arXiv:2301.05661v2 [math.LO] 6 Nov 2023

格扩张的无选择对偶：应用于带否定算子的逻辑

Chrysafis (Takis)
Hartonas 色萨利大学数字系
统系，希腊hartonas@uth.gr

摘要

近期，研究者已为某些基于格的代数提出构造性对偶；Holliday 和 Bezhanishvili 也勾勒了一个相关计划，旨在为其他代数类 [...] 建立“无选择空间对偶，从而为非经典逻辑提供无选择完备性证明”。

本文提出一种完成 Holliday-Bezhanishvili 计划的方法（以统一方式适用于任意正规格扩张）。具体做法是，以无选择的方式重新表述作者近期关于关系表示和对偶性的结果。这些结果针对带拟算子的格的一般表示与对偶问题，将 BAO 的 J´onsson-Tarski 方法以及 Dunn 随后针对分配广义伽罗瓦逻辑提出的方法，推广到了无需假设分配性的情形。为作说明，我们将这一框架应用于具有某种形式的（拟）补算子的格（及其逻辑），在关系框架中得到对应结果和典范扩张，并为具有最小拟补或伽罗瓦拟补的格，以及对合格，建立无选择对偶；其中包括德摩根代数，也包括作为特例的正交格和布尔代数。

1 引言

1.1 背景与动机

近期，Holliday 和 Bezhanishvili 为布尔代数提出了无选择对偶 [4], ；MacDonald 和 Yamamoto 为正交格提出了无选择对偶 [43], ； Bezhanishvili、Dmitrieva、de Groot 和 Moraschini 为模态格提出了无选择对偶 [3] ；Massas 则为德弗里斯代数提出了无选择对偶 [42]。这些工作都是一项研究计划的一部分。Holliday 和 Bezhanishvili 概述了该计划，旨在为其他代数类 [...]建立无选择空间对偶，从而为非经典逻辑提供无选择完备性证明 [4, 第 45]页。正如 [4]所述，该计划源于 Holliday 为模态逻辑提出的“可能性框架” [36], 。

这位作者的 [31, 33] 也假设了选择公理（亚历山大的子基引理，其证明使用佐恩引理，被用于证明该空间的紧致性），但这里对选择公理的使用并非必要；在本文中，我们将对偶性改写为无选择的形式，并将 Stone 拓扑改为谱拓扑。此外， [31] 并未讨论底层格为分配格或布尔代数的情形，我们在此弥补这一缺漏。

本文作者 [25], 及其与 Dunn [33], 合作取得的结果，与 Moshier-Jipsen对偶性 [44, 45], 有关；关于这些关系的一些细节已在 [31, 备注 4.2、备注 4.8]中介绍，本文还将在命题 4.6 中重新探讨这一问题。简而言之，本文作者近期的对偶结果和 [44, 45] 都以 [25, 33] 为共同背景，并在此基础上展开；Moshier 和 Jipsen 明确表示，他们的目标是提供纯粹拓扑性的表示与对偶结果。他们实现了这一目标，使其对偶空间不再带有任何额外的非拓扑结构。这种对偶方法秉承 Stone的原始结果 [47] 关于分配格表示的思路；与之相对，Priestley表示假设对偶空间带有额外的偏序结构，而我们在 [31] 中介绍的对偶性在精神上更接近后者。

[44, 45] 的对偶性并非为此而设计，也不适用于与逻辑相关的关系语义应用，而这正是本文作者研究的重点。主要原因有两点：首先，可容许解释的取值是稳定集（在 [44, 45]中称为饱和集），而要对其进行拓扑刻画，则需要二阶原理，因为集合的闭包被定义为该空间中所有开（相对于该拓扑）滤子的交集（该空间按照由拓扑诱导的特化序构成偏序）。其次，语义研究通常旨在获得关系框架的一阶可定义类，而 [44, 45] 选择将格拟算子表示为对偶拓扑空间上的强连续且保持交的点算子。此外，就本文的研究目的而言，还应指出，根据 [3] ，Moshier-Jipsen 对偶性并非无选择公理的；Dmitrieva 的贡献（参见 https://eprints.illc.uva.nl/id/eprint/1811/1/MoL-2021-18.text.pdf）则是为 [44]的对偶性提供了一个无选择公理的版本。

近年来，本文作者一直致力于将 J´onsson 和 Tarski 关于带算子的布尔代数（BAO）的框架 [39, 40]以及 Dunn 后续关于带拟算子的分配格（Dunn广义伽罗瓦逻辑的代数模型，亦称 gaggles）的研究 [6, 14, 15] 推广到带拟算子的一般格（按我们偏好的术语，即正规格算子）这一情形。该工作以作者 [25] 及其与 Dunn 合作的早期研究 [32, 33], 为基础，并在格扩张的典范扩张 [22]框架下展开。

本项目于 [29, 31], 完成；它与 Gehrke（及其合作者）的广义克里普克框架方法（RS 框架） [21] 并行发展，而这两种方法之间的关系已在 [29]中详细阐述。值得注意的是，就本文的目标而言，RS-框架方法建立在 Hartung 的格表示 [35], 之上，而该表示继承自

Urquhart 格表示 [48] 对选择公理的必要依赖。此外，RS-框架方法中的完整范畴对偶面临困难，问题在于如何定义框架态射；这也正是 Urquhart 的 [48], 或 Hartung 的 [35] 格表示此前未能扩展为完整对偶性结果的原因。Goldblatt 在 [24, 《引言》第 2–3] 页简要回顾了为极性定义合适态射概念的尝试。

本文聚焦于带有拟补算子的格，以及与之相关的、未必是分配格的逻辑；这些逻辑具有弱形式的否定。

逻辑中的否定一直是一个备受研究的议题，Do˘sen [11, 12] 和 Vakarelov [49, 50], 提出了否定的模态解释，Orlowska [18, 19] 则将 Urquhart 格表示扩展到拟补格的情形；Dunn 和 Zhou [16], 对各种否定概念进行了分类。此外，围绕这一主题也有扩展的文献综述和论文集，例如 Dunn [13] 和 Wansing [51], 分别编撰的相关著作。文献中也体现出人们对带有拟补算子的格的纯格论兴趣，研究聚焦于一些特别值得关注的情形，例如正交格（及正交逻辑 [23]）、德摩根代数、奥克姆代数和克里普克代数 [8], ，以及伪补格 [41]。

与本文更相关、也较新的工作是 Almeida [2], 对 RS-框架的研究；结论部分简要讨论了这两种方法之间的关系。

1.2 贡献

本文首先探讨的问题是关系语义中的完备性，以及它作为表示的结果所具有的完备性。

其次是逻辑及其相关代数的典范性；这一点由以下事实确立：我们证明了所构造的代数的第二对偶是其典范扩张。

第三，我们证明了所考察的各种公理化系统都满足一阶对应性质。

第四，我们证明，推广到非分配情形的 J´onsson-Tarski 框架 [31], 可以统一适用于非分配系统、分配系统，甚至布尔代数。具体而言，我们建立了一阶框架条件，使得任何满足该条件的框架上的伽罗瓦稳定集的全复代数都是完全分配格。

最后，我们证明了一个完整的范畴对偶结果，消除了对非构造性原理的依赖，因此我们的结果为 Holliday-Bezhanishvili 计划 [4] 中的无选择对偶性作出了贡献。

本文中的对偶性是利用 [31],的对偶框架获得的；该框架通过实例化一般结果涵盖了最小系统，随后又扩展到考虑附加公理的情形。

首先，由于 [33] 的格表示给出了一个典范格扩张，从而确立了典范性；Gehrke 和 Hard- ing [22] 已证明了这一点。对于算子（在本文中为拟补），我们采用 [29, 第 3 节3] 中的证明：按照 [22], 的术语，如果正规格算子的输出类型为 1（返回并），则我们所定义的该算子的扩张是其 σ-扩张；如果其输出类型为 ∂ （返回交），则是其 π-扩张。对应结果是从头计算得到的。在 [9], 中，已有研究将算法化的 Sahlqvist 对应推广到非分配逻辑，但作者将其限制在这样的框架语义中：它们要么是 RS-框架（基于 Hartung 的表示），要么是 TiRS 图 [10] （基于 Plo˘s˘cica [46] 利用部分同态对 Urquhart 的 [48] 格表示所作的重构）。我们认为，将本文结果与把次结构逻辑进行 [28] 模态翻译、转化为分类型剩余模态逻辑的研究结合起来，可以为非分配逻辑提供一种不同于 Sahlqvist 理论的方法，但我们尚未对此进行深入研究。

1.3 结构

本文结构如下。第 2 节介绍我们关注的代数，即带有拟补算子的有界格，以及与之相关的逻辑。我们特别讨论若干重要情形，其中格的底层结构既可以是分配格（尤其是德摩根代数和布尔代数），也可以是非分配格（例如对合格或正交补格）。

第 3 节首先介绍必要的预备知识（第 3.1 节），讨论带有关系和生成算子的分类型框架，内容取自 [31], ；接着在第 3.2 节讨论拟补格的框架。表 2 给出了框架类的一阶公理化刻画，并据此可证明带有弱否定算子的最小逻辑是可靠的。随后，我们针对所考虑的每种情形扩展这一公理化刻画。

第 4 节介绍半格（第 4.1 节）和有界格（第 4.2 节）的无选择表示，并在第 4.3 节详述任意正规格算子的表示，内容取自 [31]。

在第 5 节中，我们将第 4.3 节的表示框架应用于有界格上的拟补算子这一特例。本节的结果表明，我们所考虑的拟补格簇在典范扩张下封闭。由此，可以通过典范模型构造，为所考虑的代数结构对应的逻辑证明无选择完备性定理。

谱对偶定理将在第6节中证明。本节的主要结果是定理6.2，其中详细阐述了范畴 M（其对象为带有最小拟补算子的有界格）与范畴 $\mathrm{SRF}^{*}_{\nu\mathrm{M}}$ （其对象为排序剩余框架，其一阶公理化见表4）之间的对偶性。由此可得其余对偶性。特别地，定理 3.4 给出了使伽罗瓦稳定集之格成为完全分配格的一阶框架条件，该条件随后用于以下情形：

德摩根代数和布尔代数的表示与对偶性。

2 拟补格与逻辑

设 L 是一个有界格，$\{1, \partial\}$ 是一个二元集合，记 $\mathrm{L}^1 = \mathrm{L}$，并记 $\mathrm{L}^\partial = \mathrm{L}^{\mathrm{op}}$（对偶格）。沿用既有术语，函数 $f : \mathrm{L}_1 \times \cdots \times \mathrm{L}_n \to \mathrm{L}_{n+1}$（其中每个 L_i 都是一个有界格）称为可加且正规函数，或称正规算子，若对每个 $i = 1, \ldots n$，它都将格 L_i中的有限并映为格 L_{n+1}中的一个并。

定义 2.1。在有界格 L 上，若一个 n 元运算 f 是正规格算子，且其分配类型为 $\delta(f) = (i_1, \ldots, i_n; i_{n+1}) \in \{1, \partial\}^{n+1}$，即它是一个正格同态函数 $f : \mathrm{L}^{i_1} \times \cdots \times \mathrm{L}^{i_n} \to \mathrm{L}^{i_{n+1}}$（在每个参数位置上都满足对有限并的分配律），其中每个 i_j（$j = 1, \ldots, n+1$）都属于集合 $\{1, \partial\}$，因而 L^{i_j} 要么是 L，要么是 L^∂。

若 τ 是一个由分配类型组成的元组（序列），则相似型为 τ 的正规格扩张是一个格，并且对 τ中的每个 δ，都配有一个分配类型为 δ 的正格算子。

对于固定的相似型 τ，范畴 $\mathbf{NLE}_\tau$ 的对象是类型为 τ 的正规格扩张。其态射是通常的代数同态。

本文聚焦于一类格 $\mathrm{L} = (L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, \nu)$，其上带有最小拟补算子 ν，且公理化强度递增，至少包括以下内容：

(antitonicity)	$a \leq b \longrightarrow \nu b \leq \nu a$
(normality)	$\nu 0 = 1$
$(\vee\wedge)$	$\nu(a \vee b) \leq \nu a \wedge \nu b.$

由反单调性可知，运算 ν 满足恒等式 $\nu(a \vee b) = \nu a \wedge \nu b$，因此它是分配类型为 $\delta(\nu) = (1; \partial)$ 的正规格算子。

注 2.2（对偶极小）。对偶情形的讨论见 [16],

(antitonicity)	$a \leq b \longrightarrow \nu b \leq \nu a$
(dual normality)	$\nu 1 = 0$
$(\wedge\vee)$	$\nu(a \wedge b) \leq \nu a \vee \nu b.$

可由本文的结果轻易推出（尤其参见注 3.10、图 3 及定理 5.4 的证明）：只需注意到，格 L 上的对偶极小拟补就是其对偶格 L^{op}（序反转）上的最小拟补。此情形的细节留给感兴趣的读者。注意，由反单调性可推导出恒等式 $\nu(a \wedge b) = \nu a \vee \nu b$，因此此情形下 ν 的分配类型为 $\delta(\nu) = (\partial; 1)$。

注 2.3（对合）。在拟补格的表示中，按照 [31], 的表示框架，最小拟补与对偶极小拟补这两种情况的区别在于，前者

中，算子返回交时，我们用其 π-扩张表示拟补；而对于具有对偶极小拟补（返回并）的格，我们则使用 σ-扩张（按 [22] 的含义）。在对合格的情形下，我们将同时考察这两种情况。要证明格拟补的表示是伽罗瓦稳定集格上的一个对合，只需验证格对合的 σ 扩张和 π 扩张相同。

引理 2.4 列出了一些我们感兴趣的拟补格的基本事实。

引理 2.4. 设 $\mathbf{L} = (L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, \nu)$ 是一个带有反单调运算 ν 的有界格。

1. ν 在 $\mathbf{L}$ 上构成一个伽罗瓦连接（$a \leq \nu b$ 当且仅当 $b \leq \nu a$），当且仅当它满足不等式 $a \leq \nu\nu a$。2. 若格中成立 $a \leq \nu\nu a$，则可导出正规性公理 $\nu 0 = 1$ 和恒等式 $\nu(a \vee b) = \nu a \wedge \nu b$。3. 若格中成立 $\nu\nu a \leq a$，则可导出恒等式 $\nu(a \wedge b) = \nu a \vee \nu b$。4. 若德摩根恒等式 $\nu(a \vee b) = \nu a \wedge \nu b$ 或 $\nu(a \wedge b) = \nu a \vee \nu b$ 在格中成立，则可导出 ν 的反单调性。5. 若 ν 是一个对合（$a = \nu\nu a$），且该格还是分配格，则它是一个德摩根代数。6. 若 ν 是一个对合，且满足直觉主义爆炸原理（由矛盾可推出任意命题）$a \wedge \nu a \leq 0$，则该格是一个正交格（正交补格）。7. 若 ν 是一个满足反三段论规则（$a \wedge b \leq c \Rightarrow a \wedge \nu c \leq \nu b$）的对合，则该格是一个布尔代数。

证明。断言 (1) 至 (6) 均可直接证明，留给感兴趣的读者完成。对于 (7)，假设意味着 $a \wedge b \leq c$ 当且仅当 $a \wedge \nu c \leq \nu b$。这表示 $\wedge$ 关于对合 ν 是自共轭的。为说明这蕴含分配性，定义 $a \to c = \nu(a \wedge \nu c)$，并注意到共轭条件等价于 $\wedge$ 与 $\to$ 的剩余化，即 $a \wedge b \leq c$ 当且仅当 $a \wedge \nu c \leq \nu b$ 当且仅当 $b \leq a \to c$。由剩余化即可得到分配律。此外，根据第 (2) 部分，$\nu 0 = 1$ 成立，进而 $\nu 1 = \nu\nu 0 = 0$ 也成立。因此，直觉主义原理 $a \wedge \nu a \leq 0 = \nu 1$ 随之成立，因为可以利用反三段论从 $a \wedge 1 \leq a$ 推得该原理。根据假设，ν 是一个对合，因此爆炸原理 $a \wedge \nu a \leq 0$ 等价于排中律 $a \vee \nu a = 1$。故该格是一个布尔代数。

□

图 1: （拟）补格

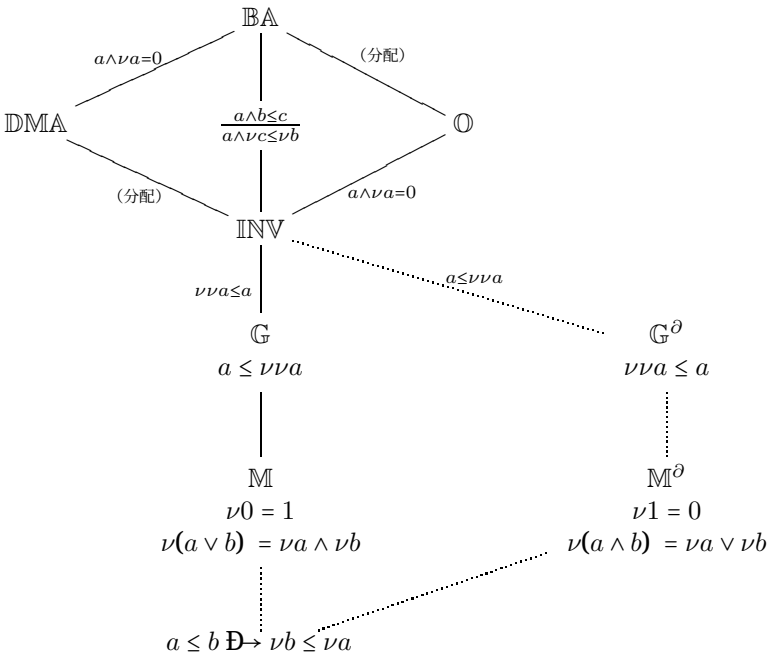


图 1 总结了上述结果，其中 $\mathbb{DMA}$、$\mathbb{O}$、$\mathbb{INV}$ 分别表示德摩根代数、正交格和带对合的格的方程类（簇），$\mathbb{BA}$ 表示布尔代数的簇；其余两个标记 $\mathbb{M}$、$\mathbb{G}$ 分别表示带极小拟补算子或伽罗瓦连接拟补算子的格的簇；箭头标记 (dist) 表示加入分配律 $a\wedge(b\vee c)\le(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$。对于带对偶极小拟补或对偶伽罗瓦拟补的格的簇，我们分别用 $\mathbb{M}^\partial$、$\mathbb{G}^\partial$ 表示。结合本文的结果，可以轻易得到簇 $\mathbb{M}^\partial$、$\mathbb{G}^\partial$ 中拟补格的一个表示定理；事实上，在阐述带对合的格这一情形时，我们已间接给出了该定理。下文将聚焦于上述簇（包括 $\mathbb{M}$ ）。

拟补格的命题语言 L 定义在可数集 P 的命题变量上，其模式为

$$\varphi := p\ (p\in P)\mid\top\mid\bot\mid\varphi\wedge\varphi\mid\varphi\vee\varphi\mid\neg\varphi.$$

在簇 $\mathbb{M}$ （以及任意子簇）中的代数 L 上，命题语言的赋值 v 是一个映射 $v:P$ Ð→ L。命题语言的解释 V 是从 P and 上的项代数（绝对自由代数）到 L 的唯一同态，并将 v 扩展到所有句子。

形式方程是形如 $\varphi \approx \psi$ 的字符串，而形式不等式 $\varphi \leq \psi$ 按通常方式由 $\varphi \approx \varphi \wedge \psi$ 定义。拟补格 L 验证形式不等式，记作 $\varphi \vDash_{\mathbf{L}} \psi$，当且仅当对于任意赋值 v，我们得到 $V(\varphi) \leq V(\psi)$。

语言 L 中的逻辑 $\mathbf{\Lambda}$ 是一组有序对 (φ, ψ)，我们将其记作 $\varphi \vdash_{\mathbf{\Lambda}} \psi$，并称之为（对称）序列；这组有序对包含初始序列，且对表1中的规则和代换封闭。M 表示上述意义下的极小逻辑。

表1：极小逻辑 M 的初始序列和规则

$\varphi \vdash \varphi$	$\varphi \vdash \top$	$\bot \vdash \varphi$	$\dfrac{\varphi \vdash \psi \quad \psi \vdash \vartheta}{\varphi \vdash \vartheta}$	$\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\neg\psi \vdash \neg\varphi}$
$\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$	$\varphi \wedge \psi \vdash \psi$	$\varphi \vdash \varphi \vee \psi$	$\psi \vdash \varphi \vee \psi$	$\neg(\varphi \vee \psi) \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$
$\top \vdash \neg\bot$				

序列 $\varphi \vdash \psi$ 在拟补格 L 中有效，记作 $\varphi \Vdash_{\mathbf{L}} \psi$，当且仅当对于任意解释 $v : P \to L$，不等式 $V(\varphi) \leq V(\psi)$ 在 L 中成立。若一组序列 Γ（特别是逻辑 $\mathbf{\Lambda}$）在 L 中有效，记作 $\mathbf{L} \Vdash \Gamma$，则 $\varphi \Vdash_{\mathbf{L}} \psi$ 对每个 $(\varphi, \psi) \in \Gamma$ 都成立。显然，序列 $\varphi \vdash \psi$ 有效当且仅当不等式 $\varphi \leq \psi$ 有效，记作 $\varphi \Vdash_{\mathbf{L}} \psi$ 当且仅当 $\varphi \vDash_{\mathbf{L}} \psi$。

序列 $\varphi \vdash \psi$ 在 $\mathbb{M}$（$\mathbb{V} \in \mathrm{Sub}\mathbb{M}$）的子簇 $\mathbb{V}$ 中有效，记作 $\varphi \Vdash_{\mathbb{V}} \psi$，当且仅当对于任意代数 $\mathbf{L} \in \mathbb{V}$，都有 $\varphi \Vdash_{\mathbf{L}} \psi$。类似地定义一组序列（特别是一个逻辑）或一组形式（不）等式在 $\mathbb{M}$的子簇 $\mathbb{V}$ 中的有效性。

命题2.5。逻辑 M 在簇 $\mathbb{M}$中是可靠且完备的。

证明。可靠性显而易见。为证明完备性，我们采用林登鲍姆–塔斯基构造，并注意到（给定反调规则）关系$\varphi \equiv \psi$ 当且仅当 $\varphi \vdash \psi$ 和 $\psi \vdash \varphi$ 均可证明，是一个同余。细节显而易见。 □

若 Γ 是一组序列，则 $\mathbf{M} + \Gamma$ 表示通过将 Γ 中的成员添加为新的初始序列而得到的逻辑。用 ExtM 表示 M 的这类扩张所构成的族，并注意到 ExtM 在交集运算下构成一个完备格。

每个扩张 $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M} + \Gamma$ 都确定一个子簇 $\mathbb{V} \in \mathrm{Sub}\mathbb{M}$，其方程理论为 $\mathrm{E}(\mathbb{V}) = \mathrm{E}(\mathbb{M}) \cup \{\varphi \leq \psi \mid (\varphi, \psi) \in \Gamma\}$。

定义2.6。映射 $\mathrm{V} : \mathrm{ExtM} \leftrightarrows \mathrm{Sub}\mathbb{M} : \Lambda$ 定义在逻辑 $\mathbf{\Lambda} \in \mathrm{ExtM}$ 和簇 $\mathbb{V} \in \mathrm{Sub}\mathbb{M}$ 上，具体如下：

$$\mathrm{V}(\mathbf{\Lambda}) = \{\mathbf{L} \in \mathbb{M} \mid \forall (\varphi, \psi) \in \mathbf{\Lambda}\ \varphi \Vdash_{\mathbf{L}} \psi\} \tag{1}$$

$$\Lambda(\mathbb{V}) = \{(\varphi, \psi) \mid \varphi \Vdash_{\mathbb{V}} \psi\} \tag{2}$$

命题 2.7（可定义性）。对于任意子簇 $\mathbb{V} \in \mathrm{Sub}\mathbb{M}$ 和任意拟补格 $\mathbf{L} \in \mathbb{M}$，$\mathbf{L} \in \mathbb{V}$ 当且仅当 $\mathbf{L} \Vdash \Lambda(\mathbb{V})$。等价地，$\mathrm{V}\Lambda(\mathbb{V}) = \mathbb{V}$。

证明。若 $\mathbf{L} \in \mathbb{V}$，则显然 $\mathbf{L} \Vdash \Lambda(\mathbb{V})$。反过来，若 $\mathbf{L} \Vdash \Lambda(\mathbb{V})$，且 $\varphi \preceq \psi$ 是 $\mathbb{V}$ 公理化中的任意不等式，那么，由 $\varphi \vDash_{\mathbb{V}} \psi$ 当且仅当 $\varphi \Vdash_{\mathbb{V}} \psi$ 这一事实可推出 $\varphi \Vdash_{\mathbf{L}} \psi$，因此 $\mathbf{L}$ 满足 $\mathbb{V}$ 的方程理论，故 $\mathbf{L} \in \mathbb{V}$。 □

命题 2.8（完备性）。对于每个逻辑 $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathrm{ExtM}$ 以及每对句子 (φ, ψ)，$\varphi \vdash \psi \in \boldsymbol{\Lambda}$ 当且仅当 $\varphi \Vdash_{\mathrm{V}(\boldsymbol{\Lambda})} \psi$。等价地，$\Lambda\mathrm{V}(\boldsymbol{\Lambda}) = \boldsymbol{\Lambda}$。

证明。若 $\varphi \vdash \psi$ 属于 $\boldsymbol{\Lambda}$，则根据 $\mathrm{V}(\boldsymbol{\Lambda})$ 的定义可知 $\varphi \Vdash_{\mathrm{V}(\boldsymbol{\Lambda})} \psi$。反过来，若 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{M} + \Gamma$，则其对应的拟补格簇的等式公理化为 $\mathrm{E} = \mathrm{E}(\mathrm{M}) \cup \{\varphi \preceq \psi \mid (\varphi, \psi) \in \Gamma\}$。因此，$\mathbb{V} \in \mathrm{V}(\boldsymbol{\Lambda})$ 当且仅当 $\mathbb{V} \vDash \mathrm{E}$。若 $\varphi \Vdash_{\mathrm{V}(\boldsymbol{\Lambda})} \psi$，则特别有 $\varphi \Vdash_{\mathbf{Lind}} \psi$，其中 Lind 是逻辑 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的林登鲍姆-塔斯基代数，由此我们推得 $\varphi \vdash \psi$ 属于 $\boldsymbol{\Lambda}$。 □

命题 2.9（对偶性）。映射 V Λ 构成完备格对偶同构 $\mathrm{V} : \mathrm{ExtM} \backsimeq \mathrm{Sub}\mathbb{M}^{\mathrm{op}} : \Lambda$。

证明。逻辑的扩张与子拟簇相对应，这说明了 V Λ的反单调性。由命题 2.7 和 2.8 可知，V Λ 互为逆映射，因此 ExtM 与 Sub$\mathbb{M}$之间存在双射。

设 $\boldsymbol{\Lambda} = \bigcap_{i \in I} \boldsymbol{\Lambda}_i = \bigcap_{i \in I} (\mathrm{M} + \Gamma_i)$ 和 $\mathbb{V}_i = \mathrm{V}(\boldsymbol{\Lambda}_i)$。那么，$\mathbb{V}_i$ 的等式公理化为 $\mathrm{E}(\mathbb{V}_i) = \mathrm{E}(\mathrm{M}) \cup \{\varphi \preceq \psi \mid (\varphi, \psi) \in \Gamma_i\}$。

由于 $\bigvee_{i \in I} \mathbb{V}_i = \{\mathbf{L} \in \mathbb{M} \mid \mathbf{L} \vDash \bigcap_{i \in I} \mathrm{E}(\mathbb{V}_i)\}$，可知 $\mathbf{L} \in \bigvee_{i \in I} \mathbb{V}_i$ 当且仅当 $\mathbf{L} \vDash \mathrm{E}(\mathbb{M}) \cup \bigcap_{i \in I} \mathrm{E}(\mathbb{V}_i)$ 当且仅当 $\varphi \vDash_{\mathbf{L}} \psi$ 对 $\mathrm{E} = \mathrm{E}(\mathbb{M}) \cup \bigcap_{i \in I} \mathrm{E}(\mathbb{V}_i)$ 中任意 $\varphi \preceq \psi$ 都成立。鉴于 $\mathrm{E} = \bigcap_{i \in I} (\mathrm{E}(\mathbb{M}) \cup \mathrm{E}(\mathbb{V}_i))$，等价地，$\mathbf{L} \in \bigvee_{i \in I} \mathbb{V}_i$ 当且仅当 $\mathbf{L} \Vdash \bigcap_{i \in I} (\mathrm{M} + \Gamma_i)$ 当且仅当 $\mathbf{L} \Vdash \bigcap_{i \in I} \boldsymbol{\Lambda}_i$。这表明 $\mathrm{V}(\bigcap_{i \in I} \boldsymbol{\Lambda}_i) = \bigvee_{i \in I} \mathrm{V}(\boldsymbol{\Lambda}_i)$。 □

这种对偶同构使我们能够在逻辑与拟补格簇之间来回转换，而不会丢失任何信息。

3 有序剩余框架（SRFs）

对于可能不满足分配律的逻辑，其关系语义依赖相应的表示定理；也就是说，对于可代数化逻辑，其完备性是通过典范模型构造建立的，而该构造所依据的框架，正是其林登鲍姆-塔斯基代数相关表示中构造的框架。

第一个有界格表示定理由 Urquhart[48], 借助双序斯通空间给出，其中典范框架的点是极大不相交滤子-理想对。排序框架既用于 Hartung 的 [35] 格表示，也用于本文作者与 Dunn [32, 33]提出的表示。在这两种情形下，格都被视为稳定集完备格的子格，而稳定集恰好是

由定义在框架上的伽罗瓦连接的两个映射复合所生成的闭包算子的不动点。

在定义拟补格的（分类型）框架之前，我们需要先了解一些有关分类型框架的基本预备知识，详见下一节。本文中由于不涉及其他类型的框架，我们将“分类型框架”“极性”“排序剩余框架”或简称“框架”互换使用。

3.1 排序框架预备知识

将 $\{1, \partial\}$ 视为一个类型集，并令 $Z = (Z_1, Z_\partial)$ 为一个排序集。排序剩余框架 $\mathfrak{F} = (Z_1, \perp, Z_\partial)$ 是由非空集 $Z_1 = X, Z_\partial = Y$ 以及一个二元关系 $\perp \subseteq X \times Y$ 组成的三元组。

关系 $\perp$ 将称为该框架的伽罗瓦关系。它生成一个伽罗瓦连接 $(\ )^{\perp} : \wp(X) \leftrightarrows \wp(Y)^{\partial} : {}^{\perp}(\ )$ ($V \subseteq U^{\perp}$ 当且仅当 $U \subseteq {}^{\perp}V$)

$$\begin{aligned} U^{\perp} &= \{y \in Y \mid \forall x \in U\ x \perp y\} = \{y \in Y \mid U \perp y\} \\ {}^{\perp}V &= \{x \in X \mid \forall y \in V\ x \perp y\} = \{x \in X \mid x \perp V\}. \end{aligned}$$

我们还将用到伽罗瓦关系 $\perp$ 的补关系 I，并用伽罗瓦关系 $\perp$ 或其补关系 I 来表示框架。若子集 $A \subseteq X$ 满足 $A = {}^{\perp}(A^{\perp})$，则称其为稳定集。类似地，若子集 $B \subseteq Y$ 满足 $B = ({}^{\perp}B)^{\perp}$，则称其为余稳定集。稳定集和余稳定集统称为伽罗瓦集；在需要时，视情况分别称为伽罗瓦稳定集或伽罗瓦余稳定集。我们分别用 $\mathsf{G}(X)$、$\mathsf{G}(Y)$ 表示稳定集格与余稳定集格。注意，伽罗瓦连接限制为一个对偶同构 $(\ )^{\perp} : \mathsf{G}(X) \backsimeq \mathsf{G}(Y)^{\partial} : {}^{\perp}(\ )$。

结构 $(X, \perp, Y)$ 称为极性，依照 Birkhoff [7], 也称为形式背景，见形式概念分析（FCA） [20]；对于两个伽罗瓦映射 ${}^{\perp}(\ ), (\ )^{\perp}$，我们采用 FCA 的标准撇号记法。这样，我们便能分别陈述并证明关于 $\mathsf{G}(X)$、$\mathsf{G}(Y)$ 的结果，而无需重复定义和证明，也不必不断诉诸对偶性。因此，对于伽罗瓦集 $G, G' = G^{\perp}$，若 $G \in \mathsf{G}(X)$（G 是伽罗瓦稳定集），则.....；否则，若 $G \in \mathsf{G}(Y)$（G 是伽罗瓦余稳定集），则 $G' = {}^{\perp}G$。

对于分别属于 X 或 Y 的元素 u，以及分别属于 Y 或 X 的子集 W，在良类型假设下，我们用 $u \mid W$ 表示以下任一种情况：$u \perp W$（表示对所有 $w \in W$，都有 $u \perp w$），或 $W \perp u$（表示对所有 $w \in W$，都有 $w \perp u$）；这里，良类型意味着分别满足 $u \in X$、$W \subseteq Y$，或 $W \subseteq X$ 和 $u \in Y$。记号 $u \mid v$ 也类似，其中 u、v 是不同类型的元素。

通过规定：对于 x、$z \in X$、$x \preceq z$，当且仅当 $\{x\}^{\perp} \subseteq \{z\}^{\perp}$ 时成立；类似地，对于 y、$v \in Y$、$y \preceq v$，当且仅当 ${}^{\perp}\{y\} \subseteq {}^{\perp}\{v\}$ 时成立，从而在每种类型上诱导出预序关系。若这些预序关系 $\preceq$（分别定义在 X 和 Y 上）实际上是偏序 $\leq$，则称该（分类型）框架是分离的。

我们用 Γ 表示 $U \subseteq X$的上闭包 $\Gamma U = \{z \in X \mid \exists x \in U\ x \preceq z\}$，$U \subseteq Y$也类似。集合 U 是递增集（上集）当且仅当 $U = \Gamma U$。对于单元素集合 $\{x\} \subseteq X$，我们写作 Γx，而不写作 $\Gamma(\{x\})$；$\{y\} \subseteq Y$也类似。

引理 3.1（[31, 引理 3.3]）。设 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y)$ 是一个极性，且 u 是 $Z = X \cup Y$ 中的一个点。

1. $\perp$ 在每个参数位置上都是递增的（因此其补关系 I 在每个参数位置上都是递减的）。2. $(\Gamma u)' = \{u\}'$，而 $\Gamma u = \{u\}''$ 是一个伽罗瓦集。3. 伽罗瓦集是递增的，即 $u \in G$ 蕴含 $\Gamma u \subseteq G$。4. 对于伽罗瓦集 G，$G = \bigcup_{u \in G} \Gamma u$。5. 对于伽罗瓦集 G，$G = \bigvee_{u \in G} \Gamma u = \bigcap_{v|G} \{v\}'$。6. 对于伽罗瓦集 G 和任意集合 W，$W'' \subseteq G$ 当且仅当 $W \subseteq G$。

□

在格的典范扩张语境中，通常将主上集 $\Gamma x \in \mathsf{G}(X)$（$x \in X = \mathbf{Filt(L)}$）称为滤子，或称为 $\mathsf{G}(X)$ 的闭元；将集合 $\perp\{y\} \in \mathsf{G}(X)$（$y \in Y = \mathbf{Idl(L)}$）称为开元，或称为 $\mathsf{G}(X)$ 的理想元素；对于集合 Γy、$\{x\}^{\perp}$，其中 $x \in X$、$y \in Y$，也采用类似的说法。这容易与拓扑术语产生不必要的混淆，因此我们需要依靠上下文来消除歧义。此外，只有在指拓扑意义上的闭集或开集时，我们才始终使用“闭集”和“开集”。此外，若闭元 Γx 满足对于某个 $y \in Y$ 有 $\Gamma x = \perp\{y\}$，则称其为既开又闭；当框架是分离的时，这个 $y \in Y$ 是唯一的。

根据引理 3.1，$\mathsf{G}(X)$ 的闭元素并生成 $\mathsf{G}(X)$，而开元素交生成 $\mathsf{G}(X)$（$\mathsf{G}(Y)$ 也同样如此）。

对于一个多类型关系 $R \subseteq \prod_{j=1}^{j=n+1} Z_{i_j}$，其中对每个 j 都有 $i_j \in \{1, \partial\}$（因此当 $i_j = 1$ 时 $Z_{i_j} = X$，且当 $i_j = \partial$ 时 $Z_{i_j} = Y$），我们约定将其视为关系 $R \subseteq Z_{i_{n+1}} \times \prod_{j=1}^{j=n} Z_{i_j}$；我们同意将其排序类型写作 $\sigma(R) = (i_{n+1}; i_1 \cdots i_n)$，并且对于由适当类型的点组成的元组，将 $(u, u_1, \ldots, u_n) \in R$ 写作 $uRu_1 \cdots u_n$。

定义 3.2（伽罗瓦对偶关系）。对于一个 $n+1$ 元多类型关系 R，其伽罗瓦对偶关系 R' 定义为：$uR'v_1 \cdots v_n$ 当且仅当 $\forall w\, (wRv_1 \cdots v_n \mathrel{Đ}\!\!\rightarrow w|u)$。换言之，令 $\vec{v} = v_1 \cdots v_n$，则 $R'\vec{v} = (R\vec{v})'$。

定义 3.3（关系的截面）。对于一个（$n+1$）元关系 R^σ（类型为σ）和一个 n 元组 $\vec{u}$，$R^\sigma\vec{u} = \{w \mid wR^\sigma\vec{u}\}$ 是由 $\vec{u}$ 确定的 R^σ 的截面。为了表示关系在第 k 个参数位置处的截面，我们令$\vec{u}[_]_k$ 为在第 k 个参数位置留有空位的元组。那么，$wR^\sigma\vec{u}[_]_k = \{v \mid wR^\sigma\vec{u}[v]_k\} \subseteq Z_{i_k}$ 是 R^σ的第 k 个截面。

定理 3.4. 设 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y)$ 是一个分类型框架（极性），$\mathsf{G}(X)$ 是稳定集的完备格。设 $R_\leq$ 是定义在 X 上的三元上界关系，即 $uR_\leq xz$ 当且仅当 $x \leq u$ 和 $z \leq u$。如果 $R'_\leq$ 的伽罗瓦对偶关系的所有截面都是伽罗瓦集，则 $\mathsf{G}(X)$ 是完全分配的。

表 2：分类型框架的公理 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y, S_\vee)$

(F0) 框架的伽罗瓦关系 $\perp$ 的补关系 I 是拟串行的，即条件 $\forall x \in X \exists y \in Y\ xIy$ 和 $\forall y \in Y \exists x \in X\ xIy$ 成立。(F1) 框架是分离的。(F2) 对任意 $x \in X$，框架关系 $S_\vee$ 的截面 $S_\vee x$ 是 G(Y) 的闭元。(F3) 对任意 $y \in Y$，框架关系 $S_\vee$ 的截面 $yS_\vee$ 是递减的（一个下集）。(F4) $S_\vee$ 的伽罗瓦对偶关系 $S'_\vee \subseteq X \times X$ 的两个截面都是伽罗瓦集。

证明。设 α_R 是由 $R_\leq$, $\alpha_R(U,W) = \bigcup_{u\in U}^{w\in W} Ruw$ 生成的像算子。注意，对于稳定集 A, C（更一般地，对于递增集），$\alpha_R(A,C) = A \cap C$。因此，由于伽罗瓦集对交集封闭，$\overline{\alpha}_R(A,C) = \alpha_R(A,C) = A \cap C$。给定伽罗瓦对偶关系$R'_\leq$ 的截面稳定性假设，其中 $R_\leq$, [31, 定理 3.12]适用，由此可得，交集（即 $\overline{\alpha}_R$ ）对稳定集的任意并满足分配律。 □

3.2 拟补格的框架

具有至少一个最小拟补的拟补格框架，是结构 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y, S_\vee)$，其中 $\sigma(S_\vee) = (\partial; 1)$，即 $S_\vee \subseteq Y \times X$。请注意，在对偶极小拟补的情况下，我们需要考虑一个二元关系 $R_\wedge \subseteq X \times Y$（其排序类型与 $S_\vee$ 的对偶类型相对应）。

我们在表 2 中（位于 [31, 表 2], 之后）列出所采用的最小公理化；为实现对偶性，后文将通过在每个 X、Y 上赋予谱拓扑来加强这一公理化。与 [31] 的框架公理相比，唯一的区别在于我们加入了公理 (F0)，以确保空集是（余）稳定的；更确切地说，$^{\perp\!\!\!\perp}Y = \varnothing$，类似地 $X^{\perp\!\!\!\perp} = \varnothing$。

特别要注意，公理 (F1) 和 (F2) 意味着存在一个定义在框架的点上的（分类型）函数 $\widehat{\nu}_S : X \not\to Y$。为简洁起见，省略下标后，$\widehat{\nu}(x) = y$ 当且仅当 $S_\vee x = \Gamma y$。因此

$$yS_\vee x \ \text{ iff } \ \widehat{\nu}(x) \leq y \tag{3}$$

定义 3.5。不相容关系 $\perp \subseteq X \times X$ 定义为框架关系 $S_\vee$ 的伽罗瓦对偶关系 $S'_\vee$。更明确地说，对所有 x、$z \in X$,

$$x \perp z \text{ iff } xS'_\vee z \text{ iff } \forall y \in Y (yS_\vee z \longrightarrow x \perp\!\!\!\perp y) \tag{4}$$

此外，对于任意集合 $U \subseteq X$，定义一个星号集合算子如下：

$$U^* = \{x \in X \mid x \perp U\} = \{x \in X \mid \forall u \in U\ x \perp u\} \tag{5}$$

给定上述分类型框架 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y, S_\vee)$，拟补格的语言可以在该框架中得到解释。若 $v : P \to \mathsf{G}(X)$ 是将稳定集赋给命题变量的一个赋值，则解释 $[\![\ ]\!]$ 和余解释 $(\!|\ |\!)$ 是满足以下相互递归子句的函数，并且还满足恒等式 $(\!|\varphi|\!) = [\![\varphi]\!]^{\perp}$，继而对于任意句子 φ，也满足 $[\![\varphi]\!] = {}^{\perp}(\!|\varphi|\!)$。

$$
\begin{array}{lcllcl}
[\![p]\!] & = & v(p) & (\!|p|\!) & = & v(p)' = v(p)^{\perp} \\
[\![\top]\!] & = & X & (\!|\bot|\!) & = & Y \\
[\![\varphi \wedge \psi]\!] & = & [\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!] & (\!|\varphi \vee \psi|\!) & = & (\!|\varphi|\!) \cap (\!|\psi|\!) \\
[\![\neg\varphi]\!] & = & \{x \in X \mid x \perp [\![\varphi]\!]\} = [\![\varphi]\!]^{*} & & &
\end{array}
$$

满足关系 $\Vdash$ 与余满足关系（反驳关系） $\Vdash^{\partial}$ 随后可按通常方式定义为：$x \Vdash \varphi$ 当且仅当 $x \in [\![\varphi]\!]$，且 $y \Vdash^{\partial} \varphi$ 当且仅当 $y \in (\!|\varphi|\!)$ 当且仅当 $\forall x\,(x \Vdash \varphi \to x \perp y)$，其中 $x \in X$ 且 $y \in Y$。在建立拟补格框架的基本性质后，我们将讨论可靠性与完备性问题。

在推论 3.9 中，我们完成了证明：方程（5）中的星算子对稳定集的任意并满足余分配律，即 $(\bigvee_{j\in J} A_j)^{*} = \bigcap_{j\in J} A_j^{*}$；这意味着 $\mathsf{G}(X)$ 是一个拟补格，因此极小逻辑 M 在我们所考虑的框架类中是可靠的。为了证明星算子对并满足余分配律，我们首先采用与框架关系 $S_\vee$相关联的像算子，给出星算子的另一种构造。

令 $\eta_S : \wp(X) \to \wp(Y)$ 为由 $S_\vee$ 生成的分类型像算子，定义在 $U \subseteq X$ 上如下：

$$\eta_S(U) = \{y \in Y \mid \exists x \in X (y S_\vee x \text{ and } x \in U)\} = \bigcup_{x\in U} S_\vee x, \tag{6}$$

并令 $\overline{\eta}_S : \mathsf{G}(X) \to \mathsf{G}(Y)$ 为其在伽罗瓦集上的限制的闭包。根据公理 (F2)，$S_\vee x$ 是一个伽罗瓦集。

引理 3.6. 对任意点 $x \in X$，$S_\vee x = \overline{\eta}_S(\Gamma x) = \eta_S(\Gamma x) = \Gamma(\widehat{\vee}(x))$。

证明. 根据定义，$\eta_S(\Gamma x) = \bigcup_{z\in\Gamma x} S_\vee z = \bigcup_{x\le z} S_\vee z$。由公理 (F3) 可知，对于 $x \le z$，有 $S_\vee z \subseteq S_\vee x$，因此 $\bigcup_{x\le z} S_\vee z = S_\vee x$；根据公理 (F2)，它是一个闭元，因此 $S_\vee x = \eta_S(\Gamma x) = \overline{\eta}_S(\Gamma x)$。注意到我们还有 $\widehat{\vee}(x) = y$ 当且仅当 $S_\vee x = \Gamma y$，证明完成。 □

由引理 3.6 可知，对于稳定集 $A \in \mathsf{G}(X)$，

$$\overline{\eta}_S(A) = \left(\bigcup_{x\in A} S_\vee x\right)'' = \bigvee_{x\in A} S_\vee x = \bigvee_{x\in A} \overline{\eta}_S(\Gamma x) \in \mathcal{G}(Y). \tag{7}$$

命题 3.7。$\overline{\eta}_S$ 在格 $\mathsf{G}(X)$ 中对任意并满足分配律，且结果仍是 $\mathsf{G}(Y)$ 中的一个并。用符号表示，$\overline{\eta}_S(\bigvee_{j\in J} A_j) = \bigvee_{j\in J} \overline{\eta}_S(A_j)$。

证明。在 [31, 定理 3.12] 中，我们证明了：如果框架关系 R 的伽罗瓦对偶关系 R' 的所有截面都是伽罗瓦集，那么由框架关系 R 生成的分类型像算子 α_R 在伽罗瓦集上的限制的闭包 $\overline{\alpha}_R$，对每个参数位置上的任意并都满足分配律。当前命题只是 [31], 中定理 3.12 的一个实例，因为根据表 2 的框架公理，$S_\vee$ 的两个截面都稳定，因此 $\overline{\eta}_S$ 具有所述的分配性质。

□

现在定义

$$\overline{\eta}_\vee(A) = (\overline{\eta}_S(A))' = \bigcap_{z\in A} S'_\vee z \tag{8}$$

使得 $\overline{\eta}_\vee$ 是 $\mathsf{G}(X)$ 上的单类型运算，由 $\overline{\eta}_S$ 与伽罗瓦连接复合而得。

引理 3.8. 对任意稳定集 $A \in \mathsf{G}(X)$，$A^* = \overline{\eta}_\vee(A)$。

证明. 已知 $\overline{\eta}_\vee(A) = \bigcap_{z\in A} S'_\vee z$，并根据不相容关系 $\perp$ 的定义，$x \in \overline{\eta}_\vee(A)$ 当且仅当对所有 $z \in A$，$x \perp z$ 当且仅当 $x \perp A$ 当且仅当 $x \in A^*$。 □

由 $\overline{\eta}_\vee$ 的定义以及由 $\perp$ 诱导的伽罗瓦连接将稳定集与余稳定集格限制为对偶等价这一事实，以下结论便显而易见。

推论 3.9. 星运算对稳定集的任意并满足余分配律。用符号表示为 $(\bigvee_{j\in J} A_j)^* = \bigcap_{j\in J} A_j^*$。 □

推论 3.9 确立了：若 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y, S_\vee)$ 是一个满足表 2 中框架公理的分类型框架，那么其稳定集的全复代数 $\mathfrak{F}^+ = (\mathsf{G}(X) \subseteq, \cap, \vee, \varnothing, X, (\,)^*)$ 属于由带有最小拟补算子的拟补格构成的簇 $\mathbb{M}$。

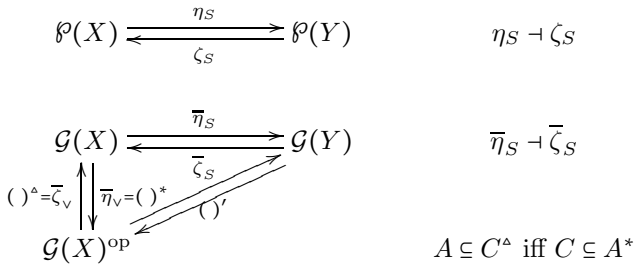
注 3.10（对偶最小拟补的框架）。本情形所考虑的框架是满足表 2 中公理 (F0)–(F4) 的结构 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y, R_\wedge)$，其中以 $R_\wedge \subseteq X \times Y$ 替代 $S_\vee \subseteq Y \times X$。换言之，在本情形的框架公理化中，我们假设对所有 y，集合 $R_\wedge y$ 是 $\mathsf{G}(X)$ 中的一个闭元（公理 (F2)），并将其生成点记为 $\widetilde{\nu}(y) \in X$，对每个 $y \in Y$ 均如此。根据公理 (F3)，对每个 $x \in X$，截面 $xR_\wedge$ 是一个下集。按照我们的记号约定，将其伽罗瓦对偶关系记为 $R'_\wedge \subseteq Y \times Y$。由于 $R_\wedge y = \Gamma\widetilde{\nu}(y) \in \mathsf{G}(X)$，我们得到 $R'_\wedge y = \{\widetilde{\nu}(y)\}^\perp \in \mathsf{G}(Y)$。根据公理 (F4)，对每个 $v \in Y$，截面 $vR'_\wedge$ 是 $\mathsf{G}(Y)$ 中的一个伽罗瓦（余稳定）集。

设 $\eta_R : \wp(Y) \to \wp(X)$ 为由（分类型）关系 $R_\wedge$ 生成的分类型像算子

$$\eta_R(V) = \{x \in X \mid \exists y \in Y (xR_\wedge y \wedge y \in V)\} = \bigcup_{y\in V} R_\wedge y \tag{9}$$

并令 $\overline{\eta}_R : \mathsf{G}(Y) \to \mathsf{G}(X)$ 为其在伽罗瓦（余稳定）集上的限制的闭包，定义为 $\overline{\eta}_R(B) = \bigvee_{y\in B} R_\wedge y$，并设 $\overline{\eta}_\wedge(A) = \overline{\eta}_R(A') = \bigvee_{A\perp y} R_\wedge y$。

图2：映射 $\overline{\eta}_S, \overline{\eta}_\nu$ 及其各自的伴随 $\overline{\zeta}_S, \overline{\zeta}_\nu$



根据与 $\overline{\eta}_S$ 相同的论证（见引理 3.6 和命题 3.7），我们可得，对于任意 $y \in Y$

$$\overline{\eta}_R(\Gamma y) = R_\wedge y = \eta_R(\Gamma y) = \Gamma\widetilde{\nu}(y) \in \mathcal{G}(X) \tag{10}$$

并且对于 $B_i \in \mathsf{G}(Y)$，对每个 $i \in I$，

$$\overline{\eta}_R(\bigvee_{i\in I} B_i) = \bigvee_{i\in I} \overline{\eta}_R(B_i) \in \mathcal{G}(X). \tag{11}$$

因此，

$$\overline{\eta}_\wedge(\bigcap_{i\in I} A_i) = \overline{\eta}_R((\bigcap_{i\in I} A_i)') = \overline{\eta}_R(\bigvee_{i\in I} A_i') = \bigvee_{i\in I} \overline{\eta}_R(A_i') = \bigvee_{i\in I} \overline{\eta}_\wedge(A_i), \tag{12}$$

即 $\overline{\eta}_\wedge$ 对稳定集的任意交具有余分配性（将其转化为并），因此它是伽罗瓦稳定集格 $\mathsf{G}(X)$ 上的一个对偶极小算子。

接下来，我们将确定框架条件，在这些条件下，$\mathfrak{F}^+$ 属于图 1 中的某个子簇 $\mathbb{G}$、$\mathbb{INV}$、$\mathbb{DM}$、$\mathbb{O}$ 或 $\mathbb{BA}$。$\mathbb{M}^\partial$、$\mathbb{G}^\partial$ 的类似情形留给感兴趣的读者。最后，我们在推论 3.15 中给出必要的对应条件，该推论由引理 3.12、3.13 和 3.14 得出。这些引理的证明利用了这样一个事实：$\overline{\eta}_S$ 是剩余化的，具有映射 $\overline{\zeta}_S$；而命题 3.11 中对余伴随作出适当定义后，我们便可在推论 3.15 中得出预期的对应结果。注意，拥有 $\overline{\eta}_S \dashv \overline{\zeta}_S$ 并与伽罗瓦连接复合（如图 2 所示），我们便得到一对伽罗瓦连接映射 $\overline{\eta}_\vee \dashv \overline{\zeta}_\vee$。

命题 3.11。在余稳定集$B \in \mathsf{G}(Y)$上由 $\overline{\zeta}_S(B) = \{x \in X \mid \overline{\eta}_S(\Gamma x) \subseteq B\}$定义的映射 $\overline{\zeta}_S : \mathsf{G}(Y) \to \mathsf{G}(X)$是 $\overline{\eta}_S$的右余伴随。

证明。由于 $\overline{\eta}_S : \mathsf{G}(X) \to \mathsf{G}(Y)$ 保持任意并，依据命题 3.7，它具有余伴随映射 $\overline{\zeta}_S : \mathsf{G}(Y) \to \mathsf{G}(X)$，该映射将 $\mathsf{G}(Y)$ 的交映射为 $\mathsf{G}(X)$ 的交，在 $B \in \mathsf{G}(Y)$ 上定义如下

$$\overline{\zeta}_S(B) = \bigvee\{A \in \mathcal{G}(X) \mid \overline{\eta}_S(A) \subseteq B\}. \tag{13}$$

将 [31, 定理 3.14] 应用于当前情形，可得 $\overline{\eta}_S$ 的余伴随是像算子η_S的余伴随 ζ_S 在伽罗瓦集上的限制，具体定义为$\overline{\zeta}_S(B) = \bigcup\{A \in \mathsf{G}(X) \mid \overline{\eta}_S(A) \subseteq B\}$，因此，余伴随 $\overline{\zeta}_S$ 的标准定义（13）中的并实际上是集合论并集。随后，将 [31, 引理 3.15] 应用于当前情形，可得$\overline{\zeta}_S(B)$等价地由方程（14）定义，

$$\overline{\zeta}_S(B) = \{x \in X \mid \overline{\eta}_S(\Gamma x) \subseteq B\} \tag{14}$$

至此，证明完毕。 □

由 $\mathsf{G}(X)$ 和 $\mathsf{G}(Y)$ 的对偶性，对于每个 $B \in \mathsf{G}(Y)$，都存在某个 $C \in \mathsf{G}(X)$ 使其为 $B = C'$。因此我们得到，$\overline{\eta}_S(A) \subseteq C'$ 当且仅当 $A \subseteq \overline{\zeta}_S(C')$。由此，令

$$\overline{\zeta}_\vee(C) = \overline{\zeta}_S(C') \tag{15}$$

我们得到伽罗瓦连接条件 $C \subseteq \overline{\eta}_\vee(A)$ 当且仅当 $A \subseteq \overline{\zeta}_\vee(C)$。回顾引理 3.8 中的 $A^* = \overline{\eta}_\vee(A)$，并令

$$A^\vartriangle = \overline{\zeta}_\vee(A) \tag{16}$$

我们可以将伽罗瓦连接条件改写为

$$A \subseteq C^\vartriangle \text{ iff } C \subseteq A^*. \tag{17}$$

引理 3.12。设 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y, S_\vee)$ 是一个满足表 2 中公理的框架，且 $A \in \mathsf{G}(X)$ 是任意稳定集。以下各项等价：

1. $\perp$是对称的
2. $A \subseteq A^{**}$3.
   $A^* = A^\vartriangle$。

证明。对于 (1)⇒(2)，反设 $x \in A$，但 $x \notin A^{**}$。令$z \in A^* = \{z \mid \forall u(u \in A$ Ð $\rightarrow z \perp u)\}$，使得 $x \perp z$ 不成立。由于 $x \in A$，$z \perp x$成立。由 $\perp$ 的对称性可得 $x \perp z$，矛盾。因此，对任意 $A \in \mathsf{G}(X)$，都有 $A \subseteq A^{**}$。

对于 (2)⇒(3)，根据假设 $A \subseteq A^{**}$ 和引理 2.4 (1)，可知 $(\,)^*$ 与自身构成伽罗瓦连接。由引理 3.8，$A^* = \overline{\eta}_\vee(A)$，其中根据定义，$\overline{\eta}_\vee(A) = (\overline{\eta}_S(A))'$。在命题 3.11 中，我们定义了一个映射 $\overline{\zeta}_S$，并证明它是 $\overline{\eta}_S$的右余伴随。随后，我们定义 $\overline{\zeta}_\vee(A) = \overline{\zeta}_S(A')$，由此得到由两个映射 $\overline{\eta}_\vee$ 和 $\overline{\zeta}_\vee$ 构成的伽罗瓦连接。回顾一下，我们曾将记号简化为 $A^\vartriangle = \overline{\zeta}_\vee(A)$。但现在，$(\,)^*$ 既与自身，也与 $(\,)^\vartriangle$构成伽罗瓦连接，因此由伴随的唯一性可得 $(\,)^\vartriangle = (\,)^*$。

对于 (3)⇒(2)，根据定义，$(\,)^\vartriangle$ 与 $(\,)^*$ 构成伽罗瓦连接，因此，如果二者相等，则由引理 2.4 可得结论。

对于 (2)⇒(1)，回顾 $\perp = S'_\vee$ 的两个截面都是稳定集，根据引理 3.1，它们也是递增集；并且根据引理 2.4，该假设意味着

表 3：对合情形下的附加框架公理

(I1) 对任意 $y \in Y$，导出关系 $R_\wedge \subseteq X \times Y$ 的截面 $R_\wedge y$ 是 G(X) 中的一个闭元，其中 $R_\wedge \subseteq X \times Y$ 定义为： $xR_\wedge y$ 当且仅当 $y \leq \widetilde{\nu}(x)$。(I2) 对任意 $x \in X$，关系 $R_\wedge$ 的截面 $xR_\wedge$ 是递减的（一个下集）。(I3) 关系 $R_\wedge$ 的伽罗瓦对偶关系 $R'_\wedge \subseteq Y \times Y$ 的两个截面都是伽罗瓦集。(I4) 对所有 $x \in X$, $\widetilde{\nu}(\widetilde{\nu}(x)) = x$(I5) 对所有 $y \in Y$, $\widetilde{\nu}(\widetilde{\nu}(y)) = y$。

即 $(\,)^*$ 是稳定集格上的伽罗瓦连接。假设 $x \perp z$，则有 $x \perp \Gamma z$，这意味着 $x \in (\Gamma z)^* = \{x \mid \forall u(z \leq u \text{Đ}\!\!\rightarrow x \perp u)\}$。如果 $x \leq w$ 且 $z \leq u$，那么根据 $x \perp z$ 我们还有 $w \perp u$，这意味着 $\Gamma x \subseteq (\Gamma z)^*$。由于 $(\,)^*$ 是反单调的，$(\Gamma z)^{**} \subseteq (\Gamma x)^*$。但随后 $\Gamma z \subseteq (\Gamma z)^{**} \subseteq (\Gamma x)^*$，由此我们得到 $z \in (\Gamma x)^*$，因此 $z \perp x$ 成立。 □

引理 3.13。以下各项等价

1. $\perp$具有无自反性
2. $A \cap A^* = \varnothing$。

证明。若 $x \in A \cap A^* \neq \varnothing$，则必有 $x \perp x$，因此 $\perp$不具有无自反性。反过来，假设 $A \cap A^* = \varnothing$。对于任意 $A \in \mathsf{G}(X)$，但设某个 $x \in X$满足 $x \perp x$。那么 $x \in (\Gamma x)^*$，因此 $\Gamma x \cap (\Gamma x)^* \neq \varnothing$，矛盾。 □

剩下需要考察（ ）* 是对合的情形。此时，同一映射 ν既是最小拟补，也是对偶极小拟补（见备注 2.2 和 2.3）。

设 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y, S_\vee)$ 是一个满足表 2 中公理 (F0)–(F4) 的框架，且 $- = S'_\vee$ 是对称的。定义关系 $R_\wedge \subseteq X \times Y$： $xR_\wedge y$ 当且仅当$y \leq \widetilde{\nu}(x)$。假定导出关系 $R_\wedge$满足框架公理 (F2)–(F3) 的对应形式，并将其作为额外的框架公理列于表 3，记为 (I1)–(I3)。

对于每个 $y \in Y$，将 $R_\wedge y$ 的生成点记为 $\widetilde{\nu}(y)$。由于 $R_\wedge y = \Gamma\widetilde{\nu}(y) \in \mathsf{G}(X)$，我们得到 $R'_\wedge y = \{\widetilde{\nu}(y)\}^\perp \in \mathsf{G}(Y)$。

令 $\eta_R : \wp(Y) \text{Đ}\!\!\rightarrow \wp(X)$ 为由（分类型）关系 $R_\wedge$ 生成的分类型像算子，其定义见公式 (9)，如下重述

$$\eta_R(V) = \{x \in X \mid \exists y \in Y(xR_\wedge y \wedge y \in V)\} = \bigcup_{y \in V} R_\wedge y$$

并令 $\overline{\eta}_R : \mathsf{G}(Y) \text{Đ}\!\!\rightarrow \mathsf{G}(X)$ 为其在伽罗瓦（余稳定）集上的限制的闭包，定义为 $\overline{\eta}_R(B) = \bigvee_{y \in B} R_\wedge y$，并设 $\overline{\eta}_\wedge(A) = \overline{\eta}_R(A') = \bigvee_{A \perp y} R_\wedge y$。

如备注 2.2 和 2.3 所述，引理 3.6 和命题 3.7 的类似结论基本上通过相同的论证成立，因此我们得到 $\overline{\eta}_R(\Gamma y) = R_\wedge y = \eta_R(\Gamma y) = \Gamma\widetilde{\nu}(y)$，且 $\overline{\eta}_R(\bigvee_{i\in I} B_i) = \bigvee_{i\in I}\overline{\eta}_R(B_i)$。因此，$\overline{\eta}_\wedge(\bigcap_{i\in I} A_i) = \overline{\eta}_R((\bigcap_{i\in I} A_i)') = \overline{\eta}_R(\bigvee_{i\in I} A_i') = \bigvee_{i\in I}\overline{\eta}_R(A_i') = \bigvee_{i\in I}\overline{\eta}_\wedge(A_i)$。总之，

$$\overline{\eta}_\vee(\bigvee_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I}\overline{\eta}_\vee(A_i) \tag{18}$$

$$\overline{\eta}_\wedge(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigvee_{i\in I}\overline{\eta}_\wedge(A_i) \tag{19}$$

现在我们旨在证明 $\overline{\eta}_\vee = \overline{\eta}_\wedge$。为此，需要满足两个附加公理，即表 3 中的公理 (I4) 和 (I5)。

引理 3.14. 设 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y, S_\vee)$ 是一个满足表 2 中公理 (F0)–(F4) 的框架。再设关系 $R_\wedge \subseteq X \times Y$ 按照上述方式定义为：$xR_\wedge y$ 当且仅当 $y \leq \widetilde{\nu}(x)$，并假设表 3 中的附加公理 (I1)–(I5) 成立。若不相容关系 $\asymp = S_\vee'$ 是对称的，则 $\overline{\eta}_\vee = \overline{\eta}_\wedge$，因此映射 $A^* = \overline{\eta}_\vee(A)$ 是 $\mathsf{G}(X)$ 上的一个对合。

证明. 我们计算得

$$\begin{array}{rcll}
\overline{\eta}_\wedge\overline{\eta}_\vee(A) & = & \overline{\eta}_\wedge\overline{\eta}_\vee(\bigvee_{x\in A}\Gamma x) & \text{By join-density of closed elements}\\
& = & \overline{\eta}_\wedge(\bigcap_{x\in A}\overline{\eta}_\vee(\Gamma x)) & \overline{\eta}_\vee \text{ co-distributes over joins}\\
& = & \overline{\eta}_\wedge(\bigcap_{x\in A}{}^{\perp}\{\widetilde{\nu}(x)\}) & \overline{\eta}_\vee(\Gamma x) = (\overline{\eta}_S(\Gamma x))' = {}^{\perp}\{\widetilde{\nu}(x)\},\ \text{Lemma 3.6}\\
& = & \bigvee_{x\in A}\overline{\eta}_\wedge({}^{\perp}\{\widetilde{\nu}(x)\}) & \overline{\eta}_\wedge \text{ co-distributes over meets}\\
& = & \bigvee_{x\in A}\overline{\eta}_R(\Gamma\widetilde{\nu}(x)) & \text{By definition } \overline{\eta}_\wedge(A) = \overline{\eta}_R(A')\\
& = & \bigvee_{x\in A}\Gamma(\widetilde{\nu}(\widetilde{\nu}(x))) & \text{By } \overline{\eta}_R(\Gamma y) = \Gamma\widetilde{\nu}(y)\\
& = & \bigvee_{x\in A}\Gamma x & \text{By axiom (I4)}\\
& = & A. & \text{By join-density of closed elements}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
\overline{\eta}_\vee\overline{\eta}_\wedge(A) & = & \overline{\eta}_\vee\overline{\eta}_\wedge(\bigcap_{A\perp y}{}^{\perp}\{y\}) & \text{By meet-density of open elements}\\
& = & \overline{\eta}_\vee(\bigvee_{A\perp y}\overline{\eta}_\wedge({}^{\perp}\{y\})) & \overline{\eta}_\wedge \text{ co-distributes over meets}\\
& = & \overline{\eta}_\vee(\bigvee_{A\perp y}\overline{\eta}_R(\Gamma y)) & \text{By definition } \overline{\eta}_\wedge(A) = \overline{\eta}_R(A')\\
& = & \overline{\eta}_\vee(\bigvee_{A\perp y}\Gamma\widetilde{\nu}(y)) & \text{By } \overline{\eta}_R(\Gamma y) = \Gamma\widetilde{\nu}(y)\\
& = & \bigcap_{A\perp y}\overline{\eta}_\vee(\Gamma\widetilde{\nu}(y)) & \overline{\eta}_\vee \text{ co-distributes over joins}\\
& = & \bigcap_{A\perp y}{}^{\perp}(\overline{\eta}_S(\Gamma\widetilde{\nu}(y))) & \text{By definition } \overline{\eta}_\vee(A) = (\overline{\eta}_S(A))' = {}^{\perp}(\overline{\eta}_S(A))\\
& = & \bigcap_{A\perp y}{}^{\perp}(\Gamma\widetilde{\nu}(\widetilde{\nu}(y))) & \text{By } \overline{\eta}_S(\Gamma x) = \Gamma\widetilde{\nu}(x)\\
& = & \bigcap_{A\perp y}{}^{\perp}\{\widetilde{\nu}(\widetilde{\nu}(y))\} & \text{By } {}^{\perp}(\Gamma y) = {}^{\perp}\{y\},\ \text{Lemma 3.1}\\
& = & \bigcap_{A\perp y}{}^{\perp}\{y\} & \text{By axiom (I5)}\\
& = & A. & \text{By meet-density of open elements}
\end{array}$$

特别地，我们有 $A \subseteq \overline{\eta}_\vee(C)$ 当且仅当 $\overline{\eta}_\wedge\overline{\eta}_\vee(C) \subseteq \overline{\eta}_\wedge(A)$ 当且仅当 $C \subseteq \overline{\eta}_\wedge(A)$，因此 $\overline{\eta}_\vee, \overline{\eta}_\wedge$ 在 $\mathsf{G}(X)$ 上构成一个伽罗瓦连接（事实上，正如上文刚刚证明的，它们构成一个对偶等价）。然而，我们已经根据方程 (17) 证明，$\overline{\eta}_\vee$ 与映射 $\overline{\zeta}_\vee$ 伽罗瓦相连，由此利用伴随的唯一性，可以得出 $\overline{\eta}_\wedge = \overline{\zeta}_\vee$。

因此，进一步地，如果不相容关系 $\asymp = S_\vee'$ 是对称的，那么根据引理 3.12，我们可以得出 $\overline{\eta}_\wedge = \overline{\zeta}_\vee = \overline{\eta}_\vee$。 □

推论 3.15（对应）。设 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y, S_\vee)$ 是一个满足表 2 中公理 (F0)–(F4) 的框架，并设 $\mathfrak{F}^+ = (\mathrm{G}(X) \subseteq, \bigcap, \bigvee, \varnothing, X, (\,)^*)$ 是其伽罗瓦稳定集的全复代数。

1. $\mathfrak{F}^+$ 是一个完备格，其稳定集上带有最小拟补算子 $(\,)^*$。2. $\mathfrak{F}^+$ 是一个完备格，其稳定集上带有拟补算子 $(\,)^*$；当且仅当 $\perp$ 对称时，该算子是伽罗瓦连接。3. 当且仅当 (a) $\perp$ 对称，且 (b) 框架满足表 3 中的公理 (I1)–(I5) 时，$\mathfrak{F}^+$ 是一个带有对合 $(\,)^*$ 的完备格。4. 当且仅当 (a) $\perp$ 对称，(b) 无自反性，且 (c) 框架满足表 3 中的公理 (I1)–(I5) 时，$\mathfrak{F}^+$ 是一个完备正交格。5. 若 (a) $\perp$ 对称，(b) 框架满足公理 (I1)–(I5)，且 (c) 上界关系 $R_\leq \subseteq X \times (X \times X)$ 的伽罗瓦对偶关系 $R'_\leq$ 的截面稳定，其中 $uR_\leq xz$ 当且仅当 $x \leq u$ 和 $z \leq u$，则 $\mathfrak{F}^+$ 是一个完备德摩根代数。6. 若框架满足前一种情形的条件 (a)–(c)，且 (d) $\perp$ 具有无自反性，则 $\mathfrak{F}^+$ 是一个完备布尔代数。

证明。由引理 3.12、3.13、3.14 和定理 3.4 可立即得出。 □

推论 3.16（可靠性）。推论 3.15 中的每种情形都意味着，相应簇的逻辑在其框架类中是可靠的，因为该框架类由各情形对应的条件所确定。□

4 NLE 的无选择表示

在我们的格表示和对偶性 [32, 33] 中，所采用的策略是通过表示平凡伽罗瓦连接（恒等映射）$\imath : \mathrm{L}_\wedge \trianglerighteq (\mathrm{L}_\vee)^{\mathrm{op}}$ 作为二元关系，将格 L 的表示与其两个半格约化 $\mathrm{L}_\wedge$、$\mathrm{L}_\vee$ 的表示结合起来，从而推广 Goldblatt [23] 对正交格的表示。这里我们采用相同的方法，只是将 Stone 拓扑改为谱拓扑，因此我们先讨论半格情形。

4.1 半格表示

在本文余下部分中，交半格和格的主滤子通常用记号 x_a (= $a{\uparrow}$) 表示，其中 a 是（半）格的一个元素。并半格和格的主理想则类似地用 y_a = $a{\downarrow}$表示。我们通常用 x、z表示滤子，用 y、v表示理想，用 u、w表示两者。

设 M $=(M,\leq,\wedge,1)$ 是一个带有单位（顶）元 1 的交半格，且X = Filt(M) 是其真滤子集合（我们假设滤子非空，即对于任意 $x \in X$， $1 \in x$）。对于每个 $a \in M$，令 $X_a = \{x \in X \mid a \in x\}$ 且 B $= \{X_a \subseteq X \mid a \in M\}$，并注意到 $X_a \cap X_b = X_{a\wedge b} \in$ B，因此 B 本身是一个以 $X = X_1$ 为单位元的交半格。

令 $\mathfrak{X}$ = (X, B) 为一个拓扑空间，其载体集为 X，拓扑 Ω 由以 B 为基生成。我们称 $\mathfrak{X}$ 为 M 的对偶空间。

引理 4.1. 设 M 和 $\mathfrak{X}$ 如上。给定开集格 Ω($\mathfrak{X}$) 中的一个滤子 F，其中开集属于 $\mathfrak{X}$，定义 $x_{\mathcal{F}} = \{a \in M \mid X_a \in$ F$\}$，并注意到 $x_{\mathcal{F}}$ 是 M 的一个滤子，因为 F 是滤子。

1. 对任意基本开集 $X_a \in$ B， $x_{\mathcal{F}} \in X_a$ 当且仅当 $X_a \in$ F。
2. 对 $\mathfrak{X}$的任意开集 U，若 $x_{\mathcal{F}} \in U$，则 $U \in$F。
3. 若 F 是开集格 Ω($\mathfrak{X}$) 中的完全素滤子，其中开集属于 $\mathfrak{X}$，则$x_{\mathcal{F}} \in U$ 当且仅当 $U \in$ F。

证明. 断言 (1) 显然，由 $x_{\mathcal{F}}$的定义可得。

对于 (2)，若 U 是开集，令 $E \subseteq M$ 满足$U = \bigcup_{e\in E} X_e$。若 $x_{\mathcal{F}} \in U$，则令 $e \in E$ 为满足 $x_{\mathcal{F}} \in X_e$的一个元素。由 (1)， $X_e \in\in$F；又由于 $X_e \subseteq U$ 且 F 是一个滤子，因此可得 $U \in\in$F。

对于 (3)，在上述 (2) 的基础上，只需证明：若 F 是完全素的且$U \in\in$F，则 $x_{\mathcal{F}} \in U$。现在，对某个 $E \subseteq M$，有$U = \bigcup_{e\in E} X_e$；于是由 F 的完全素性可得，对某个 $e \in E$， $X_e \in\in$F。进而由 (1) 可得 $x_{\mathcal{F}} \in X_e \subseteq U$。 □

回顾一下，对于拓扑空间中的点 x，其开邻域 $N^o(x)$ 定义为包含 x 的开集所构成的集合。这引出了由拓扑诱导的偏序——特化序，其定义为：$x \sqsubseteq u$ 当且仅当 $N^o(x) \subseteq N^o(u)$。给定任意空间 $\mathfrak{X}$， $\mathfrak{X}$ 的滤子 F 是一个非空上集（相对于 $\mathfrak{X}$ 上的特化序 $\sqsubseteq$），并且对于任意的 x、$z \in F$，$\{x, z\}$ 的一个下界 $u \in X$ 属于 F。我们沿用 [44] 的记法，用 KOF($\mathfrak{X}$) 表示 $\mathfrak{X}$ 的紧开滤子族。

请读者注意，下一条命题中的紧致性证明考察的是由拓扑基中的集合构成的开覆盖。这与我们在 [31]，中对同一结果的证明形成对比：在 [31] 中考虑的 Stone 拓扑由子基生成，因此需要借助 Alexander 子基引理，从而使 [31] 的证明依赖于假设佐恩引理。

命题 4.2. 设 M 为交半格， $\mathfrak{X}$ = (X,B) 为其对偶拓扑空间（其中 X = Filt(M)，且 B $= \{X_a \mid a \in M\}$ 是 X 上拓扑 Ω 的一个基）。

1. 空间 $\mathfrak{X}$ 是一个谱空间。
2. $\mathcal{B} = \{X_a \mid a \in M\} =$ KOF($\mathfrak{X}$).

证明。回顾一下，若一个拓扑空间是 T_0、相干、紧致且素性空间，则称其为谱空间。为证明第（1）部分，我们将逐一证明这些性质。

对于 T_0 性质，若 $x \neq z$ 是不同的滤子，不失一般性，我们可以假设 $a \in x$，但对于某个半格元素 $a \in M$，有 $a \notin z$。于是开集 X_a 分离了 x、z，因为 $x \in X_a$，但 $z \notin X_a$。

对于相干性，我们验证拓扑的基 B 由紧开集组成，且对有限交封闭。对于后一个要求，很容易看出 B 对有限交封闭，因为$X_a \cap X_b = X_{a\wedge b}$，而空族 $X'_a s$ 的交集本身就是 X，这与 $X_1 =\{x \in X \mid 1 \in x\}$相同。对于相干性的第一个要求，根据拓扑的定义，$X'_a s$ 当然是开集。为了证明紧致性，令$C \subseteq M$，并假设 $\{X_e \mid e \in C\}$覆盖了 X_a，即 $X_a \subseteq \bigcup_{e\in C} X_e$。那么，对于某个 $e \in C$，主滤子 $x_a = a\uparrow \in X_a$ 属于 X_e，因此 $e \in x_a$，即 $a \leq e$。于是，对任意 $x \in X_a$，都有 $e \in x$，这表明 $X_a \subseteq X_e = \{z \in X \mid e \in z\}$。因此，对于这个 e，$\{X_e\}$是 X_a所需的有限子覆盖。

由于 $X = X_1 = \{x \in X \mid 1 \in x\}$，根据前面的论证可知 $\mathfrak{X}$ 紧致。

该空间的素性等价于以下要求：格 $\Omega(\mathfrak{X})$ 中的每个完全素滤子 F（ $\mathfrak{X}$ 的开集格）都由单个点 $x_{\mathcal{F}}$ 生成，换言之，$\mathrm{F} = \{U \in \Omega(\mathfrak{X}) \mid x_{\mathcal{F}} \in U\}$。引理 4.1 的第 (3) 部分证明了这一点。

对于从左到右的第 (2) 部分，根据本命题第 (1) 部分中关于 $\mathfrak{X}$ 的相干性的证明，X_a 是紧开集。此外，$x \in X_a$ 当且仅当 $a \in x$，当且仅当 $x_a \subseteq x$，当且仅当 $x \in \Gamma x_a$。因此，X_a 是一个（主）滤子。

反过来，设 $F \subseteq X$ 是 X 的一个紧开滤子。由于它是开集，设 $F = \bigcup_{a\in E\subseteq M} X_a$，那么由紧致性可知，对某个 n，有 $F = X_{a_1} \cup \cdots \cup X_{a_n}$。根据 $a_i\uparrow = x_{a_i} \in X_{a_i} \subseteq F$，所有 x_{a_i}，其中 $i = 1, \ldots, n$，都属于 F，因此它们的交（交集）也属于 F，因为 F 是一个滤子。令 $u = \bigcap_{i=1}^{n} x_{a_i}$，并证明 $F = \Gamma u = u\uparrow$。由于 $u \in F$ 是一个滤子，因此显然有从右到左的包含关系，故 $\Gamma u \subseteq F$。反过来，设 $z \in F$，则对某个 $k \in \{1, \ldots, n\}$，有 $z \in X_{a_k} = \Gamma x_{a_k}$，从而 $x_{a_k} \subseteq z$。根据 u 的定义，我们得到 $u \subseteq x_{a_k} \subseteq z$，进而得到 $z \in \Gamma u$。因此也可推出 $F \subseteq \Gamma u$。于是 $F = \Gamma u = \bigcup_{i=1}^{n} X_{a_i}$，从而对某个 i，有 $u \in X_{a_i} = \Gamma x_{a_i}$。但此时 $x_{a_i} \subseteq u = \bigcap_{i=1}^{n} x_{a_i} \subseteq x_{a_i}$，因此，对于这个 i，有 $u = x_{a_i}$，所以$F = \Gamma x_{a_i} = X_{a_i} \in$B。 □

需要指出的是，除措辞、符号和细节外，引理 4.1 和命题 4.2 的证明与证明布尔代数的真滤子空间是谱空间 [4, 命题 3.12], 或证明正交格的真滤子空间是谱空间 [43, 命题 3.4.1]时所涉及的论证相同。论证中真正相关的只是半格结构，这也是我们给出命题 4.2 证明的原因之一；另一个原因与 [31, 33]中所作的观察有关，即格总可以看作对偶同构的交半格图。对于布尔代数和正交格，这种对偶性分别可以取为布尔补或正交补。对于一般的有界格，半格对偶性可以取为

恒等映射 $\imath : \mathrm{L}_\wedge \leftrightarrows (\mathrm{L}_\vee)^\partial$，其中 $\mathrm{L}_\vee = (\mathrm{L}_\wedge)^\partial$，如 [31,33], 中所述，后文将对此作更详细的解释。

注意， X 上的拓扑 Ω 是斯科特拓扑，其对应于 X [38, chapter II.1], 上的特化序 $\sqsubseteq$ ，即滤子（M）的包含关系。要证明特化序与滤子包含关系一致，注意若 $x \sqsubseteq z$，即 $N^o(x) \subseteq N^o(z)$ 且 $a \in x$，则 $x \in X_a \in N^o(x) \subseteq N^o(z)$，因此也有 $z \in X_a$，即 $a \in z$ ，从而 $x \subseteq z$。反过来，若 $x \subseteq z$ 且 U 是X的一个开邻域，取一个基本开集 X_a 使得 $x \in X_a \subseteq U$。由 $x \in X_a$ 可得 $a \in x \subseteq z$，因此也有 $z \in X_a \subseteq U$，进而 $U \in N^o(z)$，即 $N^o(x) \subseteq N^o(z)$，按定义这意味着 $x \sqsubseteq z$。

根据命题 4.2，空间 $\mathfrak{X}$ 是一个 HMS 空间（在 [44], 中以 Hofmann、Mislove 和 Stralka 的名字命名），其定义由 [44, 定理 2.5]）中的一组等价条件给出。

以下表示定理是命题 4.2 的直接推论。

推论 4.3. 给定一个交半格 M，映射 $a \mapsto X_a$ 是一个半格同构 M ≃ KOF(Filt(M))。□

4.2 格的典范对偶空间

若 N 是带单位（最小）元 0 的并半格，则 N^∂ （对偶半格，序反转）是带单位（最大元）的交半格，并且 $\mathrm{Filt}(\mathrm{N}^\partial) = Y = \mathrm{Idl}(\mathrm{N})$，即 N 的真理想集。由基 $Y^a = \{y \in Y \mid a \in y\}$（其中 $a \in N$）生成的拓扑，根据命题 4.2 是谱拓扑；注意到 $Y^a \cap Y^b = Y^{a \vee b}$，这保证基 $\mathsf{C} = \{Y^a \mid a \in N\}$ 对有限交封闭（空交为 $Y_0 = Y$本身）。

对于格的情形，正如正交否定在 [23] 中由二元关系 $\perp \subseteq X \times X$ 表示，该关系定义为 $x \perp z$ 当且仅当 $\exists a (a \in x \wedge a^\perp \in z)$，恒等平凡对偶性 $\imath : \mathrm{L} \simeq (\mathrm{L}^\partial)^\partial$ 同样由多类型二元关系$\perp\!\!\!\perp \subseteq X \times Y$表示 [31,33] ，该关系定义为 $x \perp\!\!\!\perp y$ 当且仅当 $\exists a (a \in x \wedge \imath(a) \in y)$ 当且仅当 $x \cap y \neq \varnothing$。

请注意，公理 (F0) 所规定的拟串行性条件对于典范伽罗瓦关系 $\perp\!\!\!\perp$ 的补关系成立。

与 [33], 中一样，我们更一般地在拓扑化多类型框架（极性） $\mathfrak{F} = (X, \perp\!\!\!\perp, Y, (R_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{T}})$ 中表示格和正规格扩张。对于每个分配类型为 $\sigma = (i_1, \ldots, i_n; i_{n+1})$ 的正规格算子 f，框架都配备了一个类型为 $\sigma = (i_{n+1}; i_1 \cdots i_n)$ 的多类型关系 R_σ ，即 $R_\sigma \subseteq Z_{i_{n+1}} \times \prod_{j=1}^n Z_{i_j}$ ；并且当 $i_j = 1$ 时， $Z_{i_j} = X$ ；当 $i_j = \partial$ 时， $Z_{i_j} = Y$。

命题 4.4. 对于有界格 L，空间 $\mathfrak{X} = (X, \mathsf{B})$ $\mathfrak{Y} = (Y, \mathsf{C})$ 的基 $\mathsf{B} = \{X_a \mid a \in L\}$ 和 $\mathsf{C} = \{Y^a \mid a \in L\}$ 分别是紧开伽罗瓦稳定集和余稳定集的族，其中 $X = \mathrm{Filt}(\mathrm{L})$，且 $Y = \mathrm{Idl}(\mathrm{L})$。此外，B 和 C 是对偶同构有界格，其中 B 是 $\mathsf{G}(X)$ 的子格，C 是 $\mathsf{G}(Y)$ 的子格。

证明。B 和 C 的两种情形类似。证明由 [33,引理 2.7] 得出。该引理以豪斯多夫

空间中的开闭集为表述对象；这些集合因而是紧开集，而紧致性和（余）稳定性是论证中唯一需要并用到的性质。除此之外，[33, 引理 2.7] 中的论断是以交半格之间的任意对偶性 $\ell : \mathrm{S} \backsimeq \mathrm{K}^{\partial} : r$ 来表述的。格的情形可通过将论证特化到平凡对偶性 $\ell = r = \imath : \mathrm{L}_{\wedge} \leftrightarrows (\mathrm{L}_{\vee})^{\partial}$ 得出，我们将在下文这样做。

首先，根据引理 3.1，并注意到$X_a = \Gamma x_a$ 和 $Y^a = \Gamma y_a$，可知集合 X_a, Y^a 的稳定性成立。剩下只需证明，每个稳定紧开子集 A of X 都具有形式 X_a，其中 $a \in L$是某个格元素。

假设 $A = A''$ 是紧开集，且令 $x \notin A = A''$。设 $y \in A'$ 是一个理想，使得 $x \not\perp y$，即 $x \cap y = \varnothing$。根据 $y \in A'$，有 $A \perp y$，也就是说，对任意 $z \in A$，都有 $z \perp y$，即存在某个格元素 a_z，使得 $a_z \in z \cap y$。因此$A \subseteq \bigcup_{z \in A} X_{a_z}$，并且根据紧致性可知，存在某个 n，使得 $A \subseteq X_{a_{z_1}} \cup \cdots \cup X_{a_{z_n}}$。令 $a_x = a_{z_1} \vee \cdots \vee a_{z_n}$，则对所有 $i = 1, \ldots\ldots, n, X_{a_{z_i}} \subseteq X_{a_x}$，因此 $A \subseteq X_{a_x}$。注意，$a_x \notin x$，因为 $a_x \in y$。因此 $x \notin X_{a_x}$。这说明 A 的补关系包含于 X_{a_x}的补关系中；又由于我们还得到了 $A \subseteq X_{a_x}$，可知 $A = X_{a_x}$。

B、C 都是（对偶同构的）格，这一点可由 $(X_a)' = Y^a$ 和 $(Y^a)' = X_a$ 得出。B、C 中的并通过取并集的闭包来定义：$A \vee C = (A \cup C)''$，与 G(X) 和 G(Y) 中的定义相同。□

令 KOG(𝔛),KOG(𝔜) 分别表示 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{Y}$ 中伽罗瓦紧开子集构成的族。根据命题 4.2 和 4.4，KOF($\mathfrak{X}$) = KOG($\mathfrak{X}$)，且 KOF($\mathfrak{Y}$) =KOG($\mathfrak{Y}$)。

以下无选择格表示定理是本文迄今所得结果的直接推论。

定理 4.5（无选择格表示）。设 L =($L, \leq, \wedge, \vee$, 0, 1) 是一个有界格，且 $(X, \perp, Y)$ 是其对偶滤子-理想框架（X =Filt(L) Y =Idl(L)），其中 $\perp \subseteq X \times Y$ 定义为：$x \perp y$ 当且仅当 $x \cap y \neq \varnothing$。令 $\mathfrak{X}$ = (X, B) 和$\mathfrak{Y}$ = (Y, C) 分别为由基 B = { $X_a \mid a \in L$} 和 C = {$Y^a \mid a \in L$} 生成的谱空间。

于是，映射 $a \mapsto X_a$ 是格 L $\backsimeq$KOG($\mathfrak{X}$) 的格同构，而映射 $a \mapsto Y^a$ 是格 $\mathrm{L}^{\partial} \backsimeq$ KOG($\mathfrak{Y}$) 的对偶同构。□

上述（半）格的表示与该作者和 Dunn 在 [33], 中给出的表示本质上相同，区别在于滤子空间所赋予的拓扑选择不同。伽罗瓦稳定集构成的格 G(X) 是该格的典范扩张，见 [22, 命题 2。6], 根据 [22,命题 2.7]，这一扩张在与格嵌入相容的同构意义下是唯一的。

Moshier 和 Jipsen [44] 给出了格的典范扩张的一种拓扑构造。命题 4.4 与典范扩张在同构意义下的唯一性共同表明，格的滤子空间就是 Moshier 和 Jipsen 所称的 BL-空间，其由 [44, 定理 3.2]中的若干等价条件定义。可以很容易验证，在 [44] 中定义的典范扩张 FSat(X) 与 G(X) 完全相同。我们将在下文论证这一结论。首先回顾一下，OF(X) 在 [44] 中表示开滤子族

属于 X = Filt(L)，而闭包算子 fsat 定义为 fsat(U) $=\bigcap\{F \in \mathrm{OF}(X) \mid U \subseteq F\}$。

命题 4.6. 以下结论成立：

1. 伽罗瓦稳定集 $A = A''$ 是 X =Filt(L) 的滤子，同理，伽罗瓦余稳定集 $B = B''$ 是 Y =Idl(L) 的滤子。2. 每个开滤子 $F \in \mathrm{OF}(X)$ 都可表示为 $\triangleq\{y\}$，其中理想 $y \in Y$ = Idl(L) 由框架的分离性唯一确定（见引理 3.1）。3. 对任意子集 $U \subseteq X$，fsat(U) = U''。因此，FSat(X) = G(X)。

证明。对于第 (1) 部分，证明很直接，我们只讨论稳定集的情形。首先，根据引理 3.1，伽罗瓦集都是上集。现在设 $x, z \in A = A''$，并假设 $x \cap z \notin A''$。那么存在一个理想 $y \in A'$，使得 $(x \cap z) \not\perp y$，即 $(x \cap z) \cap y = \varnothing$。由于 $x, z \in A''$，我们有 $x \cap y \neq \varnothing$ 和 $z \cap y \neq \varnothing$，因此存在格元素 a, b，使得 $a \in x \cap y$ 和 $b \in z \cap y$。这意味着 $a, b \in y$ 均成立，故 $a \vee b \in y$。但 x, z 是滤子，因此 $a \vee b \in x \cap z$，这与假设 $x \cap z \notin A''$ 矛盾。

对于（2），对任意 $y \in Y$, $\triangleq\{y\}$，它都是伽罗瓦稳定的，因此根据（1），它是 X 的滤子。为说明它是一个开集，设 $x \in \triangleq\{y\}$，即 $x \perp y$，使得 $a \in x \cap y \neq \varnothing$。因此 $x \in X_a$。由于 $a \in y$, $X_a \perp y$，所以我们得到 $x \in X_a \subseteq \triangleq\{y\}$。因此，对任意 $y \in Y$，$\triangleq\{y\} \in \mathrm{OF}(X)$。

反过来，设 $F \in \mathrm{OF}(X)$，并设 $E \subseteq L$ 满足 $F = \bigcup_{a \in E} X_a$。令 y 为由 E 生成的理想。因此，$e \in y$ 当且仅当存在 $e_1, \ldots, e_n \in E$，对于某个 n，使得 $e \leq e_1 \vee \cdots \vee e_n$。我们证明，对于这个 y，有 $F = \triangleq\{y\}$。

若 $x \in F = \bigcup_{a \in E} X_a$，则对某个 $a \in E$，有 $x \in X_a$。根据 y 的定义，我们得到 $a \in y$，因此 $x \perp y$，即 $x \in \triangleq\{y\}$。于是 $F \subseteq \triangleq\{y\}$。反过来，设 $x \perp y$，使得 $e \in x \cap y$。那么 $e \leq e_1 \vee \cdots \vee e_n$，其中 $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq E$。由此可得 $x_{e_1} \cap \cdots \cap x_{e_n} = x_{e_1 \vee \cdots \vee e_n} \subseteq x_e \subseteq x$。由于 $e_i \in E$，我们有 $X_{e_i} \subseteq F$。因为 $x_{e_i} \in X_{e_i}$，所有主滤子 x_{e_1}、.....、$x_{e_n} \in F$。由于 F 是一个滤子，它们的交集属于 F，进而也属于 $x \in F$。因此 $\triangleq\{y\} \subseteq F$。

对于 (3)，由引理 3.1 可知，开元素集合 $\triangleq\{y\}$ 在 G(X) 中交稠密。由上文的 (2) 可知，OF(X) = $\{\triangleq\{y\} \mid y \in Y\}$。再根据 [44] 中 F-饱和的定义，可得

$$\mathtt{fsat}(U) = \bigcap\{F \in \mathtt{OF}(X) \mid U \subseteq F\} = \bigcap\{\triangleq\{y\} \mid U \perp y\} = U''$$

因此 FSat(X) = $\{A \subseteq X \mid A = \mathrm{fsat}(A)\}$ = $\{A \subseteq X \mid A = A''\}$ = G(X)。 □

4.3 正规格算子的表示

设 L =$(L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, f)$ 是一个带有正规算子 f 的有界格。则f 可扩张为完全正规算子 F，其分配类型与f相同，定义在 L 的典范扩张 G(Filt(L)) 上。

关于证明，请参阅 [31, 第 3.1、4.1、4.2] 节。该算子的表示与 [26], 中给出的相同，区别在于

格扩张的对偶框架的公理化，尤其是与格算子对应的关系所满足的公理。表示的具体实例也见于 [34]，近期还见于蕴涵格和海廷代数的无选择对偶 [30]。

为了尽可能使本文内容自足，我们借鉴 [31, 第 4 节1]，简要说明表示步骤。

典范框架的底层极性 $\mathfrak{F} = (\mathbf{Filt(L)}\ \perp, \mathbf{Idl(L)})$由格的真滤子集 $X = \mathbf{Filt(L)}$和真理想集 $Y = \mathbf{Idl(L)}$，以及关系 $\perp \subseteq \mathbf{Filt(L)} \times \mathbf{Idl(L)}$构成，该关系定义为 $x \perp y$ 当且仅当 $x \cap y \neq \varnothing$；表示映射 ζ_1 则将格元素 $a \in L$ 映射为包含该元素的真滤子集合，

$$\zeta_1(a) = X_a = \{x \in X \mid a \in x\} = \{x \in X \mid x_a \subseteq x\} = \Gamma x_a.$$

类似地，余表示映射 ζ_∂ 定义如下：

$$\zeta_\partial(a) = \{y \in Y \mid a \in y\} = \{y \in Y \mid y_a \subseteq y\} = \Gamma y_a = Y^a.$$

对于每个分配类型为 $\delta = (i_1, \ldots, i_n;\ i_{n+1})$的正规格算子，都定义一个关系，使得 $\sigma = (i_{n+1}; i_1 \cdots i_n)$是该关系的排序类型。不失一般性，我们只需考虑两个正规算子 f（其输出类型为 $\mathbf{1}$）和 h（其输出类型为 ∂）。我们定义两个相应的关系 R, S，其排序类型分别为 $\sigma(R) = (\mathbf{1};\ i_1 \cdots i_n)$和 $\sigma(S) = (\partial;\ t_1 \cdots t_n)$，其中对于每个 j，i_j和 t_j都属于$\{\mathbf{1}, \partial\}$。换言之，$R \subseteq X \times \prod_{j=1}^{j=n} Z_{i_j}$，而$S \subseteq Y \times \prod_{j=1}^{j=n} Z_{t_j}$。

为定义这些关系，我们使用 [25] 中引入的点算子（另见 [26]）。在所考察的一般情形下，我们需要定义两个类型的算子

$$\widehat{f} : \prod_{j=1}^{j=n} Z_{i_j} \longrightarrow Z_1 \qquad \widehat{h} : \prod_{j=1}^{j=n} Z_{t_j} \longrightarrow Z_\partial \qquad (\text{recall that } Z_1 = X, Z_\partial = Y).$$

暂且假设点算子已经定义，典范关系 R、S 由式 (20) 定义，其中 $\vec{u} = u_1 \cdots u_n$，$\vec{v}$ 同理，

$$\begin{aligned} xR\vec{u} \quad &\text{iff} \quad \widehat{f}(\vec{u}) \subseteq x \ \ (\text{for } \ x \in X = \mathrm{Filt}(\mathbf{L}) \ \text{ and } \ \vec{u} \in \prod_{j=1}^{j=n} Z_{i_j}), \\ y S \vec{v} \quad &\text{iff} \quad \widehat{h}(\vec{v}) \subseteq y \ \ (\text{for } \ y \in Y = \mathrm{Idl}(\mathbf{L}) \ \text{ and } \ \vec{v} \in \prod_{j=1}^{j=n} Z_{t_j}). \end{aligned} \tag{20}$$

回到点算子，令 x_e、y_e 分别为由格元素 e 生成的主滤子和主理想。对于 $\vec{u} \in \prod_{j=1}^{j=n} Z_{i_j}$ 和 $\vec{v} \in \prod_{j=1}^{j=n} Z_{t_j}$，它们统一定义如下，其中 $\vec{a} \in \vec{u}$ 是成员关系陈述 $\bigwedge_{i=1}^{n} (a_i \in u_i)$ 的合取的缩写，

$$\widehat{f}(\vec{u}) \ = \ \bigvee \{x_{f(\vec{a})} \mid \vec{a} \in \vec{u}\} \qquad\qquad \widehat{h}(\vec{v}) \ = \ \bigvee \{y_{h(\vec{a})} \mid \vec{a} \in \vec{v}\}. \tag{21}$$

换句话说，$\widehat{f}(\vec{u})$ 是由集合 $\{f(\vec{a}) \mid \vec{a} \in \vec{u}\}$ 生成的滤子。类似地，$\widehat{h}(\vec{v})$ 是由集合 $\{h(\vec{a}) \mid \vec{a} \in \vec{v}\}$ 生成的理想。

尽管定义方式不同，Moshier-Jipsen 对拟算子 [45] 的表示——将其视为 $\widehat{\ }\widehat{\ }$ 对偶空间上的强连续且保持有限交的点算子——与上文定义的表示映射 f, h 完全相同，正如我们在备注 4.2、备注 4.8] 中所详述的那样。

在下一节中，我们将定义具体化到拟补格的情形，并借助 [31] 来确立典范框架的性质。

5 拟补格的表示

本节将第 4.2 节中的格表示推广到带有额外拟补算子的格，并假设其公理化至少满足图 1 中的最小系统，同时对第 4.3 节的构造作具体化。

典范对偶框架是结构 $(X, \perp, Y, S_\vee)$，其中 $X = \mathrm{Filt(L)}$，$Y = \mathrm{Idl(L)}$，$\perp \subseteq X \times Y$由 $x \perp y$ 当且仅当 $x \cap y \neq \varnothing$ 定义，而 $S_\vee \subseteq Y \times X$ 是使用点算子 $\widehat{\nu} : X \to Y$定义的典范关系，依据 [31, 方程 (4.1)、方程 (4.2)]。将其具体化到当前情形，定义由方程 (22)给出

$$\widehat{\nu}(x) = \bigvee \{ y_{\nu a} \mid a \in x \} \qquad y S_\vee x \text{ iff } \widehat{\nu}(x) \subseteq y \qquad (x \in X, y \in Y). \tag{22}$$

其中，回忆一下， y_e 表示由格元素 e生成的主理想。

由上述定义可知，典范关系 $S_\vee \subseteq Y \times X$等价地由条件（23）定义

$$y S_\vee x \text{ iff } \forall a \in L (a \in x \longrightarrow \nu a \in y). \tag{23}$$

同样，根据定义可得，其伽罗瓦对偶关系 $S'_\vee \subseteq X \times X$ 定义如下

$$z S'_\vee x \text{ iff } \forall y \in Y (y S_\vee x \longrightarrow z \perp y) \text{ iff } z \perp \widehat{\nu}(x) \text{ iff } \exists a \in L (a \in x \text{ and } \nu a \in z). \tag{24}$$

证明细节很直接，且属于 [31, 引理 4.4、引理 4.5]中任意正规格算子一般情形证明的实例。

回忆一下， $S_\vee x = \Gamma(\widehat{\nu}(x))$，因此 $S'_\vee x = \{\widehat{\nu}(x)\}' = {}^{\perp}\{\widehat{\nu}(x) \quad \}$.

分类型像算子 $\eta_S : \wp(X) \to \wp(Y)$由关系$S_\vee$生成，该关系由公式（6）定义。将 η_S 限制在稳定集上的闭包记作$\overline{\eta}_S$，其定义见公式（7）。

命题 5.1。在典范格框架中，表 2 的所有公理均成立。特别地，伽罗瓦对偶关系 $S'_\vee$ 的两个截面都是典范关系$S_\vee$ 的伽罗瓦集。

证明。公理 (F1)–(F3) 的证明见 [31, 引理 4.3] ，该引理针对任意正规格格算子的一般情形。对于公理 (F4)，该结论最初

表述为 [29, 引理 25]，并详细证明了其中一个子情形；另一个子情形与之充分相似。另一个子情形被省略的证明见 [31, 引理 4.6]。典范框架显然满足公理 (F0)，因为对于任意 $a \notin x$，每个真滤子 x 都不与主理想 y_a相交。理想的情形也类似。 □

根据 [31, 定理 3.12], 以及命题 5.1， $\overline{\eta}_S$ 将 G(X) 中稳定集的任意并映射为 G(Y) 中余稳定集的并。

正规格算子 ν 的典范扩张 $\overline{\eta}_\vee : \mathsf{G}(X) \to \mathsf{G}(X)$ 是通过将 $\overline{\eta}_S$ 与伽罗瓦连接复合得到的，令 $\overline{\eta}_\vee(A) = (\overline{\eta}_S(A))' \in \mathsf{G}(X)$，于是 $\overline{\eta}_\vee(A) = \bigcap_{x\in A} S'_\vee x$，其中 $S'_\vee$ 是 $S_\vee$ 的伽罗瓦对偶关系。由 (7) 可得 $\overline{\eta}_\vee(A) = \bigcap_{x\in A} {}^{\perp}\{\widehat{\nu}(x)\}$。

用 [22] $\overline{\eta}_\vee = \nu^\pi$ 的术语来说，这是格算子 ν 的 π-扩张，定义如下：

$$\nu^\pi(A) = \bigcap_{x\in A} {}^{\perp}\{\widehat{\nu}(x)\} = \bigcap_{x\in A} S'_\vee x = \overline{\eta}_\vee(A) = {}^{\perp}(\overline{\eta}_S(A)) = {}^{\perp}(\eta_S(A)). \tag{25}$$

由 [29, 第 3 节中的一般证明可知， $\overline{\eta}_\vee$ 确实是拟补算子 ν 的 π-扩张 ν^π：该证明表明，将由典范框架关系 R 按照方程 (20) 生成的像算子 α_R 限制到伽罗瓦集上，再取其闭包 $\overline{\alpha}_R$，并与伽罗瓦连接作适当复合（从而在 G(X) 上得到单类型算子）所定义的算子，确实是相应格算子的典范扩张（σ，或者根据其输出类型，为 π-扩张）。

与第 3.2 节、定义 3.5 中一样，我们将不相容关系 $\perp \subseteq X \times X$ 定义为典范框架关系 $S_\vee$ 的伽罗瓦对偶关系 $S'_\vee$，并令 $A^* = \{x \mid x \perp A\} = \{x \in X \mid \forall z\,(z \in A \to x \perp z)\}$。由引理 3.8，$A^* = \nu^\pi(A) = \overline{\eta}_\vee(A)$。

引理 5.2. 若 L 是拟补格，则格同构 L $\cong$ KOG(Filt(L)) 实际上是拟补格之间的同构。

证明. 只需证明表示函数（它将格元素 a 映射为集合 $X_a = \{x \in \mathsf{Filt(L)} \mid a \in x\} = \Gamma x_a$ ）是拟补格的同态，即 $(X_a)^* = X_{\nu a}$。

$$\begin{aligned}(X_a)^* &= (\Gamma x_a)^* = \overline{\eta}_\vee(\Gamma x_a) && \text{根据引理 3.8，由 } \overline{\eta}_\vee \\ &= (\overline{\eta}_S(\Gamma x_a))' && \text{的定义，根据引理} \\ &= S' x_a && \text{3.6，依据同一个引理。} \\ &= {}^{\perp}\{\widehat{\nu}(x_a)\}\end{aligned}$$

由方程 (22) 中 $\widehat{\nu}$ 的定义可知，对于主滤子 x_a，理想 $\widehat{\nu}(x_a) = \bigvee\{y_{\nu e} \mid a \le e\}$ 是主理想 $y_{\nu a}$。此外，对于任意主理想 y_c 和滤子 x， $x \perp y_c$ 当且仅当 $c \in x$。因此

$$\begin{aligned}(X_a)^* &= {}^{\perp}\{\widehat{\nu}(x_a)\} \\ &= {}^{\perp}\{y_{\nu a}\} = \{x \in X \mid \nu a \in x\} \\ &= X_{\nu a}\end{aligned}$$

由此证明了该引理所述的结论。 □

命题 5.3. 设 L 是一个拟补格，$\mathrm{L}_+ = \mathfrak{F}$ 是其典范框架。那么，全复代数 $\mathfrak{F}^+ = (\mathrm{G}(X) \subseteq, \bigcap, \bigvee, \varnothing, X, \nu^\pi)$（其中定义 $\nu^\pi(A) = {}^{\perp}\eta_S(A)$）是 L 的一个典范扩张，其嵌入映射为 $h(a) = X_a = \{x \in X \mid a \in x\}$。

证明。格 $\mathrm{G}(X)$ 是 L 的典范扩张，这一结论的证明见 [22, 命题 2.6]。ν^π 确实是拟补算子 ν 的 π-扩张，这一点早已指出；其证明是 [29, 第 3.3]节中相应论证的一个实例。 □

最后还需证明，对于图 1 中每个拟补格簇，KOG(Filt(L)) 不仅是全复代数 $\mathfrak{F}^+$ 的子格，而且还是 L 的典范框架 $\mathfrak{F} = \mathrm{L}_+$ 的子代数，并且它还是 L 的典范扩张。

定理 5.4。设 $\mathrm{L} = (L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, \nu)$ 是一个带有反调映射 ν的有界格。若 L 属于图 1 中的某个格簇，则其典范框架的全复代数 $(\mathrm{G}(X) \subseteq, \bigcap, \bigvee, \varnothing, X, \nu^\pi)$ 也属于该格簇。换言之，图 1 中的每个簇都在典范扩张下封闭。

证明。我们依次处理 ν 的情形。

情形 1：最小拟补。

根据截面 3.2 和 4.3 的结果，$\nu^\pi = (\,)^* : \mathrm{G}(X) \to \mathrm{G}(X)$ 关于 $\mathrm{G}(X)$ 中的任意并具有余分配性，并返回一个交，即 $(\bigvee_{i\in I} A_i)^* = \bigcap_{i\in I} A_i^*$。因此，典范框架的全复代数（$\mathrm{G}(X) \subseteq, \bigcap, \bigvee, \varnothing, X, (\,)^*$）是一个完备格，并具有一个最小拟补算子；此外，利用经典但按类型划分的像算子的正则性 η_S，我们还有 $\varnothing^* = (\overline{\eta}_S(\varnothing))' = \varnothing' = X$。

情形 2：伽罗瓦连接。

如果 ν 满足伽罗瓦条件 $a \leq \nu\nu a$，那么显然，由方程 (24) 定义的典范关系 $\perp = S'_\vee$ 是对称的。根据引理 3.12，这意味着对于任意 $A \in \mathrm{G}(X)$，都有 $A \subseteq A^{**}$。

情形 3：对合。

当 ν是对合时，它同时具有分配类型 $(1; \partial)$ 和 $(\partial; 1)$，因此按照 [31], 的框架，可以通过两种不同的方式获得表示：一种是 σ-扩张 ν^σ，另一种是 ν 的 π-扩张 ν^π。我们证明，σ-扩张是由导出关系 $R_\wedge$ 生成的映射 $\overline{\eta}_\wedge$；该导出关系是在引理 3.14 的证明中定义的，并且表 3 中所有附加的框架公理 (I1)–(I5) 在典范框架中均成立。图 3 并列展示了格对合 ν的 σ 扩张和 π 扩张的关系构造。

我们首先验证，对于任意滤子 x 和理想 y，根据表 3 中的定义，$\widetilde{\nu}(\widehat{\nu}(x)) = x$ 且 $\widehat{\nu}(\widetilde{\nu}(y)) = y$。

图 3： σ 和 π-扩张的关系构造

π-扩张 $\quad , \nu^{\pi}$	σ-扩张 $\quad , \nu^{\sigma}$
$\widetilde{\nu}(x) \quad = \bigvee_{a \in x} y_{\nu a} \, (\widetilde{\nu} : X \twoheadrightarrow Y)$	$\widetilde{\nu}(y) \quad = \bigvee_{a \in y} x_{\nu a} \, (\widetilde{\nu} : Y \twoheadrightarrow X)$
$yS_{\vee}x$ 当且仅当 $\widetilde{\nu}(x) \subseteq y$	$xS_{\wedge}y$ 当且仅当 $\widetilde{\nu}(y) \subseteq x$
$zS'_{\vee}x$ 当且仅当 $z \perp \widetilde{\nu}(x)$	$vS'_{\wedge}y$ 当且仅当 $\widetilde{\nu}(y) \perp v$
$S_{\vee}x \quad = \Gamma\widetilde{\nu}(x) \in \mathsf{G}(Y)$	$S_{\wedge}y \quad = \Gamma\widetilde{\nu}(y) \in \mathsf{G}(X)$
$S'_{\vee}x \quad = {}^{\perp}\{\widetilde{\nu}(x)\} \in \mathsf{G}(X)$	$S'_{\wedge}y \quad = \{\widetilde{\nu}(y)\}^{\perp} \in \mathsf{G}(Y)$
$z \perp_{\vee} x$ 当且仅当 $zS'_{\vee}x$	$y \perp_{\wedge} v$ 当且仅当 $yS'_{\wedge}v$
$\eta_{S_{\vee}}(U) = \bigcup_{x \in U} S_{\vee}x$	$\eta_{S_{\wedge}}(V) = \bigcup_{y \in V} S_{\wedge}y$
$\overline{\eta}_{S_{\vee}}(A) = \bigvee_{x \in A} S_{\vee}x \in \mathsf{G}(Y)$	$\overline{\eta}_{S_{\wedge}}(B) = \bigvee_{y \in B} S_{\wedge}y \in \mathsf{G}(X)$
$\overline{\eta}_{\vee}(A) \quad = (\overline{\eta}_{\quad S_{\vee}}(A))'$	$\overline{\eta}_{\wedge}(A) \quad = \overline{\eta}_{S_{\wedge}}(A')$
$\overline{\eta}_{\vee}(A) \quad = A^{*} = \nu^{\pi}(A)$	$\overline{\eta}_{\wedge}(A) \quad = \overline{\eta}_{S_{\wedge}}(A') = \nu^{\sigma}(A)$

包含关系 $x \subseteq \widetilde{\nu}(\widetilde{\nu}(x))$ 和 $y \subseteq \widetilde{\nu}(\widetilde{\nu}(y))$ 显然成立。事实上，若 $a \in x$，则 $\nu a \in \widetilde{\nu}(x) = y \in Y$，因此 $a = \nu\nu a \in \widetilde{\nu}(\widetilde{\nu}(x))$，另一包含关系也可类似证明。

为证明 $\widetilde{\nu}(\widetilde{\nu}(x)) \subseteq x$，设 $c \in \widetilde{\nu}(\widetilde{\nu}(x))$。那么，理想 $v = \widetilde{\nu}(x)$ 中存在元素e_1、……、e_n，使得 $c \in \widetilde{\nu}(v)$（一个滤子），因为 $\nu e_1 \wedge \cdots \wedge \nu e_n \leq c$。利用 ν 是一个对合这一事实，这等价于 $\nu c \leq e_1 \vee \cdots \vee e_n = e \in v = \widetilde{\nu}(x)$，因此 $\nu c \in \widetilde{\nu}(x) = \bigvee\{y_{\nu a} \mid a \in c\}$。于是，设 a_1、……、$a_m \in x$，使得$\nu c \leq \nu a_1 \vee \cdots \vee \nu a_m = \nu(a_1 \wedge \cdots \wedge a_m) = \nu a$，其中 $a = a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \in x$。再次利用 ν 的对合性质，这等价于 $a \leq c$，因此 $c \in x$。

包含关系 $\widetilde{\nu}(\widetilde{\nu}(y)) \subseteq y$ 的论证类似。

已证明的恒等式意味着 $\widetilde{\nu}$、$\widetilde{\nu}$ 是单射，且互为逆映射。但现在我们得到，$xS_{\wedge}y$ 当且仅当 $\widetilde{\nu}(y) \subseteq x$ 当且仅当 $y = \widetilde{\nu}(\widetilde{\nu}(y)) \subseteq \widetilde{\nu}(x)$。因此，$S_{\wedge}$ 与 $R_{\wedge}$ 相同；后者是在任意框架中为引理 3.14 的证明所定义的导出关系。根据 [31, 引理 4.3，引理 4.6]，表 3 中的公理 (I1)–(I3) 对典范关系 $S_{\wedge}$ 成立，因而也对 $R_{\wedge}$ 成立。上文也已证明表 3 中的公理 (I4) 和 (I5) 的恒等式成立。于是，我们可以援引引理 3.14 的证明，并得出结论：$\overline{\eta}_{\vee} = \overline{\eta}_{\wedge}$。换言之，$\nu^{\sigma} = \nu^{\pi}$，因此典范框架中伽罗瓦集的全复代数是一个对合格。

情况 4：正交补。

如果该格是正交格，那么根据前面关于带对合的格的情形所给出的论证以及引理 3.13，只需验证典范关系 $\perp = S'_{\vee}$ 具有无自反性。根据方程 (24) 以及将 $\perp$ 定义为关系 $S_{\vee}$ 的伽罗瓦对偶关系 $S'_{\vee}$ 的定义，$x \perp z$ 成立当且仅当存在格元素 e，使得 $e \in z$ 和 $\nu e \in x$ 成立。自反性 $x \perp x$ 随即意味着 $e \wedge \nu e = 0 \in x$，这与 x 是真滤子这一事实相矛盾。

情形 5：分配律与德摩根代数。

对于格为德摩根代数的情形，也就是说，它是带有对合的分配格，只需证明 G(X) 满足分配律即可。 [22, 引理 5.1], 中已给出代数证明，但我们在此基于前文介绍的构造给出一种新的证明。

首先注意，格并 $\vee$ 和交 $\wedge$ 显然都是定义 2.1 意义下的正规格算子，但交只有在对并满足分配律时才是一个算子（按 J´onsson-Tarski 的意义）。在这种情况下，交也具有分配类型 (1, 1; 1)。其 σ-扩张 $\wedge_\sigma$按第 4.3 节⁀所述构造。具体而言，令 $\wedge = f$，滤子集上的点算子 f 定义为 $\widehat{f}(x,z) = \bigvee\{x_{a\wedge b} \mid a \in x$ 和 $b \in z\}$，随后将典范关系 $R_\wedge$定义为： $xR_\wedge uz$ 当且仅当 $\forall a,b(a \in u$ 和 $b \in z$ Ð $\to a \wedge b \in x)$。注意， $R_\wedge$ 是定理 3.4 中的上界关系。考虑由 $\alpha_R(U,W) = \{$ $x \in X \mid \exists u \in U \exists z \in W\ xR_\wedge uz\}$定义的像算子 α_R $\wp(X) \times \wp(X)$ Ð→ $\wp(X)$，可得，对于 $A, C \in$ G(X)，有 $\alpha_R(A,C) = A \cap C$。 $R_\wedge$ 的伽罗瓦对偶关系的所有截面都是稳定的，这与任意典范关系的情形相同，证明见 [31, 引理 4.6]。由此根据定理 3.4 可知，交对任意并满足分配律；换言之，G(X) 是一个完全分配格。

情形 6：经典补与布尔代数。

最后，对于布尔代数的情形，结合正交格和德摩根代数的相关论证。

□

推论 5.5（完备性／典范性）。对于图 1 中的每个簇 $\mathbb{V}$，逻辑 $\Lambda(\mathbb{V})$ 都是完备且典范的。

证明。证明可由表示构造得出；关于典范性的结论则用到引理 5.2、命题 5.3 和定理 5.4。 □

6 谱对偶

令 M、G、INV、DMA、O 和 BA 分别为图 1 中簇 $\mathbb{M}$、$\mathbb{G}$、$\mathbb{INV}$、$\mathbb{DMA}$、$\mathbb{O}$ 和 $\mathbb{BA}$ 的代数范畴，其态射为通常的代数同态。

如同 [31], SRF$_\tau$ 表示排序剩余框架的范畴，其中每个 $\sigma \in \tau$ 都有一个关系 R^σ。就本文目的而言，我们只考虑框架$\mathfrak{F} = (X, \perp, Y, S_\vee)$，其中 $\sigma(S_\vee) = (\partial; 1)$，因为我们所研究的正规格格算子 ν 的分配类型为 $\delta(\nu) = (1; \partial)$。特别地，我们令 SRF$_{\nu M}$ =SRF$^{\{(1;\partial)\}}$ 表示这样一个范畴：其对象是具有上述关系 $S_\vee$、并满足表 2 中公理的排序剩余框架。态射是 [31] 中规定且保持框架关系 S 的弱有界态射。态射的公理化见表4中的公理 (M1)–(M5)。

将拟补格映射到其对偶框架的映射 F，是一个函子的对象部分；该函子将拟补格同态 $h : \mathbf{L}_2$ Ð→ $\mathbf{L}_1$ 映射为弱有界态射 F(h) = (p,q)，其中 p :Filt($\mathbf{L}_1$) Ð $\to$ Filt($\mathbf{L}_2$) 和 q : Idl($\mathbf{L}_1$) Ð→ Idl($\mathbf{L}_2$) 均定义为原像映射， $p(x) = h^{-1}[x]$ 且 q $(y) = h^{-1}[y]$。F(h) 满足

表4中的态射公理 (M1)–(M5) 由 [31, 第 4.3 节的命题 4.9], 推出；该处讨论了一般的任意正规格扩张。因此，$\mathbf{F} : \mathbf{M} \to \mathbf{SRF}_{\nu M}$ 是一个定义恰当的函子。

定义6.1. 若 $(p,q) : (X_2, I_2, Y_2) \to (X_1, I_1, Y_1)$，其中 I_i 是 $\perp_i$的补关系，且 $p : X_2 \to X_1$ 和 $q : Y_2 \to Y_1$，则令 $\pi = (p,q)$，并通过如下设定来定义 π^{-1}

$$\pi^{-1}(W) = \begin{cases} p^{-1}(W) \in \wp(X_2) & \text{if } W \subseteq X_1 \\ q^{-1}(W) \in \wp(Y_2) & \text{if } W \subseteq Y_1. \end{cases}$$

类似地，我们令

$$\pi(w) = \begin{cases} p(w) \in X_1 & \text{if } w \in X_2 \\ q(w) \in Y_1 & \text{if } w \in Y_2. \end{cases}$$

对于框架 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y, S_\vee)$，令 $\mathbf{L}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}^+$ 为其由 X的伽罗瓦稳定子集构成的全复代数 $\mathbf{G}(X)$。若 $\pi = (p,q) : \mathfrak{F}_2 \to \mathfrak{F}_1$ 是一个框架态射，则令 $\mathbf{L}(\pi) = \pi^{-1} : \mathfrak{F}_1^+ \to \mathfrak{F}_2^+$。根据命题 3.24、引理 3.25], （其中讨论了正规格扩张的一般情形），我们可以得出结论：$\mathbf{L}(\pi)$是拟补格之间的同态。

读者可自行验证，$\mathbf{F} : \mathbf{M} \leftrightarrows \mathbf{SRF}_{\nu M}^{\mathrm{op}} : \mathbf{L}$ 是一个对偶伴随。单位 $\eta : 1_{\mathbf{IL}} \to \mathbf{LF}$ 的分量 $\eta_{\mathbf{L}} : \mathbf{L} \to \mathbf{LF(L)}$ 定义为$\eta_{\mathbf{L}}(a) = X_a = \{x \in \mathbf{Filt(L)} \mid a \in x\}$。考虑到反变性，若$\mathfrak{F} = (X, \perp, Y, S_\vee)$是一个框架，则余单位 $1_{\mathbf{SRF}_{\nu M}} \to \mathbf{FL}$ 的分量 $\varepsilon_{\mathfrak{F}} = \lambda_{\mathfrak{F}} \rho_{\mathfrak{F}} \lambda_{\mathfrak{F}} x = A \in \mathfrak{F} = X \mid x \in A$ $\varepsilon_{\mathfrak{F}} : \mathfrak{F} \to \mathbf{FL}(\mathfrak{F})$ 是一个二元组（，），其中（） $\{\mathbf{L}(\,)\ \mathbf{G}(\,)\}$，且 $\rho_{\mathfrak{F}}(y) = \{B \in \mathbf{G}(Y) \mid y \in B\}$，其中 $x \in X$、 $y \in Y$。

$\mathbf{SRF}_{\nu M}$ 对于对偶性而言是一个过大的范畴，因此我们针对每种相关情形指定全子范畴。在 [31], 中，使用 $\mathbf{SRF}_\tau^*$ 这一记号来表示预期的子范畴；我们沿用这一记号，同时通过适当添加下标来区分本文所关注的不同范畴。对于 $\mathbf{SRF}_\tau^*$ 中的框架 $\mathfrak{F}$，记 $\mathbf{L}(\mathfrak{F})$ 为稳定集的全复代数 $\mathfrak{F}^+$，记 $\mathbf{L}^*(\mathfrak{F})$ 为闭开元素的复代数。

定理6.2. 设 $\mathbf{SRF}_{\nu\mathrm{M}}^*$ 是由表4中的公理刻画的 $\mathbf{SRF}_{\nu M}$ 的全子范畴。则 $\mathbf{F} : \mathbf{M} \backsimeq (\mathbf{SRF}_{\nu\mathrm{M}}^*)^{\mathrm{op}} : \mathbf{L}^*$，即函子 F,L*构成范畴对偶。

证明. 设 $\mathbf{L} = (L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, \nu)$是一个带有极小准补运算的格。$\mathbf{F(L)} = (\mathbf{Filt(L)}, \perp, \mathbf{Idl(L)}, S_\vee)$ 是第 5 节中构造的格的典范框架。根据命题 5.1，典范框架满足公理 (F0)–(F4)。注意，表 4 中的公理 (F2) 强于表 2 中相应的公理。

为验证 (F2) 的较强版本，设 $\Gamma z = {\downarrow}\{v\}$ 是一个开闭元。在典范框架中，$\mathbf{G}(X)$ 的开闭元恰好是稳定紧开集 $X_a = \Gamma x_a = x_a{\uparrow} = {\downarrow}\{y_a\}$。根据点算子 $\widehat{\nu}$ 和方程 (22) 中典范关系 $S_\vee$ 的定义， $S_\vee x_a = \Gamma\widehat{\nu}(x_a)$。显然， $\widehat{\nu}(x_a) = y_{\nu a}$，因此 $S_\vee x_a = \Gamma y_{\nu a} = Y^{\nu a}$ 是 $\mathbf{G}(Y)$ 的一个开闭元，其中 $y_{\nu a} = (\nu a){\downarrow}$ 是由格元素 νa 生成的主理想。

表4：$\mathrm{SRF}^{*}_{\nu\ \mathrm{M}}$的公理

对象公理

(F0) 框架的伽罗瓦关系 $\perp\!\!\!\perp$ 的补关系 I 是拟串行的，换言之，$\forall x \in X \exists y \in Y\ xIy$ 且 $\forall y \in Y \exists x \in X\ xIy$。(F1) 该框架是分离的。(F2) 对每个 $z \in X$， $S_{\vee} z$ 都是 G(Y) 的闭元；若 z 是一个开闭元（即对于 Y 中的某个点 v，有 $\Gamma z = {\downarrow}\{v\}$；由分离性可知该点唯一），则 $S_{\vee} z$ 是 G(Y) 的开闭元。(F3) 对每个 $y \in Y$，集合 $yS_{\vee}$ 都是递减的（即一个向下集）。(F4) $S_{\vee}$ 的伽罗瓦对偶关系 $S'_{\vee}$ 的两个截面都是伽罗瓦集。(F5) 在 G(X) 和 G(Y) 中，开闭元分别对有限交封闭。(F6) 对于 G(X) 和 G(Y)，闭元族分别是相应开闭元族在交集运算下的闭包。(F7) X 和 Y 各自带有谱拓扑，该拓扑由各自开闭元族构成的基生成。

弱有界态射公理

对于一个分类型映射 $\pi = (p, q) : (X_2, I_2, Y_2, S_{2\nu}) \text{Ð}\!\!\rightarrow (X_1, I_1, Y_1, S_{1\nu})$，其中$p : X_2 \text{Ð}\!\!\rightarrow X_1$ 且 $q : Y_2 \text{Ð}\!\!\rightarrow Y_1$

(M1) $\forall x' \in X_2 \forall y' \in Y_2\ (x' I_2 y' \text{Ð}\!\!\rightarrow p(x') I_1 q(y'))$。(M2) $\forall x \in X_1 \forall y' \in Y_2 (xI_1 q(y') \text{Ð}\!\!\rightarrow \exists x' \in X_2 (x \le p(x') \wedge x' I_2 y'))$。(M3) $\forall x' \in X_2 \forall y \in Y_1 (p(x') I_1 y \text{Ð}\!\!\rightarrow \exists y' \in Y_2 (y \le q(y') \wedge x' I_2 y'))$。(M4) $\forall z \in X_1 \forall v \in Y_2 (q(v) S_{1\nu} z \text{Ð}\!\!\rightarrow \exists x \in X_2 (z \le p(x) \text{ and } v S_{2\nu} x))$。(M5) 对所有点 u, $\pi^{-1}(\Gamma u) = \Gamma v$，存在某个 v（由分离性可知其唯一）。

公理 (F5) 成立，因为 $X_a \cap X_b = X_{a \wedge b}$，同时也有 $Y^a \cap Y^b = Y^{a \vee b}$。对于 (F6)，根据主滤子的上确界稠密性，任意滤子 x 都是并 $x = \bigvee_{a \in x} x_a$，因此 G($X$) 的每个闭元 Γx 都是交集 $\Gamma x = \bigcap_{a \in x} \Gamma x_a = \Gamma(\bigvee_{a \in x} x_a)$，G($Y$) 中的闭元素 $\Gamma y \in$ 也同样如此。最后，命题 4.2 已针对交半格验证了公理 (F7)，同样的证明也适用于说明 X =Filt(L) 和 Y =Idl(L) 上的拓扑都是谱拓扑。

根据上述论证，F(L) 是范畴 $\mathbf{SRF}^{*}_{\nu \mathrm{M}}$ 中的一个对象。由命题 4.4，$\{X_a \mid a \in L\}$ = KOG($\mathfrak{X}$) 是闭开

元素 L*F(L) 的复代数，并且我们随后在定理 4.5 中验证了表示映射 $a \mapsto X_a = \{x \in X \mid a \in x\}$ 是格同构 L ≃ KOG(X)。由于$X^{\nu a} = \Gamma x_{\nu a} = (\Gamma\nu(x_a))' = (\Gamma x_a)^* = (X_a)^*$，表示映射是拟补格 L ≃L*F(L) 之间的同构，且带有一个（最小）拟补运算 ν。

对于态射 $h : \mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_2$, ，我们令 $p = h^{-1} : \mathrm{Filt}(\mathrm{L}_2) \to \mathrm{Filt}(\mathrm{L}_1)$，且$q = h^{-1} : \mathrm{Idl}(\mathrm{L}_2 \to \mathrm{Idl}(\mathrm{L}_1)$，并设 F($h$) = (p, q)。

证明 F(h) : F(L_2) → F(L_1) 是满足公理 (M1)–(M4) 的框架态射的论证，是处理任意正规格扩张一般情形的 [31, 命题 4.9]，证明中所给论证的一个特例。关于公理 (M5) 和 (M6) 的证明见 [31,命题 5.6, 命题 5.7]。由此可知，F : M → $(\mathrm{SRF}^*_{\nu\mathrm{M}})^{\mathrm{op}}$ 是满足 L ≃L*F(L) 的反变函子。

现在设 $\mathfrak{F}$ 是范畴 $\mathrm{SRF}^*_{\nu\mathrm{M}}$ 中的一个排序剩余框架。我们已将 L($\mathfrak{F}$) = $\mathfrak{F}^+$ = (G(X) $\subseteq, \bigcap, \bigwedge, \varnothing, X, (\,)^*$) 记作其伽罗瓦稳定集的全复代数，并将 L*($\mathfrak{F}$) = (KOG($\mathfrak{X}$) $\subseteq, \cap, \vee, \varnothing, X, (\,)^*$) 记作其闭开元素构成的子代数。显然，运算 $(\,)^*$ 限制在闭开元素上仍然成立，因为 $(X_a)^* = X_{\nu a}$。由推论 3.15 可知，L*($\mathfrak{F}$) 是范畴 M 中的一个对象；范畴 M 的对象是带有极小拟补运算的格。

若 $\pi = (p, q) : \mathfrak{F}_2 \to \mathfrak{F}_1$ 是 $\mathrm{SRF}^*_{\nu\mathrm{M}}$ 中的一个框架态射，则根据 [31, 推论 3.21], , L*(π) = $\pi^{-1} : \mathrm{G}(X_1) \to \mathrm{G}(X_2)$ 是框架的稳定集所成完备格之间的完备格同态。根据公理 (M4)，命题 3.24、引理 3.25] 中已证明 $\pi^{-1} : \mathfrak{F}_1^+ \to \mathfrak{F}_2^+$ 实际上是框架的全复代数之间的同态。根据公理 (M5)，π^{-1} 保持闭元素，因此由引理 3.23] 可知，它也保持既开又闭元素（由此可得 π 的连续性，因为闭开稳定元素恰好是该拓扑中的基本开集）。

上述论证已证明，L* 是一个反变函子，它从范畴 $\mathrm{SRF}^*_{\nu\mathrm{M}}$ 映到由带有最小拟补运算的格构成的范畴 M。我们也已在引理 5.2 中证明，对于 M 中的任意对象 L，都有一个同构 L ≃ L*F(L)；接下来只需证明，对于范畴 $\mathrm{SRF}^*_{\nu\mathrm{M}}$ 中的任意排序剩余框架 $\mathfrak{F}$，也有 $\mathfrak{F} \simeq \mathrm{FL}^*(\mathfrak{F})$。

对于第二个同构，$\mathfrak{F} \simeq$FL*($\mathfrak{F}$)，我们可以将论证建立在 [33], 或 [27]之上。在 [33], 中，我们论证了，任何满足公理 F1、F5–F7 的分类型框架 $\mathfrak{F}$ （ [33]中的 L-框架）都是某个格的框架对偶。更具体地说，若 S =$(C_s)_{s\in L}$ 是 X的紧开伽罗瓦稳定子集族，并以某个指标集 L为指标；由于 S 实际上是相似型为 τ 的正规格扩张（根据框架公理，以及（ ）* 限制在既开又闭的元素上这一事实，而这些元素恰好就是紧开伽罗瓦稳定子集），因此，指标集 L 继承了族 S 的结构。于是，它是一个类型为 τ、与 S 同构的正规格扩张 L，而 $\mathfrak{F}$ 在同构意义下是其对偶框架。换言之，L*($\mathfrak{F}$) =S ≃ L，且 $\mathfrak{F} \simeq$F(L)。因此，我们有 FL* ($\mathfrak{F}$) ≃ FL*F(L) ≃F(L) ≃ $\mathfrak{F}$。 □

定义 6.3. 与具有拟补运算的格相对应的框架范畴 $\mathfrak{F} = (X, \perp, Y, S_\vee)$（其中设 $\perp = S'_\vee$），由表4中的公理以及以下一个或多个附加公理公理化，具体取决于各个范畴的规定。

（G）$\perp$ 是对称的。（INV）表 3 的公理 (I1)–(I5)。（O）$\perp$ 是无自反性的。（D）伽罗瓦对偶关系 $R'_{\leq}$ 的所有截面（该关系是定理 3.4 中上界关系$R_{\leq}$ 的伽罗瓦对偶关系）都是稳定的。

$\mathrm{SRF}^*_{\nu\mathrm{M}}$ 表4中的公理。 $\mathrm{SRF}^*_{\nu\mathrm{G}}$ 表4中的公理 + 公理 (G)。 $\mathrm{SRF}^*_{\nu\mathrm{INV}}$ 表4中的公理 + 公理 (G) + 公理 (INV)。 $\mathrm{SRF}^*_{\nu\,\mathrm{O}}$ 表4中的公理 + 公理 (G) + 公理 (INV) + 公理 (O)。 $\mathrm{SRF}^*_{\nu\mathrm{DMA}}$ 表 4 中的公理 + 公理 (G) + 公理 (INV) + 公理 (D)。 $\mathrm{SRF}^*_{\nu\mathrm{BA}}$ 表4中的公理 + 公理 (G) + 公理 (INV) + 公理 (O) ++ 公理 (D)。

定理6.4。定理6.2中的谱对偶可特化为定义6.3中每个框架范畴及其相应的带有（准）补运算的有界格范畴之间的对偶性。

证明。定理5.4已验证，图 1中任一簇中的格的双重对偶仍属于相应的簇。推论3.15已验证，对于满足定义6.3所列公理中一个或多个公理的任一框架范畴中的框架，其（完整）复代数是与该框架范畴相对应的簇中的代数。各情形的其余对偶论证与定理6.2相同。

□

7 结语

本文为布尔代数和正交格的无选择表示与对偶性提供了替代构造，这些表示与对偶性最初见于 [4, 43]。Bimb´o 使用选择公理构造的德摩根代数斯通对偶结果发表于 [5]，本文则给出了该对偶性的无选择版本。

我们的背景动机源于 J´onsson-Tarski [39, 40] 方法：从关系构造集合算子，以表示布尔代数上的算子；这一研究后来通过 Dunn 关于广义伽罗瓦逻辑（gaggles）的研究得到了扩展。在 [31], 中，我们将这一关系表示研究推广到了不必假定分配律的情形。本文将 [31] 的框架应用于带拟补算子的有界格情形，以无选择的方式重新阐释 [31] 的对偶性。通过同时处理德摩根代数（以及布尔代数）和正交格，研究表明，是否具有分配律并不会造成任何实质性障碍，因为分类型框架的稳定集完备格中的分配律已被证明是一阶可定义的，并不会

产生任何实质性障碍，因为分类型框架的稳定集完备格中的分配律已被证明是一阶可定义的。对于分配情形，由所介绍方法得到的语义似乎与 Holliday 的可能性语义 [36]具有很强的相似性。

本文提出的方法可以扩展到任意正规格扩张，包括 [3], 中研究的模态格情形，该研究基于 [31]中发展的框架。

一种变体的无选择语义方法以 Urquhart 的表示为基础：在格表示中考虑所有不相交滤子-理想对（F, I），而非仅考虑极大对。这样一来，证明极大不相交对存在时便不再需要诉诸选择。事实上，Allwein 与本文作者已在 [1] 中开展了这一研究，Holliday 最近的语义方法 [37]也再次考察并运用了这一方法。在将其应用于具有弱否定的逻辑时，[37]中又增加了一项限制，要求典范框架中的任意点（F, I）都满足条件 $\{\neg a \mid a \in F\} \subseteq I$，并给出了表示定理 [37, 定理 4.30] 。[37], 中没有讨论对偶性，但我们认为，[1] 的格对偶可用于 Holliday 的方法。

与本文相关的还有 Almeida [2], ，作者在其中考察了具有各种否定算子的格的表示问题，研究的情形与本文所研究的情形大体重叠，但采用的是 RS-框架（广义克里普克框架 [21]）体系。与本文一样，该文给出了关于否定公理 [2, 典范性的结果（命题 3.6—命题 3.12] ），并计算了一阶对应式。RS-框架方法所采用的格表示是 Hartung 的表示 [35] ；证明稳定集的集合是所表示之格的典范扩张，则依赖于证明集合 $J^{\infty}(X)$ 中的完全并不可约稳定集并生成所有稳定集。由于框架中的闭元素集合在稳定集格中并稠密，该证明归结为证明 $J^{\infty}(X)$ 并生成稳定集格中的所有闭元素。该证明见 [17, 定理 2.8] ，其中明确使用了佐恩引理。[2] 中的对应结果是利用完美格与 RS-框架之间的离散对偶性建立的，相关内容详述于 [17, 第 4], 节；回顾一下，若格 L 是完备格，J^{∞}(L) 在 L 中并稠密，且 M^{∞}(L)（L 中完全交不可约元素的集合）在 L 中交稠密，则称 L 为完美格。[2, 定理 4.4—定理 4.9] 中证明的所有对应结果，都基于 [17]上述离散对偶性结果。

正如我们在 [29], 中指出的，RS-框架方法和本文作者采用的方法都同样适用于研究与非分配系统相关的具体问题；选择哪种方法取决于当前的研究目标。就本文而言，主要目标是不诉诸选择公理或其任何等价形式，因此采用RS-框架并不合适。

参考文献

[1] Gerard Allwein和Chrysafis Hartonas. 有界格对偶. 技术报告IULG-93-25，印第安纳大学逻辑组，1993年。[2] Agostinho Almeida. 带否定的格的典范扩张与关系表示. Stud Logica，91(2):171–199，2009年。[3] Nick Bezhanishvili、Anna Dmitrieva、Jim de Groot和Tommaso Moraschini. 超越分配性的正（模态）逻辑，2022年。[4] Nick Bezhanishvili和Wesley Holliday. 无选择公理的斯通对偶. 《符号逻辑杂志》，85(1):109–148，2020年。[5] Katalin Bimb´o. 正交格与德摩根格的函子对偶. Logica Universalis，1:311–333，2007年。[6] Katalin Bimb´o和J. Michael Dunn. 广义伽罗瓦逻辑.《非经典逻辑演算的关系语义》，第188卷。CSLI讲义，CSLI，斯坦福，加利福尼亚州，2008年。[7] Garrett Birkhoff. 格论. 美国数学会学术丛书第25卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，第三版，1979年。（1967年第三版的勘误重印本）。[8] T. S. Blyth和J. C. Varlet. 奥卡姆代数. Clarendon Press，1994年。[9]Willem Conradie和Alessandra Palmigiano. 非分配逻辑的算法对应与典范性. Ann. Pure Appl. Logic，170(9):923–974，2019年。[10] Andrew Craig、Maria Joao Gouveia和Miroslav Haviar. TiRS 图与TiRS框架：典范扩张之对偶的新框架. Algerba Universalis，74(1-2)，2015年。[11] Kosta Do˘sen. 作为模态算子的否定.《数理逻辑报告》，20:15–27，1986年。[12] Kosta Do˘sen. 从模态逻辑的角度看否定. 载于D. Gabbay和H. Wansing编，《什么是否定》，第77–86页。克卢维尔学术出版社，1999年。[13] J. M. Dunn. 对否定的各种模型论处理的比较研究：形式否定的历史. 载于Gabbay, D.、Wansing, H.编：《什么是否定？》克卢维尔学术出版社，荷兰，第23–51页，1999年。[14] J. Michael Dunn. 群论：对伽罗瓦连接与剩余化的抽象，以及其在否定和各种逻辑运算中的应用. 载于《人工智能中的逻辑》，1990年欧洲研讨会JELIA论文集，计算机科学讲义478，第31–51页，1990年。

[15] J. Michael Dunn. 将偏部分团应用于具有受限结构规则的逻辑。载于 K. Do˘sen 和 P. Schroeder-Heister（编），《次结构逻辑》，第 63–108 页。Clarenton and Oxford University Press，牛津，英国，1993年。[16] J. Michael Dunn 和 Chunlai Zhou. 群论语境中的否定。Studia Logica，80：235–264，2005年。[17] Jon Michael Dunn、Mai Gehrke 和 Alessandra Palmigiano. 若干次结构逻辑的典范扩张与关系完备性。《符号逻辑杂志》，70：713–740，2005年。[18] Wojciech Dzik、Ewa Orlowska 和 Clint J. van Alten. 带否定的一般格的关系表示定理。载于 Renate A. Schmidt（编），《计算机科学中的关系与克莱尼代数》，第九届计算机科学关系方法国际会议暨第四届克莱尼代数应用国际研讨会，RelMiCS/AKA 2006，英国曼彻斯特，2006年8月29日至9月2日，会议论文集，计算机科学讲义第 4136 卷，第 162–176 页。施普林格，2006年。[19] Wojciech Dzik、Ewa Orlowska 和 Clint J. van Alten. 带否定的格的关系表示定理：综述。载于 Harrie C. M. de Swart、Ewa Orlowska、Gunther Schmidt 和 Marc Roubens（编），《关系结构作为知识工具的理论与应用 II》，COST行动274国际研讨会，TARSKI，2002—2005年，精选修订论文，计算机科学讲义第 4342 卷，第 245–266 页。施普林格，2006年。[20] Bernhard Ganter 和 Rudolph Wille.《形式概念分析：数学基础》。施普林格，1999年。[21] Mai Gehrke. 广义克里普克框架。Studia Logica，84(2)：241–275，2006年。[22] Mai Gehrke 和 John Harding. 有界格扩张。代数杂志，238：345–371，2001年。[23] Robert Goldblatt. 正交逻辑的语义分析。哲学逻辑杂志，3：19–35，1974年。[24] Robert Goldblatt. 极性和带算子的格的态射与对偶性。FLAP，7：1017–1070，2020年。[25] Chrysafis Hartonas. 格序代数与正规可代数化逻辑的对偶性。Studia Logica，58：403–450，1997年。[26] Chrysafis Hartonas. 格扩张的斯通对偶。IGPL牛津逻辑杂志，26(5)：475–504，2018年。[27] Chrysafis Hartonas. 带模态算子的格的离散对偶。逻辑与计算杂志，29(1)：71–89，2019年。

[28] Chrysafis Hartonas. 次结构逻辑的模态翻译。《应用非经典逻辑期刊》，30(1)：16–49，2020年。[29] Chrysafis Hartonas. 无分配律逻辑语义方法的调和。载于 Katalin Bimb´o（编），《相关逻辑及其他推理工具：纪念 J. Michael Dunn 文集》，Tributes 第 46 期，第 215–236 页。College Publications，2022年。[30] Chrysafis Hartonas. 蕴涵格与海廷代数的无选择拓扑对偶。Algebra Universalis，2023年。[31] Chrysafis Hartonas. 正规格扩张与带关系的分类型剩余框架的对偶性。Algebra Universalis，84(1)，2023年。[32] Chrysafis Hartonas 和 J. Michael Dunn. 偏序、半格、伽罗瓦连接与格的对偶定理。技术报告 IULG-93-26，印第安纳大学逻辑组，1993年。[33] Chrysafis Hartonas 和 J. Michael Dunn. 格的斯通对偶。Algebra Universalis，37：391–401，1997年。[34] Chrysafis Hartonas 和 Ewa Orlowska. 双分类框架中带模态算子的格的表示。《计算机科学基础》，166(1)：29–56，2019年。[35] Gerd Hartung. 格的拓扑表示。Algebra Universalis，29：273–299，1992年。[36] Wesley H. Holliday. 模态逻辑的可能性框架与迫迫法，2018年。https://escholarship.org/uc/item/0tm6b30q。[37] Wesley H. Holliday. 一种基础非经典逻辑。Logics，1(1)：36–79，2023年。[38] Peter Johnstone.《斯通空间》。剑桥高级数学研究丛书。剑桥大学出版社，1986年。[39] Bjarni J´onsson 和 Alfred Tarski. 带算子的布尔代数 I。《美国数学杂志》，73：891–939，1951年。[40] Bjarni J´onsson 和 Alfred Tarski. 带算子的布尔代数 II。《美国数学杂志》，74：8127–162，1952年。[41] K. B. Lee. 分配伪补格的方程类。《加拿大数学杂志》，22(4)：881–891，1970年。[42] Guillaume Massas. 无选择德弗里斯对偶，2022年。[43] Joseph McDonald 和 Kentarˆo Yamamoto. 借助谱空间实现正交补格的无选择对偶。Algebra Universalis，83，2022年。

[44] M. Andrew Moshier 和 Peter Jipsen。拓扑对偶性与格扩张，I：典范扩张的拓扑构造。Algebra Universalis，71(2):109–126，2014年4月。[45] M. Andrew Moshier 和 Peter Jipsen。拓扑对偶性与格扩张，II：带准算子的格扩张。Algebra Universalis，71(3):221–234，2014年5月。[46] Miroslav Ploˇsˇcica。有界格的一种自然表示。Tatra Mountains Math. Publ.，5:75–88，1995年。[47] Marshall Harvey Stone。分配格与布劳威尔逻辑的拓扑表示。Casopsis pro Pestovani Matematiky a Fysiky，67:1–25，1937年。[48] Alasdair Urquhart。格的拓扑表示。Algebra Universalis，8:45–58，1978年。[49] Dimiter Vakarelov。基于较弱版本的直觉主义否定的 Nelson 否定。Studia Logica，80:393–430，2005年。[50] Dimiter Vakarelov。Helena Rasiowa 著作中的非经典否定及其对否定理论的影响。Studia Logica，84:105–127，2006年。[51] Heinrich Wansing，编。《否定：聚焦的概念》。De Gruyter，柏林，纽约，1996年。