arXiv:2301.05584v1 [math.CV] 13 Jan 2023

关于 $\mathbb{C}^n$ 单位球中狄利克雷型空间中的循环向量

DIMITRIOS VAVITSAS

Abstract. 我们刻画了 $\mathbb{C}^n$ 单位球中的狄利克雷型空间里的循环模型多项式，并给出一个充分的容量条件，以识别非循环向量。

1. Introduction

研究 $\mathbb{C}^n$ 单位球中的狄利克雷型空间，可以得出关于经典全纯函数希尔伯特空间的结论，例如 Hardy 空间、Bergman 空间和 Dirichlet 空间。关于这一理论的一般性介绍可见 [18], [22]。

本文旨在刻画模型多项式，并研究这些空间中关于移位算子的循环函数的特殊族。此外，我们给出一个充分的容量条件，以识别非循环函数。范数比较、特殊子空间中范数的精确衰减，以及 [3], [4],[6], [21] 中研究的容量条件，是本工作的主要动机。函数 f 在全纯函数空间中的循环性，也与逼近 $1/f$的问题有关，关于这一主题的研究见 [19], [20] 。

无论是在单位球还是多圆盘中，完整刻画两个以上变量的多项式似乎都是一个难题。双圆盘上多项式的循环性问题已在 [5] 中得到解决，并于不久后在 [13]中得到推广。$\mathbb{C}^2$ 的单位球情形下的相应问题已在 [14]中得到解决。

1.1. 单位球中的 Dirichlet 型空间。

将单位球记为

$$\mathbb{B}_n = \{z \in \mathbb{C}^n : ||z|| < 1\},$$

2020年数学主题分类：31C25、32A37、47A15。关键词与短语：Dirichlet 型空间、循环向量、各向异性容量。本文部分得到波兰国家科学中心 NCN 项目 SONATA BIS 资助，项目编号为 2017/26/E/ST1/00723。

将其边界——单位球面记为

$$\mathbb{S}_n = \{z \in \mathbb{C}^n : ||z|| = 1\},$$

其中 $||z|| = \sqrt{|z_1|^2 + ... + |z_n|^2}$ 是通常欧几里得内积 $\langle z$ 所对应的范数，$w\rangle = z_1\bar{w}_1 + ... + z_n\bar{w}_n$. 记 Hol($\mathbb{B}_n$) 中全纯函数的类为 Hol($\mathbb{B}_n$)。任意函数 $f \in$Hol($\mathbb{B}_n$) 都有幂级数展开

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k_1=0}^{\infty} ... \sum_{k_n=0}^{\infty} a_{k_1,...,k_n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}, \quad z \in \mathbb{B}_n, \tag{1}$$

其中 $k = (k_1, ..., k_n)$ 是由非负整数构成的 n 元组指标，$k! = k_1! \cdots k_n!$ 且 $z^k = z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$.。式 (1) 中的幂级数存在，在 $\mathbb{B}_n$ 中正规收敛，并且是唯一的，因为单位球是包含原点的连通 Reinhardt 域，即若 $(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{B}_n$，则对任意实数 $\theta_1, ..., \theta_n$，都有 $(e^{i\theta_1} z_1, ..., e^{i\theta_n} z_n) \in \mathbb{B}_n$ （见 [11]）。

为简化记号，我们可以将（1）写成如下形式：

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|k|=m}^{\infty} a_k z^k = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{B}_n, \tag{2}$$

其中 $|k| = k_1 + ... + k_n$.

设 $f \in$Hol($\mathbb{B}_n$)。若 $\alpha \in \mathbb{R}$ 是一个固定参数，且满足以下条件，则称 f 属于 Dirichlet 型 $spaceD_\alpha(\mathbb{B}_n)$:

$$||f||_\alpha^2 := \sum_{|k|=0}^{\infty} (n + |k|)^\alpha \frac{(n-1)!k!}{(n-1+|k|)!} |a_k|^2 < \infty. \tag{3}$$

关于 $\mathbb{C}^n$ 的单位球中 Dirichlet 型空间理论的总体介绍可见 [1], [2], [15], [16], [19], [21], [22]。单变量 Dirichlet 型空间则在教材 [12] 中讨论。（3）中范数的权重经过选取，使得 $D_0(\mathbb{B}_n)$ 和 $D_{-1}(\mathbb{B}_n)$ 分别与球上的 Hardy 空间和 Bergman 空间一致。具有 Möbius 不变范数的 Dirichlet 空间对应于参数取值 $\alpha = n$.

根据定义，当 $\alpha \geq \beta$. 时，$D_\alpha(\mathbb{B}_n) \subset D_\beta(\mathbb{B}_n)$。多项式在空间 $D_\alpha(\mathbb{B}_n)$ $\alpha \in \mathbb{R}$、$z_i \cdot f \in D_\alpha(\mathbb{B}_n)$ $i = 1$、.....、n 中稠密，只要 $f \in D_\alpha(\mathbb{B}_n)$。

$D_\alpha(\mathbb{B}_n)$中的乘子是全纯函数 ϕ: $\mathbb{B}_n \to \mathbb{C}$ 满足 $\phi \cdot f \in D_\alpha(\mathbb{B}_n)$, 对所有 $f \in D_\alpha(\mathbb{B}_n)$均成立。多项式以及在闭单位球的某个邻域内全纯的函数，都是每个空间 $D_\alpha(\mathbb{B}_n)$中的乘子。

1.2. 移位算子与循环向量。考虑有界线性算子 $S_1, ..., S_n$： $D_\alpha(\mathbb{B}_n)$ $\to D_\alpha(\mathbb{B}_n)$，由 S_i： $f \mapsto z_i \cdot f$.定义。我们称 $f \in D_\alpha(\mathbb{B}_n)$为循环向量，如果闭不变子空间，即

$$[f] := \operatorname{clos}\operatorname{span}\{z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n} f : k_1, ..., k_n = 0, 1, ...\}$$

与 $D_\alpha(\mathbb{B}_n)$ 相同（闭包是相对于 $D_\alpha(\mathbb{B}_n)$ 范数取的）。一个等价的定义是，f 是循环的，当且仅当 $1 \in [f]$.

由于 $D_\alpha(\mathbb{B}_n)$ 具有有界点评价性质，循环函数在单位球内不能为零。因此，我们关注在定义域内不为零的函数。此外，非零常数函数在每个空间 $D_\alpha(\mathbb{B}_n)$ 中都是循环的。关于圆盘、多圆盘和单位球上的 Dirichlet 型空间中的循环向量，更多信息可见
[3], [4], [5], [6], [8], [12], [13], [14],[20], [21]。

与双圆盘和两个变量的单位球上的情形一样，函数 $f \in D_\alpha(\mathbb{B}_n)$ 的循环性与其零点集密不可分

$$\mathcal{Z}(f) = \{z \in \mathbb{C}^n : f(z) = 0\}.$$

函数在球面上的零点称为边界零点。

1.3. 论文结构。第2节研究 Dirichlet 型空间。特别地，我们给出它们之间一个关键的关系。利用分数阶径向导数以及球代数 $A(\mathbb{B}_n)$中函数的柯西公式——该代数包含在闭单位球上连续且在其内部全纯的函数——我们为一大类参数 α.给出 Dirichlet 型空间的一个等价范数

第3节研究对角子空间。特别地，我们推广了 [21]中的结果。对于适当的 $\mu > 0.$，利用˜函数 $f \in$ Hol($\mathbb{D}(\mu)$)来定义函数 $f \in$Hol($\mathbb{B}_n$)是有意义的。从几何上说，我们考察的是嵌入球内、但不位于坐标平面上的一个圆盘。因此，我们可以将循环性问题从球转化为单变量全纯函数空间中的问题，而这类空间已有充分研究。随后，我们利用最优逼近来判定循环性。

此外，我们证明了在适当参数下模型多项式的循环性。在两个变量的单位球情形下，参见 [21],以下模型多项式：$1 - z_1$ 它在闭单位球内仅于一点处消失，即 $\mathcal{Z}(1 - z_1) \cap \mathbb{S}_2 = \{(1, 0)\}$，以及 $1-2z_1z_2$ 它沿一条解析曲线消失，即 $\mathcal{Z}(1-2z_1z_2)\cap\mathbb{S}_2 =\{(e^{i\theta}/\sqrt{2},$ $e^{-i\theta}/\sqrt{2})$： $\theta \in \mathbb{R}\}$. 在我们的情形中，相应的候选对象

如下：

$$p(z) = 1 - m^{m/2} z_1 \cdots z_m, \quad 1 \leq m \leq n.$$

它们在闭单位球内沿以下解析集消失：

$$\mathcal{Z}(p) \cap \mathbb{S}_n = \{1/\sqrt{m}(e^{i\theta_1}, .., e^{i\theta_{m-1}}, e^{-i(\theta_1 + ... + \theta_{m-1})}, 0, .., 0) : \theta_i \in \mathbb{R}\}.$$

这些多项式也在 [19] 中针对 Drury-Arveson空间进行了研究。

对于两个变量， $1 - z_1$ 在 $D_\alpha(\mathbb{B}_2)$ 中是循环的，当且仅当 $\alpha \leq 2$; 而 $1 - 2z_1 z_2$ 在 $D_\alpha(\mathbb{B}_2)$ 中是循环的，当且仅当 $\alpha \leq 3/2.$。这里固定参数不止两个。这两个多项式循环性的刻画在 [14] 中至关重要。

第4节研究多项式的径向伸缩。利用第2节中的等价范数，我们通过强大的径向膨胀方法刻画模型多项式的循环性。特别地，我们证明，若 $p/p_r \to 1$ 弱收敛，且 $p_r(z) = p(rz)$ 是 p 的径向伸缩，则 p 是循环的（关于双圆盘情形，参见 [13] ；关于两个变量的单位球情形，参见 [14] ）。这种方法颇为有趣，因为它适用于任意多项式。请注意，在 [13], [14] 中，径向膨胀方法是解决多项式循环性问题的主要工具之一。本节的主要结果验证了第3节中关于多项式所作的论证。

第5节研究非循环向量。我们使用 Riesz α- 容量的概念来识别非循环函数。此外，我们研究支撑在给定函数 $f \in D_\alpha(\mathbb{B}_n)$ 的径向极限的零点集上的博雷尔测度的柯西变换，并给出其范数的渐近展开。然后，我们采用 Brown and Shields 提出的标准方案（见 [8], ），证明主要结果。请注意，关于两个变量的单位球中的 Dirichlet 型空间非循环性的这一充分容量条件，已由 A. Sola 在 [21] 中证明。

Standard tools

下面介绍一些后文会用到的标准工具。

二项级数：

$$\frac{1}{(1-x)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)k!} x^k,$$

其中， $|x| < 1$ 是一个复数， α 是一个非负实数。 Γ-函数的渐近行为如下： $\Gamma(k+\alpha) \asymp (k-1)!\, k^\alpha$，其中符号 $\asymp$ 表示这两个量的比值在 k 趋于无穷大时趋于一个常数，或者这两个量的比值有常数作为上下界。

多项式公式:

$$(x_1 + ... + x_n)^k = \sum_{|j|=k} \frac{k!}{j!} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n},$$

其中，$j = (j_1, ..., j_n)$ 是一个由非负整数组成的 n 元组指标，x_i 是复数。

描述伽马函数渐近行为的斯特林公式:

$$k! \asymp k^{1/2} k^k / e^k.$$

记 $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ 上的归一化面积测度为 $du(z)$，记 $\mathbb{S}_n$ 上的归一化旋转不变正博雷尔测度为 $d\sigma(\zeta)$（见 [18], [22]）。测度 $du(z)$ 与 $d\sigma(\zeta)$ 之间满足如下公式

$$\int_{\mathbb{C}^n} f(z) du(z) = 2n \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}_n} \epsilon^{2n-1} f(\epsilon\zeta) d\sigma(\zeta) d\epsilon.$$

全纯单项式在 $L^2(\sigma)$ 中彼此正交，即若 k 和 l 是满足 $k \neq l$ 的多重指标，则

$$\int_{\mathbb{S}_n} \zeta^k \bar{\zeta}^l d\sigma(\zeta) = 0.$$

此外,

$$\int_{\mathbb{S}_n} |\zeta^k|^2 d\sigma(\zeta) = \frac{(n-1)!k!}{(n-1+|k|)!} \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{B}_n} |z^k|^2 du(z) = \frac{n!k!}{(n+|k|)!}.$$

2. Relation among Dirichlet-type spaces and equivalentnorms

我们研究 Dirichlet 型空间的结构。注意,

$$R(f)(z) = z_1 \partial_{z_1} f(z) + ... + z_n \partial_{z_n} f(z)$$

是函数 $f.$ 的径向导数。径向导数在单位球上的函数论中起着关键作用。这些空间之间的一个重要关系如下。

命题 1. 设 $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{B}_n)$ 且 $\alpha \in \mathbb{R}$ 为固定值。则

$$f \in D_\alpha(\mathbb{B}_n) \quad \textit{if and only if} \quad n^q f + R^q(f) + q \sum_{i=1}^{q-1} n^i R^{q-i}(f) \in D_\upsilon(\mathbb{B}_n),$$

其中，$\alpha = 2q + \upsilon$、$q \in \mathbb{N}$ 和 R^q 是算子 R.的 q映像

证明。事实上，只需验证

$$||nf+R(f)||^2_{\alpha-2}=\sum_{|k|=0}^{\infty}(n+|k|)^{\alpha-2}\frac{(n-1)!k!}{(n-1+|k|)!}(n+|k|)^2|a_k|^2=||f||^2_{\alpha}.$$

□

接下来，我们给出 Dirichlet 型范数的一种等价刻画。在单位球中的 Dirichlet 型空间里，范数的某种积分表示只在有限的参数范围内成立。

引理 2（见[16]）。若 $\alpha\in(-1,1)$，则 $||f||^2_{\alpha}$ 等价于

$$|f|^2_{\alpha}:=\int_{\mathbb{B}_n}\frac{||\nabla(f)(z)||^2-|R(f)(z)|^2}{(1-||z||^2)^{\alpha}}du(z).$$

上文中，$\nabla(f)(z)=(\partial_{z_1}f(z)...,\partial_{z_n}f(z))$ 表示全纯函数 $f.$ 的全纯梯度。注意，命题 1 使我们可以在 $\upsilon\in(-1,1)$ 时使用引理 2。令 $\gamma,t\in\mathbb{R}$ 满足 $n+\gamma$ 和 $n+\gamma+t$ 均不是负整数。若 $f=\sum_{|k|=0}^{\infty}a_kz^k$ 是函数 $f\in\mathrm{Hol}(\mathbb{B}_n)$ 的齐次展开，则我们可以定义一个关于 $\mathbb{B}_n$ 上紧子集上一致收敛拓扑的可逆连续线性算子，记作 $R^{\gamma,\ t}:\mathrm{Hol}(\mathbb{B}_n)\ \to\mathrm{Hol}(\mathbb{B}_n)$，其表达式为

$$R^{\gamma,t}f(z)=\sum_{|k|=0}^{\infty}C(\gamma,t,k)a_kz^k,\quad z\in\mathbb{B}_n,$$

其中

$$C(\gamma,t,k)=\frac{\Gamma(n+1+\gamma)\Gamma(n+1+|k|+\gamma+t)}{\Gamma(n+1+\gamma+t)\Gamma(n+1+|k|+\gamma)}\asymp|k|^t. \tag{4}$$

有关这些分数阶径向导数的更多信息，请参见 [22] 。

引理 3. 设 $t\in\mathbb{R}$ 满足 $n-1+t\geq0.$。若 $f\in A(\mathbb{B}_n)$，则

$$R^{-1,t}f(z)=\int_{\mathbb{S}_n}\frac{f(\zeta)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{n+t}}d\sigma(\zeta),\quad z\in\mathbb{B}_n.$$

证明. 连续线性算子 $R^{\gamma,\ t}$，参见 [22], ，满足

$$R^{\gamma,t}\Big(\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\gamma}}\Big)=\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\gamma+t}}$$

对所有 $w\in\mathbb{B}_n.$ 接下来，定义 f_ϵ 对于 $\epsilon\in(0,1)$，使得

$$f_\epsilon(z)=\int_{\mathbb{S}_n}\frac{f(\zeta)}{(1-\langle z,\epsilon\zeta\rangle)^{n}}d\sigma(\zeta),\quad z\in\mathbb{B}_n.$$

柯西公式对 $f \in A(\mathbb{B}_n)$ 成立，因此 $f = \lim_{\epsilon\to 1^-} f_\epsilon$. 由此可得

$$\begin{aligned} R^{-1,t}f(z) &= R^{-1,t}\Big(\lim_{\epsilon\to 1^-}\int_{\mathbb{S}_n}\frac{f(\zeta)}{(1-\langle z,\epsilon\zeta\rangle)^n}d\sigma(\zeta)\Big) \\ &= \lim_{\epsilon\to 1^-} R^{-1,t}\Big(\int_{\mathbb{S}_n}\frac{f(\zeta)}{(1-\langle z,\epsilon\zeta\rangle)^n}d\sigma(\zeta)\Big) \\ &= \lim_{\epsilon\to 1^-}\int_{\mathbb{S}_n} f(\zeta)R^{-1,t}\Big(\frac{1}{(1-\langle z,\epsilon\zeta\rangle)^n}\Big)d\sigma(\zeta) \\ &= \lim_{\epsilon\to 1^-}\int_{\mathbb{S}_n}\frac{f(\zeta)}{(1-\langle z,\epsilon\zeta\rangle)^{n+t}}d\sigma(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{S}_n}\frac{f(\zeta)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{n+t}}d\sigma(\zeta) \end{aligned}$$

结论由此得证。 □

定理 4. 设 $\alpha\in\mathbb{R}$ 满足 $n-1+\alpha/2\geq 0$ 和 $f\in A(\mathbb{B}_n)$。那么 $f\in D_\alpha(\mathbb{B}_n)$ 当且仅当

$$\int_{\mathbb{B}_n}(1-||z||^2)\Big|\int_{\mathbb{S}_n}\frac{f(\zeta)\bar{\zeta_p}}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{n+\alpha/2+1}}d\sigma(\zeta)\Big|^2du(z)<\infty$$

and

$$\int_{\mathbb{B}_n}\Big|\int_{\mathbb{S}_n}\frac{(\overline{z_p\zeta_q-z_q\zeta_p})f(\zeta)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{n+\alpha/2+1}}d\sigma(\zeta)\Big|^2du(z)<\infty,$$

其中 p、$q=1$、...、n.

证明. 取 t 使得 $\alpha=2t.$。注意到 n、t 是固定的，因此

$$||f||_\alpha^2\asymp\sum_{|k|=0}^{\infty}\frac{(n-1)!k!}{(n-1+|k|)!}||k|^t a_k|^2.$$

因此，(4) 蕴含 $||R^{-1,\ {}^tf||_0\asymp||f||_\alpha.$。接着可以将狄利克雷型范数的积分表示应用于 $R^{-1,\ {}^tf\in\mathrm{Hol}(\mathbb{B}_n)$，即 $||R^{-1,\ {}^tf||_0$ 等价于 $|R^{-1,\ {}^tf|_0.$。根据引理 3，我们得到

$$\partial_{z_p}(R^{-1,t}f)(z)=\int_{\mathbb{S}_n}\frac{f(\zeta)\bar{\zeta_p}}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{n+t+1}}d\sigma(\zeta),\quad z\in\mathbb{B}_n,$$

其中 $p=1,...,n.$ 将项 $||\nabla(f)||^2-|R(f)|^2$ 展开如下：

$$||\nabla(f)||^2-|R(f)|^2=(1-||z||^2)||\nabla(f)||^2+\sum_{p,q}|\bar{z}_p\partial_{z_q}f-\bar{z}_q\partial_{z_p}f|^2.$$

由引理 2 可得此结论。 □

3. Diagonal subspaces

在 [3], 中，给出了一种通过行列式在单位圆盘中的 Dirichlet 型空间内构造最优逼近的方法。类似地，我们也可以定义多变量情形下的最优逼近（见 [19]）。

固定 $N \in \mathbb{N}$. 我们将次数至多为 nN 的多项式空间 $p \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ 定义如下:

$$P_N^n := \{p(z) = \sum_{k_1=0}^{N} ... \sum_{k_n=0}^{N} a_{k_1,...,k_n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}\}.$$

注 5. 设 $(X, ||\cdot|)$ 为赋范空间，并固定 $x \in X, C \subset X$。 x 与集合 C 之间的距离如下:

$$\text{dist}_X(x, C) := \inf\{||x - c|| : c \in C\}.$$

众所周知，若 X 是希尔伯特空间，且 $C \subset X$ 是闭凸子集，那么对任意 $x \in X$，存在唯一的 $y \in C$，使得 $||x-y|| = \text{dist}_X(x, C)$。设 $f \in D_\alpha(\mathbb{B}_n)$ 为非零常数。由此可得，对任意 $N \in \mathbb{N}$，恰好存在一个满足下式的 $p_N \in P_N^n$

$$||p_N f - 1||_\alpha = \text{dist}_{D_\alpha(\mathbb{B}_n)}(1, f \cdot P_N^n).$$

设 $f \in D_\alpha(\mathbb{B}_n)$。若多项式 $p_N \in P_N^n$ 是关于 $1/f$ 的 N 阶最优逼近多项式，则称之为 p_N 在所有多项式 $p \in P_N^n$. 中取最小值。我们称 $||p_N f - 1||_\alpha$ 为与 f. 相关联的 N 阶最优范数

令 $M = (M_1, ..., M_n)$ 为一个多重指标，其中 M_i 为非负整数，并令 $m \in \{1, ..., n\}$. 设

$$\mu(m) := \frac{(M_1 + ... + M_m)^{M_1 + ... + M_m}}{M_1^{M_1} \cdots M_m^{M_m}},$$

我们看到

$$\mu(m)^{1/2} |z_1|^{M_1} \cdots |z_m|^{M_m} \leq 1, \quad z \in \mathbb{B}_n. \tag{5}$$

利用 (5)，我们可以构造在沿单位球面中的解析子集上消失的多项式，这些多项式在闭单位球内也相应为零。

注 6. 令 $\tilde{f} \in$全纯函数空间$(\mathbb{D}(\mu(m)^{-1/4}))$，其中

$$\mathbb{D}(\mu) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \mu\}, \quad \mu > 0.$$

根据 (5)，我们定义如下函数:

$$f(z) = f(z_1, ..., z_n) = \tilde{f}(\mu(m)^{1/4} z_1^{M_1} \cdots z_m^{M_m}), \quad z \in \mathbb{B}_n.$$

那么 $f \in$Hol($\mathbb{B}_n$)，且它依赖于 m 个变量。注意，我们可以用任意其他 m 个变量替换变量 z_1, ..., z_m。为方便起见，我们选择前 m 个变量。幂 $1/4$ 在下文中会很方便。

因此，随之而来的问题是，我们是否可以定义由单变量函数构成的 D_α($\mathbb{B}_n$) 的闭子空间。我们将看到，由于其元素幂级数展开的性质，这些子空间被称为对角子空间。

我们可以不考虑经典的单位圆盘上的单变量 Dirichlet 型空间，而考虑空间 $d_\beta, \beta \in \mathbb{R}$，它由全纯函数构成： $\tilde{f} \in$ Hol($\mathbb{D}$($\mu^{-1/4}$))。此外，幂级数展开为 $\tilde{f}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^l$ 的这类函数称为属于 d_β，如果

$$||\tilde{f}||_{d_\beta}^2 := \sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l/2}(l+1)^\beta |a_l|^2 < \infty.$$

函数理论之间存在一种自然的对应：D_β($\mathbb{D}$)，即单位圆盘上的单变量 Dirichlet 型空间，与 d_β；并且可以验证， [3] 中的结果对 d_β. 也成立

现在我们可以定义对角闭子空间了。令

$$\beta(\alpha) := \alpha - n + \frac{m+1}{2}.$$

设 α, M, m 如上所述。 D_α($\mathbb{B}_n$) 的对角闭子空间如下:

$$J_{\alpha,M,m} := \{f \in D_\alpha(\mathbb{B}_n) : \exists \tilde{f} \in d_{\beta(\alpha)}, f(z) = \tilde{f}(\mu(m)^{1/4} z_1^{M_1} \cdots z_m^{M_m})\}.$$

˜由恒等定理可知，全纯函数 f 的存在性是唯一的，因此这样的定义并无不妥。任意函数$f \in J_{\alpha,\ M,\ m}$ 都可展开为如下形式

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l (z_1^{M_1} \cdots z_m^{M_m})^l.$$

单变量子空间与对角子空间之间的范数关系如下。

˜命题 7. 若 $f \in J_{\alpha,\ M,\ m}$，则 $||f||_\alpha \asymp ||f||_{d_{\beta(\alpha)}}$.

证明。若 $f \in J_{\alpha,M,m}$，则

$$||f||_\alpha^2 \asymp \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)^\alpha \frac{(M_1 l)! \cdots (M_m l)!}{(n-1+(M_1+\cdots M_m)l)!} |a_l|^2.$$

由斯特林公式可得

$$||f||_\alpha^2 \asymp \sum_{l=0}^{\infty}(l+1)^{\alpha-n+m/2+1/2}\mu(m)^{-l}|a_l|^2.$$

另一方面，定义函数 $f'(z) = \sum_{l=0}^{\infty}\mu(m)^{-l/4}a_l z^l$. 那么$f'(\mu(m)^{1/4}z_1^{M_1}\cdots z_m^{M_m}) = f(z_1, ..., z_n)$ 和

$$||f'||_{d_{\beta(\alpha)}}^2 \asymp \sum_{l=0}(l+1)^{\alpha-n+m/2+1/2}\mu(m)^{-l}|a_l|^2.$$

˜该断言成立，因为 f'与 f.一致 □

[4]在我们的情形下，相应的引理 3.4 如下。

引理 8。设 $f \in J_{\alpha,M,m}$，其中 α, M, m 如上所述。设 $r_N \in P_N^n$具有展开式

$$r_N(z) = \sum_{k_1=0}^{N}\cdots\sum_{k_n=0}^{N} a_{k_1,...,k_n}z_1^{k_1}...z_n^{k_n},$$

并考虑其在 $J_{\alpha,M,m}$上的投影

$$\pi(r_N)(z) = \sum_{\{l:M_1l,...,M_ml\le N\}} c_{M_1l,...,M_ml,0,...,0}z_1^{M_1l}\cdots z_m^{M_ml}.$$

Then

$$||r_Nf-1||_\alpha \ge ||\pi(r_N)f-1||_\alpha.$$

此外，正如命题 7 中一样，单变量与对角子空间的最优逼近之间存在一种关系。

命题 9. 如果 $f \in J_{\alpha,\ M,\ m}$，那么

$$\mathrm{dist}_{D_\alpha(\mathbb{B}_n)}(1, f\cdot P_N^n) \asymp \mathrm{dist}_{d_\beta(\alpha)}(1, \tilde{f}\cdot P_N^1).$$

证明. 设 $r_N, \pi(r_N)$ 如引理 8 中所述。那么 $\pi(r_N)f-1 \in J_{\alpha,\ M,\ m}$. 由此可得

$$||r_Nf-1||_\alpha \ge ||\pi(r_N)f-1||_\alpha \asymp ||\tilde{\pi}(r_N)\tilde{f}-1||_{d_{\beta(\alpha)}} \ge \mathrm{dist}_{d_{\beta(\alpha)}}(1, \tilde{f}\cdot P_N^1),$$

因为 $\tilde{\pi}(r_N) \in P_N^1$.另一方面，设

$$\mathrm{dist}_{d_{\beta(\alpha)}}(1, \tilde{f}\cdot P_N^1) = ||q_N\tilde{f}-1||_{d_{\beta(\alpha)}}, \quad q_N(z) = \sum_{l=0}^{N} a_l z^l.$$

那么，该多项式

$$q_N'(z_1, ..., z_n) = \sum_{l=0}^{N}\mu(m)^{-l/4}a_l z_1^{M_1l}\cdots z_m^{M_ml}$$

满足 $q'_N \in J_{\alpha,\ M,\ m} \cap P_N^n$ 且 $q'_N f - 1 \in J_{\alpha,\ M,\ m}$. 因此，

$$\tilde{\ } \quad \lrcorner ||q_N f - 1||_{d_{\beta(\alpha)}} = ||\tilde{q}'_N f - 1||_{d_{\beta(\alpha)}} \asymp ||q'_N f - 1||_\alpha \geq$$

$\mathrm{dist}_{D_\alpha(\mathbb{B}_n)}(1, f \cdot P_N^n)$，结论得证。 □

定义函数 ϕ_β： $[0,\infty) \to [0,\infty)$，使得

$$\phi_\beta(t) = \begin{cases} t^{1-\beta}, & \beta < 1 \\ \log^+(t), & \beta = 1 \end{cases},$$

其中 $\log^+(t) := \max\{\log\ t, 0\}$. 有如下结论。

定理10。设 $\alpha \in \mathbb{R}$ 满足 $\beta(\alpha) \leq 1$. 设 $f \in J_{\alpha,M,m}\tilde{}$ 如上，并假设相应的 f 在其定义域内没有零点，在边界上至少有一个零点，且可解析延拓到严格更大的定义域。则当 $\alpha \leq \frac{2n-m+1}{2}$ 且 时， f 在 $D_\alpha(\mathbb{B}_n)$ 中是循环的。

$$\mathrm{dist}^2_{D_\alpha(\mathbb{B}_n)}(1, f \cdot P_N^n) \asymp \phi_{\beta(\alpha)}(N+1)^{-1}.$$

证明。由$D_\beta(\mathbb{D})$与 d_β 之间的对应关系以及前面的引理和命题，可立即得出结论。□

如果我们只考虑多项式，那么下面的结论成立。

定理11。考虑多项式 $p(z) = 1 - m^{m/2} z_1 \cdots z_m$，其中$1 \leq m \leq n$. 那么，当 $\alpha \leq \frac{2n+1-m}{2}$.时， p 在 $D_\alpha(\mathbb{B}_n)$中是循环的。

请注意，定理11并非一个刻画。我们将研究 $\alpha > \frac{2n+1-m}{2}$.的情形

4. Cyclicity for model polynomials via radial dilation

函数 f 的径向伸缩： $\mathbb{B}_n \to \mathbb{C}$ ，对于 $r \in (0, 1)$，定义为 $f_r(z) = f(rz)$。为了证明定理11，只需证明下面的引理。

引理 12. 考虑多项式 $p(z) = 1 - m^{m/2} z_1 \cdots z_m$，其中$1 \leq m \leq n$. 那么，当 $r \to 1^-$ 时， $||p/p_r||_\alpha < \infty$ $\alpha \leq \frac{2n+1-m}{2}$.

我们沿用 [14], [13]的论证。事实上，若引理 12 成立，则 $\phi_r \cdot p \to 1$ 弱收敛，其中 $\phi_r := 1/p_r$. 这是 Dirichlet 型空间的一项关键性质所致：若 $\{f_n\} \subset D_\alpha(\mathbb{B}_n)$，则 $f_n \to 0$ 弱收敛，当且仅当 $f_n \to 0$ 逐点收敛且 $\sup_n\{||f_n||_\alpha\} < \infty$. 由于$\phi_r$ 可全纯延拓至闭单位球之外， ϕ_r 是乘子，因此， $\phi_r \cdot p \in [p]$. 最后，1 是 $\phi_r \cdot p$ 的弱极限，而 $[p]$ 是闭凸的，或者等价地说，是弱闭的。显然， $1 \in [p]$，因此， p是循环的。

此外，只需证明 $||p/p_r||_\alpha < \infty$，因为 $r \to 1^-$，对于 $\alpha_0 = \frac{2n+1-m}{2}$. 情形 $\alpha < \alpha_0$ 随即成立，因为包含映射$D_{\alpha_0}(\mathbb{B}_n) \hookrightarrow D_\alpha(\mathbb{B}_n)$ 是紧线性映射，而在$D_{\alpha_0}(\mathbb{B}_n)$中的弱收敛会推出在 $D_\alpha(\mathbb{B}_n)$中的弱收敛。

引理 12 的证明。根据定理 4，只需证明以下内容：

$$I_p := \int_{\mathbb{B}_n} (1-||z||^2) \Big| \int_{\mathbb{S}_n} \frac{(1-\lambda\zeta_1\cdots\zeta_m)\bar{\zeta}_p}{(1-r^m\lambda\zeta_1\cdots\zeta_m)(1-\langle z,\zeta\rangle)^\beta} d\sigma(\zeta) \Big|^2 du(z)$$

and

$$I_{p,q} := \int_{\mathbb{B}_n} \Big| \int_{\mathbb{S}_n} \frac{(\overline{z_p\zeta_q - z_q\zeta_p})(1-\lambda\zeta_1\cdots\zeta_m)}{(1-r^m\lambda\zeta_1\cdots\zeta_m)(1-\langle z,\zeta\rangle)^\beta} d\sigma(\zeta) \Big|^2 du(z)$$

是有限的，因为 $r \to 1^-$，其中 $\beta = n+t+1$、$t = \frac{2n+1-m}{4}$ 和 $\lambda = m^{m/2}$.

记

$$S_p := \int_{\mathbb{S}_n} \frac{(1-\lambda\zeta_1\cdots\zeta_m)\bar{\zeta}_p}{(1-r^m\lambda\zeta_1\cdots\zeta_m)(1-\langle z,\zeta\rangle)^\beta} d\sigma(\zeta),$$

其中最后一个积分等于

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}_n}\int_0^{2\pi} \frac{(1-\lambda e^{im\theta}\zeta_1\cdots\zeta_m)e^{-i\theta}\bar{\zeta}_p}{(1-r^m\lambda e^{im\theta}\zeta_1\cdots\zeta_m)(1-e^{-i\theta}\langle z,\zeta\rangle)^\beta} d\theta d\sigma(\zeta).$$

设 z、ζ 固定。则

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta}}{(1-e^{-i\theta}\langle z,\zeta\rangle)^\beta} d\theta = 0.$$

因此，将 $p(e^{i\theta}\zeta)/p(re^{i\theta}\zeta)$ 替换为 $p(e^{i\theta}\zeta)/p(re^{i\theta}\zeta) - 1$，我们得到

$$S_p = \frac{\lambda(r^m-1)}{2\pi}\int_{\mathbb{S}_n}\int_0^{2\pi} \frac{\bar{\zeta}_p\zeta_1\cdots\zeta_m e^{i(m-1)\theta}}{(1-r^m\lambda e^{im\theta}\zeta_1\cdots\zeta_m)(1-e^{-i\theta}\langle z,\zeta\rangle)^\beta} d\theta d\sigma(\zeta).$$

接下来，展开二项式

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \frac{e^{i(m-1)\theta}}{(1-r^m\lambda e^{im\theta}\zeta_1\cdots\zeta_m)(1-e^{-i\theta}\langle z,\zeta\rangle)^\beta} d\theta \\
&\quad = \sum_{k=0}^\infty \sum_{l=0}^\infty \frac{\Gamma(k+\beta)}{\Gamma(\beta)k!} (r^m\lambda\zeta_1\cdots\zeta_m)^l \langle z,\zeta\rangle^k \int_0^{2\pi} e^{i(m(l+1)-k-1)\theta} d\theta \\
&\quad = 2\pi \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(m(k+1)-1+\beta)}{\Gamma(\beta)(m(k+1)-1)!} (r^m\lambda\zeta_1\cdots\zeta_m)^k \langle z,\zeta\rangle^{m(k+1)-1} \\
&\quad = 2\pi \sum_{k=0}^\infty \sum_{|j|=m(k+1)-1} \frac{\Gamma(m(k+1)-1+\beta)}{\Gamma(\beta)j!} (r^m\lambda\zeta_1\cdots\zeta_m)^k z^j \bar{\zeta}^j.
\end{aligned}$$

因此,

$$S_p = \lambda(r^m - 1)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|j|=m(k+1)-1}\frac{\Gamma(m(k+1)-1+\beta)}{\Gamma(\beta)j!}(r^m\lambda)^k z^j c(k),$$

其中 $c(k) = \int_{\mathbb{S}_n}\zeta^{\alpha(k)}\overline{\zeta}^{b(k)}d\sigma(\zeta)$ $\alpha(k) = (k+1, .., k+1(\text{m-comp.}) 0, .., 0)$, 且 $b(k) = (j_1, ..., j_{p-1}, j_p+1, j_{p+1}, ..., j_n)$。由此, $1 \le p \le m.$ 由于全纯单项式在 $L^2(\sigma)$ 中彼此正交, 我们得到

$$|S_p| \asymp (1-r^m)\Big|z_p'\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{\beta-n}(r^m\lambda z_1\cdots z_m)^k\Big|,$$

其中 $z_p' = z_1\cdots z_{p-1}z_{p+1}\cdots z_m.$ 因此我们得到

$$I_p \asymp (1-r^m)^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{2(\beta-n)}(r^m\lambda)^{2k}\int_{\mathbb{B}_n}(1-||z||^2)|z_p'|^2|z_1\cdots z_m|^{2k}du(z),$$

其中再次用到了全纯单项式在 $L^2(\sigma)$ 中的正交性。为处理上面的积分, 我们使用极坐标

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{B}_n}(1-||z||^2)|z_p'|^2|z_1\cdots z_m|^{2k}du(z)\\ &\asymp \int_0^1\int_{\mathbb{S}_n}\epsilon^{2n-1}(1-\epsilon^2)\epsilon^{2km+2m-2}|\zeta_p'|^2|\zeta_1\cdots\zeta_m|^{2k}d\sigma(\zeta)d\epsilon\\ &\asymp \frac{[(k+1)!]^{m-1}k!}{(n+m(k+1)-2)!}\cdot\frac{1}{(k+1)^2}.\end{aligned}$$

如果我们回想起 $\beta = n+t+1$、 $t = \frac{2n+1-m}{4}$ 和 $\lambda^{2k} = m^{mk}$, 那么多次应用斯特林公式后可知

$$I_p \asymp (1-r^m)^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)r^{2mk}.$$

这就证明了关于 I_p.所作的断言

接下来需要估计以下项:

$$I_{p,q} = \int_{\mathbb{B}_n}\Big|\int_{\mathbb{S}_n}\frac{(\overline{z_p\zeta_q - z_q\zeta_p})(1-\lambda\zeta_1\cdots\zeta_m)}{(1-r^m\lambda\zeta_1\cdots\zeta_m)(1-\langle z,\zeta\rangle)^\beta}d\sigma(\zeta)\Big|^2du(z).$$

我们将证明 $I_{p,\ q} \asymp I_p.$ 再次用 $S_{p,\ q}$ 表示内层积分, 将其展开为 $S_{p,\ q} = \bar{z}_pS_q - \bar{z}_qS_p.$ 会很方便。回忆$z_p' = z_1\cdots z_{p-1}z_{p+1}\cdots z_m.$, 通过与上述类似的计算可得

$$|S_{p,q}| \asymp (1-r^m)|\bar{z}_pz_q' - \bar{z}_qz_p'|\Big|\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{\beta-n}(r^m\lambda z_1\cdots z_m)^k\Big|.$$

此外， $L^2(\sigma)$ 中全纯单项式的正交性给出如下估计：

$$I_{p,q} \asymp (1-r^m)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{2\beta-2n} (r^m\lambda)^{2k} \int_{\mathbb{B}_n} |\bar{z}_p z'_q - \bar{z}_q z'_p|^2 |z_1 \cdots z_m|^{2k} du(z).$$

显然， $|\bar{z}_p z'_q - \bar{z}_q z'_p|^2 = |z_p|^2|z'_q|^2 + |z_q|^2|z'_p|^2 - 2|z_1 \cdots z_m|^2$.我们来估计该积分

$$\int_{\mathbb{B}_n} (|z_p|^2|z'_q|^2 - |z_1 \cdots z_m|^2)|z_1 \cdots z_m|^{2k} du(z).$$

改用极坐标后，对于 $p \neq q$，我们得到

$$\int_{\mathbb{B}_n} |z_p|^2|z'_q|^2|z_1 \cdots z_m|^{2k} du(z) \asymp 2n(n-1)! \frac{[(k+1)!]^{m-1}k!}{(mk+n+m-1)!} \frac{k+2}{2km+2n+2m},$$

and

$$\int_{\mathbb{B}_n} |z_1 \cdots z_m|^{2(k+1)} du(z) = 2n(n-1)! \frac{[(k+1)!]^{m-1}k!}{(mk+n+m-1)!} \frac{k+1}{2km+2n+2m}.$$

因此我们得到

$$\int_{\mathbb{B}_n} (|z_p|^2|z'_q|^2 - |z_1 \cdots z_m|^2)|z_1 \cdots z_m|^{2k} du(z) \asymp \frac{[(k+1)!]^{m-1}k!}{(mk+n+m-2)!(k+1)^2}.$$

再次将斯特林公式应用于上面的估计，可得

$$I_{p,q} \asymp (1-r^m)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) r^{2mk}.$$

这证明了关于$I_{p,\ q}$.所作的断言 □

5. Sufficient conditions for non-cyclicity via Cauchy transforms and α-capacities

我们考虑单位球面上的复博雷尔测度 μ 的柯西变换：

$$C_{[\mu]}(z) = \int_{\mathbb{S}_n} \frac{1}{(1-\langle z, \bar{\zeta}\rangle)^n} d\mu(\zeta), \quad z \in \mathbb{B}_n.$$

请注意，这一定义与经典定义不同。

令 $f \in D_\alpha(\mathbb{B}_n)$，并在 $\mathcal{Z}(f^*)$ 上取测度 μ：即 f 的径向极限在球面上的零点集。[21] 中关于柯西变换和非循环性的结果在我们的情形下仍然成立。由此我们推得$[f] \neq D_\alpha(\mathbb{B}_n)$，因此只要 $C_{[\mu]} \in D_{-\alpha}(\mathbb{B}_n)$，就具有非循环性。因此，计算柯西变换的 Dirichlet 型范数很重要。

设 μ 是定义在 $\mathbb{S}_n$ 上的博雷尔测度，并令 $\mu^*(j) = \int_{\mathbb{S}_n} \zeta^j d\mu(\zeta)$ $\bar{\mu}^*(j) = \int_{\mathbb{S}_n} \bar{\zeta}^j d\mu(\zeta)$。我们有如下结论。

引理 13. 设 μ 是定义在 $\mathbb{S}_n$. 上的博雷尔测度，则

$$||C_{[\mu]}||^2_{-\alpha} \asymp \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|j|=k} \frac{(k+1)^{n-1-\alpha} k!}{j!} |\bar{\mu}^*(j)|^2.$$

证明. μ 在 $\mathbb{B}_n$ 上的柯西积分有如下展开式

$$C_{[\mu]}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|j|=k} \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(n) j!} \bar{\mu}^*(j) z^j.$$

因此，可以计算 $C_{[\mu]}$ 在空间 $D_{-\alpha}(\mathbb{B}_n)$ 中的范数。结论得证。□

下面的引理在后续内容中至关重要。它可能是已知的，但我们未能在文献中找到，因此将其证明列出。

引理 14. 设 $j_1, ..., j_n, k$ 为满足 $j_1 + ... + j_n = nk.$ 的非负整数，则

$$j_1! \cdots j_n! \geq (k!)^n.$$

证明. Γ-函数是对数凸的，因此我们可以对其应用詹森不等式:

$$\log \Gamma\Big(\frac{x_1}{n} + ... + \frac{x_n}{n}\Big) \leq \frac{\log \Gamma(x_1)}{n} + ... + \frac{\log \Gamma(x_n)}{n}.$$

令 $x_i := j_i + 1$, $i = 1, ..., n.$ 由于 $j_1 + ... + j_n = nk$，结论得证。□

我们可以通过柯西变换刻画模型多项式的非循环性。

引理 15. 考虑多项式 $p(z) = 1 - m^{m/2} z_1 \cdots z_m$，其中$1 \leq m \leq n.$ 则当 $\alpha > \frac{2n+1-m}{2}.$ 时， p 在 $D_\alpha(\mathbb{B}_n)$ 中不是循环的
证明。回忆一下，模型多项式在闭单位球内沿着如下形式的解析集消失:

$$\mathcal{Z}(p) \cap \mathbb{S}_n = \{1/\sqrt{m}(e^{i\theta_1}, .., e^{i\theta_{m-1}}, e^{-i(\theta_1 + ... + \theta_{m-1})}, 0, .., 0) : \theta_i \in \mathbb{R}\}.$$

容易看出，对于适当测度 μ，当$mj_m = k$ 时， $\mu^*(j)$ 非零，且 $\mu^*(j) \asymp m^{-k/2}$. 。根据斯特林公式和引理 14，我们得到

$$||C_{[\mu]}||^2_{-\alpha} \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mk+1)^{n-1-\alpha}(mk)!}{(k!)^m m^{mk}} \asymp \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{1/2(2n-m-1)-\alpha}.$$

因此，对于 $\alpha > \frac{2n+1-m}{2}$.， p 在 $D_\alpha(\mathbb{B}_n)$ 中不是循环的 □

对于固定参数 $\alpha \in (0, n)$，我们考虑相对于 $\mathbb{S}_n$ 中由下式给出的各向异性距离的 Riesz α-容量

$$d(\zeta, \eta) = |1 - \langle \zeta, \eta \rangle|^{1/2}$$

以及由下式给出的非负核 $K_\alpha : (0, \infty) \to [0, \infty)$

$$K_\alpha(t) = \begin{cases} t^{\alpha - n}, & \alpha \in (0, n) \\ \log(e/t), & \alpha = n \end{cases}.$$

注意，我们可以通过定义 $K(0) := \lim_{t \to 0^+} K(t)$，将 K 的定义扩展到 0。

设 μ 是一个支撑在某个博雷尔集 $E \subset \mathbb{S}_n$. 上的任意博雷尔概率测度。那么， μ 的 Riesz α-能量由下式给出

$$I_\alpha[\mu] = \iint_{\mathbb{S}_n} K_\alpha(|1 - \langle \zeta, \eta \rangle|) d\mu(\zeta) d\mu(\eta)$$

以及 E 的 Riesz α-容量为

$$\mathrm{cap}_\alpha(E) = \inf\{I_\alpha[\mu] : \mu \in \mathcal{P}(E)\}^{-1},$$

其中 $\mathcal{P}(E)$ 是所有支撑在 E. 上的博雷尔概率测度的集合。注意，若 $\mathrm{cap}_\alpha(E) > 0$，则至少存在一个支撑在 E 上且具有有限 Riesz α-能量的概率测度。此外，除可能在一个满足 $\mathrm{cap}_\alpha(E) = 0$. 的集合 E 上外，任意 $f \in D_\alpha(\mathbb{B}_n)$ 在 $\mathbb{S}_n$ 上都有有限的径向极限 f^* 。关于位势理论中上述标准构造的相关理论，参见 [1], [9], [12], [17]。

函数的非循环性与其径向极限的零点的 Riesz α-容量之间的关系如下。

定理16. 固定 $\alpha \in (0, n]$ 并令 $f \in D_\alpha(\mathbb{B}_n)$。若 $\mathrm{cap}_\alpha(\mathcal{Z}(f^*)) > 0$，则 f 在 $D_\alpha(\mathbb{B}_n)$ 中不是循环的。

证明. 设 μ 是支撑于 $\mathcal{Z}(f^*)$ 上、具有有限 Riesz n-能量的概率测度。若 $r \in (0,1)$，则

$$\begin{aligned}\log\frac{e}{|1-r\langle\zeta,\eta\rangle|} &= 1+\mathrm{Re}\Big(\log\frac{1}{1-r\langle\zeta,\eta\rangle}\Big)\\ &= 1+\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|j|=k}\frac{r^k k!}{kj!}\zeta^j\overline{\eta}^j.\end{aligned}$$

注意， μ 是一个概率测度，因此

$$\iint_{\mathbb{S}_n}\log\frac{e}{|1-r\langle\zeta,\eta\rangle|}d\mu(\zeta)d\mu(\eta) = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|j|=k}\frac{r^k k!}{kj!}|\mu^*(j)|^2.$$

由于对于 $r \in$ 属于$(0,1)$有 $|1-w|/|1-rw| \le 2$，且 $w \in \overline{\mathbb{D}}$，由控制收敛定理和引理 13 可得

$$||C_{[\mu]}||_{-n}^2 \asymp \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|j|=k}\frac{k!}{kj!}|\mu^*(j)|^2 < \infty.$$

结论得证。

我们继续取一个概率测度 μ，其支集包含于 $\mathcal{Z}(f^*)$，且具有有限的 Riesz α-能量，其中 $\alpha \in$ 属于$(0,n)$。若 $r \in$ 属于$(0,1)$，则

$$\frac{1}{(1-r\langle\zeta,\eta\rangle)^{n-\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|j|=k}\frac{\Gamma(k+n-\alpha)k!r^k}{k!\Gamma(n-\alpha)j!}\zeta^j\overline{\eta}^j.$$

与上述类似的论证表明

$$\begin{aligned}I_\alpha[\mu] &\ge \Big|\iint_{\mathbb{S}_n}\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{(1-r\langle\zeta,\eta\rangle)^{n-\alpha}}\Big)d\mu(\zeta)d\mu(\eta)\Big|\\ &= \Big|\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|j|=k}\frac{\Gamma(k+n-\alpha)k!r^k}{k!\Gamma(n-\alpha)j!}\iint_{\mathbb{S}_n}\zeta^j\overline{\eta}^j d\mu(\zeta)d\mu(\eta)\Big|\\ &\asymp \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|j|=k}\frac{(k+1)^{n-1-\alpha}k!}{j!}r^k|\mu^*(j)|^2.\end{aligned}$$

再次，利用引理 13 得到 $r \to 1^-$ $C_{[\mu]} \in D_{-\alpha}(\mathbb{B}_n)$。断言得证。□

注 17. 根据 [14]，可以预期， $\mathbb{C}^n$ 单位球内多项式的循环性问题取决于其零点集在单位球面上的限制的实维数：$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{Z}(p)\cap\mathbb{S}_n)$。

我们来说明在球内处处非零的多项式的边界零点的性质。关于二维情形，参见 [14]，其中使用了 [10]的曲线选择引理。

设 $p \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ 是一个在球内处处非零的多项式。将 $\mathcal{Z}(p) \cap \mathbb{S}_n$ 视为半代数集，我们得出它是有限个纳什流形 M_i的不交并，每个流形都与一个开超立方体 $(0, 1)^{\dim(M_i)}$纳什微分同胚。注意，在实数闭域上的纳什微分同胚满足一些额外性质（参见 [7, 命题 2.9.10]）。

因此可以预期，循环性的刻画、模型多项式边界零点的性质、狄利克雷范数的酉不变性以及充分的容量条件，对于刻画任意维数下的循环多项式至关重要。

致谢。我要感谢 L. Kosi´nski，在本研究准备期间与我进行了有益的交流。我还要感谢匿名审稿人提出的诸多意见，这些意见大大改善了本文的质量。

References

[1] P. Ahern 和 W. Cohn，《Hardy–Sobolev函数的例外集》，$p > 1$，《Indiana Univ. Math. J.》38 (1989)，417–453。[2] F. Beatrous 和 J. Burbea，《Hardy–Sobolev空间的乘子》，《Proc. Amer. Math. Soc.》136 (2008)，2125–2133。[3] C. B´en´eteau、A.A. Condori、C. Liaw、D. Seco 和 A.A. Sola，《狄利克雷型空间中的循环性与极值多项式》，《J. Anal. Math.》126 (2015)，259–286。[4] C. B´en´eteau、A.A. Condori、C. Liaw、D. Seco 和 A.A. Sola，《狄利克雷型空间中的循环性与极值多项式 II：双圆盘上的函数》，《Pacific J. Math.》276 (2015)，35–58。[5] C. B´en´eteau、G. Knese、L. Kosi´nski、C. Liaw、D. Seco 和 A. Sola，《二元循环多项式》，《Trans. Amer. Math. Soc.》368 (2016)，8737–8754。[6] L. Bergqvist，《关于多圆盘中的循环多项式的札记》，《Anal. Math. Phys.》8 (2018)，197—211。[7] J. Bochnak、M. Coste、M-F. Roy，《实代数几何》，《数学与其边界领域成果》第三辑第36卷，Springer-Verlag Berlin, Heidelberg，1998。[8] L. Brown 和 A. Shields，《Dirichlet 空间中的循环向量》，《Trans. Amer. Math. Soc.》285 (1984)，269–304。[9] W.S. Cohn 和 I.E. Verbitsky，《球上的非线性位势理论及其在例外集和边界插值集中的应用》，《Michigan Math. J.》42 (1995)，79–97。[10] Z. Denkowska 和 M.P. Denkowski，《通往可定义集的漫长曲折之路》，《Journal of Singularities》13 (2015)，57–86。[11] L. H¨ormander，《多变量复分析导论》，第3版，North-Holland数学文库第7卷，Elsevier Science Publishers B.V.，阿姆斯特丹，1990。

[12] O. El-Fallah、K. Kellay、J. Mashreghi 和 T. Ransford，《Dirichlet 空间入门》，剑桥数学论丛203，剑桥大学出版社，2014。[13] G. Knese、L. Kosi´nski、T.J. Ransford 和 A.A. Sola，《各向异性 Dirichlet 空间中的循环多项式》，《J. Anal. Math.》138 (2019)，23–47。[14] -L. Kosi´nski、D. Vavitsas，《$\mathbb{C}^2$单位球中的狄利克雷型空间循环多项式》，(2022)，即将发表于《构造性逼近》杂志。[15] S. Li，《$\mathbb{C}^n$单位球上狄利克雷型空间的一些新刻画》，《数学分析及其应用杂志》324 (2006)，1073–1083。[16] M. Michalska，《关于 $\mathbb{C}^n$单位球中的狄利克雷型空间》，Ann. Univ. Mariae Curie-Sk lodowska Sect. A 65 (2011)，75–86。[17] D. Pestana 和 J.M. Rodr´ıguez，《内函数对 $\mathbb{C}^n$单位球中容量的畸变》，《Michigan Math. J.》44 (1997)，125–137。[18] W. Rudin，《$\mathbb{C}^n$单位球中的函数论》，《数学科学基础丛书》第241卷，施普林格，纽约，1980。[19] M. Sargent、A.A. Sola，《多变量中的最优逼近与正交多项式》，《加拿大数学杂志》74 (2022)，428–256。[20] M. Sargent、A.A. Sola，《多变量中的最优逼近与正交多项式 II：单位球中的多项式族》，《Proc. Amer. Math. Soc.》149 (2021)，5321–5330。[21] A. Sola，《关于狄利克雷型空间与$\mathbb{C}^2$单位球中循环向量的札记》，《数学文献》104 (2015)，247–257。[22] K. Zhu，《单位球中的全纯函数空间》，《数学研究生教材》第226卷，施普林格，纽约，2005。电子邮箱：dimitris.vavitsas@doctoral.uj.edu.pl

Institute of Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer Science, Jagiellonian University, Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków, Poland