arXiv:2301.05554v1 [quant-ph] 11 Jan 2023

Operations Research 与量子信息科学之间的协同作用

Ojas Parekh 量子算法与应用协作组（QuAAC）桑迪亚国家实验室odparek@sandia.gov

摘要

本文面向对量子信息科学（QIS）感兴趣的运筹学研究者（反之亦然），重点介绍量子信息科学（QIS）与运筹学之间的协同作用。

1 引言

运筹学研究者并不陌生于将自身专长运用到新领域并创造影响。此类尝试往往需要充分了解领域细节，才能有效地建立模型并解决问题。这可能是一个反复探索且颇具挑战的过程，因为有时需要挖掘出领域专家早已内化的种种特有之处。然而，克服这些障碍除了带来整体成功之外，也可能成为格外值得自豪的成就。尽管量子信息科学（QIS）是一个广阔、充满活力且迅速发展的领域，我主张以我们对待更专门领域的方式来探索 QIS。与其因从未上过量子物理课程等情况而望而却步，我们不妨尝试坚持使用数学描述或其他抽象表述，同时认识到，自己很可能尚未掌握物理学家经过长期积累才形成的一整套直觉。若有需要，时间和经验或许能帮助弥补这一点。

我着重介绍从优化视角取得的 QIS 开创性或近期进展，也就如何通过参与 QIS 推动更传统的运筹学（OR）发展提出建议。最后，我介绍运筹学研究者参与 QIS 的策略。我鼓励运筹学研究者与 QIS 培养新的协同效应。

2 运筹学在量子信息科学中的应用

量子态和信道的性质。 不必考虑额外细节或量子力学解释，我们可以将定义在 n 个量子比特（qubits）上的量子态 ρ视为一个含复数元素的 $2^n \times 2^n$ 矩阵。量子态的许多基本性质，以及描述对其进行操作的量子信道的性质，都可以很容易地表述为半定规划。事实上，态 ρ 的定义性质是迹等于一且为半正定。更多详情请见 [ST21]，其中完整介绍了半定规划在量子态和信道性质方面的五种易于理解的应用。

本文余下部分的宏观视角不要求读者理解量子比特或量子态，只需知道量子态的规模会随量子比特数呈指数级增长。后者为相较于经典计算实现潜在的指数级优势打开了大门，因为巧妙地对 n 量子比特进行物理操控，可能使自然界以有意义且有用的方式隐式处理规模呈指数级增长的量子态。然而，同样的

说法也适用于随机化经典算法：操控 n 随机比特会在一个规模呈指数级增长的结果集合上隐式形成分布。因此，我们试图找出量子物理中经典方法无法触及的特性。

2.1 区分经典物理与量子物理

具有量子物理的宇宙，能提供哪些在经典物理定律（即传统的非量子物理）下根本不可能实现的东西？下面举一个例子。在一场非定域博弈中，Alice 和 Bob 会收到问题 x 和 y，并且必须商定一种策略，分别给出答案 a 和 b。非定域博弈的值 $V(a,b \mid x,y) \in \{0,1\}$决定答案是否正确，而 Alice 和 Bob 的目标是最大化在给定的 x,y分布（以及选择 a,b时可能存在的随机性）下 V的期望值。事实证明，随机策略并不比确定性策略更有优势；然而，如果 Alice 和 Bob 各自拥有一对纠缠的[1] 量子比特（qubits），他们采用的策略便能胜过经典策略（参见综述 [BCP+14]）。

量子策略在非定域博弈中的优势，与 John Bell 关于物理系统中非定域性（或“量子性”）的开创性检验密切相关。在各种实验设置下，研究人员已通过实验展示了量子系统对贝尔不等式的违背；经典物理系统则必须满足这些不等式（[BCP+14], 第 VII 节）。反过来，非定域博弈的值可以通过半定规划（SDP）层级来近似（[BCP+14], 第 II.C 节）；然而，所得规划的规模会随博弈规模呈指数级（甚至更快）增长。试想，终于成功求解或分析了一个棘手的半定规划，随后又收到一位实验物理学家朋友发来的消息，告诉你大自然印证了你的发现——这就像是宇宙轻轻拍了拍你的肩膀，给予肯定。非定域博弈与（量子）计算模型有着根本性的联系 [MNY21], ，而从非定域博弈的视角出发，近期的一项里程碑式成果解决了两个长期悬而未决的问题：量子力学中的 Tsirelson 问题，以及算子代数中的 Connes 嵌入问题 [JNV+21、PV16]。

2.2 计算型量子优势

量子信息科学的首要研究方向之一，是利用量子物理的非经典特性，实现能够超越传统经典计算的量子计算形式。Shor 开创性的整数因式分解量子算法，其运行速度比任何已知经典算法都快得多，达到指数级加速（参见例如 [NC10], 第 5.3 节）；然而，就我们目前所知，指数级更快的经典因式分解算法或许也可能存在。不过，若将执行时间之外的计算资源也纳入考量，那么相对于最优的经典算法，已知存在指数级的量子优势。

其中一种情形是查询复杂度：我们只关心对问题输入数据的查询次数，而非整体执行时间。查询复杂度上的指数级量子优势，是最早发现的量子算法优势之一（例如参见[NC10], 第 1.4 节）。图问题在查询复杂度方面实现指数级优势的可能性，通常已得到充分理解（[BDCG+20]；相关综述见 [MdW16]）。值得注意的是，在查询模型中，为某个问题寻找最佳量子算法，可以在相差常数因子的意义下表述为半定规划（SDP） [Rei11, BSS03], ；这一视角有助于设计量子图算法（例如 [DKW19]）。近期研究根据张量的完全有界范数刻画了精确的查询复杂度 [ABP19], ，而该范数又可以表示为一个半定规划 [GL19]。一种放宽的期望查询复杂度概念，与经典情形中的 Sherali-Adams 层级以及量子情形中的 Lasserre/Sum-of-Squares (SoS) 层级密切相关 [KLW15]。关于量子查询复杂度中的未解问题，见 [Aar21], ；关于量子加速更广泛的综述，见 [Aar22]。

[1]与其在此简要描述纠缠（但这种描述可能会产生误导），我建议阅读这篇广受欢迎的文章： [Wil16]。

2.3 构建更好的量子计算机

量子计算领域最大的未解问题，或许是我们能否真正设计并制造出可扩展容错量子计算机，以实现理论上所支持的量子优势。对于量子计算机而言，世界尤其充满敌意：磁场、温度变化，以及其他各种噪声来源，都会干扰计算。计算运行的时间越长，噪声引发的错误就越会累积放大。已有纠正这类错误的方案；然而，这些方案需要付出相当大的额外开销，包括增加额外的纠错量子比特。设计具备理想韧性特性的高效量子纠错方案，可表述为一个优化问题；半定规划技术已被用于设计和分析此类方案 [FSW07, KL09, BBFS21]。

量子处理器可以构建在不同的物理基底之上，不过与经典处理器相比，可选范围受到极大限制。每种基底都会带来独特的设计与工程挑战，以及相应的优化问题。通常需要对量子处理器进行量子表征、验证与确认，以确保其行为符合预期（参见教程 [KR21] 和综述 [EHW+20]）。性能良好的量子处理器运行于软件栈之下，而软件栈也为优化提供了更多机会，包括将高层量子算法编译成由原生门构成的量子电路。由运筹学研究者参与的跨学科团队正日益着手解决量子计算机系统设计多个层面的优化问题 [NBGJ22, NLC21, TTS+21, FBL+22, MCL+22, BPLP20]。

2.4 量子物理问题的松弛

上述应用揭示了一个反复出现的主题：凸规划能够自然地刻画量子力学现象，但要构建忠实的模型，就需要规模随量子比特数呈指数增长的规划。运筹学可以发挥的一项作用，是为这类指数规模的凸规划寻找规模更小、但强度仍足够的松弛。这有助于加速精确或近似计算物理相关量的方法。我将以广为人知的经典最大割问题为例，说明这一概念，并借此建立离散优化问题与量子对应问题之间的联系。

将最大割表述为特征值问题。对于一个有 n 个顶点的图 $G = (V, E)$，最大割旨在找出集合 $S \subseteq V$，使 S 与 $V \setminus S$ 之间的边数最大。为了更直接地与量子物理中的问题进行比较，我们将把最大割编码为求一个矩阵的最大特征值，该矩阵的规模随 n 指数增长。设对角矩阵 $H \in \mathbb{R}^{2^n \times 2^n}$ 的列和行分别以 2^n 个可能的顶点集 $S \subseteq V$ 为标签，并令 $H_{S,\,S}$ 等于割 $(S, V \setminus S)$ 中的边数。由于 H 是对角矩阵，$\lambda_{\max}(H)$（即 H 的最大特征值）就是最大割的值，由集合 S^* 达到。相应的特征向量 $v^* \in \mathbb{R}^{2^n}$ 对应于一个基向量：在标记为 S^* 的位置上取值为 1，其余位置均为 0。尽管 v^* 所处的空间规模呈指数增长，但它有一个简洁的描述，且只取决于 S^*。矩阵 H 本身也有一个简洁的描述，且只取决于 G 中的边。总之，最大割（或一般的离散优化问题[2]）可以表述为：对一个规模随 n 指数增长、描述长度为 n 的多项式的对角矩阵 H，求 $\lambda_{\max}(H)$。

基于采样的问题模型。如果对称的 H 不要求为对角矩阵，会发生什么？在这种情况下，解特征向量 v^* 可能有指数多个非零项，这自然会成为高效算法或启发式方法的重大障碍。我们可以转而询问有关 v^* 的统计量。一个选择是，改为请求从 v^* 各元素标签上的某个分布中抽取样本，使得获得标签 l 的概率与 $(v_l^*)^2$ 成正比（或者，如果 H 是厄米矩阵且 v^* 是复数，则与 $|v_l^*|^2$ 成正比）。这种输出模型仍然

[2] H 可以用任意离散域的子集进行标记，并通过大幅值来建模不可行性。

能够处理最大割，因为某个最优集合 S^* 会以概率 1 作为标签出现。这类模型或许并没有乍看之下那么陌生；例如，马尔可夫链蒙特卡洛方法就是为类似情形量身定制的。

在线性代数（参见入门指南， [DHM+18]）和机器学习（参见综述， [BWP+17]）领域，已知上述类型模型存在多项式时间量子算法。在这种模型中，所涉及的矩阵是隐式定义的，其规模远大于描述它们所需的量子比特数，而输出向量只能通过采样获取。不过，在此背景下，要获得指数级量子优势仍有一些关键限制 [Aar15, Aar22]。近期的一项突破性工作发现了风格相同、受量子启发的多项式时间经典算法（例如， [Tan19, CGL+20]）；然而，这些算法依赖一种特定的经典数据访问模型，而这种模型可能并不实用 [CHM21]。近期关于量子优势的实证演示也基于采样问题 [AAB+19, MLA+22]。

局域哈密顿量问题。回到上述计算 $\lambda_{\max}(H)$ 的问题，将对 H 的要求中的“对角”替换为“厄米”，就把我们从 NP 完全的离散优化问题（例如最大割）带到了一个基础的量子优化问题：局域哈密顿量问题。这里， H 称为哈密顿量，而“局域”指的是对 H的一种简洁隐式描述，类似于上文最大割示例中的情形。物理系统可以用局部哈密顿量描述，这些哈密顿量决定了系统随时间的演化，其中哈密顿量的特征向量对应于系统的稳定态。事实上，大自然一直在尝试解决我们周围的优化问题！确实，大自然努力以启发式方式使物理系统处于其基态，即相应哈密顿量的最小特征值所对应的特征向量。因此，研究物理系统的基态是一项基础问题，有助于更好地理解和利用材料的奇异性质，例如 [Min09]。

从计算角度来看，局域哈密顿量是理解不同量子计算模型的能力与局限性的基石，其作用类似于布尔可满足性问题（SAT）在经典复杂性理论中的地位。局域哈密顿量是复杂性类量子 Merlin Arthur（QMA）的完全问题；QMA 包含 NP，也是 NP 在量子领域中的自然对应物。我们并不认为多项式时间量子算法能够解决 QMA 困难问题（量子优势远比解决 NP 困难问题更微妙[AC16, Aar22]）。然而，与经典领域中的 NP 困难问题一样，尝试解决 QMA 困难问题或许能催生新的启发式解、严格近似，或针对特殊情形的精确解法。

量子最大割问题。希望助力塑造方兴未艾的量子近似算法领域，是我投身量子信息科学的初衷。我与 Sevag Gharibian 提出了量子最大割，这是局域哈密顿量的一个实例，与海森堡模型（一种描述量子磁性的物理模型）以及经典最大割问题都密切相关 [GP19]。事实证明，著名的 Goemans-Williamson 半定规划近似算法可推广为量子最大割的近似算法[GW95] 。最大割所采用的半定规划松弛是 Lasserre/SoS 层级的一个实例，而量子最大割的松弛 [PT21a, PT22] 则可通过 Lasserre/SoS 层级的一个非交换[3]对应版本获得 [PNA10]。

作为一个典型的约束满足与离散优化问题，对最大割的研究在计算机科学 [KKMO07] 和运筹学 [DL97],领域都产生了深远影响，包括对旅行商问题的多面体表述给出了指数下界（通过相关的相关多面体） [FMP+15]。量子最大割旨在成为一个试验平台，用于设计能够更好地求解更一般的局域哈密顿量

[3]~~最大割可以表示为 $\max_{z_i} \sum_{ij\in E}(1-z_iz_j)/2$~~，其中变量 $z_i^2=1$ 可交换；而量子最大割可以表示为 $\max_{x_i,y_i,z_i} \lambda_{\max}(\sum_{ij\in E}(1-x_ix_j-y_iy_j-z_iz_j)/4)$，其中变量 (即矩阵) $x_i^2=1$, $y_i^2=1$,$z_i^2=1$ 为非交换变量，并满足以下附加约束：不同索引的变量可交换，而相同索引的不同变量反交换。

问题 [PT21b, PT22]。量子最大割的介绍，参见 [HNP+21] 的第7节；最大割与量子最大割之间更多的相似之处，参见 [PT22] 的第3节。

挑战。 尽管 Max Cut 与量子最大割之间的类比有助于引导针对后者的研究，但量子最大割在很大程度上仍是个谜。Goemans-Williamson 对 Max Cut 的 0.878 近似 [GW95] 在唯一博弈猜想[KKMO07]成立时已是最优。尽管在某种特殊情形下，量子最大割的最优近似已为人所知 [PT22], ，但目前针对一般问题已知的最佳近似似乎离最优解还差得很远 [HNP+21]。因此，首要挑战之一是为量子最大割以及更一般的局部哈密顿量问题设计更好的近似算法。

另一个方向是设计有效且实用的启发式方法。我预计，受运筹学影响的启发式方法很可能不同于物理学家目前采用的方法，并与之互为补充。基于定制有效不等式或新型数学规划层级的、更复杂的运筹学风格松弛方法，尚未得到探索。进一步理解用于局域哈密顿量问题的非交换 Lasserre/SoS 层级是一个有前景的方向，因为这也可能带来新型量子纠缠约束 [PT22]。最后，Max Cut 和量子最大割都是自然的无约束优化问题；而针对受约束局部哈密顿量问题的模型、松弛和近似则几乎不存在。

2.5 更多应用

这里顺带提及一些其他应用。QIP 是一种基于量子交互证明的计算模型，而 PSPACE 则是这样一种模型：经典计算机可使用多项式空间（但执行时间没有明确限制）。著名结果 QIP = PSPACE 的证明依赖于用于求解半定规划的乘法权重方法 [JJUW10]。最近，一项关于量子相对熵规划的自协调障碍函数的研究，意味着可以对此类问题采用效率更高的内点法 [FS22]。非交换半定规划层级有助于更好地理解互为无偏基；互为无偏基在量子信息及其他领域有许多应用 [GP21]。QIS 中还有各种各样的其他应用，很可能还有许多有待发现。

2.6 判别量子优势

我们如何才能知道自己是否见证了真正且显著的量子优势？从理论上看，最坏情况分析和渐近分析表明，在容错量子计算机上可能实现可证明的指数级量子优势；然而，如前所述，能够实现可证明量子优势的问题可能没有直接的经典对应物，因此很难进行公平的比较。即使能够进行此类比较，一个关键问题仍是：自然界是否允许我们构建可扩展的量子计算机，使其超越近期嘈杂中等规模量子（NISQ）阶段 [Pre18]。

从实践角度来看，目前处于早期阶段的 NISQ 计算机展现出的良好经验基准测试结果，未必预示着未来能够持续保持优势。此外，近期研究指出了 NISQ 计算的理论局限 [CCHL22, AGL+22, Kal20]。经验基准测试通常聚焦于相对较小或其他方面受限的一组实例；即便量子计算机看起来更胜一筹，更好的经典算法也可能很快出现。为减轻这些因素的影响，找出似乎能够带来经验性量子优势的问题，并参照 DIMACS 实现挑战 [DIM22] 发起公开挑战，或许是一种富有成效的做法。虽然这并非运筹学在量子信息科学中的直接应用，但运筹学可以将这种做法纳入自身文化，从而使后者受益。

3 量子启发式运筹学进展

丰富实例库。 运筹学应当为其定义明确的问题模型、精心整理的问题实例库，以及针对各类求解器开展的系统性基准测试（例如，

[MS21]）。受量子信息科学启发的优化问题实例可能与传统运筹学实例具有不同的特征，也可为现有实例库增添新的内容。此外，有效求解这类实例或许能推动求解器的改进，或促成新技术、新功能的开发。量子启发问题的系统性基准测试和实例集也可能对量子信息科学界有所助益。

3.1 用于经典优化问题的量子算法

在运筹学中，许多常见优化问题已知存在量子优势。针对梯度下降 [GAW19, KP20], 、线性规划 [Nan22], 、二阶锥规划[KPS21], 、半定规划 [HJS+22、ANTZ21], 以及凸规划 [CCLW20, vAGGdW20] 等优化问题，探索多项式因子的量子加速一直成果丰硕。然而，这类量子算法并非总能在所有问题参数下优于经典对应物，而且下界表明，不可能实现指数级量子加速 [GKNS21, CCLW20, vAGGdW20]。能够带来严格指数级量子优势的“自然”或“实用”优化问题仍然难以寻觅。

除了加速之外，我们还可以考察量子算法相对于经典算法对问题的近似效果。量子近似优化算法（QAOA） [FGG14] 是一种用于构建和求解离散优化问题的量子算法框架（参见论文， [Had18]）。QAOA 与数学规划相似，因为离散优化问题通常较容易在该框架中表达，而算法的整体效果往往高度依赖所采用的具体问题表述。QAOA 引起了量子信息科学社区的广泛兴趣，也是适合在含噪中等规模量子系统上实现的自然候选算法。此外，QAOA 是一种参数化算法，适合采用自然的量子-经典混合循环：通过量子计算机执行 QAOA，并使用经典优化例程获取参数值。根据当前参数值评估 QAOA 的表现，为后续参数更新提供依据。目前尚不清楚是否存在某个问题，使得在量子计算机上以多项式时间执行 QAOA，能够得到经证明优于经典方法所能达到的近似结果。关于 QAOA 的一些理论局限性已有研究 [AM22, CLSS22, MH22, BKKT20]。即便 QAOA 无法在经典问题上带来优势，它仍可能在量子优化问题（例如量子最大割）上实现优于经典方法所能达到的近似效果。这些方向尚未得到充分研究 [AGM20, AGKS21]。更深入地理解 QAOA 的能力与局限、将其应用于更广泛的问题类别，以及设计受量子近似优化算法启发的经典算法，仍是亟待解决的挑战。

3.2 受量子物理启发的新类型问题

除了帮助解决量子优化问题，我还敦促运筹学研究者让量子问题启发经典问题的新类型。下面举个例子。运筹学研究者都很清楚，我们的模型往往无法捕捉到我们试图解决的实际问题的细微之处。出于这个原因以及其他原因，一组多样化的近似最优解可能优于单个最优解。

考虑以下旨在促进解的多样性的最大割变体：

$$\max_{\mathbf{x}} \ \mathbb{E}[c(\mathbf{x})] + \sum_{x,y\in\{0,1\}^n} \sqrt{\Pr[\mathbf{x}=x]\Pr[\mathbf{x}=y]}h(x,y),$$

其中，$\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ 是一个随机变量，$c(x)$ 是由 x诱导的割的成本，并且 $\{0,1\}$ $\ni h(x,y) = 1$ 当且仅当 $x_i \neq y_i$ 恰好有一个位置 i。因此，上述问题旨在寻找一个由 $\mathbf{x}$ 表示的割上的分布，使其既倾向于具有较大的期望割值，也倾向于支撑在恰好相差一个顶点的割对上。这里，$h(x,y)$ 旨在衡量 x 与 y之间的多样性，当然也可以采用其他方式。

上述多样性概念自然源自统计力学所研究的量子伊辛模型中的一个项，即所谓的横场项。我们可以将上述问题视为横场最大割问题；事实上，它等价于一个研究充分的横场伊辛模型，而后者是一个局域哈密顿量问题。正如我此前针对更一般的局域哈密顿量问题所论述的那样，对这一问题的新见解可能会影响物理领域。不过，在此我想强调一个互补的视角。我们可以直接调整上述的 x 和 $c(x)$，推导出其他熟悉优化问题的横场版本；在这些问题中，我们同样寻求多样化解的分布。在这种情况下，从物理视角获得的见解或许能为这些及相关优化问题开辟新的途径。接下来的挑战是，以更广泛的方式阐述物理模型和求解技术，使其能够对运筹学产生影响。

4 条参与量子信息科学的建议

量子信息科学是一个多元且跨学科的领域，汇聚了物理学家、化学家、工程师、计算机科学家、数学家，以及日益增多的运筹学研究者。与更为同质化的领域相比，在这里，“外行”的概念或许不那么明显。遇到问题或需要指导时，不妨联系身边友善的量子信息科学家。也可以找找那些已开始涉足量子信息科学的运筹学同事。INFORMS 量子计算 ICS 工作组的成员及其他人士一直积极组织旨在促进运筹学与量子信息科学交流的研讨会——请留意这类机会。

推荐阅读。我在上文中特别指出了综述、入门读物、教程、评论和学位论文等参考资料，供进一步阅读。至于教科书，Nielsen 和 Chuang 是量子计算和量子信息领域的标准入门教材，自有其道理 [NC10]。一些量子信息科学家维护着网页，提供学习量子信息科学相关主题的指引（例如， [Har22]）。

我想强调的是，要产生影响，并不一定非得理解量子物理。参与跨学科团队，或采用自己熟悉的数学形式体系，都是弥补物理学背景不足的方法。如果日常事务占用了时间，让你无法从头到尾读完新材料，也不必为此感到羞愧；不妨专注于自己最感兴趣的部分，并希望以后在必要时或时间允许时补上知识空缺。如果你想亲自动手、通过实践学习，那么量子编程教程（如 [M$^+$21] ）或许是个不错的起点。

结语

增强求解量子物理中出现的优化问题的能力，有助于我们更深入地了解自然界的基本运行规律。既要采用实用方法解决特定类型的问题，也要进一步夯实理论基础，这两方面都很有价值。纵观历史，对自然界更深入的认识推动了文明与社会发生深刻变革。

致谢

本文基于以下机构支持的工作：美国能源部科学办公室先进科学计算研究办公室、量子计算加速研究项目，以及量子计算基础算法研究项目（FAR-QC）。

本文由桑迪亚国家技术与工程解决方案有限责任公司的一名员工根据与美国能源部签订的合同编号 DE-NA0003525 撰写

（美国能源部）。该员工拥有本文的全部权利、所有权和权益，并对本文内容负全部责任。美国政府保留一项非独占、已付清、不可撤销、全球适用的许可；出版商接受本文发表即表示承认，美国政府有权出于美国政府目的发表或复制本文的已发表版本，或允许他人这样做。美国能源部将根据《美国能源部公共获取计划》向公众开放这些联邦资助研究成果：https://www.energy.gov/downloads/doe-public-access-plan。

参考文献

[AAB+19] Frank Arute、Kunal Arya、Ryan Babbush、Dave Bacon、Joseph C Bardin、Rami Barends、Rupak Biswas、Sergio Boixo、Fernando GSL Brandao、David A Buell 等。《使用可编程超导处理器实现量子优越性》。《自然》，574(7779):505–510，2019年。[Aar15] Scott Aaronson。《请仔细阅读细则》。《自然·物理》，11(4):291–293，2015。[Aar21] Scott Aaronson。《与量子查询复杂度相关的开放问题》。《ACM Transactions on Quantum Computing》，2(4):1–9，2021年。[Aar22] Scott Aaronson。《实现巨大量子加速需要多少结构？》. arXiv 预印本 arXiv:2209.06930，2022年。[ABP19] Srinivasan Arunachalam、Jop Bri¨et 和 Carlos Palazuelos。《量子查询算法是完全有界形式》。《SIAM计算杂志》，48(3):903–925，2019年。[AC16] Scott Aaronson 和 Lijie Chen。《量子优越性实验的复杂性理论基础》。arXiv 预印本 arXiv:1612.05903，2016年。[AGKS21] Anurag Anshu、David Gosset、Karen J Morenz Korol 和 Mehdi Soleimani-far。《有界度局域哈密顿量的改进近似算法》。《物理评论快报》，127(25):250502，2021年。[AGL+22] Dorit Aharonov、Xun Gao、Zeph Landau、Yunchao Liu 和 Umesh Vazirani。《用于含噪随机电路采样的多项式时间经典算法》。arXiv 预印本 arXiv:2211.03999，2022年。[AGM20] Anurag Anshu、David Gosset 和 Karen Morenz。《超越乘积态近似：最大割问题的量子类比》。载于：第15届量子计算、通信与密码学理论会议（TQC 2020）。Schloss Dagstuhl-Leibniz信息学中心，2020年。[AM22] Anurag Anshu 和 Tony Metger。《量子态的集中界，以及多项式近似对量子近似优化算法的限制》。arXiv 预印本 arXiv:2209.02715，2022年。[ANTZ21] Brandon Augustino、Giacomo Nannicini、Tam´as Terlaky 和 Luis F Zuluaga。《半定优化的量子内点法》。arXiv 预印本 arXiv:2112.06025，2021年。[BBFS21] Mario Berta、Francesco Borderi、Omar Fawzi 和 Volkher B Scholz。《约束双线性优化的半定规划层级》。《数学规划》，第1–49页，2021年。[BCP+14] Nicolas Brunner、Daniel Cavalcanti、Stefano Pironio、Valerio Scarani 和 Stephanie Wehner。《贝尔非定域性》。《现代物理评论》，86(2):419，2014年。[BDCG+20] Shalev Ben-David、Andrew M Childs、Andr´as Gily´en、William Kretschmer、Su-partha Podder 和 Daochen Wang。《对称性、图性质与量子加速》。载于：2020年IEEE第61届计算机科学基础年会（FOCS），第649–660页。IEEE，2020年。

[BKKT20] Sergey Bravyi、Alexander Kliesch、Robert Koenig 和 Eugene Tang。《对称性保护带来的变分量子优化障碍》。《物理评论快报》，125(26):260505，2020年。[BPLP20] Leonardo Banchi、Jason Pereira、Seth Lloyd 和 Stefano Pironio。《可编程量子计算机的凸优化》。npj《量子信息》，6(1):1–10，2020年。[BSS03] Howard Barnum、Michael Saks 和 Mario Szegedy。《量子查询复杂度与半定规划》。载于：第18届IEEE计算复杂性年会论文集，第179–193页。IEEE，2003年。[BWP+17] Jacob Biamonte、Peter Wittek、Nicola Pancotti、Patrick Rebentrost、Nathan Wiebe 和 Seth Lloyd。《量子机器学习》。《自然》，549(7671):195–202，2017年。[CCHL22] Sitan Chen、Jordan Cotler、Hsin-Yuan Huang 和 Jerry Li。《含噪中型量子计算的复杂性》。arXiv 预印本 arXiv:2210.07234，2022年。[CCLW20] Shouvanik Chakrabarti、Andrew M Childs、Tongyang Li 和 Xiaodi Wu。《凸优化的量子算法与下界》。《Quantum》，4:221，2020年。[CGL+20] Nai-Hui Chia、Andr´as Gily´en、Tongyang Li、Han-Hsuan Lin、Ewin Tang 和 Chunhao Wang。《用于去量子化量子机器学习的基于采样的次线性低秩矩阵运算框架》。载于：第52届ACM SIGACT计算理论研讨会论文集，第387–400页，2020年。[CHM21] Jordan Cotler、Hsin-Yuan Huang 和 Jarrod R McClean。《重新审视去量子化与学习任务中的量子优势》。arXiv 预印本 arXiv:2112.00811，2021年。[CLSS22] Chi-Ning Chou、Peter J Love、Juspreet Singh Sandhu 和 Jonathan Shi。《随机 Max-k-XOR 及更广泛问题中局部量子算法的局限性》。载于：第49届国际自动机、语言与编程研讨会（ICALP 2022）。Schloss Dagstuhl-Leibniz信息学中心，2022年。[DHM+18] Danial Dervovic、Mark Herbster、Peter Mountney、Simone Severini、Naïri Usher 和 Leonard Wossnig。《量子线性系统算法：入门指南》。arXiv 预印本 arXiv:1802.08227，2018年。[DIM22] DIMACS。《DIMACS 实现挑战》，2022年。[DKW19] Kai DeLorenzo、Shelby Kimmel 和 R Teal Witter。《量子 st连通性算法的应用》。载于：第14届量子计算、通信与密码学理论会议（TQC 2019）。Schloss Dagstuhl-Leibniz信息学中心，2019年。[DL97] Michel Marie Deza 和 Monique Laurent。《割与度量的几何》。施普林格，1997年。[EHW+20] Jens Eisert、Dominik Hangleiter、Nathan Walk、Ingo Roth、Damian Markham、Rhea Parekh、Ulysse Chabaud 和 Elham Kashefi。《量子认证与基准测试》。《自然综述：物理学》，2(7):382–390，2020年。[FBL+22] Xinyu Fei、Lucas T Brady、Jeffrey Larson、Sven Leyffer 和 Siqian Shen。《量子系统的二元控制脉冲优化》。arXiv 预印本 arXiv:2204.05773，2022年。[FGG14] Edward Farhi、Jeffrey Goldstone 和 Sam Gutmann。《一种量子近似优化算法》。arXiv 预印本 arXiv:1411.4028，2014年。[FMP+15] Samuel Fiorini、Serge Massar、Sebastian Pokutta、Hans Raj Tiwary 和 Ronald De Wolf。《组合优化中多面体的指数下界》。《Journal o

[FS22] Hamza Fawzi 和 James Saunderson。量子相对熵的最优自协调障碍。arXiv 预印本 arXiv:2205.04581，2022年。[FSW07] Andrew S Fletcher、Peter W Shor 和 Moe Z Win。利用半定规划实现最优量子错误恢复。《物理评论A》，75(1):012338，2007。[GAW19] Andr´as Gily´en、Srinivasan Arunachalam 和 Nathan Wiebe。通过更快的量子梯度计算优化量子优化算法。载于第三十届年度 ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，第 1425–1444 页。SIAM，2019。[GKNS21] Ankit Garg、Robin Kothari、Praneeth Netrapalli 和 Suhail Sherif。适用于所有光滑性阶数的凸优化近乎最优下界。《神经信息处理系统进展》，34:29874–29884，2021年。[GL19] Sander Gribling 和 Monique Laurent。张量完全有界范数的半定规划表述。arXiv 预印本 arXiv:1901.04921，2019。[GP19] Sevag Gharibian 和 Ojas Parekh。量子推广最大割的近乎最优经典近似算法。载于《近似、随机化与组合优化：算法与技术》（APPROX/RANDOM 2019）。Schloss Dagstuhl-Leibniz信息学中心，2019。[GP21] Sander Gribling 和 Sven Polak。互为无偏基：多项式优化与对称性。arXiv 预印本 arXiv:2111.05698，2021年。[GW95] Michel X Goemans 和 David P Williamson。利用半定规划改进最大割和可满足性问题的近似算法。《美国计算机学会会刊》（计算机学会会刊），42(6):1115–1145，1995。[Had18] Stuart Andrew Hadfield。用于科学计算和近似优化的量子算法。哥伦比亚大学，2018。[Har22] Aram Harrow。在哪里可以了解量子信息？，2022年。[HJS+22] Baihe Huang、Shunhua Jiang、Zhao Song、Runzhou Tao 和 Ruizhe Zhang。通过鲁棒 IPM 框架实现更快的半定规划量子算法。arXiv 预印本 arXiv:2207.11154，2022年。[HNP+21] Yeongwoo Hwang、Joe Neeman、Ojas Parekh、Kevin Thompson 和 John Wright。量子最大割的唯一游戏困难性，以及一个猜想的向量值 Borell 不等式。arXiv 预印本 arXiv:2111.01254，2021年。[JJUW10] Rahul Jain、Zhengfeng Ji、Sarvagya Upadhyay 和 John Watrous。量子交互证明= 《美国计算机协会通讯》，53(12):102–109，2010。[JNV+21] Zhengfeng Ji、Anand Natarajan、Thomas Vidick、John Wright 和 Henry Yuen。MIP*= RE。《美国计算机协会通讯》，64(11):131–138，2021年。[Kal20] Gil Kalai。反对量子计算机的论据。载于《Quantum、概率与逻辑》，第 399–422 页。施普林格，2020年。[KKMO07] Subhash Khot、Guy Kindler、Elchanan Mossel 和 Ryan O’Donnell。最大割及其他二变量约束满足问题的最优不可近似结果？《SIAM计算杂志》，37(1):319–357，2007。[KL09] Robert L Kosut 和 Daniel A Lidar。通过凸优化实现量子纠错。《Quantum Information Processing》，8(5):443–459，2009。[KLW15] Jedrzej Kaniewski、Troy Lee 和 Ronald de Wolf。期望意义下的查询复杂度。载于国际自动机、语言与编程研讨会论文集，第 761–772 页。施普林格，2015。[KP20] Iordanis Kerenidis 和 Anupam Prakash。用于线性系统和最小二乘的量子梯度下降。《物理评论A》，101(2):022316，2020年。

[KPS21] Iordanis Kerenidis、Anupam Prakash 和 D´aniel Szil´agyi。用于二阶锥规划和支持向量机的量子算法。Quantum，5:427，2021年。[KR21] Martin Kliesch 和 Ingo Roth。量子系统认证理论。PRX Quantum，2(1):010201，2021年。[M+21] David Matthews 等。如何开始学习量子计算。《自然》，591(7848):166–167，2021年。[MCL+22] Alexis Morvan、Larry Chen、Jeffrey M Larson、David I Santiago 和 Irfan Siddiqi。优化定频超导量子处理器的频率分配。Physical Review Research，4(2):023079，2022年。[MdW16] Ashley Montanaro 和 Ronald de Wolf。量子性质测试综述。Theory of Computing，页码1–81，2016年。[MH22] Kunal Marwaha 和 Stuart Hadfield。量子和经典局部算法近似 Max kXOR 的界限。Quantum，6:757，2022年。[Min09] JR Minkel。奇特却真实：超流氦能沿墙爬行。《科学美国人》，300:2，2009年。[MLA+22] Lars S Madsen、Fabian Laudenbach、Mohsen Falamarzi Askarani、Fabien Rortais、Trevor Vincent、Jacob FF Bulmer、Filippo M Miatto、Leonhard Neuhaus、Lukas G Helt、Matthew J Collins 等。借助可编程光子处理器实现量子计算优势。《自然》，606(7912):75–81，2022年。[MNY21] Hamoon Mousavi、Seyed Sajjad Nezhadi 和 Henry Yuen。非局域博弈、压缩定理与算术层级。arXiv 预印本 arXiv:2110.04651，2021年。[MS21] Hans D Mittelmann 和 P Spellucci。优化软件的决策树，2021年。[Nan22] Giacomo Nannicini。单纯形法的快速量子子程序。《运筹学》，2022年。[NBGJ22] Giacomo Nannicini、Lev S Bishop、Oktay G¨unl¨uk 和 Petar Jurcevic。通过整数规划实现最优量子比特分配与路由。ACM Transactions on Quantum Computing，4(1):1–31，2022年。[NC10] Michael A Nielsen 和 Isaac L Chuang。《量子计算与量子信息》。剑桥大学出版社，2010 年。[NLC21] Harsha Nagarajan、Owen Lockwood 和 Carleton Coffrin。Quantumcircuitopt：一个可证明实现最优量子电路设计的开源框架。载于2021年IEEE/ACM第二届量子计算软件国际研讨会（QCS），页码55–63。IEEE，2021年。[PNA10] Stefano Pironio、Miguel Navascu´és 和 Antonio Acin。非交换变量多项式优化问题的收敛松弛。SIAM Journal on Optimization，20(5):2157–2180，2010年。[Pre18] John Preskill。NISQ时代及以后的量子计算。Quantum，2:79，2018年。[PT21a] Ojas Parekh 和 Kevin Thompson。二级量子 Lasserre 层级在量子近似算法中的应用。载于第48届国际自动机、语言与编程研讨会（ICALP 2021）。Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2021年。[PT21b] Ojas Parekh 和 Kevin Thompson。通过近似量子二局域哈密顿量问题，优于随机赋值。载于第29届欧洲算法年会（ESA 2021）。Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2021年。

[PT22] Ojas Parekh 和 Kevin Thompson。含正项的2-局域量子哈密顿量的最优乘积态近似。arXiv 预印本 arXiv:2206.08342，2022年。[PV16] Carlos Palazuelos 和 Thomas Vidick。非局域博弈与算子空间理论综述。《数学物理学杂志》，57(1):015220，2016年。[Rei11] Ben W Reichardt。量子查询算法中的反射。载于第二十二届年度ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，页码560–569。SIAM，2011年。[ST21] Vikesh Siddhu 和 Sridhar Tayur。五篇入门读物：通过半定规划了解量子信息科学。arXiv 预印本 arXiv:2112.08276，2021年。[Tan19] Ewin Tang。用于推荐系统的量子启发式经典算法。载于第51届年度ACM SIGACT计算理论研讨会论文集，页码217–228，2019年。[TTS+21] Wei Tang、Teague Tomesh、Martin Suchara、Jeffrey Larson 和 Margaret Martonosi。CutQC：利用小型量子计算机进行大型量子电路求值。载于第26届ACM计算机体系结构支持编程语言与操作系统国际会议论文集，页码473–486，2021年。[vAGGdW20] Joran van Apeldoorn、Andr´as Gily´en、Sander Gribling 和 Ronald de Wolf。利用量子预言机进行凸优化。Quantum，4:220，2020年。[Wil16] Frank Wilczek。让纠缠变得简单。Quanta Magazine，28，2016年。