arXiv:2301.05613v1 [math.GR] 13 Jan 2023

特征 2 的域上稳定线性群的初等等价

E. I. Bunina*、A. V. Mikhalev、I. O. Solovyev†

2023年1月16日

本文证明了特征为 2 的域上稳定线性群初等等价的一个判据。

1 引言、历史与定义

1.1 初等等价。

具有相同签名的两个结构，如果它们满足该签名下相同的一阶句子，就称为初等等价。具有相同签名的任意两个有限结构初等等价，当且仅当它们同构。任意两个同构的结构都初等等价，但反过来并不总是成立。例如，复数域 $\mathbb{C}$ 和代数数域 $\overline{\mathbb{Q}}$初等等价，但由于它们的基数不同，二者不可能同构。

Tarski 和 Maltsev 开创了从初等等价的角度描述群和环的理论。由此得出了一些完整的结果：例如，两个代数闭域初等等价，当且仅当它们具有相同的特征；两个阿贝尔群初等等价，当且仅当它们具有相同的特殊“特征数”（Szmielew，[26]）；对于布尔环，也得到了具有不变量的类似结果（Ershov–Tarski，[17]）。

一项杰出的成果是解答了 A. Tarski 在 1945年左右提出的一个古老问题：对于自由群，初等理论无法区分这些群（参见 Kharlampovich–Myasnikov 和 Z. Sela 的系列著作，例如 [20], [23]）。无挠双曲群也有类似情况（参见 Sela，[24]）。

*巴伊兰大学（以色列），数学系

†M.V. Lomonosov 莫斯科国立大学，力学与数学系

1.2 线性群的 Maltsev 型定理。

研究某些基本结构的逻辑性质与由这些基本结构导出的结构的逻辑性质之间的联系，也很有意思。

这类结果最早由 Maltsev 于1961年在 [21] 中得到。他证明，群 $\mathcal{G}_n(K_1)$ 和 $\mathcal{G}_m(K_2)$（其中 $G =$ GL、SL、PGL、PSL， n、$m \geqslant 3$、 K_1、 K_2 均为特征为0的域）初等等价，当且仅当 $m = n$，且域 K_1 和 K_2 初等等价。

这种对应关系通常称为 Maltsev 翻译。这意味着逻辑性质可以在基本结构与导出结构之间完全地双向转换。

1961年至1971年，Keisler（[19]）和 Shelah（[25]）证明了下述重要的同构定理:

定理 1. 两个模型 $\mathcal{U}_1$ 和 $\mathcal{U}_2$ 初等等价，当且仅当存在一个超滤子 $\mathcal{F}$，使得它们的超幂相同:

$$\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{U}_1 \cong \prod_{\mathcal{F}} \mathcal{U}_2.$$

1992年，Beidar 和 Mikhalev（见 [2]）将马尔采夫定理推广到 K_1 和 K_2 分别为斜域和素结合环的情形。关于群 GL$_n$ 的这一方法在 [3] 中通过下述结果得到了推广:

定理 2. 设 R_1 和 R_2 是带 1 的结合环（$1/2$），具有有限多个中心幂等元，且 $m, n \geqslant 4$（$m, n \geqslant 3$）。那么，GL$_m(R_1) \equiv$ GL $_n(R_2)$ 当且仅当存在中心幂等元 $e \in R$ 和 $f \in S$，使得 $eM_m(R) \equiv fM_n(S)$ 且 $(1-e)M_m(R) \equiv (1-f)M_n(S)^{op}$。

Bunina 于 1998年至2010年发表的论文延续了这一领域的研究。类似 Maltsev 的结果不仅适用于经典线性群 GL、PGL、SL、PSL，也适用于域、斜域和带对合的环上的酉线性群（见 [6], [7]），域上的 Chevalley群（[8]）、局部环上的 Chevalley群（见 [9]）以及任意交换环上的 Chevalley群（见 [10]），还适用于其他各种派生结构。

在某些情况下，派生结构（即使与线性群只有些许相似）的初等等价，并不等同于初始结构之间的初等等价，而是等同于更强的等价。二阶等价或其某些局限性常常会出现。

例如，2000年，V. Tolstykh [28] 阐述了斜域的二阶性质与其上无限维线性空间的自同构群的一阶性质之间的联系。2003年，E. I. Bunina 和 A. V. Mikhalev（见 [11]）阐述了结合环的二阶性质与这些环上的模范畴、自同态环、自同构群及无限秩射影空间的初等性质之间的联系。对于阿贝尔 p-群的自同态环和自同构群，也得到了类似结果：Bunina、Mikhalev 和 Roizner（见 [?]）证明，对于 $p \geqslant 3$，两个阿贝尔 p-群的自同态环或两个阿贝尔 p-群的自同构群初等等价，当且仅当初始阿贝尔群在完全二阶逻辑下等价（一个例外情形下则是在其限制意义下等价）。

1.3 稳定线性群

设 R 是一个含单位元的结合环。以下定义与 [18]相对应。

定义 1. 记 $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ 为由行数和列数可数的矩阵构成的环，这些矩阵在主对角线之外只有有限个非零元素，并且还存在一个数 n，使得对于任意 $i \geqslant n$，元素 $r_{ii} = a$、 $a \in R$。

显然，$\mathrm{Mat}_\infty(R)$ 是一个环。

设 $A \in \mathrm{GL}_n(R)$。我们按照以下规则将 A 与 $\mathrm{GL}_n(R)$ 中的一个元素对应起来： A 写在左上角，从位置（n， n）开始，对角线上为 1，其余位置均为 0。

对于得到的子群 $\mathrm{Mat}_\infty(R)$，我们仍用 $\mathrm{GL}_n(R)$ 表示。显然，$\mathrm{GL}_n(R)$ 是环 $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ 的可逆元素群的子群；并且显然，对于 $m \geq n$，有 $\mathrm{GL}_n(R) \subseteq \mathrm{GL}_m(R)$。

定义 2. 令

$$\mathrm{GL}(R) = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathrm{GL}_n(R) \qquad (\mathrm{GL}_n(R) \subseteq \mathrm{Mat}_\infty(R)).$$

它是环 $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ 的可逆元素群的一个子群。我们称之为稳定线性群。

关于稳定线性群的自同构已有描述：Atkarkaya 描述了交换局部环 R with 1/2 上稳定线性群 E(R) 和 GL(R) 的自同构（见 [1]）。

在我们先前的论文中（见 [13]），我们证明，尽管稳定群的维数是“无限”的，但任意两个带单位元的环初等等价，就能推出它们上的稳定线性群初等等价，也就是说，我们不需要高阶逻辑。在同一篇论文中，我们证明了，若交换局部环（含 1/2）上的稳定线性群初等等价，则相应的环也初等等价。

在本文中，我们将这一先前结果推广到特征 2 的域上的稳定线性群。

2 主定理的证明

考虑群 $\mathrm{GL}(R)$，其中 R 是特征 2 的域。我们用 E 表示它的单位元。为使公式更简单，我们将用 $A \sim B$ 代替 $\exists U\ A = UBU^{-1}$，并称 A 与 B 共轭。

我们的首要目标是初等地定义一个与群 $\mathrm{GL}_2(R)$ 同构的子群。我们将使用对角矩阵 $[1, 1, T]$，其中

$$T \sim \mathrm{diag}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots\right]$$

证明的第一部分依赖于该域中三次单位根的存在。

2.1 含有三次单位根的域

设 K 是一个特征 2 的域，其中包含三次单位根 1、ξ、ξ^2。

例如， [5] 中证明了以下引理；它可由经典线性代数的结果推出。

引理 1. 对于群 $\mathrm{GL}_n(K)$ 中任意多个互相交换的三阶元素，都存在一个基，使它们全都具有对角形式，且对角线上为三次单位根。

显然，对于有限个互相交换的矩阵，在稳定线性群 $\mathrm{GL}(K)$ 中也满足同样的条件。

设 A 是一个矩阵集合。用 $|||A|||$ 表示 A 的不同共轭类的数量。

引理 2. 考虑 K 中由 $D = [d_1, d_2, d_3, \ldots, d_k]$ 构成的一个集合。若 D 包含 $[\xi, \xi]$ 或 $[\xi, \xi^2]$，则 $|||\{AB\colon\ A \sim$ 对角矩阵 $[D],\ B \sim$ 对角矩阵 $[D],\ AB = BA\}||| > 2$。

证明。为了证明这个引理，只需考虑一对元素 d_i，因为其他元素可以固定在最前面的位置。同样，只需考虑对角元素的置换。

首先考虑 D 包含 $[\xi, \xi]$ 的情形。我们假设这些元素分别对应于 d_{k-1}、d_k。前 $k-2$ 个元素保持不变，经过乘法后，它们给出相同的特征值集合。我们可以得到以下矩阵：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{diag}\,[1,1,\xi,\xi]\cdot\mathrm{diag}\,[\xi,\xi,1,1] = \mathrm{diag}\,[\xi,\xi,\xi,\xi],\\
&\mathrm{diag}\,[1,1,\xi,\xi]\cdot\mathrm{diag}\,[\xi,1,\xi,1] = \mathrm{diag}\,[\xi,1,\xi^2,\xi],\\
&\mathrm{diag}\,[1,1,\xi,\xi]\cdot\mathrm{diag}\,[1,1,\xi,\xi] = \mathrm{diag}\,[1,1,\xi^2,\xi^2].
\end{aligned}$$

为便于阅读，我们省略了元素 d_1、d_2、d_3、.....、d_{k-2} 以及稳定矩阵末尾的单位元。所有这些矩阵的特征值集合都不同，因此它们两两不共轭。

如果 D 包含 $[\xi, \xi^2]$，那么

$$\begin{aligned}
&\mathrm{diag}\,[1,1,\xi,\xi^2]\cdot\mathrm{diag}\,[1,1,\xi,\xi^2] = \mathrm{diag}\,[1,1,\xi^2,\xi],\\
&\mathrm{diag}\,[1,1,\xi,\xi^2]\cdot\mathrm{diag}\,[\xi,\xi^2,1,1] = \mathrm{diag}\,[\xi,\xi^2,\xi,\xi^2],\\
&\mathrm{diag}\,[1,1,\xi,\xi^2]\cdot\mathrm{diag}\,[1,\xi^2,\xi,1] = \mathrm{diag}\,[1,\xi^2,\xi^2,\xi^2],
\end{aligned}$$

情形相同。 □

由这两个引理可得以下引理：

引理3. 设 $A^3 = E$。若 $|||\{BC\colon\ B \sim A, C \sim A, CB = BC\}||| = 2$，则 $A \sim$ 对角矩阵 $[\xi]$ （或 $A \sim$ 对角矩阵 $[\xi^2]$）。

这个引理给出了一种初等定义与 $\mathrm{diag}\,[\xi]$ 和 $\mathrm{diag}\,[\xi^2]$ 之一共轭的矩阵的方法。

$$\begin{aligned}
\varphi(A) := \exists X_1 \exists X_2 \exists Y_1 \exists Y_2 \forall Z_1 \forall Z_2\ &(A^3 = E) \wedge \neg(A = E) \wedge\\
&\wedge (X_1 \sim X_2 \sim Y_1 \sim Y_2 \sim A) \wedge (X_1X_2 = X_2X_1) \wedge (Y_1Y_2 = Y_2Y_1) \wedge\\
&\wedge \Big(\big((Z_1 \sim A) \wedge (Z_2 \sim A) \wedge (Z_1Z_2 = Z_2Z_1)\big) \to \big((Z_1Z_2 \sim Y_1Y_2) \vee (Z_1Z_2 \sim X_1X_2)\big)\Big)
\end{aligned} \tag{1}$$

假设这个公式对 A 成立。设 $A \sim \mathrm{diag}\,[\xi]$。通过替换记号 $\xi^2 \to \xi'$、$\xi \to \xi'^2$，可以得到相应结果。于是 $A^2 \sim \mathrm{diag}\ [\xi^2]$。

考虑公式

$$\psi(B) := \exists X_1 \exists X_2 (X_1 \sim A) \wedge (X_2 \sim A^2) \wedge (X_1 X_2 = X_2 X_1) \wedge (X_1 X_2 = B) \wedge \neg\varphi(B).$$

如果该公式对 B 成立，那么 $B \sim$ 对角矩阵 $[\xi, \xi^2]$。

设 $X_1 \sim X_2 \sim A$； $X_1 X_2 = X_2 X_1$。我们可以假设选取了一个基，使得$X_1 =$ 对角矩阵 $[\xi, 1, \ldots]$，$X_2 =$ 对角矩阵 $[1, \xi, \ldots]$。

考虑公式

$$\theta(C) := (CX_1 = X_1 C) \wedge (CX_2 = X_2 C) \wedge (C \sim B) \wedge \bigwedge_i \neg\varphi(BX_i) \wedge \bigwedge_i \neg\varphi(BX_i^2).$$

如果该公式对 $C = (c_{ij})$ 成立，那么由于 c 与 X_i 交换，$i = 1$、2，我们有$c_{1j} = c_{i1} = 0$、i、$j > 1$；$c_{2j} = c_{i2} = 0$、i、$j > 2$。C的阶为 3，因此 $c_{11}^3 = 1$、$c_{22}^3 = 1$。假设 $c_{11} \neq 1$。那么要么 $c_{11} = \xi$，要么 $c_{11} = \xi^2$。不失一般性，假设$c_{11} = \xi$。那么，公式 φ 对 CX_1成立，这与 θ的定义矛盾。因此 $c_{11} = 1$，类似地 $c_{22} = 1$。那么 $C =$ 对角矩阵 $[1, 1, T]$，其中 $T \sim$ 对角矩阵 $[\xi, \xi^2]$。

引理4. 对角矩阵
$[\xi, \xi^2] \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

证明。为证明此引理，我们需要求出该矩阵的特征值。其特征多项式为 $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$。将 ξ 代入特征多项式，得到$P(\xi) = \xi^2 + \xi + 1$。注意到 $P(\xi) = \xi P(\xi)$，因此

$$P(\xi) + \xi P(\xi) = 0 \Rightarrow P(\xi)(1 + \xi) = 0 \Rightarrow P(\xi) = 0,$$

对于 ξ^2，同理。因此 ξ (和 ξ^2) 是特征多项式的根。 □

2.2 不含三次单位根的域

设 K 是一个特征为 2 的域，且不含非平凡的三次单位根。

引理5. 对于 $\mathrm{GL}_n(K)$ 中任意有限个两两可交换的 3 阶元素，存在一个基，使它们全都具有分块对角形式，且其对角线上为 $E_{11} + E_{12} + E_{21}$、$E_{22} + E_{12} + E_{21}$ 和 $E_{11} + E_{22}$。

这个引理在 [5] 中针对来自 GL_n 的元素得到了证明，但显然对群 GL 也成立。

记 $T = E_{11} + E_{12} + E_{21}$ 和 $D_k =$ 对角矩阵 $[\underbrace{T, T, \ldots, T, T}_{k}, 1, \ldots]$

引理 6. 若 $k > 1$，则 $|||\{AB : A \sim D_k, B \sim D_k, AB = BA, A, B \in \mathrm{GL}(K)\}||| > 3$。

证明。只需考虑 A 的分块对角形式中存在的两个块 T。通过置换这两个块，我们可以得到

$$\begin{aligned}
\operatorname{diag}[E,E,T,T]\cdot\operatorname{diag}[T,T,E,E]&=\operatorname{diag}[T,T,T,T],\\
\operatorname{diag}[E,E,T,T]\cdot\operatorname{diag}[E,E,T^2,T^2]&=\operatorname{diag}[E,E,E,E],\\
\operatorname{diag}[E,E,T,T]\cdot\operatorname{diag}[E,E,T,T]&=\operatorname{diag}[E,E,T^2,T^2],\\
\operatorname{diag}[E,E,T^2,T]\cdot\operatorname{diag}[E,T,T^2,E]&=\operatorname{diag}[E,T,T,T],
\end{aligned}$$

其中 E 是 2×2 阶单位矩阵。由引理4可知，$T^2\sim T$。 □

该引理给出了一个公式，当且仅当 $A\sim D_1$ 时，该公式对矩阵 A 成立：

$$\begin{aligned}
\varphi'(A):=\ &\exists X_1\exists X_2\exists Y_1\exists Y_2\forall Z_1\forall Z_2\ (A^3=E)\wedge\neg(A=E)\wedge\\
&\wedge(X_1\sim X_2\sim Y_1\sim Y_2\sim A)\wedge(X_1X_2=X_2X_1)\wedge(Y_1Y_2=Y_2Y_1)\wedge\\
&\wedge\Big(\big((Z_1\sim A)\wedge(Z_2\sim A)\wedge(Z_1Z_2=Z_2Z_1)\big)\rightarrow\\
&\rightarrow\big((Z_1Z_2\sim X_1X_2)\vee(Z_1Z_2\sim Y_1Y_2)\vee(Z_1Z_2\sim E)\big)\Big).
\end{aligned}\tag{2}$$

引理 7. 设 $A=$ (a_{ij}) 与

$$G_k=\operatorname{diag}[\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k-1},T,1,1\ldots],\ \textit{where } k\geqslant 1.$$

Then

1. 若 $j+1<k$ 或 $k+1<j$，则

$$\begin{pmatrix}a_{j,k}&a_{j,k+1}\\a_{j+1,k}&a_{j+1,k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

2. 若 $j+1<k$ 或 $k+1<j$，则

$$\begin{pmatrix}a_{k,j}&a_{k,j+1}\\a_{k+1,j}&a_{k+1,j+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix}a_{k,k}&a_{k,k+1}\\a_{k+1,k}&a_{k+1,k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\b&a+b\end{pmatrix},$$

对某些 a、b。

证明。（1）假设 A 与 G_k 交换，且 $B=(b_{ij})=AG_k=G_kA$。考虑

$$\begin{pmatrix}b_{j,k}&b_{j,k+1}\\b_{j+1,k}&b_{j+1,k+1}\end{pmatrix}.$$

当从左侧将 G_k 乘以 A 时:

$$\begin{pmatrix} b_{j,k} & b_{j,k+1} \\ b_{j+1,k} & b_{j+1,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{j,k} & a_{j,k+1} \\ a_{j+1,k} & a_{j+1,k+1} \end{pmatrix}.$$

当 A 从右侧乘以 G_k 时:

$$\begin{pmatrix} b_{j,k} & b_{j,k+1} \\ b_{j+1,k} & b_{j+1,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{j,k} + a_{j,k+1} & a_{j,k} \\ a_{j+1,k} + a_{j+1,k+1} & a_{j+1,k} \end{pmatrix}.$$

于是:

$$\begin{pmatrix} a_{j,k} & a_{j,k+1} \\ a_{j+1,k} & a_{j+1,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{j,k} + a_{j,k+1} & a_{j,k} \\ a_{j+1,k} + a_{j+1,k+1} & a_{j+1,k} \end{pmatrix}.$$

由两个矩阵左列相等可得 $a_{j,\ k+1} = a_{j+1,\ k+1} = 0$。但由两个矩阵右列相等可知，其余所有元素也都等于零。命题 (2) 的证明与命题 (1) 完全相同。

(3) 我们有

$$\begin{pmatrix} a_{k,k} + a_{k+1,k} & a_{k,k+1} + a_{k+1,k+1} \\ a_{k,k} & a_{k,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k,k} + a_{k,k+1} & a_{k,k} \\ a_{k+1,k} + a_{k+1,k+1} & a_{k+1,k} \end{pmatrix}.$$

定义 $b := a_{k,\ k+1} = a_{k+1,\ k}$, $a := a_{kk}$, 则 $a_{k+1,\ k+1} = a + b$。 □

设 X 是满足公式 φ' 的矩阵。考虑公式

$$\theta'(C) := (CX = XC) \wedge (C \sim X) \wedge (CX \neq E) \wedge (CX^2 \neq E).$$

设 C 是一个满足 $\theta'(C)$ 的矩阵。固定一个基，使得 X 具有形式 G_1。由引理 7 可得 $c_{1j} = c_{i1} = 0$、$c_{2j} = c_{i2} = 0$、i、$j > 2$。此外，我们还有

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix}$$

and

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

or

$$\begin{pmatrix} a^3 + ab^2 + b^3 & a^2b + ab^2 \\ a^2b + ab^2 & a^3 + a^2b + b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由此可得 $a^2b + ab^2 = ab(a+b) = 0$。$K$ 中没有零因子，因此有三种可能的情况:

1. $b = 0$。那么 $a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$。
2. $a = 0$。那么 $b^3 = 1 \Rightarrow b = 1$。
3. $a = b$. Then $a^3 + ab^2 + b^3 = 1 \Rightarrow a^3 + a^3 + a^3 = 1 \Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow a = b = 1$.

第一种情况对应单位矩阵。第二种和第三种情况分别对应 $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = T$ 和 $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = T^2$。

由于公式 θ'，这两种情况都不可能成立，因为这样的 C 乘以 X 或 X^2 会得到单位矩阵。

因此我们证明了 C 具有对角矩阵 $[1, 1, T']$ 的形式，其中 $T' \sim D_1$。

2.3 GL $_2(K)$ 的初等可定义性与主定理

假设公式 θ 仅对对角矩阵 $[1,1,T]$ 成立，其中 $T \sim \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$。我们用这些矩阵来确定 GL $_2(K)$。

注意，公式 θ 对 $G_k, k > 2$ 成立。若 M 与 $G_{2k+1}, k =$1, 2, 3, . . . 交换，则 $M =$ 为对角矩阵 $[M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, \ldots, M_k]$，其中 $M_0 \in$ GL $_2(K)$，且 $M_i = \begin{pmatrix}a_i & b_i\\ b_i & a_i + b_i\end{pmatrix}, i > 0$。

若 M 还与 $G_{2k+2}, k =$ 1, 2, 3, . . . 交换，则 $M =$ 为对角矩阵 $[M_0, a_1, M_1', M_2', M_3', M_4', \ldots, M_{k'}']$，其中 $M_i' = \begin{pmatrix}a_i' & b_i'\\ b_i' & a_i' + b'_i\end{pmatrix}$。比较 M 的不同表示的分块结构，我们得到

$$M = \operatorname{diag}[M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, \ldots, M_k] = \operatorname{diag}[M_0, a_1, M_1', M_2', M_3', M_4', \ldots, M_{k'}'].$$

因此 $b_i = b_i' = 0$, $a_i = a_i'$ 和 $a_i' = a_{i+1}$。由此可知，对于每个 i，都有 $a_i = a_{i+1}$。根据稳定线性群的定义，对角线上只有有限个非单位元。因此 $a_i = 1$。

Ther因此，我们得到一个公式，它定义了一个与 GL $_2(K$同构的子群):

$$\gamma(M) = \forall C\Big(\theta(C) \to (MC = CM)\Big).$$

现在我们可以证明本文的主定理了。

定理 1. 设 K_1 和 K_2 是特征为 2 的域。若稳定线性群 GL (K_1) 和 GL (K_2) 初等等价，则域 K_1 和 K_2 也初等等价。

证明. 设 GL $(K_1) \equiv$ GL (K_2)。由于我们在前述引理中证明了，当域的特征为 2 时，子群 GL $_2$ 可在 GL 中初等定义，这意味着 GL $_2(K_1) \equiv$GL $_2(K_2)$。根据 Maltsev 定理的推广（例如在 [4] 中证明的推广），这意味着$K_1 \equiv K_2$。 □

参考文献

[1] A.S. Atkarskaya. 含 1/2 的交换局部环上稳定线性群的自同构.《数学科学杂志》，2014年，197，455–466。

[2] C. I. Beidar, A. V. Mikhalev，关于线性群初等等价的马尔采夫定理。Contemporary mathematics，1992年，131(1)，29–35。

[3] Bragin V., Bunina E. 具有有限个中心幂等元的环上以及布尔环上线性群的初等等价.《数学科学杂志》，201，2014年，438–445。

[4] E. I. Bunina、A. V. Mikhalev 和 A. G. Pinus，《经典泛代数的初等及其他相对逻辑等价》。MCCME，2015年。

[5] Bunina E.I., Kalesova A.A.: Chevalley 等价性。Journal of Algebra, 2019, 237, 387–409。[6] E. I. Bunina，域上酉线性群的初等等价。Fundam. Prikl. Mat.，1998，4(4)，1265–1278。[7] E. I. Bunina，环与域上酉线性群的初等等价。Russ. Math. Surv.，1998，53(2)，137–138。[8] E. I. Bunina，域上 Chevalley 群的初等等价。J. Math. Sci.，2001，56(1)，157–158。[9] E. I. Bunina，局部环上 Chevalley 群的初等等价。Sb. Math.，2010，201(3)，3–20。[10] E. I. Bunina，交换环上 Chevalley 群的同构与初等等价。Sbornik: Mathematics，2019，210(8)，1067–1091。[11] Bunina E.I.，Mikhalev A.V.，环上模范畴、自同态环及模的自同构群的初等等价。J. Math. Sci.，2006，137(6)，5275–5335。[12] Bunina E.I.，Mikhalev A.V.，Roizner M.A.，阿贝尔 p 群的自同构群与自同态环初等等价的判据。Dokl. Ross. Akad. Nauk，2014，457(1)，11–12。[13] E. I. Bunina，A. V. Mikhalev，I. O. Solovyev，含有 1/2 的局部交换环上稳定线性群的初等等价。《数学科学杂志》，2018，233(5)，646–655。[14] Chang C.，Keisler H.《模型论》。North Holland，1990。[15] Golubchik. I.Z.，一般线性群 $\mathrm{GL}_n(R)$，$n \geqslant 4$在结合环上的同构。Contemporary mathematics，1992，131，123–137。[16] Golubchik I.Z.，Mikhalev A.V.，结合环上一般线性群的同构。Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1 Mat. Mekh.，1983，3，61–72（俄文）。[17] Goncharov S.，可数布尔代数与可判定性。新西伯利亚：Science books，1996（俄文）。[18] Hahn A.J.，O’Meara O.T.《经典群与 K 理论》。Springer-Verlag，柏林，纽约，1989，565页。[19] Keisler H.J.，超积与初等模型。Indagationes Mathematicae，1961，23，477–495。[20] Kharlampovich O.，Myasnikov A.，自由非阿贝尔群的初等理论。Journal of Algebra，302，2006，451–552。

[21] Maltsev A.I.，线性群的初等性质。数学与力学问题，新西伯利亚，1961（俄文）。[22] Maltsev A.I.，无限群的同构矩阵表示。Rec. Math. [Mat. Sbornik] 8(50)，1940年，405–422（俄文，附英文摘要）。[23] Sela Z.，群上的丢番图几何。VI. 自由群的初等理论。几何与泛函分析，16(3)，2016年，707–730。[24] Sela Z.，群上的丢番图几何与自由群和双曲群的初等理论。载于《国际数学家大会论文集》，第 II 卷（北京，2002），87–92页，北京，2002。[25] Shelah S.，任意两个初等等价的模型都有同构的超幂。以色列数学杂志，1971年，10，224–233。[26]Szmielew W.，阿贝尔群的初等性质。数学基础，41，1955年，203–271。[27] Stephenson W.，模之间的格同构。伦敦数学会会刊，1969年，1，177–188。[28] Tolstykh V.，无限维经典群的初等等价。纯粹与应用逻辑年刊，2000年，105，103–156。