最后，该理论中的一个重要问题是，找到精确的条件，将“群的闭包” [53], [54],[38]中局部向量场的 Shcherbakov-Nakai 理论推广到高维。除了 [28] 中的一些结果外，我们对这一问题知之甚少；这些结果依赖于相关群存在双曲收缩这一条件。鉴于这一假设似乎远非精确，该主题看来正适合取得重大进展。

4. Resolution theorems in dimension 3

在本综述的余下部分，我们将讨论奇点理论若干方面的近期进展。本节专门讨论“消解定理”，接下来的两节则主要回顾不变簇这一一般问题，以及对一类特殊且重要的奇点——半完备奇点——的研究。在这些讨论中，能够在不同程度上对相关核心动力学加以控制的定理将发挥重要作用。

如前所述，无论是否存在难以克服的重大困难（例如复杂的核心动力学），奇点约化定理在该理论中始终至关重要。对于定义在复二维流形

（或簇）上的叶状结构，Seidenberg 定理提供了一个精确的奇点约化定理（又称“消解定理”），而且特别容易运用。超出二维的情形中，只有在三维才有决定性的结果；在三维中，已经有必要区分一维叶状结构和余维 1 叶状结构。本节旨在回顾并阐释三维中一维叶状结构的主要“消解定理”。

根据经典的 Hironaka 消解定理，我们可以假设我们的奇异叶状结构始终定义在流形（即光滑复空间）上。此外，由于这些问题是局部的，我们可以假设它们定义在 $\mathbb{C}^n$ 的原点邻域内。由于上述 Seidenberg 定理已经解决了 $n = 2$ 的情形，从现在起我们假设 $n = 3$，也就是说，我们的叶状结构定义在 $\mathbb{C}^3$ 的原点邻域内。

在 $(\mathbb{C}^3, 0)$ 上工作时，我们需要区分 1 维叶状结构与余维一叶状结构。余维一叶状结构的情形此前已在 [8] 中得到解决。然而，涉及一维叶状结构的研究——也是本文综述的主要对象——过程更为漫长，也更加难以捉摸。

关于 $(\mathbb{C}^3, 0)$ 上一维叶状结构的消解结果，最早出现在 [6], ，其中作者证明了形式局部一致化定理的存在性。在这项工作中，作者还暗示了一种涉及具有某种形式分离曲线的奇点的新现象（即一条由叶状结构保持不变的形式曲线）；通过标准爆破来消解该奇点会遇到严重困难。Sancho 和 Sanz 阐明了这一问题，他们给出了 $(\mathbb{C}^3, 0)$ 中叶状结构的显式例子：这些叶状结构无法通过一系列以初始叶状结构及其变换的奇异轨迹内集合为中心的标准爆破来化简。

继 Sancho 和 Sanz 发现的这些例子之后，该领域下一个真正重大的成果归功于 D. Panazzolo [39]。在 [39], 中，Panazzolo 研究了（实）三维空间中实叶状结构的奇点。他采用实数情形而非复数情形，主要是因为其最初的研究动机源于 Hilbert 关于多项式向量场在 $\mathbb{R}^2$ 上的极限环数量问题。在其工作中，Panazzolo 证明，相应的叶状结构的芽总能通过以奇异集为中心的一系列有限次加权爆破，转化为所有奇点均为初等奇点的叶状结构。该证明具有构造性，实际上还给出了一个算法，用于获得所需的奇点约化。后来，借助 [39], 中介绍的 Panazzolo 算法，McQuillan 和 Panazzolo 得以在 [36], [37]中，为 $(\mathbb{C}^3,0)$ 上叶状结构的 Seidenberg 定理推广提供了一个非常令人满意的答案。

预印本 [36] 于2007年发布，几年后，Cano、Roche 和 Spivakovsky 从赋值理论的角度重新研究了这一主题，见 [9]。他们的策略与 Zariski 关于奇点消解问题的一般方法一致，因此基本上分为两个部分。首先，对于给定的叶状结构，我们只寻求“简化”位于给定赋值的中心中的奇点（该中心可通过爆破及其变换或延拓来确定）。位于赋值中心中的奇点的消解结果通常被称为局部一致化定理，而 Zariski 方法的第一部分旨在获得此类结论。一旦获得了适当的局部一致化结果，Zariski 方法的第二部分便处理其整体化。更准确地说，一旦证明对于每个赋值 ν，位于 ν 中心中的奇点都可以（在某种适当意义下）得到简化，我们便试图得出结论：事实上，叶状结构的所有奇点都可以同时以相同的意义得到简化。在将这一观点应用于叶丛奇点时，与整体化过程相关的大多数困难，都可以通过 O. Piltant 提出的一个非常一般的（公理化）粘合定理 [40] 得到较好的处理。得益于 Piltant 的定理，

可以说，在任意维数下，叶状结构消解问题的根本困难在于获得适当的局部一致化定理。

鉴于前文所述， [9] 的内容大致可以概括为：存在初始叶状结构的一个双有理模型，使其奇点均为对数初等奇点。关于对数初等奇点的定义，请参阅 [9] 。就我们的目的而言，只需知道这类奇点至多是二次的，也就是说，在相应奇点处，它们局部由二阶喷射非零的代表向量场给出。 [49] 的目标之一，是通过导出类似于 [37], 的“最终模型”，完成 Cano-Roche-Spivakovsky 的工作，从而沿用 Zariski 的经典方法，获得一个可与 [36], [37] 相媲美的整体消解定理。

我们将比较 McQuillan-Panazzolo 在 [37] 中得到的叶状结构消解定理与我们在 [49], 中得到的定理；它们分别对应各自论文中的定理 2 和定理 A。特别是，我们将看到，在叶状结构的语境下，这两个结果基本等价，可概括为以下断言：给定 $(\mathbb{C}^3,0)$ 上的一个奇异全纯一维叶状结构 $\mathcal{F}$ ，存在 $\mathcal{F}$ 的一个双有理模型，其中所有奇点都是初等奇点。从这个意义上说，相关定理之间唯一的区别在于构造所需双有理模型的方式。

4.1. 持久幂零奇点。如前所述，Sancho和Sanz证明了在 $(\mathbb{C}^3, 0)$ 中存在一些叶状结构，它们无法通过一系列标准爆破化简，其中爆破中心包含于初始叶状结构及其变换的奇异集中。事实上，他们的结果稍微更一般一些，因为我们允许对不一定包含于奇异轨迹中的不变中心进行爆破。实际上，他们给出了一个三参数族的叶状结构，其中的元素无法通过以奇异轨迹为中心的爆破化为所有奇点均为初等奇点的叶状结构；而该族的一般元素即使允许以不变中心为中心进行爆破，也无法化为具有初等奇点的叶状结构。这个叶状结构族由如下形式的向量场族表示：$X_{\alpha,\ \beta,\ \lambda}$

$$X_{\alpha,\beta,\lambda} = x\left(x\frac{\partial}{\partial x} - \alpha y\frac{\partial}{\partial y} - \beta z\frac{\partial}{\partial z}\right) + xz\frac{\partial}{\partial y} + (y-\lambda x)\frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{3}$$

因此，这个族中的叶状结构记作 $\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta,\ \lambda}$。叶状结构 $\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta,\ \lambda}$ 在原点处是幂零的，也就是说，向量场 $X_{\alpha,\ \beta,\ \lambda}$也是幂零的。为便于参照，有必要明确幂零叶层这一概念。

定义 4.1. 若一个（1 维）全纯叶状结构在奇点 p 处具有幂零奇点，当且仅当其在 p 附近的代表向量场具有非零幂零线性部分。

上述幂零奇点的概念定义良好，因为它不依赖于代表向量场的选择。此外，只要不会对所讨论的奇点产生误解，我们就简化记法，直接称 $\mathcal{F}$ 是幂零叶层。回到幂零叶层 $\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta,\ \lambda}$，我们注意到，平面 $\{x=0\}$ 对它们是不变的，并且包含 $\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta,\ \lambda}$ 的奇异集，该奇异集与轴 $\{x=y=0\}$ 重合。回忆一下，若代表向量场至少有一个非零特征值，则称该奇点为初等奇点。现在我们有以下结论：

命题 4.2。族 $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\lambda}$ 中的叶状结构无法通过一系列中心包含于奇异集的标准爆破，转化为所有奇点均为初等奇点的叶状结构。

证明概要。考虑以原点为中心对 $(\mathbb{C}^3, 0)$ 进行的单点爆破，并令 π 表示爆破映射。设 (x, u, v) 为爆破空间的仿射坐标，其中 $y = ux$ 和 $z = vx$。向量场 $X_{\alpha,\beta,\lambda}$ 的拉回 $\pi^* X_{\alpha,\beta,\lambda}$ 表示为

$$\pi^* X_{\alpha,\beta,\lambda} = x\left(x\frac{\partial}{\partial x} - (\alpha+1)u\frac{\partial}{\partial u} - (\beta+1)v\frac{\partial}{\partial v}\right) + xv\frac{\partial}{\partial u} + (u-\lambda)\frac{\partial}{\partial v},$$

其表达式与 $X_{\alpha,\ \beta,\ \lambda}$ 的表达式相似。事实上，这两个表达式的主要区别在于最后一项。不过请注意，当前坐标的原点不属于诱导叶状结构的奇异集，该奇异集由 $\{x = 0, u = \lambda\}$ 给出。因此，若考虑平移 $T(x, \overline{u}, \overline{v}) = (x, \overline{u} + \lambda, \overline{v} + \mu)$，则 $\pi^* X_{\alpha,\ \beta,\ \lambda}$ 经 T 拉回后为

$$x\left(x\frac{\partial}{\partial x} - (\alpha+1)\overline{u}\frac{\partial}{\partial \overline{u}} - (\beta+1)\overline{v}\frac{\partial}{\partial \overline{v}}\right) + x(\overline{v} + \mu - \lambda(\alpha+1))\frac{\partial}{\partial \overline{u}} + (\overline{u} - \mu(\beta+1)x)\frac{\partial}{\partial \overline{v}}.$$

特别地，若选择 $\mu = \lambda(\alpha + 1)$，所讨论的向量场便与向量场 $X_{\alpha+1,\ \beta+1,\ \lambda(\alpha+1)(\beta+1)}$ 重合。换言之，$\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta,\ \lambda}$ 的变换后的叶状结构包含一个属于（初始）Sancho-Sanz族的幂零奇点。可以验证，若对 $\mathcal{F}_{\alpha,\ \beta,\ \lambda}$ 的奇点曲线进行中心爆破，也会出现同样的情况。□

综上所述，将上述任意爆破序列作用于 Sancho-Sanz 族中的一个叶状结构，都会得到一个叶状结构，其中存在一个奇点，且该叶状结构在此奇点附近与初始族中的另一个叶状结构局部共轭。特别是，所有变换后的叶状结构都会呈现一个幂零奇点。这个幂零奇点有一种几何解释，自然与 Cano 在 [6] 中针对标准爆破消解所提出的问题相关。事实上，通过细化上述论证，Sancho和Sanz 已证明，可以选择参数 α、β、λ，使得与向量场 $X_{\alpha,\ \beta,\ \lambda}$相关的叶状结构具有一条经过原点的严格形式分离曲线 $S = S_0$。此外，给定如前所述的爆破序列，与（持续存在的）幂零奇点位置相对应的例外除子上的点序列 $\{p_n\}$，由形式分离曲线 $S = S_n$ 的变换序列$\{S_n\}$ 确定。我们还应指出，每条分离曲线S_n 都是严格形式的，这意味着即使允许以解析不变曲线为中心进行爆破，而这些曲线未必包含在叶状结构的奇异集中，消解过程仍然不存在。

关于叶状结构与（可能是形式的）分离曲线之间的关系，一个发挥重要作用的自然概念是叶状结构沿分离曲线的重数。设 X 是 $\mathcal{F}$ 的一个代表向量场，φ 是 S 的 Puiseux 参数化。令 $\varphi^* X|_S$ 表示将 X 限制在 S 上后再拉回所得的结果。若 $\varphi^* X|_S = g(t)\partial/\partial t$，则将 $\mathcal{F}$ 沿 S 的重数定义为 g 在 $0 \in \mathbb{C}$ 处的阶（假设 $\varphi(0)$ 与该奇点重合）。

在 [4], 我们引入了持久幂零奇点的概念，其定义如下 s.

定义 4.3. 若叶状结构 $\mathcal{F}_0$ 的幂零奇点 p_0 满足：存在一条经过 p_0、属于 $\mathcal{F}_0$ 的形式分离曲线 S_0，使得对于任意一列爆破

$$\mathcal{F}_0 \xleftarrow{\pi_1} \mathcal{F}_1 \xleftarrow{\pi_2} \cdots \xleftarrow{\pi_l} \mathcal{F}_n$$

其中，$\mathcal{F}_i$ 表示 $\mathcal{F}_{i-1}$ 经过以某个包含点 p_{i-1} 的$C_{i-i} \subseteq \mathrm{Sing}(\mathcal{F}_{i-1})$为中心的（标准）爆破后的变换（由变换后的分离曲线 S_{i-1}选定，也就是说，它对应于 S_{i-1} 与例外因子的交点），满足以下条件

(a) 奇点 p_i 都是相应叶状结构的幂零奇点；(b) $\mathcal{F}_i$ 沿 S_i 的重数不依赖于 i。

叶状结构 $\mathcal{F}$ 沿分离曲线（可能是形式分离曲线） S 的重数定义如下。设 X 为 $\mathcal{F}$ 的一个代表向量场， φ 为 S的 Puiseux 参数化。记 $\varphi^*X|_S$ 为将 X 限制在 S上后所得的拉回。若 $\varphi^*X|_S = g(t)\partial/\partial t$，则叶状结构 $\mathcal{F}$沿 S的重数 $\mathrm{mult}(\mathcal{F}, S)$ 定义为 g在 $0 \in \mathbb{C}$处的阶（假设 $\varphi(0)$ 与该奇点重合）。

叶状结构沿分离曲线的重数这一概念，其作用与它在爆破下的自然行为密切相关。回想一下，叶状结构在奇点处的阶，就是代表向量场 X 在该奇点处第一个非零 $\widetilde{}$jet 的次数。采用这一记号，设 $\mathcal{F}$ 是通过在奇点 p处对 $\mathcal{F}$ 进行爆破得到的。另设 S 是 $\mathcal{F}$ 在 p 处的一条（形式）分离曲线，并且$\widetilde{}$ $\widetilde{}$将 S 的变换记为 $\widetilde{S}$，由此得到 $\mathcal{F}$ 在点 $\widetilde{p}$ 处的一条（形式）分离曲线。那么我们有：

$$\mathrm{mult}(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{S}) \leq \mathrm{mult}(\mathcal{F}, S) \tag{4}$$

当且仅当 $\mathcal{F}$ 在 p 处的阶等于 1 时，等号成立。对于以包含在 $\mathcal{F}$ 奇异集中的曲线为中心的爆破，同一公式也成立，但需采用一种适用于爆破中心的“叶状结构的阶”的变体；详情见 [49]，或参见第 5.1 节末尾的讨论。

从上述角度来看，叶状结构 $\mathcal{F}$ 沿分离曲线 S 的重数有何意义，显而易见：如果能够确保存在一条（形式）分离曲线 S，那么只要 $\mathcal{F}$ 在相关奇点处的阶大于或等于 2，其重数就会严格下降。此外，一旦这一递减序列稳定下来，相应的奇点便是初等奇点或幂零奇点。由此也可看出，要建立叶状结构的消解定理，理解持久幂零奇点是有益的。

显然，由 Seidenberg 定理可知，二维中不存在持久幂零奇点。在三维中，Sancho 和 Sanz 提出的上述例子证明了这类奇点的存在。下面将用标准形对三维中的这类点作如下刻画。

定理 4.4。 [49] 假设 $\mathcal{F}$ 无法通过以奇异集为中心的一系列标准爆破来消解。那么存在一系列单点爆破（以奇点为中心），使得最终得到的叶状结构 $\mathcal{F}'$ 具有一个奇点 p，在该奇点附近，$\mathcal{F}$ 由如下形式的向量场给出

$$(y + zf(x, y, z))\frac{\partial}{\partial x} + zg(x, y, z)\frac{\partial}{\partial y} + z^n\frac{\partial}{\partial z}$$

其中， $n \geq 2$ 为某个量， f 和 g 为阶至少为 1 的全纯函数，且 $\partial g/\partial x(0, 0, 0) \neq 0$。此外，我们有：

(1) 所得叶状结构 $\mathcal{F}'$ 在 p 处有一条形式分离曲线，该曲线与 z轴相切；(2) 例外除子局部包含于平面 $\{z = 0\}$中。

定理 4.4 值得进一步说明，因为它在 [37], 中有一个自然的类似结论，即：

- 在 [37], 中，作者提出了对持久幂零奇点的另一种刻画：这类奇点表现为借助 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-轨形奇点由初等奇点产生的奇点，更多详情见第 4.2 节。证明他们的刻画与定理 4.4 给出的标准形等价，相对直接。

- 如 [37], 所示，由定理 4.4 中的标准形可立即得出，每个持久幂零奇点都可以通过一次权重为 2 的爆破立即转化为初等奇点，见 [49]。

最后，我们指出，定理 4.4 中描述的向量场族是 Sancho-Sanz 族的真正推广，尽管它自然是通过沿用他们的构造得到的。事实上，对于持久幂零奇点，沿相应（形式）分离曲线的叶状结构重数在中心包含于奇异集的爆破下完全不变，参见公式4。在 Sancho-Sanz 族中，所有重数均为 2，因此，对于 $n \geq 3$，定理 4.4 给出的例子无法通过连续爆破转化为 Sancho-Sanz 的例子（反之亦然）。例如，该族中的向量场

$$X_\lambda = (y - \lambda z)\frac{\partial}{\partial x} + zx\frac{\partial}{\partial y} + z^3\frac{\partial}{\partial z}\,,$$

对于 $\lambda \neq 0$，产生具有持久幂零奇点的叶状结构 $\mathcal{F}_\lambda$，这些奇点源自一条（严格）形式分离曲线 S_λ。$\mathcal{F}_\lambda$ 沿 S_λ 的重数等于 3。

4.2 McQuillan-Panazzolo去奇点定理。本段旨在详细阐述 [37] 中证明的奇点消解定理。如前所述，McQuillan 和 Panazzolo 从一开始就在加权爆破的范畴中工作，因此并不局限于标准爆破。与保持空间光滑性的标准爆破不同，加权爆破会产生奇异的环境空间。不过，这里涉及的奇点属于轨形类型，因此性质相当简单。需要指出的是，尽管环境空间是奇异的，经过有限次加权爆破后得到的环境空间仍与初始空间双有理等价。特别是，叶状结构可以不受任何限制地经加权爆破变换，从而得到新的双有理模型。

考虑到上文指出的问题，我们来概述一下 [37] 的内容。论文 [37] 本质上分为两部分。第一部分旨在证明，[39] 的算法——即通过一系列加权爆破对 $(\mathbb{R}^3, 0)$ 上的实解析叶状结构进行奇点消解——同样适用于一般情形，即 $(\mathbb{C}^3, 0)$ 上的全纯叶状结构。因此，该算法为叶状结构提供了一个双有理模型，其所在空间具有轨形类型的奇点。请注意，由于我们讨论的是具有轨形类型奇点的空间上的（奇异）叶状结构，因此有必要说明“初等奇点”的含义。在这方面，若叶状结构的奇点在该空间的某个轨形坐标中由一个初等奇点给出，则称其为初等奇点。特别地，存在一个开集 $U \subset \mathbb{C}^3$ 以及从 U 到该轨形奇点某个邻域的有限分歧映射，使得将叶状结构拉回到开集 $U \subset \mathbb{C}^3$ 后，只会得到初等奇点。

在 [37], 的第二部分中，作者研究了这样一个问题：在保持叶状结构的奇点为初等奇点的同时，消解环境空间的奇点。他们证明，除非奇点对应于一个$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$轨形，否则这类奇点总是可以消解的。换言之，他们表明，对于给定的叶状结构 $\mathcal{F}$，总能得到一个关于 $\mathcal{F}$ 的双有理模型，使其仅具有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$轨形奇点，并且其中所讨论叶状结构的所有奇点都是初等奇点。反过来，在前述构造的最后出现的与 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$轨形相关的奇点，可以通过一次权重 2 的爆破转化为初等奇点。这些与 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$轨形相关的奇点，实际上对应于先前描述的持久幂零奇点。

因此，[37] 中的结果可表述如下：

定理 4.5. [37] 设 $\mathcal{F}$ 是 $(\mathbb{C}^3, 0)$ 上的一个奇异全纯叶状结构。存在一列加权爆破

$$\mathcal{F}_0 \xleftarrow{\pi_1} \mathcal{F}_1 \xleftarrow{\pi_2} \cdots \xleftarrow{\pi_l} \mathcal{F}_l \tag{5}$$

满足以下条件：

(i) 每次加权爆破的中心相对于所讨论的拟齐次滤过严格不变。(ii) 环境空间是一个维数为 3 的解析空间，其奇点为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-轨形类型，且总爆破映射 $\pi_1 \circ \cdots \circ \pi_l$ 是双有理映射。(iii) $\mathcal{F}_l$ 的奇点在轨形坐标下是初等的。

最后，我们对定理 4.5 的 (i) 项作一点说明。请注意，尽管这一项是 Panazzolo 算法在 [39]中的一个特征性质，但在 [37] 中并未得到强调。就叶状结构而言，这只是个小问题——位于奇异轨迹之外的中心进行爆破（无论是否加权）也是如此；然而，当我们的主要兴趣在于向量场而非叶状结构时，这个问题便变得重要，参见第 4.4 节

4.3. 按照 [49] 进行消解。在 [49], 中，我们还证明了存在一个关于 $\mathcal{F}$ 的双有理模型，使得 $\mathcal{F}$ 的所有奇点都是初等奇点，只有有限个例外；通过一次权重 2 的爆破，这些例外奇点可以变为初等奇点。更准确地说，我们关于叶状结构的消解结果可表述如下。

定理 4.6. [49] 设 $\mathcal{F}$ 是定义在 $(0,0,0) \in \mathbb{C}^3$的某个邻域上的奇异全纯叶状结构。那么，存在一个有限序列的爆破映射以及相应的变换后的叶状结构

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \xleftarrow{\pi_1} \mathcal{F}_1 \xleftarrow{\pi_2} \cdots \xleftarrow{\pi_l} \mathcal{F}_n \tag{6}$$

满足以下所有条件：

(1) 爆破映射 π_i 的中心是（光滑的，且）包含于 $\mathcal{F}_{i-1}$的奇异集内，$i = 1$，....., n。(2) $\mathcal{F}_n$ 的奇点要么是初等奇点，要么是持续幂零的。(3) $\mathcal{F}_n$ 的持续幂零奇点的数量有限，并且通过进行一次权重 2 的加权爆破，其中每个奇点都可以变为初等奇点。

该定理的证明主要有两个核心思路。第一点涉及 F. Cano 的一条（个人）评论。他声称："如果一个叶状结构无法通过标准爆破得到消解，那么必定存在一条形式分离曲线，由此产生一个永远不会变为初等的无穷邻近奇点序列。"这一论断可追溯至他早期关于一维叶状结构消解的研究 [6] ，而关于这一方向的一些重要结果也可见于[9]。因此，为 Cano 的论断提供完整证明，是定理 4.6 证明中的关键环节；相应结果见 [49]中的命题 4。有趣的是， [49] 中给出的论证与 F. Cano 设想的论证颇为不同。

有了 [49] 命题 4，推导定理 4.6 的主要思路是依据叶状结构沿分离曲线的重数这一概念进行论证，该概念定义于第 4.1 小节。由分离曲线及其变换构成的序列是递减的，因此经过有限步后会稳定下来。当序列稳定时，叶状结构奇点的阶必为 1。因此，奇点要么已成为初等奇点，要么可以借助定理 4.4 将其刻画为持久幂零奇点；这种奇点在其他可能的持久幂零奇点中必然是孤立的。由此得到一个局部一致化定理

（按 Zariski 的意义）。此时，O. Piltant 的“粘合定理” [40] 使我们得以推出定理 4.6。

鉴于持久幂零奇点与 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-轨形型奇点相对应，定理 4.5 和定理 4.6 的差异归结于相应双有理模型的构造方式。与 Panazzolo 不同， [39], 我们的定理 4.6 的证明没有提供任何用于奇点消解的有效算法。然而，在某些问题中，如果所讨论的问题只要求一个断言消解存在性的定理，而非以有效方式获得所需消解，那么始终采用同一种爆破，即标准爆破，或许能简化讨论或论证。

4.4. 关于向量场变换的最后一点说明。结束本节时，我们指出标准爆破的一项优点：定理 4.6 中采用了这种爆破，而得益于相应陈述中的 (i) 项，定理 4.5 也具备这一优点。这一点涉及的是向量场，而非一维叶状结构。

事实上，在奇点理论的许多问题和应用中，真正主要关注的对象并非叶状结构，而是某个全纯向量场。第5.1节以及第6节全篇都提供了这类情形的例子。自然地，向量场 X 会导出一个一维叶状结构 $\mathcal{F}$，而其所有奇点均为初等奇点的双有理模型可能会很有用。尽管如此，如果向量场 X 才是主要关注的对象，那么也必须考虑它的变换 X 。此时，向量场与一维叶状结构之间的区别可概括为以下显而易见的陈述：一维全纯叶状结构在有理映射下的变换仍是一维全纯叶状结构；然而，全纯向量场在有理映射下的变换一般而言是亚纯向量场。

因此，在将一维叶状结构的消解定理应用于向量场研究时，重要的是尽可能保留其“良好”的解析性质（第5节和第6节还提供了具体例子）。例如，如果我们从一个全纯向量场 X 出发，可能会希望它经过消解过程后的变换仍是一个全纯向量场。在此背景下，有：

断言。定理 4.5 或定理 4.6 中所述消解过程下，全纯向量场的变换仍是全纯向量场。

定理 4.6 的情形下，这一断言显然成立，因为以全纯向量场的奇异轨迹为中心进行爆破后，所得向量场仍是全纯的，这是一个基本事实。事实上，要使爆破后的向量场仍为全纯，只需爆破中心在初始向量场下不变。

定理 4.5 的情形下，这一点并非显而易见，因为加权爆破可能会将全纯向量场变为亚纯向量场，即使其中心包含于初始向量场的奇异集中也是如此。这时，便需要采用相对于所讨论的拟齐次滤过而称为严格不变的中心这一条件；该条件在 [39] 中使用，并在 [37], 的第一部分重述（见定理 4.5 中的第 (i) 项）。这一条件虽略显技术性，却能确保全纯向量场经过变换后仍保持全纯。

5. Invariant analytic sets

不变流形的存在性问题一直是动力系统理论的核心主题。其中原因有很多，最简单的一点是，这些不变流形通常能够降低相应相空间的维数。例如，在双曲系统的一般理论中，所谓的稳定流形就是不变流形的实例，事实上，它们的存在构成了双曲理论的基石

。双曲奇点的稳定流形的存在性是一般理论的推论，并由著名的稳定流形定理所保证。然而，无论是否“稳定”，只要奇点不再是双曲型，不变流形就可能不存在。最简单的例子由以下向量场给出

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

其所有积分曲线都是围绕 $\mathbb{R}^2$ 原点的圆。显然，这种情况下不存在不变流形。

不变流形存在性的一般问题也可以在全纯动力系统的背景下考察。在这种情况下，我们寻找不变复解析对象，这要求具有强得多的正则性。不过，我们允许这些对象在解析集的意义下是奇异的。换言之，我们寻找的是不变簇，而非真正的流形。下文中，“流形”一词专指光滑对象。

如第2节所述，Briot 和 Bouquet 最早研究了定义在 $\mathbb{C}^2$ 的原点邻域内、 [2] 中的全纯向量场的分离曲线存在性问题。然而，他们未能证明定义在 ($\mathbb{C}^2$,0) 上的所有全纯向量场都存在分离曲线。这个问题直到很久以后才由 Camacho 和 Sad 在其杰出论文 [5] 中解决，文中证明了以下结论：

定理 5.1. [5] 设 $\mathcal{F}$ 是定义在 $\mathbb{C}^2$ 的原点邻域上的奇异全纯叶状结构。那么存在一条经过 (0, 0) 且在 $\mathcal{F}$ 下不变的解析不变曲线。

定理 5.1 值得再补充几点说明，即：

- 尽管不变曲线需要满足强得多的正则性条件，但在 ($\mathbb{C}^2$, 0) 上的全纯向量场总是存在分离曲线，这多少令人惊讶。例如，对于定义在 ($\mathbb{C}^2$, 0) 上的全纯向量场 $y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$，其分离曲线是两条复直线 $y = \pm ix$ ，因此完全包含在 $\mathbb{C}^2$ 的非实部分中（奇点本身除外）。

- 然而，如前所述，我们并不要求分离曲线是光滑的不变曲线，否则一般而言便无法保证其存在。事实上，考虑 ($\mathbb{C}^2$, 0) 上的全纯向量场 $2y\partial/\partial x + x^3\partial/\partial y$ ，这是一个简单的例子。由于该向量场存在第一积分 $f(x, y) = x^3 - y^2$，可立即得出 X 的唯一分离曲线是方程为 $\{x^3 - y^2 = 0\}$ 的尖点；显然，它在原点处并不光滑。幸运的是，允许分离曲线是奇异的并无妨碍，因为总可以利用 Hironaka定理将其消解奇点。

- 此外，必须强调，定理 5.1 仅适用于定义在光滑环境空间上的叶状结构。事实上，正如 Camacho 在 [4] 中所示，若考虑定义在奇异曲面上的叶状结构的芽，分离曲线可能并不存在。

然而，在三维空间中，分离曲线的存在不再是普遍现象，无论叶状结构的维数如何。正如前文所述，Jouanolou 在 [26] 中给出了第一个定义在 ($\mathbb{C}^3$, 0) 上且没有分离曲线的余维一叶状结构例子。Jouanolou 的例子本质上依托于 ($\mathbb{C}^3$, 0) 上（dicritical）叶状结构的核心动力学；同样的思路使我们能够构造出许多其他没有分离曲线的余维一叶状结构（参见第 3.2 节或下文的总结）。

关于一维叶状结构，Gomez-Mont 和 Luengo 发现了三维中没有分离曲线的叶状结构实例， [15]。他们的工作将在第 5.2 节讨论。眼下，我们将聚焦于余维一叶状结构的不变流形问题。

5.1. 由一对对易向量场诱导的余维一叶状结构的分离曲线。我们先回顾/概述第 3.2 节中的讨论，其中展示了如何利用 Jouanolou 方法，在 $(\mathbb{C}^3, 0)$ 上构造许多没有分离曲线的余维一叶状结构实例。具体如下。

(i) 每个定义在 $\mathbb{C}^3$ 上的齐次多项式向量场 X，只要它不是径向向量场的倍数，都会在 $\mathbb{CP}^2$ 上诱导一个叶状结构，该结构对应于与 X相关联的所谓核心叶状结构。反过来，给定 $\mathbb{CP}^2$上的一个叶状结构，就存在一个定义在 $\mathbb{C}^3$ 上的齐次多项式向量场，其核心叶状结构就是给定的叶状结构。(ii) 设 X 是一个不等于径向向量场倍数的齐次向量场R。由欧拉关系可知， X 和 R 生成的李代数同构于仿射群的李代数。特别地，由X 和 R 生成的分布可以积分，从而得到一个 dicritical 余维 1 叶状结构 $\mathcal{D}$。此外，与 $\mathcal{D}$ 相关联的核心叶状结构与和 X相关联的核心叶状结构相同。(iii) 最后，对于每个固定次数，定理 3.9 保证存在一个非空开集，其中的 $\mathbb{CP}^2$ 上的叶状结构 $\mathcal{F}$ 的所有叶都是稠密的。特别地，该集合中没有叶状结构含有代数不变曲线。由 R 生成的余维一叶状结构，以及由以此类叶状结构之一为核心叶状结构的齐次向量场生成的余维一叶状结构，都没有分离曲线。

鉴于前文所述，很自然会想知道，所有没有分离曲线的余维一叶状结构的例子是否都属于 dicritical 情形。事实上，在三维环境空间中确实如此，正如 Cano 和 Cerveau 在 [7] 中所证明的。他们的结果可表述如下。

定理 5.2. [7] 设 $\mathcal{D}$ 是 $(\mathbb{C}^3,0)$ 上一个全纯奇异余维 1 叶丛的芽。若 $\mathcal{D}$ 不是 dicritical，则它存在一条分离曲线。

前述结果的证明很大程度上依赖于作者在同一篇论文中为非 dicritical 余维 1 叶状结构建立的消解定理。不过请注意，非 dicritical 这一假设意味着初始余维 1 叶状结构的变换使例外除子的每个不可约分支都保持不变。换句话说，在奇点之外，例外除子的每个不可约分支都是相关叶状结构的一片叶。这排除了有意义的核心动力学的存在，使该问题与 Camacho 和 Sad 在 [5] 中处理的二维情形颇为相似；后者具有更强的几何性质。

另一方面，F. Cano、D. Cerveau 和 L. Stolovitch 等专家早已思考，针对 $(\mathbb{C}^3, 0)$，Camacho-Sad 定理的“正确推广”是什么，甚至已从余维一叶状结构的层面开始探讨。特别是，有人提出，由一对对易向量场（并非处处平行）张成的余维一叶状结构，或许必然存在分离曲线。下述定理证实了他们的直觉，并解决了这一问题。

定理 5.3. [44] 设 X、 Y 是定义在 $\mathbb{C}^3$ 的原点邻域上的全纯向量场。假设它们彼此对易，且在一般点处线性无关（因此张成一个记作 $\mathcal{D}$ 的余维一叶状结构）。那么 $\mathcal{D}$ 存在一条分离曲线。

本段余下部分旨在指出定理 5.3 证明中涉及的若干问题。这些问题阐释了前文提出的几点，包括“驯化”核心动力学的益处（以及如何利用“对称性”来实现这一点），还有消解定理的作用。关于后者，论证还将强调，在消解过程中，实际的向量场（而非单纯的叶状结构）能够得到“良好”变换的重要性。

因此，定理 5.3 证明的首要要素，是一个关于三维中余维一叶状结构的奇点消解的一般定理。与定理 5.2 相比， [7] 中的主要结果可以说是一个关于相关叶状结构的奇点约化定理，但它附加了叶状结构必须是非 dicritical 的条件。幸运的是，Cano 在 [8] 中得到了一个关于 $(\mathbb{C}^3, 0)$ 上余维一叶状结构的一般消解定理，该定理同样适用于 dicritical 叶状结构。

借助 Cano 定理 [8], ，我们看到，分离曲线存在的主要障碍在于核心动力学；这一现象已在 Jouanolou 例子中指出，参见第 3 节。因此，定理 5.3 的证明中的核心在于“驯化”由 dicritical 除子产生的核心动力学：对 $\mathcal{D}$ 应用消解过程后，将会出现“大量代数曲线”。下文将介绍一些简单的思路，以说明所提及的核心动力学不会“过于狂野”。

考虑最简单的情形：我们要爆破 $\mathcal{D}$ 的原点（一个退化奇点）。第一个引理表明，在所得的例外除子上，向量场 X 和 Y 至少有一个必须诱导出叶状结构，除非处于一种本质上“线性”的极其特殊情形（因而容易处理）。

回想一下， $\mathcal{D}$ 由对易向量场 X 和 Y 张成。令 $\mathcal{F}_X$（分别地， $\mathcal{F}_Y$）表示与 X（分别地， Y）相关联的一维奇异叶状结构。

引理 5.4. 假设 X 和 Y 在原点的一阶喷射均为零。那么，对于 $\mathbb{C}^3$ 在原点处的爆破，叶状结构 $\mathcal{F}_X$ 和 $\mathcal{F}_Y$ 均不是 dicritical 的。

~ ~ ~证明。记 X 和 Y 为在原点处对 X 和 Y 进行爆破所得的空间。类似地， $\mathcal{F}_x$ 和 $\mathcal{F}_Y$ 分别表示叶状结构 $\mathcal{F}_X$ 和 $\mathcal{F}_Y$的爆破。由于向量场 X 和 Y 在原点的线性部分为零，因此 X 和 Y 在例外除子 $\pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{CP}^2$上均恒等于零。现在假设，例如，X 对 π是 dicritical 的。那么， $\widetilde{\mathcal{F}}_X$ 的叶是正则的，并且在 $\pi^{-1}(0)$ 的一般点处与 $\pi^{-1}(0)$ 横截。因此，在其中一个这样的点附近，我们可以选取局部坐标 (u, v, w)，使得 $\{u = 0\} \subset \pi^{-1}(0)$，且 $\widetilde{\mathcal{F}}_X$ 由正则向量场 $\partial/\partial u$表示。特别地，爆破 X 具有如下形式： $f(u, v, w)$ $\partial/\partial u$~，其中 f 是一个全纯函数（可被 u整除）。在这些坐标下，设爆破 Y 由 $Y = f_1\partial/\partial u + f_2\partial/\partial v + f_3\partial/\partial w$给出~ ~ ~。由于 $[X, Y] = 0$, 可知 f_2和 f_3不依赖于变量 u。然而，对于 $u = 0$ ，这些函数必须恒等于零，因为 Y在 $\pi^{-1}(0)$ 上恒等于零（局部由 $\{u = 0\}$给出）。因此，它们必在一个开集上恒等于零，这与 X 和 Y 张成一个余维 1 叶状结构这一事实矛盾。□

注记 5.5. 上述论证表明，在某些情况下，变换向量场而非叶状结构非常重要。事实上，引理 5.4 的证明依赖于这样一个事实：向量场 Y 的变换在例外除子 $\pi^{-1}(0)$ 上恒等于零——而对于叶状结构而言，这一说法没有意义，因为后者的奇异集的余维至少为 2。

~同理，为了确保变换后的向量场 Y 在 $\pi^{-1}(0)$ 上恒等于零，论证中隐含地用到了原点（爆破中心）包含在 $\mathcal{F}_X$ 的奇异集内这一事实（或者更一般地说，爆破中心在叶状结构下是不变的）。这与第 4.4 节中的讨论一致。变换后的向量场保留其全纯性质往往很重要。此外，在相当多的情况下，变换后的向量场的零除子包含消解过程中产生的例外除子的所有分支也很重要。

关于这一问题，还有许多其他例子可见于半完备向量场理论，例如 [13], [18], 或 [19]。

引理 5.4 表明， $\mathcal{F}_X$ 或 $\mathcal{F}_Y$ 都必须在 $\mathbb{CP}^2$上诱导出一个叶状结构。如果诱导出的叶状结构不同，那么根据第 3 节中的讨论可知， $\pi^{-1}(0)$ 在 $\mathcal{D}$下是不变的。因此，我们可以假设它们确实相同。回想一下，向量场在奇点 p 处的阶，就是以该点为基点的泰勒级数中第一个非零齐次分量的次数；由此可得：

引理 5.6。可以假设 X 和 Y 在原点处的阶不同。

证明。假设 X 和 Y 在原点处具有相同的阶。由于它们在 $\mathbb{CP}^2$ 上诱导出相同的叶状结构，因此二者之差将是径向向量场的一个倍数（例如，将 X 乘以一个非零常数后）。因此，考察 $Z = X - Y$ 可知，叶状结构 $\mathcal{D}$ 仍由 X 和 Z 张成，并且我们仍有 $[X, Z] = 0$。然而这是不可能的，因为 Z 显然是 dicritical 的，因而立即与引理 5.4 矛盾。□

记 X^H （分别为 Y^H）为 X（分别为 Y）在原点处的第一个非零齐次分量。由上述引理可知，我们可以假设 Y^H 的次数严格大于 X^H 的次数。前述结果意味着， X^H、 Y^H 中任一个的核心动力学都与 dicritical 叶状结构 $\mathcal{D}$ 的核心动力学相一致。下面的命题对所讨论的核心动力学提供了有力的控制；该命题连同其关于以曲线为中心进行爆破的类似结果，构成了 [44] 中所展开讨论的基本出发点。

命题 5.7。向量场 X^H 有一个非恒定的亚纯/全纯第一积分。

证明。再次根据第 3 节中的讨论， $\mathcal{D}$ 的 dicritical 性质确保存在全纯函数 f 和 g ，使得

$$fX + gY = Z\,, \tag{7}$$

其中 Z 是一个全纯向量场，其在原点处的第一个非零齐次分量是径向向量场 R的倍数。记 f^H、g^H分别为 f、g的第一个非零齐次分量，由上文可知， $f^H X^H$和 $g^H Y^H$必须具有相同的次数。此外，我们有一个齐次方程

$$f^H X^H + g^H Y^H = h^H R \tag{8}$$

其中 h^H 是一个齐次多项式，也可能恒等于零。下文假设 h^H 不恒等于零，因为稍作调整即可将以下讨论推广到这种情形。

由于 X、Y对易， X^H、Y^H也对易。因此我们有

$$\begin{aligned}
[X^H, Y^H] &= \left[X^H, \frac{h^H}{g^H}R - \frac{f^H}{g^H}X^H\right] \\
&= \left[X^H.\left(\frac{h^H}{g^H}\right)\right]R - \frac{h^H}{g^H}[R, X^H] - \left[X^H.\left(\frac{f^H}{g^H}\right)\right]X^H \\
&= \left[X^H.\left(\frac{h^H}{g^H}\right)\right]R - \left[(d-1)\frac{h^H}{g^H} - X^H.\left(\frac{f^H}{g^H}\right)\right]X^H \\
&= 0
\end{aligned}$$

其中 d 表示 X^H的次数。特别地

$$\left[X^H.\left(\frac{h^H}{g^H}\right)\right]R = \left[(d-1)\frac{h^H}{g^H} - X^H.\left(\frac{f^H}{g^H}\right)\right]X^H\,.$$

左边括号内的表达式（即乘以 R的表达式）必须恒等于零，否则 X^H 将是径向向量场 R的倍数。由此可得

$$X^H.\left(\frac{h^H}{g^H}\right)=0\,.$$

换言之， h^H/g^H是 X^H的一个亚纯（可能是全纯）第一积分。

剩下只需证明 h^H/g^H 不是常数。然而，若此函数为常数（且不为零，因为 h^K 并非恒等于零），则不失一般性，我们可以假设 $h^H/g^H=1$。因此，将（8）除以 g^H，可得

$$\frac{f^H}{g^H}X^H+Y^H=R.$$

然而，最后这个方程不可能成立，因为 Y^H 的次数至少为 2，而表达式f^HX^H/g^H是齐次的。因此 h^H/g^H不可能是常数。由于关于向量场 X和Y的论证是对称的，最后这一断言便完成了证明。□

证明定理 5.3 的关键在于注意到，像 $\mathcal{D}$ 这样的叶状结构的 dicritical 分支的核心动力学必须保持某些代数曲线不变。显然，命题 5.7 以及一些改进在此证明中发挥了作用。

然而，显然，导出命题 5.7 的讨论在很大程度上依赖于假设 X, Y 在原点的一阶喷射为零。这一问题需要将一些特殊情形单独考虑，这些情形被称为“线性叶状结构”，因为其中涉及非零的一阶喷射。不出所料，“线性叶状结构”可以通过相当直接的方法处理。

最后，正如在三维情形中不可避免的那样，每个消奇过程都需要两类爆破：除了以点为中心的爆破，还需要以曲线为中心的爆破。特别是，定理 5.3 证明中的另一个基本要素，将是先前结果在“线性”和“非线性”情形下的类似结论。这个问题已在第 4 节中出现过（参见关于方程 4 的讨论），而且很容易引起误解，因此似乎有必要在本段末尾仔细说明恰当的表述。

以下例子由 D. Cerveau 指出。它有助于解释以光滑曲线为中心进行爆破时“零一阶喷射”的概念。这个例子还凸显了与第一积分存在性相关的困难（参见命题 5.7 以及 [44]中使用但此处未明确提及的其他一些中间结果）。

例 1. 考虑由 X、Y 给出的这对向量场：

$$X=zy\frac{\partial}{\partial y}+z^2\frac{\partial}{\partial z}\qquad\text{and}\qquad Y=x^2\frac{\partial}{\partial x}+axy\frac{\partial}{\partial y}$$

它们在原点处是二次的。注意，这两个向量场彼此对易，因此它们张成一个余维一叶状结构，记作 $\mathcal{D}$。

轴 $\{y=z=0\}$ 对 X 和 Y 都是不变的。这个轴也包含在 $\mathcal{D}$ 的奇异集中。于是，我们考虑以轴 $\{y=z=0\}$ 为中心的 $\mathbb{C}^3$ 爆破，以及 $\mathcal{D}$、 X 和 Y 相应的变换。可以直接验证，对于所讨论的爆破， $\mathcal{D}$ 是 dicritical 的。同样，与 X 相关联的叶状结构 $\mathcal{F}_X$ 对这次爆破也是 dicritical 的，这可能会让人对引理 5.4 产生困惑。

这个例子的解释在于，向量场 Y在轴 $\{y=z=0\}$的一般点处是正则的（非零的）。类似地，它在前一次爆破下的变换在例外除子的一般点处也是正则的。换言之，这种情形必须被

视为“线性情形”，而且 Y 相对于这次爆破的阶确实必须等于零。下文将给出向量场相对于爆破中心的阶的恰当定义。

那么，当被爆破的是一条曲线而非单个点时，我们来给出向量场阶的准确定义。为了说明这一概念，先考虑一个在原点有奇点的全纯向量场 X及其对应的泰勒级数。称 X在原点的阶为其泰勒展开中第一个非零齐次分量的次数。也可以将其看作满足下式极限的整数 d：

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda^{d-1}}\Gamma_\lambda^* X$$

得到一个（不恒为零的）全纯向量场。这里， $\Gamma_\lambda^* X$ 表示通过位似变换 Γ_λ 对 X 的拉回：$(x,y,z)\mapsto(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$。注意，上述极限对应于 X 在原点处泰勒展开的第一个非零齐次分量。接下来，假设 $C=\{y=z=0\}$ 包含在 X 的奇异集中，因此将考虑以这条奇点曲线为中心的爆破。定义 X 相对于C 的阶为满足下式的整数 d：

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda^{d-1}}\Lambda_\lambda^* X$$

是一个（不恒为零的）全纯向量场，其中 $\Lambda_\lambda^* X$ 表示通过位似变换 $\Lambda_\lambda:(x,y,z)\mapsto(x,\lambda y,\lambda z)$对 X 的拉回。对于适当选择的 d，上述极限称为 X 关于变量 x,y的第一个非零齐次分量。一般来说， [44] 中称为线性的情形，是指相对于所讨论的爆破中心，向量场的阶为 1 或 0 的情形。特别地，根据上述定义，可以立即验证，例 1 中的向量场 Y 相对于 $C=\{y=z=0\}$的阶为 0，尽管它在原点处的阶为 2。

5.2. 一维叶状结构的分离曲线。本段将详细讨论一维叶状结构的分离曲线是否存在这一问题。与余维一叶状结构的情形相反，我们很快会看到，核心动力学对这些分离曲线是否存在的影响相当有限。事实上，一维叶状结构的分离曲线存在这一现象，在某种适当意义下具有非常局部的性质：它基本上取决于两个基本要素，即：

- 对简单奇点的分析，主要通过涉及标准形和发散级数的直接方法来进行。
- 涉及相关简单奇点相对位置的几何考量。

在这方面，只要有适用的奇点消解定理，无论维数如何，这个问题在某种程度上都具有相同的性质。更确切地说，维数增加所带来的困难，要么源于一个显而易见的事实：简单奇点并不总是容易描述（例如，高余维的鞍结点）；要么源于另一个事实：其相对位置的可能排列方式也会随之增加。

如前所述，在 Camacho-Sad 定理于 [5] 证明每个定义在（$\mathbb{C}^2$, 0）上的叶状结构都存在分离曲线之后，Gomez-Mont 和 Luengo 找到了一个定义在（$\mathbb{C}^3$, 0）上的叶状结构，它不存在分离曲线。我们先概述他们的构造。

5.3. 关于 Gomez-Mont 和 Luengo 的反例。他们给出的在 ($\mathbb{C}^3$, 0) 上没有分离曲线的叶状结构的例子，基于两个简单的观察。考虑由满足以下条件的全纯向量场给出的 ($\mathbb{C}^3$, 0) 上的叶状结构 $\mathcal{F}$

(1) 原点 (0, 0, 0) $\in \mathbb{C}^3$ 是 X的孤立奇点。(2) $J^1X(0,0,0) = 0$但 $J^2X(0,0,0) \neq 0$，其中 $J^kX(0,0,0)$ 表示 X 在原点 ($k = 1, 2$) 处的 k阶喷射。(3) X 在 (0, 0, 0) 处的二次部分 X^2 是一个奇异集余维为 2 的向量场。此外， X^2 不是径向向量场 $x\partial/\partial x + y\partial/\partial y + z\partial/\partial z$的倍数。

~假设 $\mathcal{F}$ 有一条分离曲线 C，并考虑以原点为中心对 $\mathcal{F}$ 进行的爆破 $\mathcal{F}$。记 π 为爆破映射，使得 $\widetilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$，并令 $\pi^{-1}(0)$ 表示与 $\mathbb{CP}^2$同构的例外除子。由于 X^2 不是径向向量场的倍数，因此$\pi^{-1}(0)$ 被 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 不变，于是 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 对 $\pi^{-1}(0)$ 的限制可视为 $\mathbb{CP}^2$ 上的次数 2 叶状结构（参见第 (3) 项）。

由于 $\pi^{-1}(0)$ 被 $\widetilde{\mathcal{F}}$不变，分离曲线 C 的变换 $\pi^{-1}(C)$ 只能在 $\widetilde{\mathcal{F}}$的奇点处与$\pi^{-1}(0)$相交。此外，由于 X在原点有一个孤立奇点，所有这些奇点都位于 $\pi^{-1}(0)$ 上。换言之，对于 $\widetilde{\mathcal{F}}$的某个奇点， $\pi^{-1}(C)$ 必须是一条分离曲线（不包含在 $\pi^{-1}(0)$ 中）。

现在，第二个要素如下：作为 $\mathbb{CP}^2$ 上的一个次数 2 的叶状结构， $\widetilde{\mathcal{F}}$ 对 $\pi^{-1}(0)$ 的限制 $\widetilde{\mathcal{F}}|_{\pi^{-1}(0)}$ 至多有（且一般有）7 个奇点。由于很难控制 $\mathbb{CP}^2$ 中这 7 个点的位置， [15] 的作者从满足以下条件的叶状结构入手：

(A) 次数 2 的叶状结构只有 3 个奇点（我们可以把这种叶状结构视为由一般二次叶状结构的 7 个奇点中的若干个 “ 成组碰撞 ” 而得到）。显然， $\mathbb{CP}^2$ 中 3 个点的位置很容易控制。(B) 这 3 个奇点各自在横截于 $\pi^{-1}(0)$ 的方向上有一个等于零的特征值。因此，这 3 个奇点都是（三维中的）鞍结奇点。(C) 此外，作者还安排这些鞍结奇点在切于 $\pi^{-1}(0)$ 的方向上有两个相等且非零的特征值。换言之，所讨论的奇点是（余维 1）共振鞍结点，其弱方向横截于$\pi^{-1}(0)$。(D) 众所周知，很容易构造这样的余维 1 鞍结点实例：它们的所有分离曲线都包含在一个与非零特征值方向相切的不变（二维）平面内。

证明的其余部分 [15] 在于说明，确实可以为向量场 X 指定二次 X^2 和三次 X^3 齐次分量，使其满足上述所有条件。关于这一点，请注意，条件 (A)、(B) 和 (C) 仅取决于二次部分 X^2。适当选择的三次部分 X^3所起的作用可概括如下。

- 它确保 $\mathcal{F}$ 的每个奇点都是孤立的，因此与$\mathcal{F}|_{\widetilde{\pi^{-1}(0)}}$中相应的奇点重合。这里读者可以注意到，与 X^2 相关的齐次叶状结构在$\widetilde{\mathcal{F}}|_{\pi^{-1}(0)}$的奇点上方的 $\widetilde{\mathbb{C}}^3 \to \widetilde{\pi}^{-1}(0)$纤维上处处有奇点。因此，需要对 X^2 作高阶扰动，以使膨胀叶状结构的奇点孤立。

- 确保奇点孤立之后， X 的三次部分 X^3 也满足条件 (D)

如前所述，借助适当的软件处理形式化计算，我们验证了所有这些条件彼此相容。

5.4. 向量场与 2 维李代数。在 [44], 文中，研究了由一对对易向量场张成的余维一叶状结构，并指出这一条件对相关余维一叶状结构中 dicritical 分支的核心动力学施加了严格限制。特别是，这些限制已被证明足够强，能够确保相关叶状结构存在分离曲线。

鉴于前文的讨论，自然会想到，由相关向量场产生的一维叶状结构本身是否也具有分离曲线。结果证明答案是肯定的；此外，存在两个对易向量场这一假设可以放宽，还可涵盖由生成仿射群李代数的向量场对所构成的情形。事实上，以下定理已在 [47] 中得到证明：

定理 5.8. [47] 设 X 和 Y 是定义在 $(0, 0, 0) \in \mathbb{C}^3$ 的某个邻域U内的两个全纯向量场，它们在整个 U 上并非线性相关。假设 X和 Y在原点处消失，并且满足以下条件之一：

- $[X, Y] = 0$;

对于某个 $c \in \mathbb{C}^*$, - $[X, Y] = cY$。

那么存在一个经过原点且同时在 X 和 Y下保持不变的解析曲线芽 $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^3$ 。

上述定理值得补充几点说明。

- 首先，定理 5.8 适用于生成仿射群李代数的一对向量场，这与余维一叶状结构的类似问题形成鲜明对比。事实上，任意次数至少为 2 的齐次向量场与径向向量场都能生成仿射群的李代数。特别是，Jouanolou 等人构造的无分离曲线余维一叶状结构例子，均来自生成仿射群李代数的向量场对。

- 尽管关于一维叶状结构存在分离曲线的定理本身就很有意义，但它们在理解紧致复流形上整体定义的全纯向量场这一一般问题中，也有重要应用，参见第 6.2 节。特别是，本文 [47] 还在这一方向给出了定理 5.8 的一项重要应用。

- 最后，有一个相对次要却颇为微妙的问题值得指出：定理 5.8 声称 X 和 Y 拥有一条公共不变曲线，却没有断言该曲线对与 X 和 Y相关的叶状结构是不变的。为了进一步说明这个问题，不妨考虑二维向量场 $x\partial/\partial x$：轴$\{x = 0\}$ 对该向量场是不变的，却不是相关叶状结构的分离曲线。进而，我们可以追问，与 X 和Y 相关的叶状结构是否共享一条真正的分离曲线；或许可以扩大“分离曲线”的定义，将完全由相应叶状结构的奇点构成的曲线也包括在内。特别容易验证，当 X是齐次向量场而 Y 是径向向量场时，“公共分离曲线”总是存在。事实上，此时 $\mathcal{F}_Y$ 的叶就是径向直线。至于 $\mathcal{F}_X$，由于它不是径向向量场的倍数，因此它通过在原点处对 $\mathbb{C}^3$ 作一次爆破，在 $\mathbb{CP}^2$ 上诱导出一个一维叶状结构。该叶状结构具有孤立奇点，而且很容易验证，与这些奇点自然对应的径向直线也对 $\mathcal{F}_X$ 不变。我们相信，在一般情形下，也可以证明 $\mathcal{F}_X$ 和 $\mathcal{F}_Y$ 存在一条公共分离曲线。

为了完成本节，我们来概述一下定理 5.8 的证明。

定理 5.8 的证明概要。回顾一下，与 X （分别与 Y）相关联的叶状结构记作 $\mathcal{F}_X$（分别记作 $\mathcal{F}_Y$）。令 $\mathcal{D}$ 表示由 X 和 Y 张成的余维一叶状结构。我们有 $\operatorname{codim}(\operatorname{Sing}(\mathcal{D})) \geq 2$。换言之，$\operatorname{Sing}(\mathcal{D})$ 属于以下几种情形之一：有限条不可约曲线的并、一个单点（原点），或者为空（即 $\mathcal{D}$ 是正则的）。由于 $\operatorname{Sing}(\mathcal{D})$ 自然地被 X 和 Y 所不变，若 $\dim(\operatorname{Sing}(\mathcal{D})) = 1$，结论便立即成立。因此，不失一般性，我们可以假设 $\operatorname{Sing}(\mathcal{D})$ 的余维至少为 3。换言之，$\operatorname{Sing}(\mathcal{D})$ 要么仅由原点构成，要么实际上为空。

由于 $\mathcal{D}$ 的奇异集余维至少为 3，马尔格朗日定理 [29] 蕴含 $\mathcal{D}$ 存在一个非常数全纯第一积分 f。于是令 $S = f^{-1}(0)$，使得 S 是 $\mathcal{D}$ 的不变曲面，也就是说，S 的不可约分支是 $\mathcal{D}$ 的分离曲线。特别地，S 同时为 X 和 Y 所不变。接下来，注意可以假设 S 是不可约的。否则，S 任意两个不可约分支的交集都会给出一条同时在 X、Y 下不变的曲线，结论便成立。因此可以假设曲面 S 要么是正则的，要么在原点有一个孤立奇点（同样，如果 S 含有一条奇点曲线，该曲线必定同时为 X 和 Y 所不变）。此处有几点说明：

- 在 S 光滑的情形下，根据 Camacho-Sad 定理 [5]，叶状结构 $\mathcal{F}_X$ 和 $\mathcal{F}_Y$ 各自都有分离曲线。不过仍需验证这些叶状结构有一条公共分离曲线。
- 如前所述，在奇异曲面的情形下，存在没有分离曲线的叶状结构的例子（参见 [4] 或 [15]）。因此，在当前情形下必须排除这种现象。

一般而言，我们按如下方式进行。考虑 X 和 Y 在 S 上的限制，以及相应的切触轨迹。由于 X 和 Y 都在原点处消失，这个切触轨迹非空。由于切触轨迹 $\operatorname{Tang}(X|_S, Y|_S)$ 在 X 和 Y 下均不变，当其维数为 1 时，结论立即成立。因此，我们将分别考虑 $\operatorname{Tang}(X|_S, Y|_S) = \{(0,0,0)\}$ 以及 $\operatorname{Tang}(X|_S, Y|_S) = S$ 的情形。

假设 $\operatorname{Tang}(X|_S, Y|_S)$ 仅由原点构成。那么，S 是一个奇异集余维至少为 2 的曲面，并且带有两个向量场，它们在这个余维为 2 或更高的解析集之外线性独立。这意味着 S 的切层局部平凡，进而由于 S 是 $\mathbb{C}^3$ 中的一个超曲面，S 是光滑的。然而，既然 S 是光滑的，它便局部等价于 $\mathbb{C}^2$，而两个向量场的切触轨迹不可能仅由一个点构成。由此产生的矛盾排除了这种情形。

现在假设 $\operatorname{Tang}(X|_S, Y|_S) = S$，也就是说，$X$ 和 Y 在 S 上的限制相差一个乘法函数（定义在 S 上）。根据 Camacho-Sad 定理，当 S 光滑时，所需的公共分离曲线便得以保证。剩下只需考虑 S 在原点有一个孤立奇点的情形。此时的论证依赖于证明由 X 或 Y 在 S 上诱导的（一维）叶状结构存在一个非常数全纯第一积分。该第一积分经过原点的水平曲线便给出了所需的分离曲线。详情见 [47]。□

6. Semicomplete vector fields、 automorphism groups和 and separatrices

本节最后要讨论的对象是一类特殊的向量场奇点，即半完备向量场（的奇点）。从全局层面和芽的层面理解这类向量场，是一个具有重要应用价值的问题。例如，我们将在第 6.2 节看到，关于半完备向量场奇点的结果，有助于深入理解一些关于紧致复流形自同构群维数界的问题

。研究这类向量场及其奇点的另一个动机，源于半完备性在某种程度上类似于微分方程的 Painlev´e 性质，尽管这两个概念并不等价。事实上，与 Painlev´e 性质的情形一样，数学物理文献中也大量出现半完备向量场——有时是隐含出现的。

半完备奇点的概念是在 [41] 中引入的。其思路始于对一般开集上半完备向量场的定义，如下所示。

定义 6.1. [41] 若全纯向量场 X 定义在某个复流形 M 的开集 U 上，则称其为半完备的（在 U 上），如果对每个 $p \in U$，都存在一个连通域 $V_p \subset \mathbb{C}$（其中 $0 \in V_p$）以及一个映射 $\phi_p : V_p \to U$，满足以下条件：

- $\phi_p(0) = p$
- $\phi_p'(T) = X(\phi_p(T))$，对每个 $T \in V_p$ 均成立。ˆ
- 对任意序列 $\{T_i\} \subset V_p$，只要 $\lim_{i\to\infty} T_i = T \in \partial V_p$，序列 $\{\phi_p(T_i)\}$ 就会逃离 U 的每个紧子集。

定义 6.1 中的第三个条件基本上意味着，$\phi_p : V_p \to U$ 是 X 的极大解，其含义类似于通常针对实向量场和／或微分方程所使用的“极大解”概念。在这个意义下，该定义等价于：向量场是半完备的，当且仅当对于每个 $p \in U$，满足 $\phi(0) = p$ 的积分曲线 ϕ 在 $\mathbb{C}$中具有极大定义域。与$\mathbb{C}$中的极大定义域概念密切相关，我们可以先考虑向量场 X 的一条局部积分曲线，然后沿路径对其进行延拓；只要始终处于 X的定义域内，这种延拓总是可能的。于是，向量场 X 是半完备的，当且仅当这些延拓不会产生任何单值化，因此能够合并为 X 的一个单一的（单值）解，而该解自然地定义在 $\mathbb{C}$中的一个极大定义域上。

尽管上述定义本质上是全局性的，但以下论断凸显了它的局部性质：如果向量场 X 在 U 上是半完备的，那么将X 限制到 U 的任意子集 V 上也同样是半完备的。因此，半完备向量场的芽这一概念，以及由此产生的半完备奇点概念，都是有意义的。此外，即使在芽的层面上，半完备这一条件也远非平凡；事实上，正如 [41]中所指出的，它对向量场的奇点施加了很强的约束。事实上，自该概念引入以来，半完备奇点一次又一次地证明：它们几乎完整地捕捉了那些能够作为完备向量场实现的向量场芽的“内在本质”。

Ghys 和 Rebelo 在论文 [41] 和 [13]中对 $(\mathbb{C}^2,0)$ 上的全纯半完备向量场的芽进行了分类。特别是，这些向量场都存在非恒定的全纯/亚纯第一积分，因此与之相关的动力学相当简单。

简要介绍半完备向量场之后，本节余下部分将聚焦于两个与之相关的基本问题。第一个问题在某种程度上受到 Ghys 和 Rebelo 关于二维情形的结果启发，探讨半完备这一条件在多大程度上能够驯化相应叶状结构的核心动力学。换言之，我们要问：

- Ar是否存在具有真正复杂核心动力学的半完备向量场 s?

第二个问题是 E. Ghys 很久以前提出的。粗略地说，这个问题涉及判定半完全奇点能够有多“退化”。这方面一个典型问题与具有孤立奇点的半完备向量场有关，可以表述如下：

- 半完备向量场在孤立奇点处的二阶喷射是否必然非零?

Ghys 和 Rebelo 在前述著作中对二维情形给出了肯定的回答。高维情形仍未解决，不过在三维情形下已有若干部分结果。

尽管人们已经强调了“驯服”向量场奇点相关核心动力学的重要性，我们还要指出，E. Ghys 提出的一般性问题也应用于紧致复流形自同构群维数上界的问题。第 6.2 节将进一步讨论这一问题。目前，我们将聚焦于半完备奇点相关的动力学。

6.1. 具有复杂动力学的半完备向量场——Guillot 的工作 [17]。如前所述，复维数 2 中半完备向量场的奇点具有非常简单的动力学。事实上，半完备向量场的整体行为也易于进行细致分析，参见 [19], [18]。然而，正如 Guillot 对 Halphen 向量场的深入研究所揭示的，三维情形不再如此。本段主要旨在概述半完备 Halphen 向量场中出现的主要动力学问题；更全面的讨论请参见 [17] 。

Halphen 向量场最早由 Halphen 本人研究 [20], [21]。除他的贡献外，我们在此说明，本段其余所有结果均归功于 Guillot，详见 [17]。在忽略线性等价的意义下，Halphen 向量场构成一个三参数族，是定义在 $\mathbb{C}^3$ 上的次数为 2 的齐次多项式向量场，其显式形式如下

$$\begin{aligned} X = &\left[\alpha_1 z_1^2 + (1-\alpha_1)(z_1z_2 + z_1z_3 - z_2z_3)\right]\frac{\partial}{\partial z_1} + \\ &\left[\alpha_2 z_2^2 + (1-\alpha_2)(z_1z_2 - z_1z_3 + z_2z_3)\right]\frac{\partial}{\partial z_2} + \\ &\left[\alpha_3 z_3^2 + (1-\alpha_3)(-z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)\right]\frac{\partial}{\partial z_3} \end{aligned} \tag{9}$$

[17] 中指出了另一种定义，它已揭示了这些向量场的内在性质，定义如下。

定义 6.2. 定义在 $\mathbb{C}^3$ 上的次数为 2 的齐次多项式向量场（简称二次向量场）若满足以下关系，则称为 Halphen 向量场

$$[C, X] = 2R\,, \tag{10}$$

其中， C 表示一个常向量场， R 是径向向量场。

式 (9) 所示的标准形是通过求解 $C = \partial/\partial z_1 + \partial/\partial z_2 + \partial/\partial z_3$下的方程 (10) 得到的。由于 C 和 X 都是齐次的，根据欧拉关系，我们还得到 $[R, C] = -C$ 和 $[R, X] = X$。进而，这三个关系共同意味着，三元组 $\{R, C, X\}$ 生成了 SL(2, $\mathbb{C}$) 的李代数。

令 $\mathcal{F}_X$、 $\mathcal{F}_R$ 和 $\mathcal{F}_C$ 分别表示与向量场 X、R 和 C相关联的一维叶状结构。再次令 $\widetilde{\mathbb{C}}^3$ 表示以原点为中心对 $\mathbb{C}^3$ 进行的爆破，其投影为 $\pi : \widetilde{\mathbb{C}}^3 \to \mathbb{C}^3$。例外除子 π^{-1}(0) 同构于 $\mathbb{CP}^2$ ，而对 $\mathcal{F}_X$、 $\mathcal{F}_R$和 $\mathcal{F}_C$进行的爆破$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$将分别记为 $\mathcal{F}_X$、 $\mathcal{F}_R$和 $\mathcal{F}_C$。类似地， X、 R和 C分别表示对 X、 R和 C进行的爆破。接下来回顾一下：每当两个向量场对易时，其中一个向量场的流会保持与另一个向量场相关联的叶状结构。这一简单观察揭示了 Halphen 向量场的一项基本性质。事实上，由于 X 和 C 除径向向量场外彼此对易，

沿着 R的轨道， X 的流“趋于”保持由 C 产生的叶状结构的投影。为了准确表述这一点，我们首先注意到， R 的轨道空间自然地可与例外除子 $\pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{CP}^2$ 等同；不过，在 $\pi^{-1}(0)$ 上，$\widetilde{X}$ 恒等于零，而 C 有极点。然而，叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}_X$ 和 $\widetilde{\mathcal{F}}_C$ 在$\pi^{-1}(0)$ 上的限制 $\mathcal{F}_{X|\pi^{-1}(0)}$ 和 $\mathcal{F}_{C|\pi^{-1}(0)}$ 具有一种特定的“相互横截性”，这让人联想到前面关于对易向量场的观察。具体而言：

定义 6.3. 若两个（奇异）叶状结构 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 在一条代数曲线 C 之外（正则且）横截，则称它们互相横截；此外，该曲线同时被 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 所不变。特别地，曲线 C 包含 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 的所有奇点。

注意到 $\widetilde{\mathcal{F}}_{C|\pi^{-1}(0)}$ 不过是一个射影直线铅笔，“互相横截”这一条件使我们可以直接在$\pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{CP}^2$上求出$\widetilde{\mathcal{F}}_{X|\pi^{-1}(0)}$ 的结构。具体而言，我们有：

- 一般而言，$\widetilde{\mathcal{F}}_{X|\pi^{-1}(0)}$ 恰有 3 条射影直线 C_1、 C_2 和 C_3 不变。这些射影直线属于线性系$\mathcal{F}_{C|\pi^{-1}(0)}$ ，且彼此交于 $\pi^{-1}(0)$ 中的一个径向奇点（该线性系的基点集）；用齐次坐标表示为 $[1,1,1]$。此外，$\mathcal{F}_{X|\pi^{-1}(0)}$ 在 $[1,1,1]$ 处的特征值为 1 和 1（径向奇点）。

- 事实上， $[1,1,1]$ 是三维空间中该叶状结构的一个径向奇点。换句话说， $\mathcal{F}_X$ 在 $[1,1,1]$ 处与横截于例外除子的方向相对应的特征值仍为 1。

- 除不变射影直线 C_1、 C_2 和 C_3外，叶状结构 $\mathcal{F}_{X|\pi^{-1}(0)}$ 与线性系 $\mathcal{F}_{C|\pi^{-1}(0)}$中的其余射影直线横截。

接下来，由于 X 是齐次的，基本上可以根据核心叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}_{X|\pi^{-1}(0)}$ 在 $\pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{CP}^2$上的动力学，推知叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}_X$ 在 $\widetilde{\mathbb{C}}^3$ 上的动力学。稍后我们会回到这一点。

鉴于上述讨论，我们先来关注核心叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}_{X|\pi^{-1}(0)}$ 与线性系 $\mathcal{F}_{C|\pi^{-1}(0)}$（将后者视为叶状结构）都经过奇点$[1,1,1] \in \pi^{-1}(0)$。考虑在 $[1,1,1]$处对 $\pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{CP}^2$ 进行二维爆破。所得曲面是希策布鲁赫曲面 F_1，它是 $\mathbb{CP}^1$ 上的 $\mathbb{CP}^1$-丛，且带有一个自交数为 -1的截面。在 F_1上，叶状结构（线性系）$\mathcal{F}_{C|\pi^{-1}(0)}$ 变为标准纤维化 $\mathrm{P}\colon\ F_1 \to \mathbb{CP}^1$。反过来，叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}_{X|\pi^{-1}(0)}$ 在 F_1 上的变换 $\mathcal{F}_{X,F_1}$ ，在 F_1 的 -1-有理曲线的邻域内是正则的（该曲线即 $\mathbb{CP}^2$的爆破所得的例外除子 $\pi^{-1}(0)$）。此外，P 有 3 条纤维被$\mathcal{F}_{X,F_1}$ 所不变，显然仍将这些纤维记作 C_1、 C_2和 C_3 。除这三条纤维外，$\mathcal{F}_{X,F_1}$在开流形 $F_1 \setminus \{C_1, C_2, C_3\}$上正则，并且与 P 所诱导的纤维化横截。

$\widetilde{\mathcal{F}}_{X|\pi^{-1}(0)}$ 的动力学可以自然地从$\mathcal{F}_{X,F_1}$ 的动力学中读出；而后者本质上由整体表示描述。事实上，$\mathcal{F}_{X,F_1}$ 在开曲面（$F_1 \setminus \{C_1, C_2, C_3\}$）上的限制与纤维化 $\mathrm{P}\colon\ F_1 \to \mathbb{CP}^1$在（$F_1 \setminus \{C_1, C_2, C_3\}$）上的限制横截。由于 P 的纤维是紧致的，Ehresmann 观察保证，P 在$\mathcal{F}_{X,F_1}$ 的叶上的限制给出一个覆盖映射，将所讨论的叶映到 $\mathbb{CP}^1 \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$；其中 z_1、 z_2、 z_3 与不变纤维 C_1、 C_2、 C_3自然对应。因此，$\mathcal{F}_{X,F_1}$ 的动力学本质上编码在整体表示中，即同态 ρ，它从 $\mathbb{CP}^1 \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$的基本群

映到沿$\mathcal{F}_{X,F_1}$的叶进行平行输运所产生的 P 的纤维自同构群。

令 $\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{z_1, z_2, z_3\})$ 表示 $\mathbb{CP}^1 \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$ 的基本群。由于 $\mathcal{F}_{X,\ F_1}$ 是全纯的，整体表示 ρ 的像包含于 $\mathbb{CP}^1$ 的全纯微分同胚群中，该群可识别为 PSL $(2,\mathbb{C})$。$\mathcal{F}_{X,\ F_1}$ 的整体群 Γ 是 $\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{z_1, z_2, z_3\})$ 在 ρ 下的像，即由 $\Gamma = \rho[\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{z_1, z_2, z_3\})]$ 定义的 $\Gamma \subset$ PSL $(2,\mathbb{C})$。

接下来，对每个 $i = 1$，2，3，令 $\xi_i \in$ PSL $(2,\mathbb{C})$ 表示通过沿 $\mathcal{F}_{X,\ F_1}$ 的叶提升绕 $z_i \in \mathbb{CP}^1$ 的小环而得到的整体映射。莫比乌斯变换 ξ_1、ξ_2、ξ_3 显然生成整体群 Γ，并满足关系 $\xi_1\,\xi_2\,\xi_3 = \mathrm{id}$。通过显然的识别，$\Gamma$ 在 $\mathbb{CP}^1$ 上的动力学也涵盖了 $\widetilde{\mathcal{F}}_{X|\pi^{-1}(0)}$ 在 $\mathbb{CP}^2$ 上的全局动力学。

前述所有讨论均适用于由 (9) 定义的族中的每个 Halphen 向量场，无论其是否半完备。为检测族 (9) 中的半完备 Halphen$\widetilde{\ }$向量场，我们按以下步骤进行。首先，注意到 $\mathcal{F}_X\widetilde{\ }$与 $\mathcal{F}_{X|\pi^{-1}(0)}$ 的奇点确实重合。自然，存在点 $[1,1,1]$，它位于线性系 $\mathcal{F}_{C|\pi^{-1}(0)}$中 $\widetilde{\ }$所有直线的交点处。此外，在 $[1,1,1]$, 附近，叶状结构 $\mathcal{F}_X$ 与三维径向向量场共轭。

为描述其余奇点的结构，对于 $i = 1$、2、3，令 $m_i = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 2)/\alpha_i$，条件是 $\alpha_i \neq 0$；否则令 $m_i = \infty$。$\sim\mathcal{F}_X$ 的其余奇点包含于直线 C_1、C_2、C_3 中，具体如下。

$\widetilde{\ }$(1) 若 $m_i \neq \infty$。那么，除 $[1,1,1]$ 外，$\mathcal{F}_X$ 在直线 C_i 上恰有两个奇点 p_i 和 $q_i\widetilde{\ }$。$\mathcal{F}_X$ 在 p_i 处的特征值为 -1、-1、$-m_i$，而在 q_i 处的特征值为 -1、-1、m_i。两种情况下，特征值的排列顺序均为：第一个特征值对应于横截例外除子的方向，第二个特征值对应于 C_i 的方向，第三个特征值对应于横截于 C_i 且包含在例外除子中的方向。$\widetilde{\ }$(2) 若 $m_i = \infty$。那么，除 $[1,1,1]$ 外，$\mathcal{F}_X$ 在 C_i 中有唯一的奇点 $p_i = q_i$。在此奇点处，特征值为 -1、0、-1，排列顺序与上述条目相同。

$\widetilde{\ }$当 $m_i = \infty$ 时，全纯映射 ξ_i 是 PSL $(2,\mathbb{C})$ 中的抛物型映射，因为 $\mathcal{F}_{X|\pi^{-1}(0)}$ 在 $p_i = q_i$ 处有一个（二维）鞍结奇点，其强不变流形横截于 C_i。接下来，我们有：

命题 6.4。假设 X 是半完备的，并且 $m_i \neq \infty$。那么 m_i 是一个整数（通过互换 p_i 和 q_i 的角色，可以假设其为正数）。此外，全纯映射 ξ_i：$\mathbb{CP}(1) \to \mathbb{CP}(1)$ 是周期的，其周期为 m_i。

$\widetilde{\ }$证明。再次，经过对 p_i 和 q_i重新命名后，$\mathcal{F}_X$ 的奇点 q_i 位于 Siegel 域中，并且所讨论的叶状结构在该奇点处的特征值满足 [50] 中定理 1 的条件 1、2、3 和 4（或者等价地，满足 [43]中定理 2.19 的条件）。此外，用 [50], [43], 的术语来说，能够被一条经过 $0 \in \mathbb{C}$ 的直线与其他特征值“分离”的特征值是第一个特征值（即与横截于例外除子的方向$\widetilde{\ }$相关联的特征值）。于是，考虑与该$\widetilde{\ }$方向相切的 $\mathcal{F}_X$ 的分离曲线 S。显然可以验证，在局部坐标下，X 在 S 上的限制由 $-z^2\partial/\partial z$给出。由于 X 是半完备的，因此，沿着 S 中的一条小闭路绕过 q_i 所得到的 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 的局部整体映射必定与恒等映射一致，参见 [13]。于是，[50]$\widetilde{\ }$中的定理 1 保证 $\mathcal{F}_X$ 在 q_i 附近可线性化。

~ ~特别地，叶状结构 $\mathcal{F}_{X|\pi^{-1}(0)}$ 在 q_i附近也可线性化。因此，$\mathcal{F}_{X|\pi^{-1}(0)}$ 具有一条横截于 C_i 的分离曲线，并且由这条分离曲线得到的整体映射~局部共轭于角度为 $2\pi/m_i$的旋转。由于$\mathcal{F}_{X|\pi^{-1}(0)}$ 横截于一个纤维化，这个局部整体映射实际上是全局莫比乌斯变换 $\xi_i \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 的限制，因此必定满足$\xi_i^{m_i} = \mathrm{id}$。□

由此立即得到以下结论

命题 6.5. 若 X是半完备的，则描述~全局动力学的整体群 $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})_{(0)}$ 由下式给出

$$\Gamma = < \xi_1, \xi_2, \xi_3 : \ \xi_1^{m_1} = \xi_2^{m_2} = \xi_3^{m_3} = \xi_1\xi_2\xi_3 = \mathrm{id} > \ .$$

换句话说， Γ是一个三角群。

在命题 6.5 中，当 $m_i = \infty$时，条件 $\xi_i^{\infty} = \mathrm{id}$ 应理解为仅表示 ξ_i 是抛物型。下文中，我们也采用这样的约定： $1/m_i = 0$当且仅当 $m_i = \infty$。为了获得动力学复杂的半完备 Halphen 向量场，我们还假设

$$m = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} < 1\,. \tag{11}$$

不等式 (11) 的作用仅仅是排除有限种情形，在这些情形中，群 Γ 是“初等”的，即有限群，或与 $\mathbb{C}$上的仿射群的某个子群共轭。假设m_1, m_2, m_3 固定且满足 (11)，则得到的三角群 Γ 满足以下所有条件:

- 群 Γ 是唯一的（相差共轭）。
- Γ是离散且非初等的。
- Γ保持 $\mathbb{CP}^1$ 中的一条实射影直线不变，因此 Γ 实际上是一个非初等福克斯群（即 Γ 也可视为 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 的子群）。
- 的极限集 $\Lambda(\Gamma)$ 与不变圆 S^1重合。特别地， Γ 在 $\mathbb{CP}^1 \setminus \Lambda(\Gamma)$的每个连通分支上都适当不连续地作用。

众所周知， Γ 在其极限集 $\Lambda(\Gamma) = S^1$ 上的动力学十分复杂：其动力学的所有轨道都稠密，并且相对于勒贝格测度是遍历的。此外，平稳测度是唯一的（且难以详细理解）。显然，这些问题~直接反映在叶状结构 $\mathcal{F}_{X|\pi^{-1}(0)}$ 对 $\Lambda(\Gamma)$的饱和中，因此其动力学同样十分复杂。

此外，简要谈谈 $\widetilde{\mathcal{F}}_X$ 在 $\widetilde{\mathbb{C}}^3$ 上的实际动力学也很方便，而~不局限于其核心叶状结构 $\mathcal{F}_{X|\pi^{-1}(0)}$。为描述这一动力学，我们基本上可以沿用描述叶状结构 $\mathcal{F}_{X|\pi^{-1}(0)}$时的相同思路。从线性系$\widetilde{\mathcal{F}}_{C|\pi^{-1}(0)}$出发，考虑每条直线在$\widetilde{\mathcal{F}}_{C|\pi^{-1}(0)}$ 下经典范投影 $\Pi : \widetilde{\mathbb{C}}^3 \to \pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{CP}^2$的原像，从而定义 $\widetilde{\mathbb{C}}^3$ 中的一族曲面。更准确地说，对于线性系 $\widetilde{\mathcal{F}}_{C|\pi^{-1}(0)}$中的每条射影直线 D ，$\Pi^{-1}(D)$ 都是 $\mathbb{CP}^1$ 上的线丛，其陈类等于 -1。或者，通过添加一个“无穷远截面”， $\Pi^{-1}(D)$ 可以自然地紧化为希策布鲁赫曲面 F_1。换言之，在 $\widetilde{\mathbb{C}}^3$ 中添加一个 “ 无穷远平面 ” 后，我们得到一族由线性系 $\widetilde{\mathcal{F}}_{C|\pi^{-1}(0)}$中的直线参数化的 F_1 曲面。现在，~若移除位于 $\mathcal{F}_{C|\pi^{-1}(0)}$ 各条直线顶部、且在$\mathcal{F}_{X|\pi^{-1}(0)}$下不变的三个希策布鲁赫曲面，便可直接得出结论： $\mathcal{F}_X$ 与以 F_1曲面为纤维、底空间为 $\mathbb{CP}^1 \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$的纤维化横截。因此，我们再次得到一个从

$\mathbb{CP}^1 \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$的基本群到全纯微分同胚群 Aut (F_1) 的表示$\widetilde{}$，其作用于 F_1。令 $\overline{\Gamma}$ 为 $\overline{\rho}$ 的像，即 $\mathcal{F}_X$的整体群。显然， $\overline{\rho}$ 由映射 Ξ_i 生成，这些映射通过提升绕过 z_i, $i = 1, 2, 3$ 的小环路得到。映射 Ξ_i 可以显式地计算。取一个配备坐标 (x, w) 的曲面 F_1 ，其中 x 是射影直线 $\Pi(F_1)$ 上的射影坐标， w 是 F_1 纤维上的仿射坐标，在其与例外除子的交点处取值为零。那么我们有

$$\Xi_i(x, w) = (\xi_i(x), \sqrt{\xi'(x)}\, w) \tag{12}$$

参见 [45]。考虑到 $\widetilde{\mathcal{F}}_X$ 在 $\widetilde{\mathbb{C}}^3$ 上的动力学与 $\mathcal{F}_X$ 在 $\mathbb{C}^3$ 上的动力学可以视为相同，前述内容可概括如下（这种轻微的措辞不严谨实际上不会造成误解）：

命题 6.6。 $\mathcal{F}_X$ 在 $\mathbb{C}^3$ 上的动力学，实质上等价于群 $\overline{\Gamma} = \langle \Xi_1, \Xi_2, \Xi_3 \rangle$ 在 F_1上的动力学。特别地， F_1 的（-1）截面在 $\overline{\Gamma}$ 作用下是不变的，而 $\overline{\Gamma}$ 在该截面上的作用限制，无非就是三角群 Γ在 $\mathbb{CP}^1$上的作用。

至此，我们已描述了 Halphen 向量场相当复杂的动力学，其中量 m_i 为满足条件 (11) 的整数；更多信息请参阅 [17]。然而，严格来说，我们仍然不知道满足相关条件的 Halphen 向量场是否确实是半完备的。事实上，命题 6.4 只给出了向量场为半完备的必要条件。因此，仍需检验这些条件是否也充分。

颇为有趣的是，对应的 Halphen 向量场具有半完备性的事实，基本上已包含在 Halphen 的原始论文 [20], [21]中。Halphen 在他的短文开篇指出，如果 ϕ 是 Halphen 向量场的一个解，那么

$$\widetilde{\phi} = \frac{1}{(ct+d)^2}\, \phi\left(\frac{at+b}{ct+d}\right) - \frac{c}{ct+d}\,, \tag{13}$$

对于每个 a、 b、 c、 $d \in \mathbb{C}$ ，只要 $ad - bc \neq 0$成立，情况也是如此。由此他得出结论，所有解都可以由一个单一的“已知”解描述。随后，他通过巧妙地运用 θ 函数，求得了一个特解。从这个意义上说，命题 6.4 的逆命题可以从他的研究中推导出来。

然而，Guillot [17] 为满足命题 6.4 中条件的 Halphen 向量场具有半完备性的性质给出了另一种证明。Guillot 的论证不依赖 θ 函数所满足的那些卓越恒等式，而且或许更重要的是，该论证很适合进行深入推广。我们将在本段末尾概述这一论证。

首先，回顾黎曼曲面上的平移结构、仿射结构和射影结构的基本概念很有必要，因为它们在下文的讨论中会起到作用。

定义 6.7. 设 S 是一个黎曼曲面，并配有一个由局部坐标 $\{(B_i, \varphi_i)\}$ 构成的覆盖。覆盖 $\{(B_i, \varphi_i)\}$ 定义了 S 上的平移结构（分别为仿射结构、射影结构），当且仅当坐标变换 $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$: $\varphi_j(B_i \cap B_j) \to \varphi_i(B_i \cap B_j)$ 是 $\mathbb{C}$ 的平移变换（分别为仿射映射、M¨obius 变换）的限制。

特别地，若 S 带有一个处处不为零的全纯向量场 X，则以 X 的（局部）解的反映射为局部坐标的覆盖会赋予 S 一个平移结构。这个简单的观察在下文中会很有用。

此外，平移结构（分别地，仿射结构、射影结构）会导出一个单值化同态 ρ ，它从 S 的基本群映射到

$\mathbb{C}$ （分别映射到仿射映射、M¨öbius 变换群）。按照 [17], [19], ，用 S_ρ 表示与 ρ 的核相关联的 S 的覆盖空间。在 S_ρ 上，我们可以定义一个发展映射 $\mathcal{D}_\rho$： $S_\rho \to \mathbb{C}$（分别为 $\mathbb{C}$、$\mathbb{CP}^1$）。事实上， S_ρ 是使发展映射有定义的 S 的最小覆盖。这个发展映射称为相应结构的单值化-发展映射。自然地，所有发展映射在与相应群（平移、仿射映射或 M¨öbius 变换）中的元素复合后，仍然是有定义的。

注记 6.8。上述内容为我们提供了另一种等价方式来定义黎曼曲面上的半完备向量场。因此一般而言，由于一个向量场是半完备的，当且仅当其在相关叶状结构的每个叶上的限制是半完备的。也就是说，黎曼曲面 X 上的向量场 S 是半完备的，当且仅当相应平移结构的单值化-发展映射是单射。现在我们可以解释 Guillot 的论证了。

Guillot 关于命题 6.4 中 Halphen 向量场为半完备向量场的证明概要。我们可以先回顾一下，向量场 R 和 C 生成仿射群 $\widetilde{\mathrm{Aff}}(\mathbb{C}, 0)$ 的李代数。当然，类似的注记也适用于它们的爆破 R 和 C。然后我们考虑 $\widetilde{\mathbb{C}}^3$ 的扎里斯基开子集 W ，它是 $\pi^{-1}(0)$与 3 个不变希策布鲁赫曲面的补集。在命题 6.6 的情形下， W是 $\mathbb{CP}^1 \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$上的一个 U-丛，其中 $U \subset F_1$ 是由 $\widetilde{F}_1$的两个有理截面的补集所定义的扎里斯基开集。特别地， U 与 Aff（$\mathbb{C}$，0）的一条轨道存在自然对应关系。最后， $\mathcal{F}_X$ 横截于纤维化 $W \to \mathbb{CP}^1 \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$ 的纤维，并具有由命题 6.6 确定的整体群。

只需证明 W 是半完备的。Guillot 的基本观察是， $\widetilde{X}$ 在将 $\mathbb{CP}^1 \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$ 视为 U-丛 W的底空间时，会在其上诱导出自然的射影结构。对此值得作几点说明。借助纤维丛结构，小圆盘 $B \subset \mathbb{CP}^1 \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$ 可与叶 L 上的圆盘 $\widetilde{B}$ 对应起来。接下来，限制 $\mathcal{F}_X$ 在 W 上的每个叶 L $\widetilde{L}$，都带有由 X诱导的平移结构。这些横截结构随叶而变化，但其底层射影结构并不变化。事实上，考虑到 U-丛 W 的一个纤维 U 可与 Aff ($\mathbb{C}$) 的一个轨道对应——因而可由 R 和 C的流参数化，方程（13）可解释为涉及 R、 C和 X 的流（或它们的爆破，这两者等价）的一个恒等关系。作此解释后便可清楚看出， X 沿着叶 L 和 L' 在两个固定纤维 U_1 与 U_2 之间移动所需的时间，彼此之间由一个莫比乌斯变换联系。因此，在 $\widetilde{\mathcal{F}}_X$ 的所有可能叶上，取 X的局部解的逆像所得到的底空间 $\mathbb{CP}^1 \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$ 的覆盖，在 $\mathbb{CP}^1 \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$上定义了一个射影结构。

接下来，考虑射影结构 $\mathbb{CP}^1 \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$的单值化-发展映射 $\mathcal{D}_\rho$. 不难验证，该发展映射的代表元可以通过直接考察平移结构 $\widetilde{\mathcal{F}}_X$ 所对应的单值化-发展映射来获得；这些平移结构是由 X 在 $\mathcal{F}_X$ 的叶上诱导的（更准确地说，是由 $\mathcal{F}_X$ 在 W上的限制诱导的）。根据注记 6.8，可知 X 是半完备的，当且仅当 $\mathcal{D}_\rho$ 是单射。随后，Guillot 等人借助施瓦茨导数算子“计算”相关的射影结构，从而证明 $\mathcal{D}_\rho$ 本质上是施瓦茨三角函数，证明也就完成了。□

注记 6.9。公平地说，我们应当指出，本段所涵盖的内容基本上是 Guillot 论文 [17] 的第一部分。 [17] 的内容还包括将半完备 Halphen 向量场实现为复流形上的实际完备向量场，以及在研究 SL（$2\mathbb{C}$）作用和齐性空间方面的若干重要应用。

让我们以关于半完备向量场动力学的几个问题结束本段，其中第一个问题可谓不可避免。

问题 1. 是否存在动力学复杂、且与 Halphen 向量场所产生的动力学真正不同的半完备向量场?

另一个有趣的问题，可能与上述问题有关，也可能无关，涉及半单李群上的测地流。S. Dumitrescu 和 Elshafei-Ferreira-Reis 的著作已对这些测地流进行了研究，参见 [10], [12] 及其中的参考文献。给定一个（半单）李群 G，以及定义在 $\langle . \rangle$上的左不变全纯度量（作用于 G），则 G 上的复测地流可通过 Euler-Arnold 形式体系，表示为定义在 G 的李代数上的二次向量场。这产生了一类特殊但规模庞大、且具有几何性质的二次向量场。我们将这一类中的向量场称为 Euler-Arnold 向量场，其动力学无疑值得研究。因此，我们可以提出前述问题的以下特例；不过，这个特例本身也很有研究价值：

问题 2：是否存在表现出复杂动力学行为的半完备 Euler-Arnold 向量场?

6.2. 半完备向量场的局部方面及其应用。半完备向量场之所以受到关注，部分原因在于它们为判断一个向量场芽能否实现为某个完备向量场的奇点提供了局部障碍。下文中，我们将把半完备向量场的芽与半完备奇点视为同义词。

根据本节开头讨论的基本性质，半完备向量场可视为完备向量场的“局部对应物”。事实上，非半完备的奇点无法实现为某个完备向量场的奇点。特别是，它无法实现为紧致流形上全局定义的全纯向量场的奇点。因此，理解半完备奇点有助于描述在紧致流形上（全局）定义的全纯向量场。

为了更好地解释这一问题，最好围绕 E. Ghys 提出的一个相当具体且广为人知的问题展开讨论，该问题可以用半完备向量场表述如下：设 X 是定义在 $(\mathbb{C}^n, 0)$ 上且具有孤立奇点的半完备全纯向量场。是否有 $J^2X(0) \neq 0$，也就是说， X 在奇点处的二阶喷射是否必定不为零?

Ghys 最初的动机似乎与关于紧致复流形的自同构群维数界的问题有关。更准确地说，设 M 为一个紧致复流形，并记 Aut (M) 为 M 的全纯微分同胚群。众所周知，Aut (M) 是一个有限维复李群，其李代数可以与 $\mathfrak{X}(M)$ 认同，其中 $\mathfrak{X}(M)$ 是定义在 M 上的所有全纯向量场所组成的空间。一个过于天真的问题是：Aut (M) 的维数是否可以由 M 的维数的某个函数加以界定? 然而，事实证明，希策布鲁赫曲面 F_n 的自同构群维数为 $n+5$，只要 $n \geq 1$。特别是，即使在紧致曲面的情形下，Aut (M) 的维数也可以任意大。不过，对于特定类别的流形，可以更有效地提出类似问题。例如，在 Picard 群同构于 $\mathbb{Z}$ 的射影流形中，Hwuang 和 Mok 询问是否存在一个 n 维流形，其自同构群的维数超过 $\mathbb{CP}^n$ 的自同构群维数。

事实上，Ghys 的问题属于一条普遍原理，其表述虽不甚明确，大致如下：半完备奇点不能“过于退化”。在此，解释如何利用对半完备奇点退化程度的限制来解决前面的问题，是很有帮助的

。考虑一个 n维紧致复流形 M，并令 Aut (M) 和 $\mathfrak{X}(M)$ 如上所述。固定一点 $p \in M$，并令 $k \in \mathbb{N}$给定。最后，用 $\mathfrak{X}_p^k(M)$ 表示在 p 处 k-阶喷射为零的全纯向量场集合，并用 $J_p^k(M)$ 表示 p处 k-阶喷射的空间。自然映射

$$\mathfrak{X}_p^k(M) \to \mathfrak{X}(M) \to J_p^k(M),$$

从而得到一个短正合列，因此我们有

$$\dim \mathfrak{X}(M) \leq \dim \mathfrak{X}_p^k(M) + \dim J_p^k(M).$$

喷流空间 $J_p^k(M)$ 的维数可用 k 和 $n =$dim (M) 显式表示。特别地，如果对于某些 $p \in M$ 和 $k \in \mathbb{N}$，我们能够用 dim (M) 给出 dim $\mathfrak{X}_p^k(M)$ 的界，那么便可立即得到 dim (自同构群 (M)) 的界。例如，假设我们知道，对于某一类紧致流形，全纯向量场的每个奇点必定都是孤立的。那么，假定 Ghys 猜想成立，就可推出 dim $\mathfrak{X}_p^3(M) = 0$，因此自同构群 (M) 的维数将受 $(n^3 + 3n^2 + 2n)/2$ 限制。当然，一般而言也会出现非孤立奇点，因此能够处理这类奇点也很重要。

除了引入半完备奇点这一概念外， [41] 的内容大致可以由以下定理概括:

定理 6.10。 [41] 设 X 是定义在 $(\mathbb{C}^2, 0)$ 上的全纯半完备向量场。如果原点是 X 的孤立奇点，那么 $J_0^2 X \neq 0$。

定理 6.10 的证明依赖于 Camacho-Sad 定理，该定理断言在 $(\mathbb{C}^2, 0)$ 上的叶状结构存在分离曲线。事实上，由于 X 的奇异集仅由原点组成， X 在任何经过原点的解析不变曲线上的限制都不可能恒等于零。此外，这一限制仍是一个半完备向量场。接着考虑 X 在一条分离曲线上的限制；根据 Camacho-Sad 定理，这样的分离曲线确实存在。于是，问题实质上归结为一维情形（无论该分离曲线是否光滑）。同一篇论文通过直接方法解决了由此得到的一维问题。

因此，Ghys 猜想是否适用于高维半完备向量场，自然值得探讨。最早对高维半完备向量场开展的深入研究由 A. Guillot 完成于 [16], 和 [17] （此处“高维”指 ≥ 3）。Guillot 提到的论文尤其包含了许多二次半完备向量场的实例，展现出广泛的几何与动力学行为。在这些实例中，我们已经讨论过 Halphen 向量场的情形：它们具有复杂的动力学行为，且不存在（非平凡的）全纯／亚纯第一积分（参见第6节.1）。此外，Guillot 的研究也清楚表明，在维数 ≥ 3的情形下，全面分类所有零线性部分的半完备向量场——与 [13] 中给出的列表相对应——不太可能实现；至少，这样的分类会过于冗长，难以真正发挥作用。

因此，现在正是深入探讨将二维中关于 $\mathbb{C}^3$的一般分类结果推广到 $(\mathbb{C}^3, 0)$ 所面临困难的好时机，更不用说 [19] 更一般的结果还涵盖了亚纯向量场。事实上，无论要获得这些推广结果是否困难重重，明确列出维数大于 2 时出现的一些新困难，无疑都是有益的。除了核心动力学的存在——这是本文已着重指出的一般性困难——以下问题也值得一提。

1. Ghys 猜想的一种基本思路源自 [41]，其要点是寻找一条分离曲线。具体而言，有如下结论：设 X 是定义在 $(\mathbb{C}^n, 0)$ 上的半完备（全纯）向量场，且在原点有一个孤立奇点。若 X 有一条分离曲线，则 $J_0^2 X \neq 0$。然而，正如前文所述，Gomez-Mont 和 Luengo [15] 已证明，对于 $(\mathbb{C}^n, 0)$ 上的一维叶状结构的芽，分离曲线一般并不存在，$n \geq 3$（参见第 5 节）。2. 不过，[15], 给出的例子并非半完备，因此所有半完备向量场都存在分离曲线也并非不可能。虽然这似乎意味着可以通过证明半完备向量场确实存在分离曲线来证明 Ghys 猜想，但直接研究后一问题似乎并不可行。3. 关于上述第 2 点，一个更有希望的视角是注意到：二维半完备向量场的详细分类，无论是 [13]中的分类，还是 [19], 中的分类，都不需要用到 Camacho-Sad 定理。事实上，这些更深入的分析直接给出了分类。因此，$(\mathbb{C}^2, 0)$ 上半完备向量场存在分离曲线，便成为一个推论，而非事先所需证明的命题。4. 在二维情形中，Seidenberg 的奇点消解定理 [55]是几乎所有关于向量场或叶状结构奇点的研究都离不开的基础工具。过去几年中，一维叶状结构的消解定理已得到证明（参见第 4 节），因此这一最初的困难如今已克服。事实上，就半完备向量场而言，三维情形下已有一个与 Seidenberg 定理完全忠实对应的版本，稍后将会看到。5. 然而，困难不仅限于奇点约化过程，也不仅限于核心动力学现象。例如，假设我们的目标是通过证明分离曲线存在来建立 Ghys 猜想（在这种情况下，核心动力学所起的作用会大大减弱，参见第 5.2 节）。再假设我们面对的是一个允许简单奇点约化的全纯叶状结构。在三维情形中，消解过程中出现的鞍结奇点并不容易排除。特别是，可能出现余维二鞍结奇点（即两个特征值等于零的奇点），而这类奇点目前仍缺乏深入研究。

本文余下部分将通过进一步的评论和结果来补充上述列表，其中一些内容提出了更简便的方法，可根据具体目标应用发挥作用。

关于第 1 项和第 2 项，[47]中证明了一些部分结果。事实上，回顾一下，定理 5.8 指出，若给定两个全纯向量场 X 和 Y，它们构成一个二维李代数的表示且并非处处平行，则它们具有一条公共分离曲线。基于这一结果，[47]证明了三维情形下 Ghys 猜想的以下较弱版本：

定理 6.11。[47] 设 M 是一个三维紧致复流形，并假设自同构群 Aut (M) 的维数至少为 2。令 Z为 $\mathfrak{X}(M)$的一个元素，并假设 $p \in M$是 Z的一个孤立奇点。那么

$$J^2(Z)(p) \neq 0\,,$$

即，Z 在点 p处的二阶喷射不为零。

读者会注意到，就自同构群维数的估计而言，定理 6.11 与肯定地解决 Ghys 猜想

三维情形同样有效：也就是说，如果定理 6.11 所需的附加假设不成立，那么 Aut (M) 的维数至多为 1。

通过局部考察来寻找 Aut (M) 维数的界，其优势之一是所得结果对于开流形也基本成立。例如，在多复变函数领域，研究 Stein 流形上的有限维李群作用是一个活跃的课题，其源头可追溯至 Suzuki [56] 的一项经典工作。在这一方向上，我们的技术可以得出：

定理 6.12. [47] 设 N 为一个三维 Stein 流形，并考虑嵌入 $\mathfrak{X}_{\mathrm{comp}}(N)$ 中的有限维李代数 $\mathfrak{G}$（ N 上完备全纯向量场构成的空间）。假设 $\mathfrak{G}$ 的维数至少为 2。若 $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{X}(M)$ 中的元素 Z 具有一个孤立奇点 $p \in N$，则 Z 在 p 处的线性部分不能为零，也就是说， p是 Z的一个非退化奇点。

需要指出的是，Stein 流形的自同构群一般并不是有限维李群。事实上，即使 $\mathbb{C}^2$ 也有一个无限维自同构群，且几乎不具备任何非平凡的李群结构。定理 6.12 的表述通过假设一开始讨论的就是某个有限维李代数，避免了这一困难：根据李定理，这样的李代数总能积分为相应李群的一个（完备）作用。实际上，这部分表述对于任意三维复流形都成立（无论其是否紧致或 Stein），并且与定理 6.11 相呼应：向量场 $Z \in \mathfrak{G}$ 在孤立奇点处的二阶喷射永远不会为零。Stein 条件的作用是确保孤立奇点处的一阶喷射而非二阶喷射不为零。

作为本文的结尾，让我们回到第 4 节讨论的消解定理，并在假设向量场半完备的基础上进一步强化相关结果。正如前面提到的，消解定理始终在奇点理论中发挥核心作用，而对于三维中的一维叶状结构，已有精确的消解结论。然而，鉴于它们的重要性，在各种情形下都能采用尽可能简单的消解结论是很有益的。尤其自然会想到，半完备奇点或其他特殊类别的奇点是否允许采用更简单的消解定理，从而便于对其结构进行更细致的分析。

在 [51] 中也曾探讨过是否存在适用于半完备奇点的更简单消解定理；事实上，其最初动机是为 $(\mathbb{C}^2,0)$ 上的叶状结构建立一个能够忠实对应 Seidenberg 叶状结构定理的半完备奇点消解定理。这类结论有助于研究 Ghys 猜想等问题，或考察配备全纯向量场的三维紧致复流形。在此背景下，下面的定理 6.13 已在 [51] 中得到证明。

定理 6.13。 [51] 设 X 是定义在 $\mathbb{C}^3$ 原点邻域上的半完备向量场，并记 $\mathcal{F}$ 为与 X相关联的全纯叶状结构。则以下情形之一成立：

（1） X 在原点处的线性部分是幂零的（非零）。（2）存在一个有限序列的（标准）爆破以及相应的变换后的叶状结构

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \xleftarrow{\pi_1} \mathcal{F}_1 \xleftarrow{\pi_2} \cdots \xleftarrow{\pi_r} \mathcal{F}_r$$

使得 $\mathcal{F}_r$ 的所有奇点都是初等的。此外，每个爆破映射 π_i 的中心都位于相应叶状结构 $\mathcal{F}_{i-1}$ 的奇异集中。换言之，叶状结构 $\mathcal{F}$ 可以通过标准爆破来消解。

我们强调，定理 6.13 中的第 1 项涉及向量场 X 的线性部分，而不是相关叶状结构 $\mathcal{F}$ 的线性部分。事实上，从一开始就必须是 X 的线性部分非零（幂零）。此外，这一性质具有“普适性”，因为它不依赖于所实施的任何爆破／缩并序列。特别是，我们可以为流形选取一个“极小模型”，而其上 X 的相应变换在对应点处仍具有非零的幂零线性部分。根据前文，以下结论也值得单独指出。

推论 6.14。 [51] 设 X 为定义在 (0,0,0) 邻域上的半完备向量场 $\in \mathbb{C}^3$，并假设 X 在原点处的线性部分等于零。则定理 6.13 的第 (2) 项成立。

同一篇论文给出了持久幂零奇点的精确标准形，参见定理 4.4。然而，并非所有这些标准形都必然是半完备的，甚至不一定能实现为完备流的奇点。考虑到完备向量场的整体情形，自然会提出这样的问题：是否确实存在某些完备向量场，它们诱导出的叶状结构具有无法像定理 6.13 第 (2) 项那样通过标准爆破得到消解的奇点。事实上，这些奇点确实存在，一个显式例子由以下多项式向量场给出

$$Z = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xz\frac{\partial}{\partial y} + (y - xz)\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

尽管 Z 在 $\mathbb{C}^3$上并不完备，但它可以延拓为定义在某个适当开流形上的完备向量场。特别地，与上述坐标(x, y, z)的原点对应的点构成 Z的一个幂零奇点，无法通过以奇异集为中心的标准爆破加以消解。

最后，我们想强调，上述例子涉及一个定义在开流形上的完备向量场。接着可以问，在限制严格得多的三维紧流形这一情形下，这种现象是否仍会出现。由于在紧致情形下完备性条件自动满足，我们实际上是在问：是否存在一个三维紧致复流形，配备一个（全局）全纯向量场 X，它具有一个无法通过标准爆破加以消解的奇点。此次答案是否定的，理由如下：

推论 6.15. 设 $\mathcal{F}$ 是由定义在某个三维紧致复流形 M 上的向量场 X 所确定的叶状结构。那么，$\mathcal{F}$ 的每个奇点都可以通过一系列标准爆破加以消解。

最后，我们仅指出，严格来说，推论 6.14 和推论 6.15 都是证明定理 6.13 时所用方法的副产品，而非该定理陈述的形式推论。

References

[1] W. Barth, K. Hulek, C. Peters, & A. Van de Ven, *Compact complex surfaces, second edition*, Springer-Verlag, 柏林, (2004). [2] C.A. Briot & J.C. Bouquet, 由微分方程定义的函数的性质, , ( ), - . [3] C. Camacho, 复射影空间叶状结构的极限集问题, *International Congress of Mathematicians (Kyoto)* 1990 1235 1239 ,

Springer Verlag, ( ), - . [4] C. Camacho, 奇异曲面上的二次型与全纯叶状结构, *Matematische Annalen*, 282 1988 177 184 , ( ), - . [5] C. Camacho & P. Sad, 穿过全纯向量场奇点的不变簇, *Annals of Math.* **115** 1982 579 595 , ( ), - .

[6] F. Cano, 三维向量场的消奇策略, *Lecture Notes in Mathematics*, 1259 1987 , Springer-Verlag, 柏林, ( ). [7] F. Cano & D. Cerveau, 非 dicritical 全纯叶状结构的消奇及分离曲线的存在性, *Acta Math.*, 169, (1992), 1-103. [8] F. Cano,

Ann. of 三维

Math. **160** 3 2004 907 1011
中余维一奇异叶状结构的奇点约化, , , , ( ), - . [9] F. Cano, C. Roche & M. Spivakovsky, 三维线叶状结构的奇点约化, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas*, 2013年2月, DOI: 10.1007/s13398-013-0117-7. [10] S. Dumitrescu, 低维全纯黎曼度量, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 51 6 2001 1663 1690 , , ( ), - . [11] P. Elizarov, Y. Il'yashenko, A. Shcherbakov, & S. Voronin, 一维保角映射芽的有限生成群及复平面解析叶状结构复奇点的不变量, *Adv. in Soviet Math.* **14, (1993).** [12] A. Elshafei, A.C. Ferreira & H. Reis, 李群上伪黎曼与全纯黎曼度量的测地完备性,
preprint available from arXiv: https://arxiv.org/abs/2208.10873. [13] E. Ghys & J.C. Rebelo, 全纯流的奇点 II, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 47, 4, (1997), 1117-1174.[14] P.A. Griffiths & J. Harris,
Principles of Algebraic Geometry, Wiley经典丛书。John Wilet & Sons Inc., 纽约 (1994).
[15] X. Gomez-Mont & I. Luengo $\mathbb{C}^3$ *Invent.*,
Math. **109** 2 1992 211 219

无分离曲线的全纯向量场芽 , , , ( ), - . [16] A. Guillot, 齐次二次向量场的半完备性 , *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 56, 5 2006 1583 1615 , ( ), - . [17] A. Guillot, 关于 Halphen 方程及 SL (2, $\mathbb{C}$) 的作用 , *Publ. Math. IHES*, 105, 1, (2007), 221-294.[18] A. Guillot, 复曲面上具有单值解的亚纯向量场, *Adv. Math.*, 354, (2019), 106742, 41页。
[19] A. Guillot & J.C. Rebelo, 复曲面上的半完备亚纯向量场 , *Journal fur die*
reine und angewandte Mathematik **667** 2012 27 65 , , ( ),

- . [20] G.-H. Halphen, 关于一个微分方程组 , , XCII 卷 , ( ), - . [21] G.-H. Halphen, 关于某些微分方程组 , , XCII卷, ( ), - . [22] M. O. Huddai-Verenov, 微分方程解的一个性质（俄文）, *Mat. Sbornik*, 56 (98), 3, (1962), 301-308. [23] Y. Il'yashenko & S. Yakovenko, *Lectures on analytic differential equations*, 数学研究生丛书, 第86卷, 美国数学学会, 罗得岛州普罗维登斯, (2008). [24] Y. Il'yashenko, 复射影平面上解析微分方程相图的拓扑（俄文）, *Trudy Sem. Petrovsk*, 4, (1978), 83-136. (英文), *Sel. Math. Sov.*, 5, 2, (1986), 141-199.
[25] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover出版社, 纽约, (1944). [26] J.-P. Jouanolou, ´代数 Pfaff方程, *Lect. Notes Math.*, 708, (1979). [27] J.-P. Jouanolou, 解析Pfaff方程的超曲面解, *Math. Ann.*, 232, (1978), 239-245.[28] F. Loray & J.C. Rebelo, $\mathbb{CP}^n$, *J. Eur. Math. Soc.*中的极小刚性曲线叶状结构, 5, (2003), 147-201.[29] B. Malgrange, 带奇点的Frobenius结构, I: 余维一, *Publ. Math. IHES*, 46, (1976), 163-173. [30] D. Marin & J.F. Mattei, 全纯叶状结构芽的单值化与拓扑分类,*Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4), 45, 3, (2012), 405-445. [31] D. Marin & J.F. Mattei, 紧除子上的奇异全纯叶状结构的拓扑, *J. Singul.*, 9 2014 122 150 , ( ), - . [32] D. Marin,
J.F. Mattei & E. Salem *Int.* , 全
Math. Res. Notice IRMN **23** 2020 9228 9292
纯叶状结构芽的拓扑模空间, , , ( ), - . [33] D. Marin, J.F. Mattei & E. Salem, 全纯叶状结构芽的拓扑模空间 II: 万有变形, *preprint* 2105 12688 , https://arxiv.org/abs/ 。 ,
[34] D. Marin J.F. Mattei & E. Salem
, 全纯叶状结构芽的拓扑模空间 III: 完备族 , *preprint*, https://arxiv.org/abs/2201.07479

[35] J.-F. Mattei & R. Moussu, 全纯叶状结构的整体性与首次积分, *Ann. Sc. E.N.S. Série IV*, 13, 4, (1980), 469-523.[36] M. McQuillan & D. Panazzolo, 叶状结构的近似 étale 消解, *preprint IHES*, 高等科学研究所/ M/09/51, (2009). [37] M. McQuillan & D. Panazzolo, 叶状结构的近似 étale 消解, *J. Differential Geometry*, 95, (2013), 279-319. [38] I. Nakai, (ℂ, 0) 上不可解动力系统的分离曲线, *Ann. Inst. Fourier*, 44, (1994), 569-599. [39] D. Panazzolo, 三维实解析向量场的奇点消解, *Acta Math.*, 197, no 2 (2006), 167-289. [40] O. Piltant, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Nat. Ser.* Zariski 拼 *A Math. RACSAM* **107** 1 2013 91 121
接定理的公理化版本, , , , ( ), - . [41] J.C. Rebelo, 全纯流的奇点, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 46, 2, (1996), 411-428. [42] J.C. Rebelo, 关于 ($\mathbb{C}^2$, 0) 中奇异叶状结构的横截刚性, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 31, 3, (2011), 935-950. [43] J.C. Rebelo & H. Reis, 全纯叶状结构与向量场的局部理论, 可从 arxiv 获取的讲义 (arXiv:1101.4309). [44] J.C. Rebelo & H. Reis, 三维流形上 $\mathbb{C}^2$-作用的分离曲线, *Commentarii Mathematici Helvetici*, 88 3 2013 677 714 , , ( ), - . [45] J.C. Rebelo & H. Reis, 复常微分方程的均匀化及其应用, *Rev. Mat. Iberoam.*, 30, 3, (2014), 799-874.

[46] J.C. Rebelo & H. Reis $\mathbb{C}^n$ 0 *Bull. Braz.* , 关于 *Math. Soc. (NS)* 46 3 2015 469 490
Diff (,) 子群的可积性与有限轨道的短文, , , , ( ), - . [47] J.C. Rebelo & H. Reis,
2 0 *Journal*-维李代数 *de Mathématiques Pures et Appliquées* **105** 2 2016 248 264
与 ($\mathbb{C}^3$,) 上向量场的分离曲线, , , , ( ), - . [48] J.C. Rebelo & H. Reis,
$\mathbb{C}^2$ 0 *Journal of* Diff (,) 的 *Geometric Analysis* **27** 1 2017 1 55
离散轨道、回归性与可解子群, , , , ( ), - . [49] J.C. Rebelo & H. Reis, 关于 -流形上
1 3 *Russian Mathematical*-维叶状结 *Surveys* **76** 2 2021 291 355
构的消解, , , , ( ), - . [50] H. Reis, 叶状结构的等价性与半完备性, *Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications* **64** 8 2006 1654 1665 , , , ( ), - .

[51] H. Reis, 复常微分方程的几何与动力学, *Habilitation*, 葡萄牙波尔图大学 (2021). [52] J. Ribon, 局部复解析微分同胚子群的回归轨道, *Mathematische Zeitschrift* **285** 2017 519 548 , , ( ), - .

[53] A.A. Shcherbakov, 关于共形映射伪群轨道的稠密性及 Hudai-Verenov 定理的推广, *Vestn. Mosk. Univ.*, 31, Ser. I, (1982), 10-15. [54] A.A. Shcherbakov, 共形映射非交换群的拓扑共轭与解析共轭, *Tr. Semin. Petrovsk*, 10, (1984), 170-192. [55] A. Seidenberg, 微分方程 Ady
= *American Journal of* Bdx 的奇 *Mathematics* **90** 1968 248 269
点约化, , , ( ), - . [56] M. Suzuki, 关于 Stein 空间上 ℂ 与 $\mathbb{C}^*$ 的全纯作用, *Séminaire F. Norguet*, Springer LNM, 670, (1975-1976), 58-66. [57] L. Teyssier, 复平面上可呈现叶状结构的芽, *Bull. Braz. Math. Soc. (NS)*, 46, 2, (2015), 275-329. [58] F. Touzet,
Annales de la Fac. des 具有不变 *Sciences de Toulouse* 3, 2015 523 541
横截测度的全纯叶状结构, , XXIV, ( ), - .[59] H, Zoladek, *The monodromy group*, 波兰科学院数学研究所, 数学专著（新系列）, 67, Birkhäuser 出版社, 巴塞尔, (2006)。

Institut de Mathématiques de Toulouse ; UMR 5219, Université de Toulouse, 118 Route de Narbonne, F-31062 Toulouse, France.
Email address: rebelo@math.univ-toulouse.fr

Centro de Matemática da Universidade do Porto Faculdade de Economia da Universidade do , , Porto Portugal.
Email address: hreis@fep.up.pt