双曲几何中的单位圆盘图识别是 $\exists\mathbb{R}$-完全

Nicholas Bieker 卡尔斯鲁厄理工学院，德国
ThomasBläsius ！卡尔斯鲁厄理工学院，德国
EmilDohse ！卡尔斯鲁厄理工学院，德国
Paul Jungeblut 卡尔斯鲁厄理工学院，德国

arXiv:2301.05550v1 [cs.CG] 13 Jan 2023

摘要

如果图 G 是欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$中单位圆盘的交图，则称其为（欧几里得）单位圆盘图。已知识别这类图是 $\exists\mathbb{R}$-完全问题，也就是说，其难度等同于求解一组多项式不等式。在本文中，我们介绍一种简单的框架，用于将欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 中的 $\exists\mathbb{R}$-困难归约转换到双曲平面 $\mathbb{H}^2$中。我们运用该框架证明，在双曲平面中识别单位圆盘图同样是 $\exists\mathbb{R}$-完全问题。

2012年 ACM 学科分类 计算理论 → 随机性、几何与离散结构 → 计算几何；计算理论 → 计算复杂性与密码学 →复杂性类

关键词与短语 单位圆盘图、双曲几何、实数存在理论

1 引言

如果一个图的顶点可以用大小相同的圆盘表示，且当且仅当对应的圆盘相交时两个顶点相邻，则称该图为单位圆盘图 。单位圆盘图（UDG）这一图类因其数学上的优美性和实际应用价值而受到广泛研究，例如在传感器网络领域。

自然地，单位圆盘图通常是在欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 中研究的。然而，过去十年间，关于双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 中等大小圆盘的交图的研究逐渐受到关注。这是因为双曲几何非常适合表示更广泛的图结构，包括度分布异质的复杂无标度网络 [6, 7, 11, 16, 22]；参见图1。此类图的大部分研究都由网络科学领域推动，研究者关注概率网络模型，即双曲随机图。然而，若不考虑概率分布，而将双曲单位圆盘图视为一个图类，目前我们对此知之甚少。

双曲单位圆盘图（HUDG）这一图类是最近才引入的 [5][1]。选择半径较小的圆盘时，欧几里得几何与双曲几何之间的差异会变得微不足道；另请参见我们的交互式可视化[2] 和图1。

研究图类时，最根本的算法问题大概就是识别问题的计算复杂性，也就是说，Recog(HUDG) 是

[1] 我们注意到，Kisfaludi-Bak [14] 已经对一类相关的图类进行了研究，这些图类由圆盘大小参数化。从某种意义上说，HUDG 类是所有这些图类的并集。考虑渐近行为时，这一细微差异十分重要，因为随着图规模增大，增大圆盘大小可能是可取的；详细讨论请参见 [5] 。
[2] https://thobl.github.io/hyperbolic-unit-disk-graph

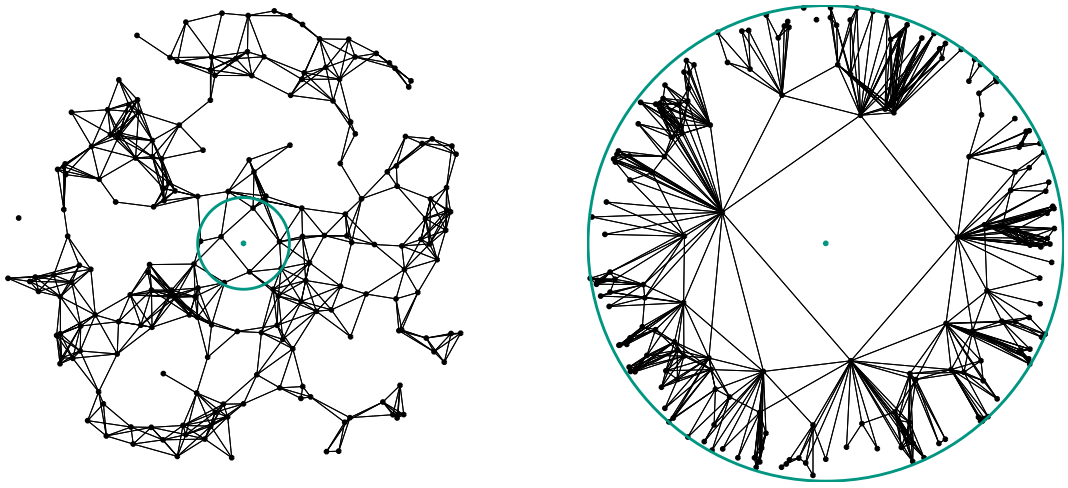

图1 两个双曲单位圆盘图。绿色圆圈表示阈值距离，顶点之间的距离低于该阈值时便会相连。较小的阈值（左）会产生与欧几里得单位圆盘图相似的结构。较大的阈值（右）则会使顶点度呈现更大的异质性。

判断给定图是否属于双曲单位圆盘图的问题。本文证明 Recog(HUDG) 是 $\exists\mathbb{R}$-完全的。在 $\exists\mathbb{R}$ 中的归属性不如在欧几里得平面中的情况那么显而易见，因为在双曲几何中，距离并不是多项式的（平方根）。尽管如此，使用双曲平面的双曲面模型，证明归属性并不困难。对于$\exists\mathbb{R}$-困难性，我们的证明包含五个步骤，按照特定方式在欧几里得问题与双曲问题的变体之间来回切换。我们的证明具有框架性质：前三个步骤独立于具体问题，其余步骤很可能可以转用于其他问题。因此，我们认为，这可以作为证明其他双曲问题的 $\exists\mathbb{R}$-困难性的范本，前提是这些问题在欧几里得空间中有一个 $\exists\mathbb{R}$-困难的对应问题。在我们的框架中，我们特别使用双曲平面的贝尔特拉米-克莱因模型，观察到简单可拉伸性在欧几里得几何与双曲几何中等价：伪直线排列在欧几里得平面中可拉伸，当且仅当它在双曲平面中可拉伸。

1.1 实数存在理论

实数存在理论 是所有形如 $\exists X \in \mathbb{R}^n : \varphi(X)$的真命题的集合，其中 $\varphi(X)$是由多项式方程和不等式组成的无量词公式，例如 $\exists X,\ Y \in \mathbb{R}:\ X \cdot Y = 6 \wedge X + Y = 5$。我们将判断此类命题是否为真的判定问题记为 ETR（也代表“实数存在理论”），并定义复杂性类 $\exists\mathbb{R}$，其中包含所有可在多项式时间内归约到 ETR 的判定问题。成立 NP $\subseteq \exists\mathbb{R} \subseteq$ PSPACE [8]。近年来，计算几何领域对该类 $\exists\mathbb{R}$ 的关注日益增加，因为它恰好刻画了许多几何问题的复杂性，例如美术馆问题 [2], 几何装箱 [3]，以及许多类几何相交图的识别问题 [15, 18, 24]。

1.2 双曲几何

将双曲平面嵌入欧几里得空间有多种方法。本文使用贝尔特拉米-克莱因模型 和双曲面模型。

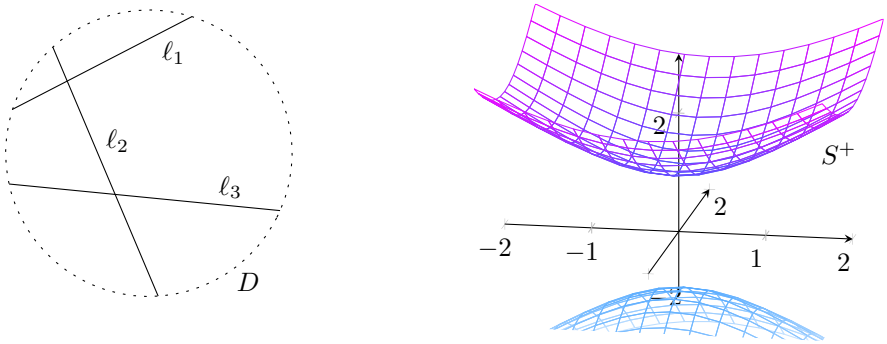

图 2 左：带有三条双曲直线的贝尔特拉米-克莱因圆盘。右：用于双曲面模型的上叶 S^+。

贝尔特拉米-克莱因模型 在贝尔特拉米-克莱因模型中，双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 由欧几里得空间 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆盘 D 的内部表示（其边界 D 不属于该模型）。双曲直线恰好是 D的弦。参见图 2（左）。

双曲面模型 这里将双曲平面嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中。闵可夫斯基二次型 $Q(x,y,z) := z^2 - x^2 - y^2$ 定义了一个双叶双曲面 $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid Q(x,y,z) = 1\}$，见图 2（右）。双曲平面由前叶 S^+ 上属于 S 的所有点表示，此外还要求 $z > 0$。两点 $u, v \in S^+$ 之间的双曲距离为

$$d_h(u,v) = \operatorname{arcosh}(B(u,v)) \qquad \text{with} \quad B(u,v) := u_z v_z - u_x v_x - u_y v_y$$

其中 $B(u,v)$ 称为闵可夫斯基双线性型，而 $\operatorname{arcosh}(x) := \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ 是反双曲余弦函数。注意，$\operatorname{arcosh}(\cdot)$ 内部的项是一个多项式。

2 欧几里得平面与双曲平面中的简单可拉伸性

一个伪直线排列$\mathcal{A}$ 是由一组伪直线（在 $\mathbb{R}^2$中单调于x的曲线）构成的集合，其中任意两条曲线至多相交一次。我们假设每条伪直线 $\ell \in \mathcal{A}$ 都有方向，因此将平面 $\mathbb{R}^2$ 分成两个开半平面 ℓ^- 和 ℓ^+。此外，$\mathcal{A}$将平面划分为区域，即 $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}$ 中不在任何伪直线上的极大连通分支。若任意两条直线恰好相交一次，且不存在三条直线交于同一点，则称$\mathcal{A}$ 为简单的。给定一个伪直线排列$\mathcal{A} = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$，我们为每个 $p \in \mathbb{R}^2$ 赋予一个符号向量 $\sigma(p) = (\sigma_i(p))_{i=1}^n \in \{-, 0, +\}^n$，其中

$$\sigma_i(p) := \begin{cases} - & \text{if } p \in \ell_i^- \\ 0 & \text{if } p \in \ell_i \\ + & \text{if } p \in \ell_i^+ \end{cases}.$$

于是，组合描述 $\mathcal{D}$ 由$\mathcal{A}$ 的 $\{\sigma(p) \mid p \in \mathbb{R}^2\}$给出。我们称$\mathcal{A}$ 实现了$\mathcal{D}$。如果存在具有相同组合描述的直线排列，则称伪直线排列是可拉伸的。并非所有伪直线排列都可拉伸；给定组合描述$\mathcal{D}$，判定$\mathcal{D}$ 是否可拉伸的问题称为可拉伸性问题（如果$\mathcal{D}$ 是简单的，则称为简单可拉伸性问题）。众所周知，可拉伸性问题和简单可拉伸性问题都是 $\exists\mathbb{R}$-完全的 [21, 23, 27]。简单可拉伸性问题是许多 $\exists\mathbb{R}$-困难性归约的起始问题，例如 [4, 12, 15, 24, 25]。

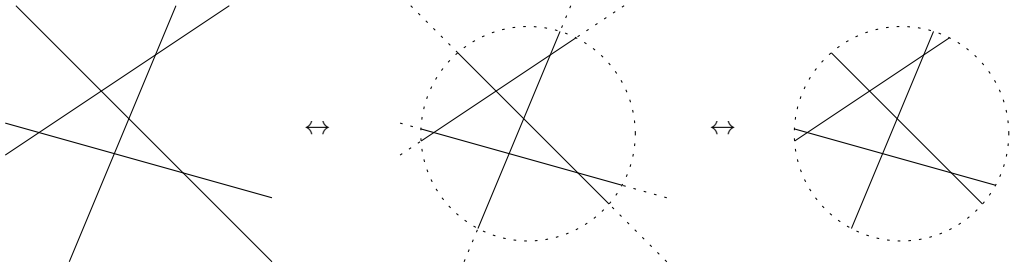

图3变换 欧几里得与双 曲几何之间的直线排列。

除了欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 中的直线排列之外，我们还可以考虑双曲平面 $\mathbb{H}^2$中的直线排列。本节的主要结果是，简单可拉伸性问题在欧几里得几何与双曲几何中等价。

▶**命题1**。 设 D 是一个简单伪直线排列的组合描述。当且仅当在 $\mathbb{R}^2$ 中存在一个实现 D 的直线排列时，在 $\mathbb{H}^2$中也存在这样的排列。

证明。 证明可由双曲平面的贝尔特拉米-克莱因模型直接得到。给定一个欧几里得直线排列，我们可以得到一个具有相同组合描述的双曲直线排列，反之亦然，见图3。

令$\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ 为欧几里得空间中的简单直线排列，并令 D 为严格包围$\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$所有交点的圆盘。对于$\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$中的每条直线，只保留其位于 D内部的部分。我们将 D 视为单位圆盘，从而得到贝尔特拉米-克莱因模型中的双曲直线排列表示。

反过来，令$\mathcal{A}_{\mathbb{H}}$ 为简单双曲直线排列，并取其在贝尔特拉米-克莱因圆盘 D内的表示，因此所有双曲直线都是弦 D。移除 D并将所有弦延长为直线。由于$\mathcal{A}_{\mathbb{H}}$ 是简单的，所得欧几里得直线排列具有相同的组合描述$\mathcal{D}$ ： 两条直线之间所有可能的交点都已位于贝尔特拉米-克莱因圆盘 D内。◀

▶ 注2。命题1仅适用于简单（伪）直线排列。对于一般（非简单）可拉伸性问题，并不存在相应的结果：例如，给定三条直线 ℓ_1， ℓ_2， $\ell_3 \subseteq \mathbb{H}^2$，直线 ℓ_2 和 ℓ_3 可能彼此相交，同时都与 ℓ_1平行。不过，命题1可以推广到这样的直线排列：每对直线仍须相交，但允许多条直线交于同一点。

3 框架

设 $\Pi_{\mathbb{R}}$ 是一个几何判定问题，其在欧几里得几何中的 $\exists\mathbb{R}$-困难性可通过从（欧几里得）简单可拉伸性出发的多项式时间归约 f 得到证明。我们将通过用双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 代替欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 而得到的相应判定问题记为 $\Pi_{\mathbb{H}}$ 。下面的框架包含若干（希望是）简单的步骤，使我们能够利用 $\Pi_{\mathbb{R}}$ 的归约证明 $\Pi_{\mathbb{H}}$ 的 $\exists\mathbb{R}$-困难性：

1. 设 $\mathcal{D}$ 是 简单可拉伸性 在 $\mathbb{H}^2$中的一个实例，即一个简单伪直线排列的组合描述。**2.** 利用命题1，将 $\mathcal{D}$ 视为 简单可拉伸性 在 $\mathbb{R}^2$中的一个实例。**3.** 使用归约 f 得到一个实例 $I = f(\mathcal{D})$ ，它属于 Π_R 且与 $\mathcal{D}$等价。**4.** 证明每个 $\Pi_{\mathbb{R}}$ 的 是实例也是 $\Pi_{\mathbb{H}}$的 是实例。

5. 证明可以从 I 在 $\mathbb{H}^2$中的一个实现中提取出实现 $\mathcal{D}$ 的直线排列。

应用该框架时，步骤 1、2 和 3 无需额外工作。
步骤 4 确保可伸展实例 $\mathcal{D}$ 会得到 $\Pi_{\mathbb{H}}$ 的是实例。这一步需要提出一个新的论证，但我们预计相对简单，因为局部来看， $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{H}^2$ 非常相似。一种有希望的做法是将 I 的欧几里得实现缩放到一个很小的区域，然后将欧几里得极坐标解释为双曲极坐标。

步骤 5 确保正确性。通过证明可以从 I 在 $\mathbb{H}^2$ 中的实现中提取出实现 $\mathcal{D}$ 的直线排列，我们证明否实例 $\mathcal{D}$ 会映射为 $\Pi_{\mathbb{H}}$ 的否实例。归约 f 或许在这里也能再次帮到我们（不过不能像步骤 3 中那样将其作为黑箱使用）：如果运气好，证明 I 在 $\mathbb{R}^2$ 中的实现会导出一个实现 $\mathcal{D}$ 的欧几里得直线排列的论证，只需用到 绝对几何 的公理（即欧几里得几何与双曲几何的共同“子集”），因此无需任何调整也适用于 $\mathbb{H}^2$ 中的实现。

4 双曲单位圆盘图的识别

我们应用框架证明，双曲单位圆盘图的识别问题 Recog(HUDG) 是 $\exists\mathbb{R}$-困难的。对于欧几里得几何，这一点已在 [13, 19, 20] 中证明。需要指出的是，UDG 和 HUDG 并不相同：例如，含有六个叶节点的星形图是双曲单位圆盘图，但不是欧几里得单位圆盘图。

对于框架的第 1 步，令 $\mathcal{D}$ 为 $\mathbb{H}^2$ 中简单可拉伸性问题的一个实例。在第 2 步中，我们将其视为 $\mathbb{R}^2$ 中的一个等价实例。在第 3 步中，我们使用文献中的归约 f，该归约证明了 $\mathbb{R}^2$ 中的 Recog(UDG) 是 $\exists\mathbb{R}$-困难的 [13, 19, 20]。我们得到一个图 $G_{\mathcal{D}}$，它是欧几里得单位圆盘图，当且仅当 $\mathcal{D}$ 可拉伸时成立。

虽然框架并不要求这样做，但我们简要概述归约 f，以根据 [19] 中给出的方法从 D 构造 $G_{\mathcal{D}}$。设 n 为伪直线 ℓ_1、……、ℓ_n 的数量，$m = 1 + \binom{n+1}{2}$ 为区域 C_1、……、C_m 的数量。由于该排列是简单的，D 所描述的排列恰好有这么多个区域。我们将 $G_{\mathcal{D}}$ 定义为一个图，其顶点集为 $V = A \cup B \cup C$，其中 $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$， $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$，以及 $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$。这里假设顶点 c_i 对应于区域 C_i。对于边，这些集合 A、B、C 分别构成一个团。此外，当且仅当 $C_j \in \ell_i^-$ 时，每个 $a_i \in A$（对于 $i \in \{1, \ldots, n\}$）都与 c_j（对于 $j \in \{1, \ldots, m\}$）相连。同样，当且仅当 $C_j \in \ell_i^+$ 时，每个 $b_i \in B$ 都与 c_j 相连。

对于步骤 4，我们必须证明每个欧几里得单位圆盘图也是一个双曲单位圆盘图。Bläsius、Friedrich、Katzmann 和 Stephan 最近证明了这一点：

▶**引理 3** ([5])。 每个欧几里得单位圆盘图也是一个双曲单位圆盘图，因此 单位圆盘图 $\subseteq$ 双曲单位圆盘图。

如上文所述，该证明将欧几里得单位圆盘交表示缩放到一个极小的区域，直到欧几里得平面与双曲平面“足够相似”。这样一来， $\mathbb{R}^2$ 中的极坐标就可以作为 $\mathbb{H}^2$ 中的极坐标使用，而不改变任何邻接关系。

对于步骤 5，还需证明如何从 $\mathbb{H}^2$中 $G_{\mathcal{D}}$ 的一个实现提取出在 $\mathbb{H}^2$ 中实现$\mathcal{D}$ 的直线排列。

▶ **引理 4** (改编自 [19, 引理 1])。 给定 $\mathbb{H}^2$中将 $G_{\mathcal{D}}$ 实现为等大小圆盘交图的一种方式。那么，由下式定义的直线排列 $L = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$

$$\ell_i := \{p \in \mathbb{H}^2 \mid \mathrm{d}(p, a_i) = \mathrm{d}(p, b_i)\}$$

具有组合描述 D。这里$\mathrm{d}(\cdot, \cdot)$ 表示双曲距离。

证明。 证明与 1 中的引理证明完全相同， [19] 其中 McDiarmid 和 Müller 证明，对任意一对点 a_i 和 b_i 之间的线段取垂直平分线，可得到一个实现 $\mathcal{D}$的欧几里得直线排列。他们的论证适用于 $\mathbb{H}^2$ ，只需将欧几里得距离替换为双曲距离即可。◀

至此，我们证明了 Recog(HUDG) 是 $\exists\mathbb{R}$-困难的。为证明其 $\exists\mathbb{R}$-完全性，接下来我们证明它属于 $\exists\mathbb{R}$。

▶**引理 5.** 双曲单位圆盘图识别属于 $\exists\mathbb{R}$。

证明。根据 Erickson、van der Hoog 和 Miltzow 的一项结果，我们可以通过为实数 RAM 机[3] [10]描述一个多项式时间验证算法，来证明 $\exists\mathbb{R}$-成员资格。给定一个图 $G=(V,E)$，并为每个顶点 $v\in V$指定双曲平面的双曲面模型中的一个点 (v_x,v_y,v_z)，表示一个等半径圆盘的圆心。计算$d_{\text{adj}}:=\max_{uv\in E}B(u,v)$ 和 $d_{\text{non-adj}}:=\min_{uv\notin E}B(u,v)$，其中 $B(\cdot,\cdot)$ 是闵可夫斯基双线性型。 $B(\cdot,\cdot)$ 是多项式，因此可以在实数 RAM 上计算。我们可以将d_{adj} 和 $d_{\text{non-adj}}$ 视为双曲空间中的距离（实际上它们是距离的双曲余弦），由于反双曲余弦函数是单调函数，这种理解是合理的。当且仅当 $d_{\text{adj}}<d_{\text{non-adj}}$时，存在半径为 r 的圆盘，使得 G 是半径为 r 的双曲单位圆盘图（选择 r 使得 $d_{\text{adj}}\le\cosh(r)_2<d_{\text{non-adj}}$）。该算法耗时 $O(|V|^2)$。这关于输入规模是多项式时间，因此证明了其属于 $\exists\mathbb{R}$。◀

我们以如下定理作结：

▶**定理6.** 识别双曲单位圆盘图是 $\exists\mathbb{R}$-完全的。

5 结论与展望

我们提出了一个简单的框架，可将 $\mathbb{R}^2$ 中几何判定问题的 $\exists\mathbb{R}$-困难性归约转化为其对应问题 $\mathbb{H}^2$中的归约。作为应用，我们证明了 Recog(HUDG) 是 $\exists\mathbb{R}$-完全的。该框架进一步应用的潜在方向包括识别单位球图（即将我们的结果推广至高维空间），这已在 [13] 中由 $\mathbb{R}^d$ 完成；以及 Recog(CONV)，即凸集交图的识别问题（欧几里得情形下的归约见 [24]）。

从技术上讲，该框架也适用于识别问题 Recog(HSEG) 和 Recog(HDISK)，其中 (H)SEG 和 (H)DISK 分别表示（双曲）线段交图和圆盘交图类（欧几里得情形下的归约见 [13, 15, 18, 20, 24]）。然而，这些问题并无太大意义，因为 SEG $=$ HSEG（在贝尔特拉米–克莱因模型中很容易看出），且 DISK $=$ HDISK（在庞加莱模型中很容易看出，本文不予讨论）。因此，Recog(HSEG) 和 Recog(HDISK) 的 $\exists\mathbb{R}$-完全性可直接由欧几里得情形推出。在 $\mathbb{H}^2$ 中值得考虑的其他有趣问题包括连杆可实现性 [1, 25]、同时图嵌入 [9, 17]或 RAC绘图 [26]。

致谢 感谢 Torsten Ueckerdt 与我们讨论如何证明 Recog(HUDG) 属于 $\exists\mathbb{R}$。

[3] 实数 RAM 在经典字 RAM 的基础上增加了可存储实数（任意精度）的寄存器。基本算术运算 $+$、$-$、$\cdot$ 和 $/$ 均可在常数时间内完成。但它不支持任意解析函数（如反双曲余弦函数）。形式化定义见 [10]。

参考文献

1 Zachary Abel、Erik D. Demaine、Martin L. Demaine、Sarah Eisenstat、Jayson Lynch 和 Tao B. Schardl。谁需要交叉？平面图刚性的困难性。载于 Sándor Fekete 和 Anna Lubiw 编，第32届国际计算几何研讨会（SoCG 2016），《莱布尼茨国际信息学会议论文集》（LIPIcs）第51卷，第3:1–3:15页，2016年。 doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2016.3。2 Mikkel Abrahamsen、Anna Adamaszek 和 Tillmann Miltzow。美术馆问题是∃ℝ-完全的。《ACM学报》，69(1):1–70，2022年。 doi:10.1145/3486220。3 Mikkel Abrahamsen、Tillmann Miltzow 和 Nadja Seiferth。二维装箱问题的 ER 完全性框架。载于第61届年度计算机科学基础研讨会（FOCS 2020），第1014–1021页，2020年。 doi:10.1109/FOCS46700.2020.00098。4 Daniel Bienstock。一些可证明困难的交叉数问题。《离散与计算几何》，6(3):443–459，1991年。 doi:10.1007/BF02574701。5 Thomas Bläsius、Tobias Friedrich、Maximilian Katzmann 和 Daniel Stephan。强双曲单位圆盘图，2022年。即将发表于 STACS 2023。 arXiv:2107.05518。6 Thomas Bläsius、Tobias Friedrich 和 Anton Krohmer。双曲随机图中的团。《Algorithmica》，80:2324–2344，2018年。 doi:10.1007/s00453-017-0323-3。7 Michel Bode、Nikolaos Fountoulakis 和 Tobias Müller。关于复杂网络双曲模型的最大连通分量。《电子组合学杂志》，22(1–52):P3.24，2015年。网址：https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v22i3p24。8 John Canny。PSPACE 中的一些代数与几何计算。载于第二十届ACM年度计算理论研讨会论文集，STOC '88，第460–467页，1988年。doi:10.1145/62212.62257。9 Jean Cardianl 和 Vincent Kusters。同步几何图嵌入的复杂性。《图算法与应用杂志》，19(1):259–272，2015年。 doi:10.7155/jgaa.00356。10 Jeff Erickson、Ivor van der Hoog 和 Tillmann Miltzow。缩小 NP 与 ER 之间的差距。《SIAM计算杂志》，第 FOCS20–102–FOCS20–138 页，2022年。 doi:10.1137/20M1385287。11 Luca Gugelmann、Konstantinos Panagiotou 和 Ueli Peter。随机双曲图：度序列与聚类。载于国际自动机、语言与程序设计研讨会（ICALP），第573–585页，2012年。 doi:10.1007/978-3-642-31585-5_51。12 Udo Hoffmann。关于平面斜率数问题的复杂性。《图算法与应用杂志》，21(2):183–193，2017年。 doi:10.7155/jgaa.00411。13 Ross J. Kang 和 Tobias Müller。图的球面与点积表示。《离散与计算几何》，47(3):548–568，2012年。 doi:10.1007/s00454-012-9394-8。14 Sándor Kisfaludi-Bak。双曲交图与（准）多项式时间。载于2020年ACM-SIAM离散算法研讨会论文集（SODA），第1621–1638页，2020年。 doi:10.1137/1.9781611975994.100。15 Jan Kratochvíl 和 Jiří Matoušek。线段交图。《组合理论杂志 B 辑》，62(2):289–315，1994年。 doi:10.1006/jctb.1994.1071。16 Dmitri Krioukov、Fragkiskos Papadopoulos、Maksim Kitsak、Amin Vahdat 和 Marián Boguñá。复杂网络的双曲几何。《物理评论E》，82(3):036106，2010年。doi:10.1103/PhysRevE.82.036106。17 Jan Kynčl。完全抽象拓扑图在 P 中的简单可实现性。《离散与计算几何》，45(3):383–399，2011年。 doi:10.1007/s00454-010-9320-x。18 Jiří Matoušek。线段交图与 ∃ℝ，2014年。 arXiv:1406.2636。19 Colin McDiarmid 和 Tobias Müller。表示一个单位圆盘图所需的比特数。载于 Dimitrios M. Thilikos 编，《计算机科学中的图论概念》（WG 2010），《计算机科学讲义》第6410卷，第315–323页，2010年。 doi:10.1007/978-3-642-16926-7_29。

20 Colin McDiarmid 和 Tobias Müller。圆盘图与线段图的整数实现。《组合理论杂志 B 辑》，103(1):114–143，2013年。 doi:10.1016/j.jctb.2012.09.004。21 Nikolai E. Mnëv。构形簇与凸多面体簇分类问题上的普适性定理。载于 Oleg Y. Viro 和 Anatoly M Vershik 编，《拓扑与几何——罗赫林研讨会》，《数学讲义》第1346卷，第527–543页。Springer，柏林，海德堡，1988年。 doi:10.1007/BFb0082792。22 Tobias Müller 和 Merlijn Staps。KPKVB 随机图的直径。《应用概率进展》，51(2):358–377，2019年。 doi:10.1017/apr.2019.23。23 Jürgen Richter-Gebert。重新审视 Mnëv 普适性定理，2002年。网址： https://geo.ma.tum.de/_Resources/Persistent/3/e/a/2/3ea2ad59228a1a24a67d1e994fa77266a599e73a/15_MnevsUniversalityhTheorem.pdf。24 Marcus Schaefer。若干几何与拓扑问题的复杂性。载于 David Eppstein 和 Emden R. Gansner 编，《图绘制》（GD 2009），《计算机科学讲义》第5849卷，第334–344页，2010年。 doi:10.1007/978-3-642-11805-0_32。25 Marcus Schaefer。图与连杆的可实现性。载于 János Pach 编，《几何图论三十篇论文》，第461–482页。Springer，2013年。 doi:10.1007/978-1-4614-0110-0_24。26 Marcus Schaefer。RAC 可绘制性是 ∃ℝ-完全的。载于 Helen C. Purchase 和 Ignaz Rutter 编，《图绘制与网络可视化》（GD 2021），《计算机科学讲义》第12868卷，第72–86页，2021年。 doi:10.1007/978-3-030-92931-2_5。27 Peter W. Shor。伪直线的可伸展性是 NP-困难的。载于 Peter Gritzmann 和 Bernd Sturmfels 编，《应用几何与离散数学》，DIMACS 研讨会论文集，美国罗得岛州普罗维登斯，1990年9月18日，《DIMACS 离散数学与理论计算机科学丛书》第4卷，第531–554页，1991年。 doi:10.1090/dimacs/004/41。