arXiv:2301.05602v1 [math.ST] 13 Jan 2023

空间随机场各向同性协方差函数的混合参数类

Alfredo Alegr´ıa*[1]、Fabi´an Ram´ırez[1], 和 Emilio Porcu[2]

[1]智利费德里科·圣玛丽亚技术大学数学系´阿联酋哈利法大学数学系´[2]

2023年1月16日

摘要

协方差函数是空间统计学、随机过程、机器学习以及许多其他理论与应用学科的核心。协方差函数在短距离和长距离处的性质决定了相关高斯随机场的几何属性。能够同时刻画局部和整体性质的协方差函数无疑备受需要。本文提出一种方法，用以寻找具有此类性质的新协方差函数类。我们将这些模型称为混合模型，因为它们是分段协方差核相对于某些测度的尺度混合，而这些测度本身也被定义为参数化测度族的分段线性组合。为阐释我们的方法，我们给出了新的协方差函数族，并证明与早期文献提出的其他知名函数族相比，这些函数族更为丰富。具体而言，我们推导出一种混合柯西-Mat´ern模型，它允许我们分别刻画随机场的长记忆和均方可微性；还推导出一种混合空穴效应-Mat´ern模型，它能够取负值（空穴效应），同时保留传统Mat´ern模型的局部属性。我们通过模拟数据和真实数据的数值研究展示了研究结果。

关键词：柯西模型；高斯尺度混合；空穴效应；长记忆；Mat´ern 模型；均方可微性。

1 引言

协方差函数是许多学科的核心内容，例如空间统计学（Cressie，1993；Chil`es 和 Delfiner，2012；Hristopulos，2020）、随机过程（Porcu 等，2018a,b）、机器学习（Schaback 和 Wendland，2006；James 等，2013；Barp 等，2022）、数值分析（Pazouki 和 Schaback，2011；Cockayne 等，2019）以及随机力学（Ostoja-Starzewski，2006，及其中的参考文献）。近年来，协方差函数在气候学（Guinness 和 Hammerling，2018；Edwards 等，2019）、海洋学（Furrer 等，2007；Di Lorenzo 等，2014）、环境科学（Cressie 和 Kornak，2003；Stein，2007）以及自然资源工程（Chen 等，2018；Emery 和 S´eguret，2020）中的应用，彰显了协方差函数的重要性。

通常假设协方差函数取决于输入空间中任意两个不同位置处的随机变量之间的距离。这种假设

*通讯作者。电子邮箱：alfredo.alegria@usm.cl

在空间统计学和机器学习中称为各向同性，在应用数学的其他领域则称为径向对称性。协方差函数在短距离或长距离处的行为（我们分别称之为局部和全局性质）对于理解具有给定协方差函数的随机过程的性质至关重要。具体而言，局部性质与相关随机过程的分形维数及其几何性质（例如均方可微性）以及其样本路径有关。另一方面，协方差函数的全局行为有助于刻画相关过程的持续性或反持续性（即长期行为）。另一个备受关注的全局行为是所谓的空穴效应，即协方差函数在某个区间内可能取负值。

寻找能够同时表征局部和全局行为的各向同性协方差函数参数族，是一项重大挑战，目前仅得到非常有限的研究。半个多世纪以来，Mat´ern族一直是空间统计学的基石（Stein, 1999）。它之所以广受欢迎，是因为其中的一个参数可以控制相应随机场的均方可微性程度和分形维数（Stein, 1999）。近期，Bevilacqua等人（2022）证明，Mat´ern类是一个更丰富模型类的特例；该模型类除了能够表征局部性质之外，还允许在紧支撑与全局支撑之间切换。反过来，紧支撑模型会产生稀疏协方差矩阵（Furrer et al., 2006; Kaufman et al., 2008），从而显著提升估计和预测的计算效率。不幸的是，Mat´ern类无法表征相关随机过程的全局行为。广义柯西族（Gneiting and Schlather, 2004）能够表征分形维数和长记忆行为。值得注意的是，它无法表征均方可微性，因为该模型在原点处要么不可微，要么无限次可微。Dagum模型（Berg et al., 2008）也具有相同性质，同样无法表征均方可微性。上述模型均无法产生负的空间依赖。

谱方法是寻找灵活的协方差函数族的一条有前景的途径。Laga 和 Kleiber（2017）提出了与 Mat´ern 族相关的谱密度的一种修正版。新类别包含两个附加参数，可将其宽泛地解释为移动平均过程的连续版本。最近，Ma 和 Bhadra（2022）证明，对高斯尺度混合进行两次应用，可以在保留候选协方差函数局部性质的同时，构造出具有多项式衰减的模型。Alegr´ía（2020）和 Alegr´ía 等人（2021）研究了协方差函数的其他非常规性质，他们提出了一些修正的尺度混合表示，以获得具有非单调行为（即所谓的交叉凹陷效应）的交叉协方差函数类，用于向量值随机场。Schlather 和 Moreva（2017）推导出了一类模型，可实现平稳高斯随机场与内禀平稳高斯随机场之间的平滑过渡。

前文提到的协方差函数参数类均可表示为高斯核相对于连续、正且有界测度的尺度混合。本文从 $\mathbb{R}^d$ 上各向同性协方差函数的 Schoenberg 积分表示出发（Schoenberg，1938年），其中 d 为所有自然数。我们特别假设 Schoenberg 测度属于分段定义的参数化测度族。随后，我们证明这一策略能够构造出混合类，并将早期文献中提出的类推广。我们通过构建一个结合 Cauchy 类全局特征与 Mat´ern 类局部性质的模型，来说明这一方法。我们证明所提出的模型具有闭式表达式，并考察其理论性质。此外，我们还研究了一种更灵活的形式，其中尺度混合所涉及的高斯核被同样分段定义的协方差核取代。依照这一思路，我们推导出一种具有 Mat

ern 类型局部行为，且全局行为允许协方差函数取负值的混合模型。我们使用模拟数据和真实数据进行数值实验，以评估所提出模型的统计性能。

本文的结构安排如下。第2 节简要回顾随机场以及由尺度混合得到的协方差函数。第3 节介绍构建混合协方差模型的一般方法。随后，我们推导混合柯西-Mat´ern 和混合 Hole-Effect- Mat´ern 类。第4节通过一些数值研究引导读者了解相关内容。最后，我们在第5节进行批判性讨论，其中包括对本文技术扩展的描述，例如协方差函数为矩阵值的多元情形，以及各向同性由测地距离定义的球面索引场情形。

2 背景

设 $\{Z(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in \mathbb{R}^d\}$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的（二阶）中心平稳高斯随机场。这样的场完全由其协方差函数（或核）刻画。协方差函数的各向同性通过映射 $\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 定义，使得 $\mathrm{cov}[Z(\mathbf{s}) \; Z(\mathbf{s}')] = \varphi(h)$，对每个 $\mathbf{s}$，$\mathbf{s}' \in \mathbb{R}^d$ 均成立，其中 $h = \|\mathbf{s} - \mathbf{s}'\|$。协方差函数必须满足正（半）定性条件：对于任意 $k \in \mathbb{N}$、$\{a_1, \ldots, a_k\} \subset \mathbb{R}$ 和 $\{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_k\} \subset \mathbb{R}^d$，

$$\sum_{i,j=1}^{k} a_i a_j \varphi(\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\|) \geq 0.$$

我们用 $\varphi(\cdot;\boldsymbol{\lambda})$ 表示连续协方差函数的一个参数族，其中 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^p$ 是参数向量。此外，我们运用著名的 Schoenberg 定理（Schoenberg，1938年）：在任意维度 $d \in \mathbb{N}$ 上均有效的函数 φ，都可以唯一地表示为正有界测度的高斯尺度混合，即

$$\varphi(h;\boldsymbol{\lambda}) = \int_0^\infty \exp(-uh^2) G(\mathrm{d}u;\boldsymbol{\lambda}), \qquad h \geq 0,$$

其中 $\{G(\mathrm{d}\cdot;\boldsymbol{\lambda}) \;\; \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^p\}$ 是一个测度参数族，Daley 和 Porcu（2014年）将其称为 Schoenberg 测度。引言中列出的大多数协方差类，都可以表示为相对于勒贝格测度绝对连续的测度的积分，即

$$\varphi(h;\boldsymbol{\lambda}) = \int_0^\infty \exp(-uh^2) g(u;\boldsymbol{\lambda}) \mathrm{d}u, \qquad h \geq 0, \tag{2.1}$$

其中 $\{g(\cdot;\boldsymbol{\lambda}) \;\; \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^p\}$ 是一个非负函数参数族。本文始终将 g 称为混合函数。

现在我们介绍一些函数参数类的示例 φ，这些函数根据（2.1）确定。我们将特别关注 Mat´ern、柯西模型和广义柯西模型。其他示例，包括稳定模型和广义双曲模型，可参见 Yaglom（1987）、Barndorff-Nielsen（1978年）、Schlather（2010）以及 Porcu 等（2018b）。

示例 le 2.1 (Mat´ern)。这类协方差函数定义如下（Mat´ern，1986 ）

$$\varphi_{\mathcal{M}}(h;\boldsymbol{\lambda}) = \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} (h/\alpha)^\nu K_\nu(h/\alpha), \qquad h \geq 0, \tag{2.2}$$

其中，Γ 为伽马函数，K_ν 为第二类修正贝塞尔函数（Abramowit z
和 Stegun, 1972）。这里，$\boldsymbol{\lambda} = [\alpha, \nu]^\top$，其中 α 和 ν 是控制尺度（协方差随 h变化的衰减速率）和形状的正参数（2.2）。更确切地说，ν 控制随机场的均方可微性程度（ ν 值较大时，样本路径更平滑）（Stein, 1999）。当 $\boldsymbol{\lambda} = [\alpha, 1/2]^\top$时，（2.2）简化为指数模型 $\exp(-h/\alpha)$。另一方面，当 $\nu \to \infty$时，对（2.2）重新参数化后趋于高斯协方差函数，其定义为 $\exp(-h^2/\alpha)$。

例 2.2（柯西）。这类协方差函数由下式给出（Chil`es and Delfiner, 2012）

$$\varphi_{\mathcal{C}}(h; \boldsymbol{\lambda}) = \left(1 + h^2/\alpha\right)^{-\nu/2}, \qquad h \geq 0, \tag{2.3}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda} = [\alpha, \nu]^\top$。与 Mat´ern 模型一样，$\alpha > 0$ 是尺度参数。不过，与随距离呈指数衰减的 Mat´ern 模型不同（Stein, 1999），（2.3）呈多项式衰减，其衰减由 $\nu > 0$控制。当 $\nu \in (0,2)$ 时，这种多项式衰减与赫斯特参数相关。赫斯特参数用于衡量长期记忆，其定义为 $H = 1 - \nu/2$。

例 2.3（广义柯西）。这类协方差函数定义为（Gneiting and Schlather，2004 及其中的参考文献）

$$\varphi_{\mathcal{GC}}(h; \boldsymbol{\lambda}) = \left(1 + h^\delta/\alpha\right)^{-\nu/\delta}, \qquad h \geq 0, \tag{2.4}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda} = [\alpha, \nu, \delta]^\top$，其中 $\delta \in (0, 2]$，$\alpha > 0$ 且 $\nu > 0$。该广义类保留了式（2.3）的多项式衰减，但它更加灵活，因为分形维数可以通过 δ 任意调节（详见 Gneiting and Schlather，2004）。或许令人意外的是，该模型无法控制相应随机场的均方可微性，因为该模型在原点处要么不可微，要么无限次可微。

还可以通过更一般的混合形式得到其他协方差函数类

$$\varphi(h; \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\vartheta}) = \int_0^\infty \phi(h; u, \boldsymbol{\vartheta}) g(u; \boldsymbol{\lambda}) \mathrm{d}u, \qquad h \geq 0, \tag{2.5}$$

其中 $\phi(\cdot; u, \boldsymbol{\vartheta})$ 是任意协方差核，对每个 $u > 0$ 均成立，而 $\boldsymbol{\vartheta}$ 是一个参数向量。由于正定函数类是一个在逐点收敛拓扑下闭合的凸锥，若 ϕ 在 $\mathbb{R}^d$ 中对某个 $d \leq d'$ 是有效的（正定的），其中 $d' \in \mathbb{N}$，则 φ 在 $\mathbb{R}^d$ 中对 $d \leq d'$ 也有效。关于若干具体示例，请参阅 Emery 和 Lantu´ ejoul（2006）。

3 协方差函数的混合类

3.1 一般构造

在本研究中，我们提出了新的各向同性协方差函数参数类，$\widetilde{\varphi}(\cdot; \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\xi})$，其定义依据

$$\widetilde{\varphi}(h; \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\xi}) = \omega_1 \int_0^{\xi_1} \exp(-uh^2) g_1(u; \boldsymbol{\lambda}_1) \mathrm{d}u + \omega_2 \int_{\xi_2}^\infty \exp(-uh^2) g_2(u; \boldsymbol{\lambda}_2) \mathrm{d}u, \tag{3.1}$$

其中，g_1和 g_2分别是定义在 $[0, \xi_1)$ 和 $[\xi_2, \infty)$ 上的非负函数，$\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\lambda}_1^\top, \boldsymbol{\lambda}_2^\top]^\top$、$\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2]^\top$ 和 $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2]^\top$ 是参数向量，其中 ω_i，$\xi_i > 0$，对于 $i = 1$，2。换言之，

我们将公式（ g2.1）中的混合函数替换为一个分段定义的函数 $\widetilde{g}$ ，即:

$$\widetilde{g}(u;\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\xi}) = \omega_1\, g_1(u;\boldsymbol{\lambda}_1)1_{[0,\xi_1)}(u) + \omega_2\, g_2(u;\boldsymbol{\lambda}_2)1_{[\xi_2,\infty)}(u), \qquad u \geq 0, \tag{3.2}$$

其中， $1_A(\cdot)$ 表示集合 A的示性函数。请注意， $\widetilde{g}$ 可能存在不连续点，因为它是通过拼接两个独立部分构造而成的。如果函数 g_i 在各自的定义域上连续且有界，则直接应用控制收敛定理可知，所提出的协方差函数（3.1）在 $[0,\infty$上连续。在本文中，每个函数 g_i 都与一个连续概率密度函数正比例。因此，式（3.1）中提出的参数族属于通过式（2.1）定义的 Schoenberg 类。

一种更一般的构造是在混合的每个区段中采用不同的核函数，即，

$$\widetilde{\varphi}(h;\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\vartheta}) = \omega_1 \int_0^{\xi_1} \phi_1(h;u,\boldsymbol{\vartheta}_1)g_1(u;\boldsymbol{\lambda}_1)\mathrm{d}u + \omega_2 \int_{\xi_2}^{\infty} \phi_2(h;u,\boldsymbol{\vartheta}_2)g_2(u;\boldsymbol{\lambda}_2)\mathrm{d}u, \tag{3.3}$$

其中 $\boldsymbol{\vartheta} = [\boldsymbol{\vartheta}_1^\top, \boldsymbol{\vartheta}_2^\top]^\top$。如果 ϕ_i 是 $\mathbb{R}^d$ 中的有效协方差函数，适用于 $d \leq d_i'$，对于某个 $d_i' \in \mathbb{N}$， $i = 1$, 2，则当且仅当 $d \leq \min(d_1', d_2')$ 时， （3.3）才是 $\mathbb{R}^d$ 中的有效模型。（3.3）的连续性可通过沿用证明（3.1）连续性时所用的相同论证来说明。

备注 3.1。 下面指出一些关于这一方法的补充说明。

1. 当 $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ 时，该参数在两个表面上彼此无关的边际模型之间建立了连续桥梁。更准确地说，随着它从 0 增加到 ∞，我们逐渐从$\omega_2 \int_0^\infty \phi_2(h;\, u, \boldsymbol{\vartheta}_2)g_2(u;\, \boldsymbol{\lambda}_2)\mathrm{d}u$ 过渡到 $\omega_1 \int_0^\infty \phi_1(h;\, u, \boldsymbol{\vartheta}_1)g_1(u;\, \boldsymbol{\lambda}_1)\mathrm{d}u$。 2. 相反，当 $\xi_1 > \xi_2$ 时，在区间$[\xi_2, \xi_1)$内，边际结构发生叠加。当 $\xi_2 \to 0$ 且 $\xi_1 \to \infty$ 时，我们得到可能的最大叠加，这对应于边际模型的线性组合，即 $\omega_1 \int_0^\infty \phi_1(h;u, \boldsymbol{\vartheta}_1)g_1(u;\boldsymbol{\lambda}_1)\mathrm{d}u + \omega_2 \int_0^\infty \phi_2(h;\, u, \boldsymbol{\vartheta}_2)g_2(u;\, \boldsymbol{\lambda}_2)\mathrm{d}u$.

所提出的混合模型显然具有灵活性，这一点可由协方差函数局部和全局行为的经典理论加以证明。特别是，直接应用陶伯定理（Stein, 1999）可证明， $\widetilde{\varphi}$ 的均方可微性由 g_2决定。另一方面，结合 Gneiting and Schlather (2004) 中的公式 (4) 直接考察可知， $\widetilde{\varphi}$ 的长期行为由 g_1 决定。接下来的章节将通过示例说明，可以构造出代数闭式，从而实现所需的灵活性。

3.2 柯西-Mat´ern 混合类

我们介绍一种混合柯西-Mat´ern 模型，以下使用其缩写 $\mathcal{CM}$ 。该模型是 (3.1) 的一个特例。首先引入广义不完全伽马函数（Chaudhry 和 Zubair, 1994）：

$$\Gamma(a;b;c) = \int_b^\infty t^{a-1}\exp(-t - ct^{-1})\,\mathrm{d}t,$$

和下不完全伽马函数， $\gamma(a,b) = \Gamma(a;\, 0;0) - \Gamma(a;\, b;\, 0)$。

命题 3.1. 设 $\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\lambda}_1^\top, \boldsymbol{\lambda}_2^\top]^\top$，其中 $\boldsymbol{\lambda}_i = [\alpha_i, \nu_i]^\top$、 $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2]^\top$ 和 $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2]^\top$ 是元素均为正的向量。设

$$\widetilde{\varphi}_{\mathcal{CM}}(h;\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\xi}) = \omega_1\, \widetilde{\varphi}_{\mathcal{C}}^{(1)}(h;\boldsymbol{\lambda}_1,\xi_1) + \omega_2\, \widetilde{\varphi}_{\mathcal{M}}^{(2)}(h;\boldsymbol{\lambda}_2,\xi_2), \qquad h \geq 0, \tag{3.4}$$

其中

$$\widetilde{\varphi}_{\mathcal{C}}^{(1)}(h;\boldsymbol{\lambda}_1,\xi_1)=\frac{\gamma(\nu_1/2,(h^2+\alpha_1)\xi_1)}{\Gamma(\nu_1/2)}\varphi_{\mathcal{C}}(h;\boldsymbol{\lambda}_1) \tag{3.5}$$

and

$$\widetilde{\varphi}_{\mathcal{M}}^{(2)}(h;\boldsymbol{\lambda}_2,\xi_2)=\varphi_{\mathcal{M}}(h;\boldsymbol{\lambda}_2)-\frac{1}{\Gamma(\nu_2)}\Gamma\left(\nu_2;\frac{1}{4\xi_2\alpha_2^2};\frac{h^2}{4\alpha_2^2}\right), \tag{3.6}$$

其中 $\varphi_{\mathcal{M}}$ 和 $\varphi_{\mathcal{C}}$ 分别为在´（2.2）和（2.3）中定义的 Maternern 和柯西模型。于是， $\widetilde{\varphi}_{\mathcal{CM}}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中对所有 $d\in\mathbb{N}$均为正定。

证明 3.1。 我们给出一种构造性证明，即证明 $\widetilde{\varphi}_{\mathcal{CM}}$ 可表示为（3.1），其中 $g_1(u;\ \boldsymbol{\lambda}_1)=g_{\mathcal{C}}(u;\ \boldsymbol{\lambda}_1)$ 和 $g_2(u;\ \boldsymbol{\lambda}_2)=g_{\mathcal{M}}(u;\ \boldsymbol{\lambda}_2)$，其中 $g_{\mathcal{C}}$ 和 $g_{\mathcal{M}}$ 分别定义如下

$$g_{\mathcal{C}}(u;\boldsymbol{\lambda}_1)=\frac{\alpha_1^{\nu_1/2}}{\Gamma(\nu_1/2)}u^{\nu_1/2-1}\exp\left(-\alpha_1 u\right), \tag{3.7}$$

and

$$g_{\mathcal{M}}(u;\boldsymbol{\lambda}_2)=\frac{1}{\Gamma(\nu_2)}\left(\frac{1}{2\alpha_2}\right)^{2\nu_2}u^{-\nu_2-1}\exp\left(-\frac{1}{4u\alpha_2^2}\right), \tag{3.8}$$

其中，两种情形下的所有参数均为正。为得到 $\widetilde{\varphi}_{\mathcal{C}}^{(1)}$ 的解析表达式，我们注意到

$$\begin{aligned}\int_0^{\xi_1}\exp(-uh^2)g_{\mathcal{C}}(u;\boldsymbol{\lambda}_1)\mathrm{d}u &= \varphi_{\mathcal{C}}(h;\boldsymbol{\lambda}_1)\int_0^{\xi_1}\frac{(h^2+\alpha_1)^{\nu_1/2}}{\Gamma(\nu_1/2)}u^{\nu_1/2-1}\exp(-(h^2+\alpha_1)u)\mathrm{d}u\\ &= \varphi_{\mathcal{C}}(h;\boldsymbol{\lambda}_1)\frac{\gamma(\nu_1/2,(h^2+\alpha_1)\xi_1)}{\Gamma(\nu_1/2)},\end{aligned}$$

其中，第二个等号是因为第一行右侧的积分等于参数为$h^2+\alpha_1$ 和 $\nu_1/2$的伽马随机变量的累积分布函数。

为得到 $\widetilde{\varphi}_{\mathcal{M}}^{(2)}$ 的表达式，我们调用 Alegr´ıa 等人（2021）中的公式（10），于是

$$\int_0^{\xi_2}\exp(-uh^2)g_{\mathcal{M}}(u;\boldsymbol{\lambda}_2)\mathrm{d}u=\frac{1}{\Gamma(\nu_2)}\Gamma\left(\nu_2;\frac{1}{4\xi_2\alpha_2^2};\frac{h^2}{4\alpha_2^2}\right). \tag{3.9}$$

因此，调用 Gradshteyn 和 Ryzhik（2007）中的公式 3.471.9 可得函数 $\widetilde{\varphi}_{\mathcal{M}}^{(2)}$，其中有 $\int_0^{\infty}\exp(-uh^2)g_{\mathcal{M}}(u;\boldsymbol{\lambda}_2)\mathrm{d}u=\varphi_{\mathcal{M}}(h;\boldsymbol{\lambda}_2)$。 □

当 $\nu_2=n+1/2$ 时，对于某个 $n\in\mathbb{N}$， （3.6）可以用第一类和第二类互补误差函数及修正贝塞尔函数表示。关于这些特殊情形的更详细研究，请参阅 Alegr´ıa 等人（2021）。

现在通过以下结果来说明所提出结构的灵活性，其中我们采用记号 $f_1(h)\sim f_2(h)$，$h\to\infty$，表示对于某个正常数 c_0，渐近关系 $\lim_{h\to\infty}f_1(h)/f_2(h)=c_0$ 成立。

命题 3.2。 设 Z 是一个协方差函数具有形式（3.4）的高斯随机场。那么， Z 是 κ阶均方可微的，当且仅当 $\nu_2>\kappa\geq 0$。此外，还有$\widetilde{\varphi}_{\mathcal{CM}}(h;\ \boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\xi})\sim h^{-\nu_1}$， $h\to\infty$. 因此，与 Z相关联的赫斯特参数仅由参数 ν_1决定。

证明 3.2。 Stein (1999) 第 2 章中的论证表明，协方差函数为 φ 的各向同性随机场 κ阶均方可微，当且仅当 $\varphi^{(2\kappa)}(0;\boldsymbol{\lambda})$ 存在且有限。直接检查并结合对所用 Schoenberg 表示（2.1）应用控制收敛可知，当且仅当混合函数 g 满足

$$\int_0^\infty u^\kappa g(u;\boldsymbol{\lambda})\mathrm{d}u < \infty. \tag{3.10}$$

我们对函数的特殊情形采用后一种论证 $\widetilde{\varphi}_{\mathcal{CM}}$；此时，所得混合函数的尾部由与 $\varphi^{(2)}_{\mathcal{M}}$ 相关联的混合函数唯一确定，正如命题 3.1 所述。直接检验可知，式（3.10）成立当且仅当 $\nu_2 > \kappa$。至此，命题的第一部分得证。

对于第二部分，注意到式（3.5）的渐近行为为 $h^{-\nu_1}$，当 $h \to \infty$ 时，因为该方程中涉及的下不完全伽马函数趋于 $\Gamma(\nu_1/2)$，而参数为ν_1 的 Cauchy 类按 $h^{-\nu_1}$衰减。注意到式（3.6）受传统 Mat´ern 模型支配，而后者呈指数衰减，即可得出结论。 □

总之，混合 Cauchy-Mat´ern 模型能够刻画相关高斯随机场的均方可微性和长期行为。我们还注意到，这些性质分别由两个参数 ν_1 和 ν_2刻画，因此这两个参数在统计上可识别，并能够将局部和全局性质解耦。

从统计学视角来看，可以通过设定 $\omega_1 = \omega_2 = \omega$、$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ 和 $\xi_1 = \xi_2 = \xi$，选取一个简约形式。因此，命题3.1 给出了一个五参数族，其中 ω 表示方差，α 表示尺度，ν_2 表示均方可微性，ν_1 表示 Hurst 效应，而 ξ 则是一个用于平衡该模型所涉及边际结构形状的参数。因此，(3.4) 将 Mat´ern 模型推广为允许多项式衰减，同时能够连续地刻画均方可微性。

图3.1 展示了不同´取值下的简约混合柯西-Mat ξern 模型。图中还给出了传统 Mat´ern 模型、传统 Cauchy 模型及其平均值（这些也都是混合构造的特例），以供比较。注意，根据 $\nu_2 = 1/2$ 或 $\nu_2 = 3/2$的取值，曲线在原点附近呈线性衰减或抛物线衰减；随后，根据 ν_1的取值，曲线在较大距离处呈现更缓慢的衰减（多项式速率），这与局部和全局模式共存的情况相符。我们观察到，ξ 会显著影响协方差函数的形状，因为它能产生一些有趣的形式（凹性的明显变化），在实际应用中可能很有用。

3.3 混合空穴效应 Mat´ern 类

现在，我们介绍一类混合协方差函数，它具有 Mat´ern 类型的局部特征，并在距离较远时取负值。我们用缩写 $\mathcal{HM}$ 来称呼这一模型，即混合空穴效应 Mat´ern。所提出的类别源自混合式（3.3），其中 ϕ_1 的选取方式使得所得模型可以取负值。

命题 3.3。 设 $\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\lambda}_1^\top, \boldsymbol{\lambda}_2^\top]^\top$ 为具有正元素的向量，$\boldsymbol{\lambda}_i = [\alpha_i, \nu_i]^\top$、$\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2]^\top$ 和 $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2]^\top$ 也为具有正元素的向量，且 $\boldsymbol{\vartheta} = [\tau, \eta]^\top$ 为附加参数向量。设

$$\widetilde{\varphi}_{\mathcal{HM}}(h;\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\vartheta}) = \omega_1\,\widetilde{\varphi}^{(1)}_{\mathcal{H}}(h;\boldsymbol{\lambda}_1,\xi_1,\boldsymbol{\vartheta}) + \omega_2\,\widetilde{\varphi}^{(2)}_{\mathcal{M}}(h;\boldsymbol{\lambda}_2,\xi_2), \qquad h \geq 0, \tag{3.11}$$

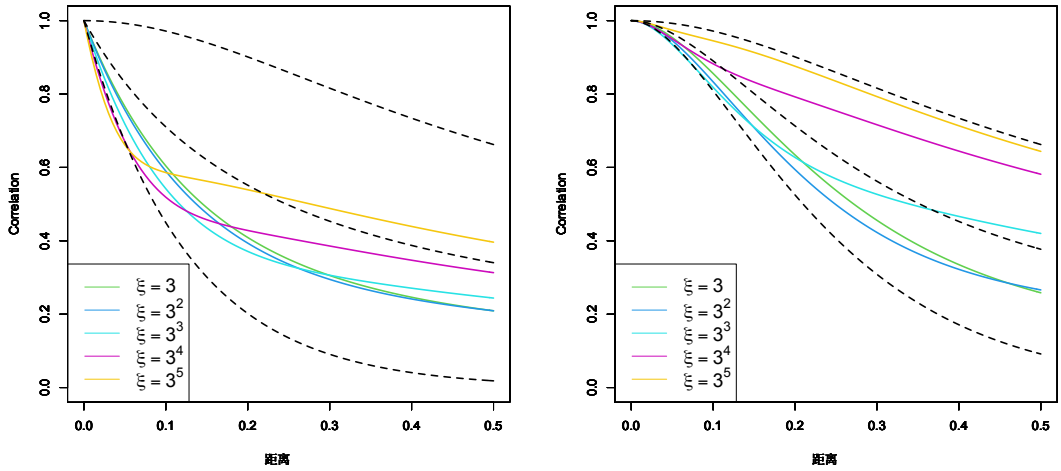


图 3.1：针对 $\omega = 1/2$、$\alpha = 1/8$、$\nu_1 = 3/4$ 和不同 ξ 值的简约混合柯西-Mat´ern 模型。（左）$\nu_2 = 1/2$；（右）$\nu_2 = 3/2$。虚线表示纯柯西模型、纯 Mat´ern 模型及二者的平均值。所有模型均经过适当重标度，以获得相关函数。

其中

$$\widetilde{\varphi}^{(1)}_{\mathcal{H}}(h;\boldsymbol{\lambda}_1,\xi_1,\boldsymbol{\vartheta}) = \frac{\tau}{\Gamma(\nu_1)}\Gamma\left(\nu_1;\frac{1}{4\xi_1\alpha_1^2};\frac{\eta h^2}{4\alpha_1^2}\right) - \frac{1}{\Gamma(\nu_1)}\Gamma\left(\nu_1;\frac{1}{4\xi_1\alpha_1^2};\frac{h^2}{4\alpha_1^2}\right), \tag{3.12}$$

和 $\widetilde{\varphi}_{(2)\mathcal{M}}$ 如 (3.6) 中所示。于是，$\widetilde{\varphi}_{\mathcal{H}\mathcal{M}}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上是正定的，当且仅当 $1 < \eta < \tau^{2/d}$。

证明 3.3。我们考虑构造（3.3），其中 g_1 和 g_2 均具有（3.8）的形式，且 ϕ_2 为高斯型。因此，推导 $\widetilde{\varphi}^{(2)}_{\mathcal{M}}$ 时采用的论证与命题 3.1的证明相同。

在推导（3.12）之前，我们先引入以下引理，它结合了 Posa（2022）中的推论 4、8 和 11。

引理 3.1。映射 $h \mapsto A\exp(-ah^2) - B\exp(-bh^2)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中正定，当且仅当

$$1 < \frac{a}{b} < \left(\frac{A}{B}\right)^{2/d}. \tag{3.13}$$

尽管 Posa（2022）关注的是维度 $d \leq 3$，同一证明也可用于任意维度。为得到表达式（3.12），我们在尺度混合的第一部分中取以下协方差核

$$\phi_1(h;u,\boldsymbol{\vartheta}) = \tau\exp(-u\eta h^2) - \exp(-uh^2), \qquad h \geq 0. \tag{3.14}$$

引理 3.1 保证（3.14）在 $\mathbb{R}^d$中为正定，前提是 $u > 0$ 且 $1 < \eta < \tau^{2/d}$。因此，

$$\widetilde{\varphi}^{(1)}_{\mathcal{H}}(h;\boldsymbol{\lambda}_1,\xi_1,\boldsymbol{\vartheta}) = \tau\int_0^{\xi_1}\exp(-u\eta h^2)g_{\mathcal{M}}(u;\boldsymbol{\lambda}_1)\mathrm{d}u - \int_0^{\xi_1}\exp(-uh^2)g_{\mathcal{M}}(u;\boldsymbol{\lambda}_1)\mathrm{d}u. \tag{3.15}$$

最后，我们调用恒等式（3.9），并将其应用于等式（3.15）右侧涉及的每个积分。

□

协方差函数（3.14）始终取负值（Posa, 2022），因此它是构造具有空穴效应的混合模型的天然构件。 $\boldsymbol{\vartheta}$ 中的参数决定了空穴效应的尖锐程度。更具体地说，随着 η 趋近于 $\tau^{2/d}$，空穴效应会更加显著，因为（3.14）右侧的正项所占比重降低。此外，当 $d=1$时，对 η的条件限制最少，所得空穴效应也更为明显。众所周知，随着维数增加，显著负相关的可能性会逐渐消失（例如，参见 Stein, 1999 第 45 页）。

下一个命题刻画了（3.11）的局部属性，并给出了该模型的一个下界。

命题 3.4。 设 Z 是一个高斯随机场，其协方差函数具有（3.11）的形式。那么， Z 是 κ次均方可微，当且仅当 $\nu_2 > \kappa \geq 0$。此外，我们有下界

$$\widetilde{\varphi}_{\mathcal{HM}}(h;\ \boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\vartheta}) \geq \omega_1(\tau\eta)^{-1/(\eta-1)} \left(\begin{array}{c} 1-\eta \\ \eta \end{array}\right) \left(1 - \frac{\gamma(\nu_1;\ \alpha_1/\xi_1)\,\Gamma(\nu_1)}{\qquad\qquad}\right), \qquad h \geq 0. \tag{3.16}$$

证明 3.4。 这一事实 ν_2 控制着均方可微性，这直接源于命题 3.2证明中所用的论证。另一方面，为了找到一个下界，我们注意到

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_{\mathcal{HM}}(h;\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\vartheta}) &\geq \omega_1 \inf_{h\geq 0} \widetilde{\varphi}^{(1)}_{\mathcal{H}}(h;\boldsymbol{\lambda}_1,\xi_1,\boldsymbol{\vartheta}) + \omega_2 \inf_{h\geq 0} \widetilde{\varphi}^{(2)}_{\mathcal{M}}(h;\boldsymbol{\lambda}_2,\xi_2) \\ &= \omega_1 \int_0^{\xi_1} \inf_{h\geq 0} \phi_1(h;u,\boldsymbol{\vartheta}) g_1(u;\boldsymbol{\lambda}_1)\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

经过直接计算可知， ϕ_1在 $h^* = \sqrt{\log(\tau\eta)\,u(\eta-1)}$ 处达到最小值。因此，

$$\phi_1(h;u,\boldsymbol{\vartheta}) \geq \phi_1(h^*;u,\boldsymbol{\vartheta}) = \tau\exp\left(-\frac{\eta\log(\tau\eta)}{\eta-1}\right) - \exp\left(-\frac{\log(\tau\eta)}{\eta-1}\right) = (\tau\eta)^{-1/(\eta-1)}\left(\frac{1-\eta}{\eta}\right).$$

由于 g_1 由式（3.8）给出，我们调用逆伽马随机变量的累积分布函数公式来证明

$$\int_0^{\xi_1} g_1(u;\boldsymbol{\lambda}_1)\mathrm{d}u = 1 - \frac{\gamma(\nu_1;\alpha_1/\xi_1)}{\Gamma(\nu_1)}.$$

证明完毕。

□

注意，当 $\xi_1 \to \infty$ （即空穴效应占主导地位时），式（3.16）中的下界下降至（$\tau\eta$）$^{-1/(\eta-1)}($ $1-\eta)/\eta$。相反，当 $\xi_1 \to 0$ 时，该下界增大至零，也就是说，空穴效应变得可以忽略，这并不令人意外，因为在这种情况下，Mat´ern 类占主导地位。在极限情形 $\eta \to 1$下也可以得到类似结论。

该模型的简约变体可取 $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ （方差参数）、 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ （尺度参数）和 $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ （光滑度参数），而 $\boldsymbol{\vartheta}$ 控制空穴效应（如上所述）， $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ 的解释则与混合柯西-Mat´ern 模型中的类似。

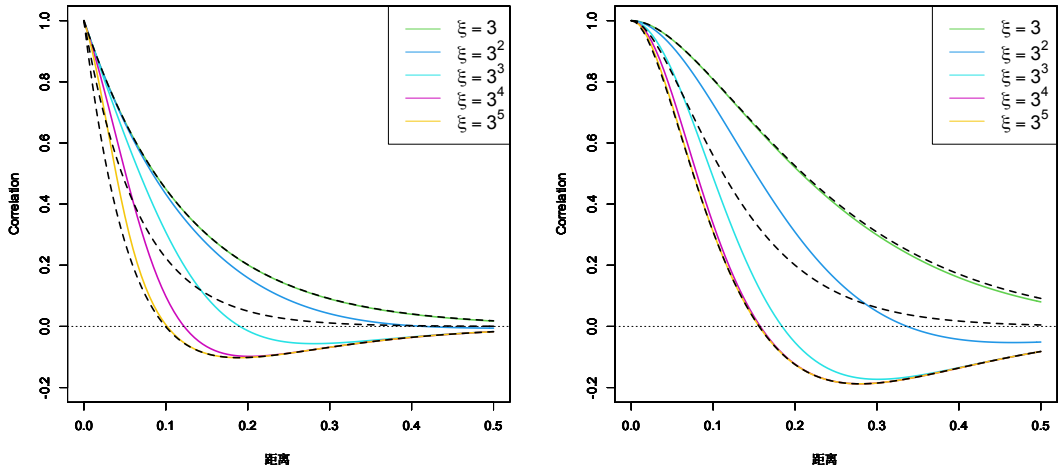


图 3.2：一维中简约的混合 Hole-Effect-Mat´ern 模型，参数为 $\omega = 1/2$， $\alpha = 1/8$，$\tau = 2$，$\eta = 7/2$ 以及不同的 ξ取值。（左） $\nu = 1/2$ 和（右） $\nu = 3/2$。虚线表示备注3.1中给出的极限情形。所有模型均经过适当的重新缩放，以得到相关函数。

图 3.2 展示了不同 ´取值下的简约混合空穴效应-Mat ξern 模型。备注 3.1 中描述的极限情形也一并给出，方式与图 3.1类似。可以看到，负值与原点处不同程度的光滑性并存，正如预期。

4 数值实验

4.1 模拟数据

我们开展模拟研究，以评估存在混合协方差结构时最大似然推断的性能。我们重点研究简约的混合柯西-Mat´ern依赖结构，因为下一节将把它应用于真实数据。我们考虑 $\omega = 1$、$\alpha = 1/8$、$\nu_1 = 3/4$ 以及 $[\nu_2, \xi]$的以下情景：(a) $[1/2, 40]$，(b) $[1/2, 120]$，(c) $[3/2, 40]$ 和(d) $[3/2, 120]$。对于每种情景，我们在正方形 $[0, 3]^2$ 内均匀采样的100个点上模拟高斯随机场的200次独立实现，并通过最大似然法估计参数。随后，我们将实验在256个空间位置上重复进行。我们只估计ω 、 α 和 ξ，而 ν_1 和 ν_2 固定不变，这在地质统计学中是常见做法。我们不直接估计 ξ，而是采用以下替代参数化：$\xi = \sqrt{\xi\alpha}$；根据方程(3.5)和(3.6)，这似乎是自然的选择。

图4.1 展示了结果。估计值近似无偏，并且样本量从 100 增至 256 时，方差随之减小，这符合预期。在情景（c）和（d）中，估计值的变异性显著降低，即随机场更加平滑时，其变异性会显著降低；这是此类情形下基于似然的估计的典型特征（Bevilacqua 和 Gaetan，2015）。相反，随着 ξ 从 40 增至 120，这种变异性会增大。图4.2 展示了在情景（b）下，随机场的一次实现中，对数似然随 ξ 和 α变化的情况，其中 ω固定。尽管该曲面具有明确的最大值，但目标函数沿 ξ方向显然较为平坦。这或许可以解释变异性增大的原因

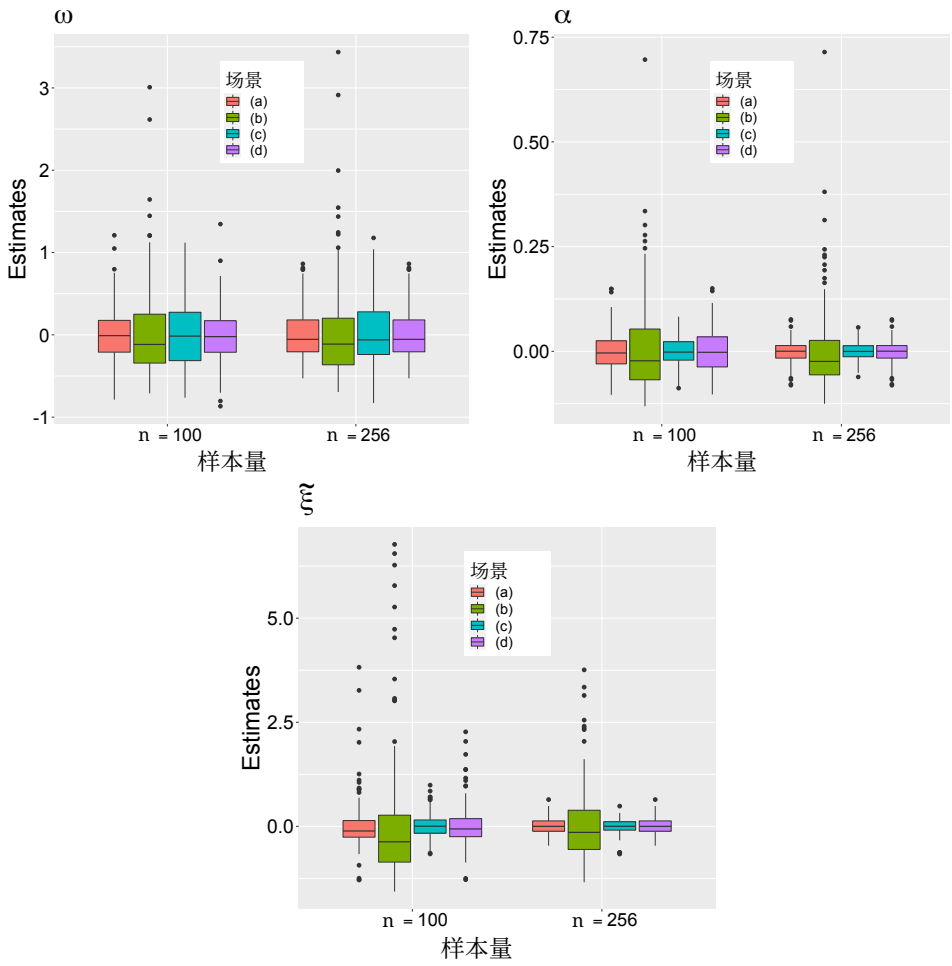


图 4.1：情景 (a)-(d) 中简约混合柯西-Mat´ern 模型最大似然估计的居中箱线图。

与情景（a）和（c）相比，情景（b）和（d）中的变异性更大。尽管有上述几点需要注意，总体而言，各情景下的估计值似乎都较为合理，且未观察到可识别性问题。

现在，我们通过交叉验证分析来考察所提出类别的预测性能。根据上述情景 (a)-(d)，我们在 $[0,3]^2$ 中的100个均匀采样位置模拟200次独立实现。我们采用留一预测策略，通过均方误差 (MSE)、平均绝对误差 (MAE)、对数评分 (LSCORE) 和连续排序概率评分 (CRPS) 评估准确性（参见 Zhang 和Wang，2010）。这些指标的值越小，表示预测效果越好。我们以广义柯西类为基准，评估混合柯西-Mat´ern 模型的性能。因此，对于每次实现，我们使用两种模型估计参数，并通过简单克里金法进行预测。广义柯西模型（2.4）增加了一个乘法参数 ω，即 $h \mapsto \omega(1+h^{\delta}/\alpha)^{-\nu/\delta}$，因此其参数化形式为 ω 和 α，以及 $\nu = 3/4$和 $\delta = 1$，2 固定。

表4.1 显示，在每个场景中，所提出的混合模型都优于其竞争模型。在情景 (c) 和 (d) 中，所有交叉验证得分都大幅下降。通过这项简要研究，我们发现，当真实的底层协方差具有混合结构时，错误地设定

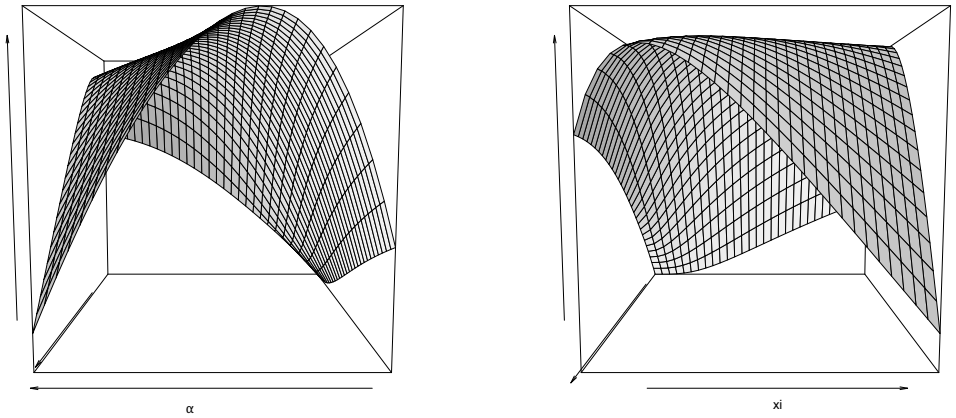


图4.2：情景（b）下关于 α 和 ξ的对数似然函数。左右两个面板是同一图形从不同视角呈现的结果。

空间关联会对后验预测产生负面影响。由于各向同性协方差函数在原点附近的行为对预测质量有重大影响（Stein, 1999），我们的模拟实验表明，在某些情况下，其他颇具吸引力的现有结构无法复现所提出模型的局部形状。

4.2 真实数据示例

可采资源的估算是现代采矿过程中一项至关重要的任务。从经济角度来看，对这类资源进行可靠评估至关重要；评估矿产资源的长期可用性及其对社会的影响也离不开这项工作。我们考察了哥伦比亚一处采用露天矿开采的红土型镍矿床数据集，其中包含镍、铁、铬、氧化铝、氧化镁和二氧化硅品位的测量值。

本研究关注海拔约 120 米处的镍浓度，该处有 199 个不规则间隔的观测值。我们先进行对数变换以减小偏度，再减去样本均值。所得数值近似服从高斯分布。图4.4左侧面板展示了变换后的数据集。我们拟合了两个协方差$\tilde{}$模型：前者是简约的混合柯西-Mat´ern 模型，其参数化形式为 ω, α 和 ξ，其中 $\nu_1 = 1/4$ 和 $\nu_2 = 1/2$固定；后者是广义柯西模型，按第 4.1 节中的方式进行参数化，其中 $\nu = 1/4$ 和 $\delta = 0.95$固定。固定参数的取值是在若干次试验后选定的，并考虑了样本协方差的局部特征（见图 4.3）。

表4.2 报告了似然估计、相应的标准误以及赤池信息准则（AIC）。我们观察到，混合柯西-Mat´ern 模型在 AIC 方面优于其竞争模型。图 4.3 显示，拟合的协方差模型似乎与样本协方差相当接近。拟合模型在原点附近（距离小于 3 米）存在显著差异，因为混合模型衰减得更快。相反，在较大距离处，混合模型衰减得更慢，不过当距离超过 15 米时，曲线之间的差异变得很小。

表4.1：情景（a）至（d）中简约混合柯西-马特´恩模型与广义柯西（ $\delta = 1,\ 2$）模型的交叉验证得分。

情景	模型	MSE	平均绝对误差	对数评分	连续排序概率得分
(a)	混合柯西-马特´恩	0.706	0.668	1.231	1.773
	广义柯西（$\delta = 1$）	0.714	0.672	1.238	1.787
	广义柯西（$\delta = 2$）	0.718	0.674	1.241	1.798
(b)	混合柯西-Mat´ern	0.480	0.549	1.034	1.462
	广义柯西（$\delta = 1$）	0.489	0.555	1.046	1.480
	广义柯西（$\delta = 2$）	0.497	0.559	1.055	1.506
(c)	混合柯西-Mat´ern	0.172	0.316	0.398	0.840
	广义柯西（$\delta = 1$）	0.176	0.319	0.446	0.851
	广义柯西（$\delta = 2$）	0.176	0.319	0.414	0.862
(d)	混合柯西-Mat´ern	0.075	0.210	0.024	0.561
	广义柯西（$\delta = 1$）	0.077	0.213	0.052	0.575
	广义柯西（$\delta = 2$）	0.082	0.219	0.103	0.612

表4.2：拟合协方差模型的参数估计值和赤池信息准则（AIC）。括号内为标准误。

模型	ω	α	$\widetilde{\xi}$	AIC
混合柯西-Mat´ern	1.055	12.31	0.063	−34.03
	(0.2516)	(2.801)	(0.042)	
广义柯西	0.164	1.959	−	−31.93
	(0.040)	(0.849)	−	

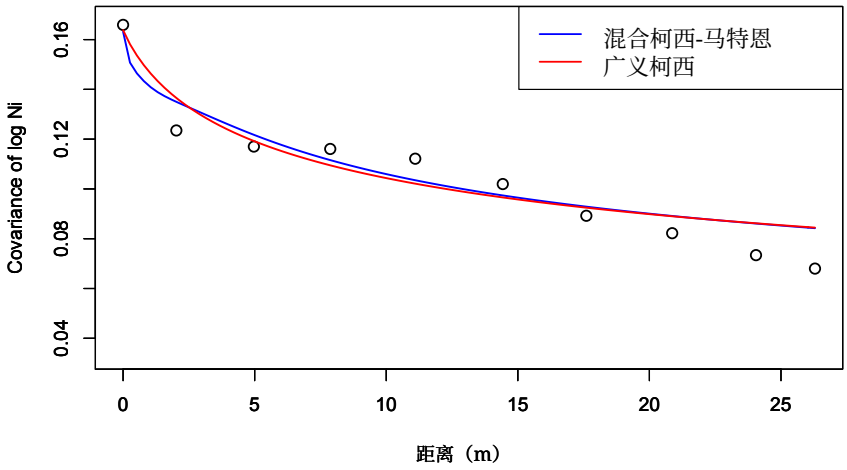


图4.3：镍浓度对数的样本协方差（圆圈）和模型协方差（实线）。

表4.3：镍浓度对数的留一交叉验证研究得分。

模型	MSE	平均绝对误差	对数评分	连续排序概率得分
混合柯西-Mat´ern	0.0428	0.1431	−0.1840	0.4113
广义柯西	0.0443	0.1462	−0.1677	0.4159

为了比较各模型的预测性能，我们以与模拟数据实验类似的方式进行了交叉验证研究。表4.3基于留一交叉验证方案的结果表明，对于这一特定数据集，混合模型的表现更好。从百分比来看，均方误差提升了约3。4%。差异最大的是对数评分（提升约9%）。

本节最后通过一幅镍浓度对数的降尺度地图（见图4.4），展示混合柯西- Mat´ern 模型。通过简单克里金法得到的插值空间地图，展示在约 1 米的空间网格上（7500 个位置）。这一克里金估计表面可用于小规模采矿过程，因为它是工业勘探和矿产储量量化的重要步骤。

5 结论与展望

我们提出了一种简单的形式化方法，用于构建复杂的协方差函数参数族。我们重点研究了 Mat´ern 模型与柯西模型的组合，其中局部性质（均方可微性）和全局性质（长记忆）共存于同一个参数族中。我们还通过构建一个在短距离下表现为 Mat´ern 类、在大距离下取负值的模型，展示了该方法的应用。模拟研究表明，简约的混合柯西-Mat´ern 模型具有统计可识别的参数。此外，当存在混合内在依赖结构时，与现有模型相比，该模型在预测性能方面也有所提升，

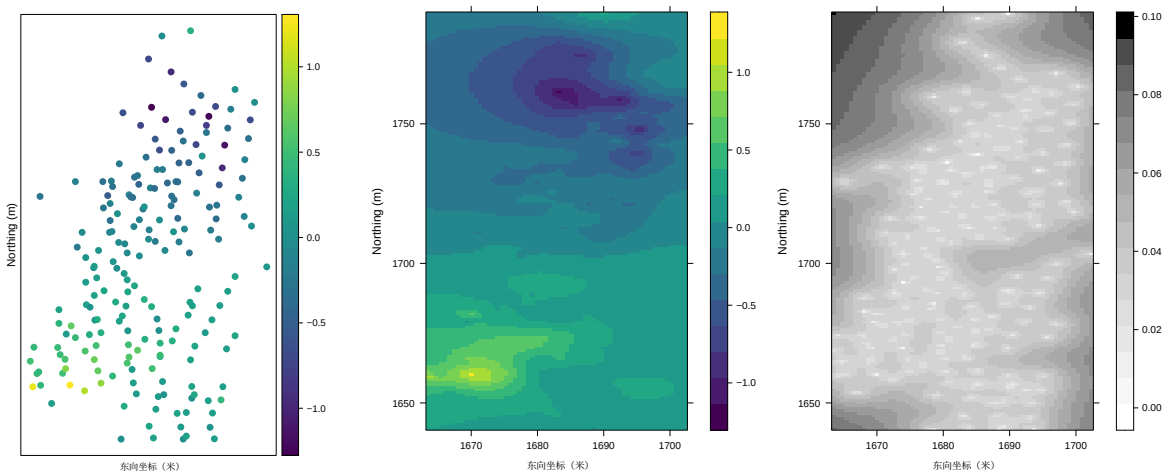


图4.4：镍浓度对数（左）、克里金估计表面（中）及相应的方差（右）。

将该方法应用于采矿数据集时，我们也得出了类似结论。为求简洁明了，我们没有对混合 Hole-Effect-Mat´ern 模型开展类似的数值研究。未来的研究可以进一步探讨这项工作的其他有趣拓展。下面给出两条可能由这项工作引出的具体研究方向。

多元混合协方差模型

在许多实际情形中，会同时记录两个或更多变量。因此，我们的研究结果可以推广到多元场的情形 $\{\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = (Z_1(\mathbf{s}) \dots, Z_p(\mathbf{s}))^\top, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^d\}$，其具有各向同性矩阵值协方差函数 $\Phi: [0, \infty) \to \mathbb{R}^{p\times p}$，即 $\mathrm{cov}[Z_i(\mathbf{s}) \; Z_j(\mathbf{s}')] = \Phi_{ij}(h), h \geq 0$，其中 $h = \|\mathbf{s} - \mathbf{s}'\|$ 和 $i, j = 1, \dots, p$。我们提出混合模型

$$\widetilde{\Phi}(h; \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\xi}) = \omega_1 \int_0^{\xi_1} \exp(-uh^2)\mathbf{G}_1(u; \boldsymbol{\lambda}_1)\mathrm{d}u + \omega_2 \int_{\xi_2}^{\infty} \exp(-uh^2)\mathbf{G}_2(u; \boldsymbol{\lambda}_2)\mathrm{d}u,$$

这是对（3.1）的推广，其中参数向量 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 必须以这样的方式选取，使得 $p\times p$矩阵$\mathbf{G}_i(u; \boldsymbol{\lambda}_i)$ 对每个固定的 $u \geq 0$均为半正定。因此，直接应用~Porcu和Zastavnyi（2011）的命题4即可确保 Φ为半正定。多元混合柯西–Mat´ern协方差函数是一个自然的候选方案。Gneiting等（2010）以及 Moreva和Schlather（2022）的研究有助于应对这一挑战。类似地，也可以推导出公式（3.3）的多元版本。

球面上的混合协方差模型

对于以 d 维单位球面 $\mathbb{S}^d$ 为索引的随机场，在分析全球数据时这是一种有用的框架（$\mathbb{S}^2$ 用作地球的近似），各向同性假设表示为 $\mathrm{cov}[Z(\mathbf{s}) \; Z(\mathbf{s}')] = \psi(\theta)$，$\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in \mathbb{S}^d$，其中 $\psi: [0, \pi] \to \mathbb{R}$ 是连续映射，且$\theta = \arccos(\mathbf{s}^\top\mathbf{s}') \in [0, \pi]$ 是测地距离。Schoenberg刻画（Schoenberg，1942）证明，参数化各向同性协方差函数 $\psi(; \boldsymbol{\lambda})$ 在任意维度 d 上均有效，当且仅当

当且仅当它可以写成 $\psi(\theta;\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \beta_\ell(\boldsymbol{\lambda})(\cos\,\theta)^\ell$, $\theta \in [0,\pi]$ 的形式，其中 $\{\beta_\ell(\boldsymbol{\lambda})\}_{\ell=0}^{\infty}$ 是某个非负且可求和的参数序列。因此，通过考虑如下形式的修正序列，可以将混合模型应用于球面情境

$$\widetilde{\beta}_\ell(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\xi}) = \omega_1\,\beta_\ell^{(1)}(\boldsymbol{\lambda}_1)1_{[0,\lfloor\xi_1\rfloor)}(\ell) + \omega_2\,\beta_\ell^{(2)}(\boldsymbol{\lambda}_2)1_{[\lfloor\xi_2\rfloor,\infty)}(\ell), \qquad \ell = 0,1,\ldots,$$

其中 $\lfloor\xi_i\rfloor \geq 0$，当 $i = 1$时，2，其中 $\lfloor\cdot\rfloor$ 表示向下取整函数，而 $\beta_\ell^{(i)}$ 是一个非负可求和序列。球面索引随机场的局部性质及其与协方差函数的联系，已在以往文献中得到研究（Bingham, 1973；Guinness 和 Fuentes，2016）。然而，在这种场景下，长记忆等全局性质较不直观，因为空间域是一个紧集。对于低维球面，可通过调整公式（3.3）获得具有空穴效应的协方差函数。

致谢

Alfredo Alegr´ıa 得到了智利国家研究与发展署资助的部分支持，资助项目为 ANID/FONDECYT/INICIACI ´ON/No. 11190686。Fabi´an Ramirez 得到了圣玛丽亚技术大学研究生院与项目部（DPP）的部分支持。Emilio Porcu 获哈利法大学科学与技术学院资助，项目编号为 FSU-2021-016。

参考文献

Abramowitz, M. 和 Stegun, I. A. (1972). 带公式、图表和数学表格的数学函数手册. 多佛出版社。Alegr´ıa, A. (2020). 球面上双变量各向同性随机场的交叉协方差函数中的交叉凹陷。*Stat*, 9(1):e301. Alegr´ıa, A., Emery, X. 和 Porcu, E. (2021). 带有交叉凹陷的双变量 Mat´ern 协方差，用于区域化变量建模。空间统计学, 41:100491. Barndorff-Nielsen, O. (1978). 双曲分布与双曲线上的分布。斯堪的纳维亚统计学杂志, 5(3):151–157. Barp, A., Oates, C. J., Porcu, E. 和 Girolami, M. (2022). 一种黎曼–Stein 核方法。伯努利, 28(4):2181–2208. Berg, C., Mateu, J. 和 Porcu, E. (2008). 各向同性相关函数的 Dagum 族。伯努利, 14(4):1134–1149. Bevilacqua, M., Caama˜no-Carrillo, C. 和 Porcu, E. (2022). 统一空间统计学中的紧支撑协方差函数与 Mat´ern 协方差函数。多元分析杂志, 189:104949. Bevilacqua, M. 和 Gaetan, C. (2015). 比较基于成对数据的复合似然方法在空间高斯随机场中的表现。统计与计算, 25(5):877–892. Bingham, N. H. (1973). 球面上的正定函数。剑桥哲学会会刊, 73:145–156. Chaudhry, M. A. 和 Zubair, S. M. (1994). 广义不完全伽马函数及其应用。计算与应用数学杂志, 55(1):99–123.

Chen, W., Castruccio, S., Genton, M. G. 和 Crippa, P. (2018). 沙特阿拉伯风能潜力的当前估计与未来预测。地球物理研究杂志：大气, 123(12):6443–6459. Chil`es, J.-P. 和 Delfiner, P. (2012). 地质统计学：空间不确定性建模，第二版. John Wiley & Sons. Cockayne, J., Oates, C. J., Sullivan, T. J. 和 Girolami, M. (2019). 贝叶斯概率数值方法。*SIAM*评论, 61(4):756–789. Cressie, N. (1993). 空间数据统计学. Wiley, 纽约，修订版。Cressie, N. 和 Kornak, J. (2003). 存在位置误差时的空间统计学及其在环境遥感中的应用。统计科学, 18(4):436–456. Daley, D. 和 Porcu, E. (2014). 维度步进与 Schoenberg 谱测度。美国数学会会刊, 142(5):1813–1824. Di Lorenzo, E., Combes, V., Keister, J., Strub, P., Andrew, T., Peter, F., Marck, O., Furtado, J. ., Bracco, A., Bograd, S., Peterson, W., Schwing, F., Taguchi, B., Horm´azabal, S. 和 Parada, C. (2014). 太平洋气候与生态系统动态综述。海洋学, 26(4):68–81. Edwards, M., Castruccio, S. 和 Hammerling, D. (2019). 用于气候集合的多变量全球时空随机生成器。农业、生物与环境科学杂志. Emery, X. 和 Lantu´ejoul, C. (2006). Tbsim：一种通过转向带法对三维高斯随机场进行条件模拟的计算机程序。计算机与地球科学, 32(10):1615–1628. Emery, X. 和 S´eguret, S. A. (2020). 采矿业地质统计学：斑岩铜矿床的应用. CRC出版社。Furrer, R., Genton, M. G. 和 Nychka, D. (2006). 大型空间数据集插值的协方差截尾。计算与图形统计学杂志, 15(3):502–523. Furrer, R., Sain, S. R., Nychka, D. 和 Meehl, G. A. (2007). 大气—海洋环流模式的多变量贝叶斯分析。环境与生态统计学, 14(3):249–266. Gneiting, T., Kleiber, W. 和 Schlather, M. (2010). 多变量随机场的 Mat´ern 交叉协方差函数。美国统计学会杂志, 105:1167–1177. Gneiting, T. 和 Schlather, M. (2004). 将分形维数与 Hurst 效应分离的随机模型。*SIAM*评论, 46(2):269–282. Gradshteyn, I. 和 Ryzhik, I. (2007). 积分、级数与乘积表. 学术出版社，阿姆斯特丹，第7版。Guinness, J. 和 Fuentes, M. (2016). 球面上的各向同性协方差函数：若干性质与建模考量。多元分析杂志, 143:143–152. Guinness, J. 和 Hammerling, D. (2018). 气候模型输出的压缩与条件仿真。美国统计学会杂志, 113(521):56–67. Hristopulos, D. T. (2020). 用于空间数据建模的随机场. 施普林格。

James, G., Witten, D., Hastie, T. 和 Tibshirani, R.（2013）。统计学习导论，第112卷。施普林格。Kaufman, C. G., Schervish, M. J. 和 Nychka, D. W.（2008）。针对大型空间数据集似然估计的协方差截尾。《美国统计学会杂志》，103(484)：1545–1555。Laga, I. 和 Kleiber, W.（2017）。修正的 Mat´ern 过程。*Stat*，6(1)：241–247。Ma, P. 和 Bhadra, A.（2022）。超越 Mat´ern：关于一类可解释的合流超几何协方差函数。《美国统计学会杂志》，（即将发表）。Mat´ern, B.（1986）。空间变异——随机模型及其在森林调查和其他抽样调查若干问题中的应用。施普林格。Moreva, O. 和 Schlather, M.（2022）。P´olya 型双变量协方差函数。《多元分析杂志》，即将发表。Ostoja-Starzewski, M.（2006）。材料空间随机性：从统计描述到代表性体积单元。概率工程力学，21(2)：112–132。Pazouki, M. 和 Schaback, R.（2011）。基于核的空间的基。计算与应用数学杂志，236(4)：575–588。Porcu, E., Alegria, A. 和 Furrer, R.（2018a）。时变且具有空间全局依赖性的数据建模。国际统计评论，86(2)：344–377。Porcu, E., Bevilacqua, M. 和 Hering, A. S.（2018b）。用于双变量高斯随机场的 Shkarofsky-Gneiting 类协方差模型。*Stat*，7(1)：e207。Porcu, E. 和 Zastavnyi, V.（2011）。与向量值随机场相关的若干类协方差函数的刻画定理。《多元分析杂志》，102(9)：1293–1301。Posa, D.（2022）。各向同性协方差函数的特殊类别。预印本，*Research Square*。Schaback, R. 和 Wendland, H.（2006）。核技术：从机器学习到无网格方法。数值学报，15：543–639。Schlather, M.（2010）。基于正态尺度混合的若干协方差模型。伯努利，16(3)：780–797。Schlather, M. 和 Moreva, O.（2017）。一种介于有界变差函数与无界变差函数之间的参数模型。*Stat*，6(1)：47–52。Schoenberg, I. J.（1938）。度量空间与完全单调函数。数学年刊，39(4)：811–841。Schoenberg, I. J.（1942）。球面上的正定函数。杜克数学杂志，9(1)：96–108。Stein, M. L.（1999）。空间数据的统计插值：克里金法的一些理论。施普林格，纽约。Stein, M. L.（2007）。全球尺度总柱臭氧的空间变异。应用统计年刊，1(1)：191–210。

Yaglom, A. M.（1987）。平稳及相关随机函数的相关理论，第*I*卷：基本结果，第131卷。施普林格。

Zhang, H. 和 Wang, Y.（2010）。海量空间数据的克里金法与交叉验证。环境计量学，21(3-4):290–304。