arXiv:2301.05674v1 [cs.GT] 13 Jan 2023

联盟形成博弈中的利他主义

Anna Maria Kerkmann、Simon Cramer 和 J¨org Rothe

德国杜塞尔多夫海因里希·海涅大学

2023年1月16日

摘要

Nguyen 等人 [1] 提出了利他型享乐博弈，其中代理人的效用不仅取决于自身偏好，还取决于同一联盟中朋友的偏好。我们提出将他们的模型扩展到一般的联盟形成博弈，并将其他联盟中的朋友也纳入考量。通过将我们的模型与利他型享乐博弈进行比较，我们指出，将某些朋友排除在参与者的利他行为之外，是享乐博弈这一限制带来的一大缺点。在介绍我们的模型并展示其一些理想性质之后，我们还研究了若干常见的稳定性概念，并对相关的验证问题和存在性问题进行了计算分析。

1 引言

我们研究这样一类联盟形成博弈：代理人需要根据各自的偏好组成联盟。在享乐型联盟形成博弈的多种紧凑表示中，Dimitrov 等人 [2] 特别提出了带有朋友导向偏好的朋友—敌人编码，该编码涉及一个朋友网络：一个（简单）无向图，其顶点为玩家，且当且仅当两个玩家互为朋友时，两者之间才有一条边。未由边相连的玩家彼此视为敌人。在朋友导向偏好下，如果联盟 C 包含的玩家 i 的朋友比联盟 D 多，或者 C 和 D 包含数量相同的玩家 i 的朋友但 C 中玩家 i 的敌人少于 D，那么玩家 i 就更偏好联盟 C 而非联盟 D。这是加性编码 [3]的一个特例。有关这两种紧凑表示的更多背景信息，请参见第 2 节以及 Aziz and Savani [4]撰写的书籍章节。

基于朋友导向偏好，Nguyen 等人 [1] 提出了利他型享乐博弈，其中代理人获得的效用不仅取决于自身的满意度，也取决于朋友的满意度。然而，Nguyen 等人 [1] 仅具体研究了享乐博弈，这类博弈要求代理人的效用只取决于她自己的联盟。在他们对利他主义的诠释中，代理人的效用由她对自身联盟的估值，以及该联盟中所有朋友的估值构成。Nguyen 等人 [1]在汇总部分代理人的估值时采用了平均值，而 Wiechers 和 Rothe [5] 则提出了一种利他型享乐博弈的变体，其中部分代理人的估值通过取最小值来汇总。

受利他主义理念的启发，我们将享乐博弈中的利他主义模型推广到一般的联盟形成博弈。也就是说，我们提出一种模型，在其中代理人会利他地对待所有朋友，而不仅仅是同一联盟中的朋友。我们不局限于享乐博弈，旨在刻画一种更自然的利他主义概念：代理人的任何朋友都不会被排除在她的利他行为之外。

例1。为了理解利他主义这一概念，考虑图1中由朋友网络表示的联盟形成博弈。对于联盟结构 $\Gamma = \{\{1,2,3\},\{4\}\}$ and$\Delta = \{\{1,2,4\},\{3\}\}$，显然，在朋友导向偏好下，玩家1对联盟 $\{1,2,3\}$ and $\{1,2,4\}$ 无差异，因为这两个联盟都包含1唯一的朋友（玩家2）以及1的一个敌人（3或4）。然而，在利他享乐偏好 *[1],* 下，玩家1会对她的朋友2（2与3是朋友，但与4不是）表现出利他行为，因此更偏好 $\{1,2,3\}$ 而非 $\{1,2,4\}$。现在，考虑略作修改的联盟结构 $\Gamma' = \{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$ and $\Delta' = \{\{1\},\{2,4\},\{3\}\}$。直觉上，我们仍会认为1会对她的朋友2表现出利他行为。然而，在任何享乐偏好下（这种偏好要求玩家的偏好仅取决于他们自己所在的联盟），

1 —— 2 —— 3 —— 4

图1：示例1的朋友网络

玩家的偏好仅取决于他们自己所在的联盟），玩家1（在 Γ' and Δ' 中都处于同一联盟）必然对 Γ' 和 Δ' 无差异。

为了对全局利他主义进行建模，我们不再局限于享乐博弈，并引入利他型联盟形成博弈；在这类博弈中，代理人会对所有朋友表现出利他行为，而不受其当前联盟的影响。

1.1 相关工作

本文所讨论的联盟形成博弈，与文献中广泛研究的享乐博弈子类密切相关。相关研究涉及偏好的紧凑表示、公理化分析、不同稳定性概念的处理，以及相关问题的计算复杂性研究（例如，参见 Aziz and Savani 的书籍章节 [4]）。

与本文最密切相关的是 Nguyen 等人提出的利他型享乐博弈 [1]（另见 Wiechers 和 Rothe 提出的相关基于最小化的变体 [5]）；我们对其进行了修改，以构建更一般的利他主义模型。基于 Nguyen 等人的模型 [1],，Schlueter 和 Goldsmith [6] 定义了超利他型享乐博弈；在这类博弈中，朋友根据其在底层朋友网络中的距离，对参与者产生不同影响。最近，Bullinger 和 Kober [7] 在基数型享乐博弈中引入了忠诚概念，其中代理人会忠于所谓的忠诚集合中的所有代理人。在他们的模型中，忠诚集合中代理人的效用通过取最小值进行聚合。随后，他们研究了常见基数型享乐博弈类别的忠诚变体，例如可加可分型和朋友导向型享乐博弈。[1]

利他主义也在非合作博弈中得到研究。其中最著名的是 Ashlagi 等人 [8] 提出的社会情境博弈：他们将社会情境应用于策略博弈，使所得博弈中的成本取决于原始成本和邻域图。他们所谓的极小极大合作（玩家力求将自己及其邻居的最大成本降至最低）与我们的最小化型平等待遇模型有关。不过，Ashlagi 等人 [8] 的模型与我们的不同之处在于，他们研究的是非合作博弈。其他研究社交网络中的非合作博弈的工作包括：Bil`o 等人 [9] 研究以不同于 Ashlagi 等人 [8], 所用策略博弈为基础的社会情境博弈；Hoefer 等人 [10] 研究策略博弈中的体谅均衡；以及 Anagnostopoulos 等人 [11] 研究策略博弈中的利他主义与恶意。至于不涉及社交网络的非合作博弈中的利他主义，Hoefer 和 Skopalik [12], 、Chen 等人 [13], 、Apt 和 Sch¨afer [14], ，以及 Rahn 和 Sch¨afer [15]也对此进行了研究。

1.2 我们的贡献

从概念上说，我们将 Nguyen 等人 [1] 以及 Wiechers 和 Rothe [5]提出的利他主义模型从享乐博弈扩展到一般的联盟形成博弈。我们阐述了这种扩展如何体现一种更具全局性的利他主义观，并表明我们的模型满足若干理想性质，而先前的模型却不满足这些性质。随后，我们研究该模型中的常见稳定性概念，并从计算复杂性的角度分析相关的验证问题和存在性问题。

本研究扩展了早期版本，该版本曾发表于第29届国际人工智能联合会议（IJCAI’20）的论文集 [16]。本研究的部分内容也曾在第16届和第17届人工智能与数学国际研讨会（ISAIM’20 和 ISAIM’22）以及第8届计算社会选择国际研讨会（COMSOC’21）上发表，各会议均采用非存档论文集。

[1]No请注意，他们提出的对称朋友导向享乐博弈的忠诚变体，等价于基于最小化的利他主义享乐博弈 onic 其采用 Wiechers 和 Rothe [5]提出的平等对待原则。

2 模型

在联盟形成博弈中，玩家根据各自的偏好分组。在介绍利他主义之前，我们先介绍这类博弈的一些基础知识。

2.1 联盟形成博弈

设 $N = \{1, \ldots, n\}$ 是一组代理人（或玩家）。N 的每个子集都称为一个联盟。联盟结构Γ 是 N 的一个划分，我们用 $\mathscr{C}_N$ 表示 N 的所有可能联盟结构构成的集合。对于玩家 $i \in N$ 和联盟结构 $\Gamma \in \mathscr{C}_N$，$\Gamma(i)$ 表示 Γ 中包含 i 的唯一联盟。现在，联盟形成博弈（CFG）是一个二元组 $(N, \succeq)$，其中 $N = \{1, \ldots, n\}$ 是一组代理人，$\succeq = (\succeq_1, \ldots, \succeq_n)$ 是一个偏好概况，并且每个偏好 $\succeq_i \in \mathscr{C}_N \times \mathscr{C}_N$ 都是对所有可能联盟结构的完全弱序。给定两个联盟结构 Γ、$\Delta \in \mathscr{C}_N$，若 $\Gamma \succeq_i \Delta$，则称 i 弱偏好 Γ 于 Δ。当$\Gamma \succeq_i \Delta$成立但$\Delta \succeq_i \Gamma$不成立时，我们称 i 偏好 Γ 于 Δ（记作 $\Gamma \succ_i \Delta$）；若 $\Gamma \succeq_i \Delta$ 且 $\Delta \succeq_i \Gamma$，则称 i 对Γ 和 Δ 无差异（记作 $\Gamma \sim_i \Delta$）。

请注意，享乐博弈是联盟形成博弈的一种特殊情形，其中参与者的偏好关系仅取决于包含其自身的联盟。在一个享乐博弈 $(N, \succeq)$ 中，只要某参与者所在的联盟相同，参与者 $i \in N$ 就会对任意两个联盟结构 Γ 和 Δ 无差异，即 $\Gamma(i) = \Delta(i) \implies \Gamma \sim_i \Delta$。因此，享乐博弈 $(N, \succeq)$ 中任意参与者 $i \in N$ 的偏好序通常表示为包含 i 的联盟集合上的完全弱序。

2.2 “朋友和敌人”编码

由于 $|\mathscr{C}_N|$（所有可能联盟结构的数量）相对于参与者人数而言极其庞大，[2] 要求每位参与者给出其对 $\mathscr{C}_N$ 的完整偏好并不现实。因此，我们希望找到一种紧凑表示参与者偏好的方法。在文献中，已有许多针对享乐博弈的此类表示方法，例如 Cechl´arov´a 和 Romero-Medina 提出的加性编码 [19, 3, 20], 与单元素表示法 [21]，以及 Cechl´arov´a 和 Hajdukov´a [22], 进一步研究的表示法；Dimitrov 等人提出的朋友—敌人编码 [2],，以及 Kerkmann 等人提出的 FEN 享乐博弈 [23]，Rothe 等人也使用了这种博弈 [24]。本文采用 Dimitrov 等人提出的朋友—敌人编码 [2]。我们重点讨论他们的朋友导向模型，之后将对其进行调整，以适用于我们的利他主义模型。

在朋友导向模型中，N 中参与者的偏好由一个朋友网络给出，即一个（简单）无向图 $G = (N, A)$，其顶点为玩家；当且仅当两个玩家 $i, j \in N$ 互为朋友时，它们之间才有一条边 $\{i, j\} \in A$。没有边相连的参与者会将彼此视为敌人。对于参与者 $i \in N$，我们用 $F_i = \{j \in N \mid \{i, j\} \in A\}$表示 i 的朋友集合，用 $E_i = N \setminus (F_i \cup \{i\})$ 表示 i 的敌人集合。按照 Dimitrov 等人 [2], 定义的朋友导向偏好，在任意两个联盟之间，玩家更偏好朋友更多的联盟；如果两个联盟中的朋友数量相同，则更偏好敌人较少的联盟：

$$C \succeq_i^F D \iff |C \cap F_i| > |D \cap F_i| \text{ or } (|C \cap F_i| = |D \cap F_i| \text{ and } |C \cap E_i| \leq |D \cap E_i|).$$

这也可以用加法形式表示。给每位朋友赋值 n，给每位敌人赋值 -1，则参与者 $i \in N$ 对包含其本人的联盟 C 赋予价值 $v_i(C) = n|C \cap F_i| - |C \cap E_i|$。注意，$-(n-1) \leq v_i(C) \leq n(n-1)$，且当且仅当 C 中至少有一位 i 的朋友时，$v_i(C) > 0$。对于给定的联盟结构 $\Gamma \in \mathscr{C}_N$，我们也用 $v_i(\Gamma)$ 表示玩家 i 对 $\Gamma(i)$ 的价值。

此外，我们用 $\text{sum}_i^F(\Gamma) = \sum_{f \in F_i} v_f(\Gamma)$ 表示参与者 i 的朋友的价值总和。类似地，我们还定义 $\text{sum}_i^{F+}(\Gamma) = \sum_{f \in F_i \cup \{i\}} v_f(\Gamma)$、$\min_i^F(\Gamma) = \min_{f \in F_i} v_f(\Gamma)$，以及 $\min_i^{F+}(\Gamma) = \min_{f \in F_i \cup \{i\}} v_f(\Gamma)$。

2.3 利他主义的三个程度

现在，我们基于以朋友为导向的偏好模型来定义利他型联盟形成博弈，并采用 Nguyen 等人 [1] 为利他型享乐博弈提出的相同三种利他主义程度。

[2]可能的个元素的集合的划分数等于第 n 个贝尔数 [17, 18],，其定义为 $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k$ with $B_0 = B_1 = 1$. 例如，对于 $n = 10$ 个代理人，我们有 $B_{10} = 115{,}975$ 种可能的联盟结构。

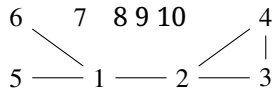


图 2：示例 2 的朋友网络

不过，我们根据自己的模型对这些程度进行了调整，将代理人的利他主义扩展到他们所有的朋友，而不仅限于同一联盟中的朋友。

- 自私优先（SF）：参与者首先根据自身估值对联盟结构进行排序。只有在两个联盟结构并列时，才会同时考虑朋友的估值。
- 平等对待（EQ）：参与者平等对待自己和朋友。这意味着，对于联盟结构对参与者 i 的效用而言，$i \in N$ 中的参与者 i 及其所有朋友具有相同的影响。
- 利他对待（AL）：参与者首先根据朋友的估值对联盟结构进行排序。只有在并列时，他们才会考虑自己的估值。

我们进一步区分对部分参与者估值的基于求和的聚合和基于最小值的聚合。形式上，对于参与者 $i \in N$ 和联盟结构 $\Gamma \in \mathscr{C}_N$，我们将自私优先下 i 对 Γ 的基于求和的效用记为 $u_i^{sumSF}(\Gamma)$，平等对待下记为 $u^{sumEQ}{}_i(\Gamma)$，利他对待下记为 $u_i^{sumAL}(\Gamma)$；将自私优先下 i 对 Γ 的基于最小值的效用记为 $u_i^{minSF}(\Gamma)$，平等对待下记为 $u^{minEQ}{}_i(\Gamma)$，利他对待下记为 $u_i^{minAL}(\Gamma)$。对于常数 $M \geq n^3$，，它们定义如下：

$$u_i^{sumSF}(\Gamma) = M \cdot v_i(\Gamma) + \text{sum}_i^F(\Gamma); \qquad u_i^{minSF}(\Gamma) = M \cdot v_i(\Gamma) + \text{min}_i^F(\Gamma);$$
$$u_i^{sumEQ}(\Gamma) = \text{sum}_i^{F+}(\Gamma); \qquad u_i^{minEQ}(\Gamma) = \text{min}_i^{F+}(\Gamma);$$
$$u_i^{sumAL}(\Gamma) = v_i(\Gamma) + M \cdot \text{sum}_i^F(\Gamma); \qquad u_i^{minAL}(\Gamma) = v_i(\Gamma) + M \cdot \text{min}_i^F(\Gamma).$$

对于 $F_i = /0$ 的情况，我们将空集的最小值定义为零。

对于任意联盟结构 $\Gamma,\Delta \in \mathscr{C}_N$，参与者 i 的基于求和的 SF 偏好定义为 $\Gamma \succeq_i^{sumSF} \Delta \iff u_i^{sumSF}(\Gamma) \geq u_i^{sumSF}(\Delta)$。她的其他利他偏好（$\succeq^{sumEQ}{}_i$；$\succeq_i^{sumAL}$；$\succeq_i^{minSF}$；$\succeq^{minEQ}{}_i$；以及 $\succeq_i^{minAL}$）采用相应的效用函数，以类似方式定义。因子 M 用于 SF 和 AL 模型，确保在 SF 模型中，参与者的效用首先由其自身估值决定；而在 AL 模型中，参与者的效用首先由朋友的估值决定。与 Nguyen 等人 [1] 在享乐博弈中证明相应性质的方式类似，我们可以证明，对于 $M \geq n^3, v_i(\Gamma) > v_i(\Delta)$，可推出 $\Gamma \succ_i^{sumSF} \Delta$ and $\Gamma \succ_i^{minSF} \Delta$；对于 $M \geq n^2, \text{sum}_i^F(\Gamma) > \text{sum}_i^F(\Delta)$，可推出 $\Gamma \succ_i^{sumAL} \Delta$；而 $\text{min}_i^F(\Gamma) > \text{min}_i^F(\Delta)$ 则可推出$\Gamma \succ_i^{minAL} \Delta$。利他联盟形成博弈（ACFG）是指这样一种联盟形成博弈：参与者的偏好是通过上述某一种利他主义情形，借助朋友网络得到的。因此，我们区分基于求和的 SF、基于求和的 EQ、基于求和的 AL、基于最小值的 SF、基于最小值的 EQ，以及基于最小值的利他型 ACFG。对于任意 ACFG，显然都可以在多项式时间内计算出玩家的效用。

3 ACFG 的单调性及其他性质

Nguyen 等人 [1] 关注的是享乐博弈中的利他主义，在这类博弈中，参与者的效用仅取决于其自身所在的联盟。正如我们在示例 1 中看到的，利他行为的某些方面无法通过享乐博弈实现。以下示例表明，我们的模型与 Nguyen 等人 [1] 以及 Wiechers 和 Rothe [5]提出的模型有着根本区别。

示例 2。考虑一个 ACFG（$N \succeq$），其朋友网络如图 2 所示，联盟结构为$\Gamma = \{\{1,2\},\{3\},\{4\},\ldots,\{10\}\}$ 和 $\Delta = \{\{1,5,\ldots,10\},\{2,3,4\}\}$。现在，我们将比较在我们的利他模型下参与者 1 对这两种联盟结构的偏好，以及在利他享乐模型 *[1, 5]*下参与者 1 的偏好。表 1 列出了计算参与者 1 效用所需的所有相关数值。

可以看出，参与者1和她所有的朋友对 Δ 的估值都高于对 Γ的估值。因此，朋友们的估值汇总（sum_1^F、sum_1^{F+}、min_1^F、min_1^{F+}）对 Δ也更高。因此，在我们所有基于求和和基于最小值的利他偏好下，1都更偏好Δ 而非 Γ。

表 1：示例 2 中博弈的取值，朋友网络见图 2

	v_1	v_2	v_5	v_6	sum_1^F	sum_1^{F+}	$\min_1^F$	$\min_1^{F+}$
Γ	10	10	0	0	10	20	0	0
Δ	16	20	5	5	30	46	5	5

然而，Nguyen 等人 *[1]* 以及 Wiechers 和 Rothe *[5],* 提出的享乐模型并未考虑到这样一个事实：参与者1和她所有的朋友在 Δ 中的境况都比在 Γ中更好。在他们的利他享乐偏好下，玩家1仅根据自己的联盟 $\Gamma(1) = \{1,2\}$ 和$\Delta(1) = \{1,5,\ldots,10\}$来比较两个联盟结构 Γ 和 Δ。随后，她只考虑与自己处于同一联盟的朋友，即Γ 中的玩家2，以及 Δ中的玩家5和6。因此，在利他平等对待和利他偏好下，1更偏好 Γ(1)，而非 Δ(1)。具体而言，Γ(1)中1的朋友的平均估值（以及最小估值）为10，而 Δ(1)中1的朋友的平均估值（以及最小估值）为5。若在平等对待下也考虑1自己的估值，则 Γ(1)中的平均值（以及最小值）为10，而 Δ(1)中的平均值（或最小值）为8.6（或5）。

3.1 一些基本性质

正如我们在示例 2 中所见，利他型享乐博弈 [1, 5] 允许玩家偏好那些会让自己及其所有朋友处境更差的联盟结构。为避免这种不合理行为，我们将关注一般的联盟形成博弈。事实上，我们所有的利他型联盟形成偏好都满足一致性：对于一个 ACFG $(N \succeq)$ 和一个玩家 $i \in N$，若对于任意两个联盟结构$\Gamma,\Delta \in \mathscr{C}_N$，只要对每个 $a \in F_i \cup \{i\}$ 都有 $v_a(\Gamma) > v_a(\Delta)$，就称 $\succeq_i$ 满足一致性。

这一性质使我们的偏好模型与相应的利他享乐偏好有了关键区别；正如示例 2 所示，在平等对待或 AL 偏好下，后者并不满足一致性。请注意，Nguyen 等人 [1] 通过只考虑代理人自身所在的联盟，在利他型享乐博弈中定义了一种受限的一致性版本。Nguyen 等人 [1] 研究的利他享乐偏好中的其他理想性质，也可以推广到联盟形成博弈。我们将证明，这些理想性质对我们的模型同样成立。首先，我们总结一些基本观察：

观察 3. 考虑任意一个 ACFG $(N \succeq)$，其底层朋友网络为 G。

1. 所有偏好 $\succeq_i$，$i \in N$，都是自反且传递的。2. 对任意玩家 $i \in N$ 和任意两个联盟结构 Γ，$\Delta \in \mathscr{C}_N$，都可以在多项式时间内（关于代理人数）判定 $\Gamma \succeq_i \Delta$。3. 偏好 $\succeq_i$，$i \in N$，只取决于 G 的结构。

请注意，观察 3 的第三条意味着 Nguyen 等人 [1] 所称的匿名性和对称性这两项性质在 ACFG 中都成立。他们考虑的另一项理想性质称为玩家主权，其灵感来自社会选择理论中的“公民主权”公理：[3] 给定一组代理人 N、一个联盟结构 $\Gamma \in \mathscr{C}_N$以及一个代理人 $i \in N$，如果存在 N 上的一个朋友网络 G，使得 Γ 是由 G 诱导的任意 ACFG 中 i 最偏好的联盟结构，我们就说玩家主权得到了满足。

命题 4. 在所有基于求和的和基于最小值的社会福利、平等对待和利他偏好下，ACFG 均满足玩家主权。

证明。在 ACFG 中，玩家主权可以通过与 Nguyen 等人 [1, 定理 5]的证明类似的构造来展示：给定玩家集合 N、玩家 $i \in N$ 以及联盟结构 $\Gamma \in \mathscr{C}_N$，我们构造一个朋友网络，使得 Γ(i) 中的所有玩家彼此都是朋友，而不存在其他朋友关系。于是，在所有基于求和的和基于最小值的社会福利、平等对待以及利他偏好下，Γ 都是 i 最偏好的（非唯一）联盟结构。 □

[3]通俗地说，如果通过适当选择偏好剖面，可以使每位候选人都成为某次选举的获胜者，那么该投票规则就满足公民主权。

3.2 单调性

下一个性质描述了偏好的单调性，并进一步将我们的模型与利他主义享乐博弈区分开来。事实上，Nguyen 等人 [1] 定义了两种单调性，我们在此将其调整到我们的设定中。

定义 5. 考虑任意 ACFG $(N \succeq)$、参与者 $i、j \in N$ 且 $j \in E_i$，以及联盟结构 $\Gamma,\Delta \in \mathscr{C}_N$。进一步设 $\succeq_i'$ 为当 j 从 i 的敌人变为 i 的朋友时（其他条件均不变），由 $\succeq_i$ 产生的偏好关系。我们称 $\succeq_i$ 为

- I 类单调的，当且仅当 (1) $\Gamma \succ i\ \Delta、j \in \Gamma(i) \cap \Delta(i)$，且 $v\ j(\Gamma) \geq v\ j(\Delta)$ 蕴含 $\Gamma \succ' i\ \Delta$；以及 (2) $\Gamma \sim i\ \Delta、j \in \Gamma(i) \cap \Delta(i)$，且 $v\ j(\Gamma) \geq vj(\Delta)$ 蕴含 $\Gamma \succeq' i\ \Delta$；
- II 类单调的，当且仅当 (1) $\Gamma \succ i\ \Delta、j \in \Gamma(i) \setminus \Delta(i)$，且 $v\ j(\Gamma) \geq v\ j(\Delta)$ 蕴含 $\Gamma \succ' i\ \Delta$；以及 (2) $\Gamma \sim i\ \Delta、j \in \Gamma(i) \setminus \Delta(i)$，且 $vj(\Gamma) \geq v\ j(\Delta)$ 蕴含 $\Gamma \succeq' i\ \Delta$。

定理 6. 设 $(N \succeq)$ 是一个 ACFG。

1. 如果 $(N \succeq)$ 是基于求和的，则其偏好满足 I 型和 II 型单调性。2. 如果 $(N \succeq)$ 是基于最小值的，则其偏好满足 II 型单调性，但不满足 I 型单调性

.

证明. 设 $(N \succeq)$ 是一个 ACFG，其底层朋友网络为 $G = (N, H)$。考虑 $i \in N$、Γ、$\Delta \in \mathscr{C}_N$，以及 $j \in E_i$，并用 $G' = (N, H \cup \{\{i, j\}\})$ 表示由 G 得到的朋友网络，其中 j 从 i 的敌人变为 i 的朋友（其他条件不变）。设 $(N \succeq')$ 是由 G'诱导的 ACFG。对于任意参与者 $a \in N$ 和联盟结构 $\Gamma \in \mathscr{C}_N$，用 $v'_a(\Gamma)$ 表示 a 在 G' 中对 Γ 的价值，用 $\succeq'_a$ 表示 a 在 $(N \succeq')$ 中的偏好关系，并分别用 F'_a 和 E'_a 表示 a 在 $(N \succeq')$ 中的朋友和敌人。也就是说，我们有 $F'_i = F_i \cup \{j\}$，$E'_i = E_i \setminus \{j\}$，$F'_j = F_j \cup \{i\}$，以及 $E'_j = E\ j \setminus \{i\}$。此外，$v'_i$、$v'_j$和 $\succeq'_i$可能不同于 v_i、v_j和 $\succeq_i$，而所有其他玩家的朋友、敌人和值均保持不变，即对于所有 $a \in N \setminus \{i, j\}$，$F'_a = F_a$，$E'_a = E_a$，且 $v'_a = v_a$。

基于求和的偏好下的 I 型单调性。设 $j \in \Gamma(i) \cap \Delta(i)$，且 $v_j(\Gamma) \geq v\ _j(\Delta)$。则有

$$v'_i(\Gamma) = n|\Gamma(i) \cap F'_i| - |\Gamma(i) \cap E'_i| = n|\Gamma(i) \cap F_i| + n - |\Gamma(i) \cap E_i| + 1 = v_i(\Gamma) + n + 1.$$

等价地，$v'_i(\Delta) = v_i(\Delta) + n + 1$，$v'_j(\Gamma) = v_j(\Gamma) + n + 1$，且 $v'_j(\Delta) = v\ _j(\Delta) + n + 1$。此外 e,

$$\begin{aligned} \text{sum}_i^{F\prime}(\Gamma) &= \sum_{a \in F'_i} v'_a(\Gamma) = \sum_{a \in F_i \cup \{j\}} v'_a(\Gamma) = \sum_{a \in F_i} v_a(\Gamma) + v'_j(\Gamma) \\ &= \text{sum}_i^F(\Gamma) + v_j(\Gamma) + n + 1 \ \text{ and} \qquad (1) \\ \text{sum}_i^{F\prime}(\Delta) &= \text{sum}_i^F(\Delta) + v_j(\Delta) + n + 1. \qquad (2) \end{aligned}$$

(1) 求和SF：若 $\Gamma \succ_i^{sumSF} \Delta$，则以下两种情况必有其一：(i) $v_i(\Gamma) = v_i(\Delta)$，且 $\text{sum}_i^F(\Gamma) > \text{sum}_i^F(\Delta)$；或 (ii) $v_i(\Gamma) > v_i(\Delta)$。在情况 (i) 下，$v_i(\Gamma) = v_i(\Delta)$ 意味着 $v'_i(\Gamma) = v'_i(\Delta)$. 应用 $\text{sum}^F{}_i(\Gamma) >$求和$_i^F(\Delta)$ 和 $v_j(\Gamma) \geq v_j(\Delta)$ 应用于 (1) 以及 (2)，我们得到求和$_i'(\Gamma) >$ 求和$_i^{F\prime}(\Delta)$。这与 $v'_i(\Gamma) = v'_i(\Delta)$ 一起推出 $\Gamma \succ_i^{sumSF\prime} \Delta$。

在情形 (ii) 中，$v_i(\Gamma) > v_i(\Delta)$ 意味着 $v'_i(\Gamma) > v'_i(\Delta)$。因此，$\Gamma \succ_i^{sumSF\prime} \Delta$。

若 $\Gamma \sim_i^{sumSF} \Delta$，则 $v_i(\Gamma) = v_i(\Delta)$ 且求和$_i^F(\Gamma) =$ 求和$_i^F(\Delta)$。$v_i(\Gamma) = v_i(\Delta)$ 意味着 $v'_i(\Gamma) = v'_i(\Delta)$。将求和$_i^F(\Gamma) =$ 求和$_i^F(\Delta)$ 和 $v_j(\Gamma) \geq v_j(\Delta)$ 应用于 (1) 和 (2)，我们得到求和$_i^{F\prime}(\Gamma) \geq$ 求和$_i^{F\prime}(\Delta)$。这与 $v'_i(\Gamma) = v'_i(\Delta)$ 一起推出 $\Gamma \succeq_i^{sumSF\prime} \Delta$。

(2) 求和EQ：如果 $\Gamma \succ^{sumEQ} i\ \Delta$，那么 $\text{sum}_i^F(\Gamma) + v_i(\Gamma) > \text{sum}_i^F(\Delta) + v_i(\Delta)$。利用 (1)、(2)、$v'_i(\Gamma) = v_i(\Gamma) + n + 1$、$v'_i(\Delta) = v_i(\Delta) + n + 1$，以及 $v_j(\Gamma) \geq v_j(\Delta)$，可得 $\text{sum}_i^{F\prime}(\Gamma) + v'_i(\Gamma) > \text{sum}_i^{F\prime}(\Delta) + v'_i(\Delta)$。因此，$\Gamma \succ^{sumEQ\prime} i\Delta$。

如果 $\Gamma \sim^{sumEQ}{}_i\ \Delta$，利用相同的方程，可推出 $\Gamma \succeq^{sumEQ\prime}{}_i\ \Delta$。

(3) 求和AL：如果 $\Gamma \succ_i^{sumAL} \Delta$，则满足以下条件之一：(i) $\text{sum}_i^F(\Gamma) = \text{sum}_i^F(\Delta)$ 且 $v_i(\Gamma) > v_i(\Delta)$；或 (ii) $\text{sum}_i^F(\Gamma) > \text{sum}_i^F(\Delta)$。

在情形 (i) 中，$\text{sum}_i^F(\Gamma) = \text{sum}_i^F(\Delta)$，结合 (1)、(2) 以及 $\text{v}_j(\Gamma) \geq \text{v}_j(\Delta)$，可推出 $\text{sum}_i^{F\prime}(\Gamma) \geq \text{sum}_i^{F\prime}(\Delta)$。此外，$\text{v}_i(\Gamma) > \text{v}_i(\Delta)$，结合 $\text{v}_i'(\Gamma) = \text{v}_i(\Gamma) + \text{n} + 1$ 以及 $\text{v}_i'(\Delta) = \text{v}_i(\Delta) + \text{n} + 1$，可推出 $\text{v}_i'(\Gamma) > \text{v}_i'(\Delta)$。综上，可推出 $\Gamma \succ_i^{sumAL\prime} \Delta$。

在情形 (ii) 中，$\text{sum}_i^{F\prime}(\Gamma) > \text{sum}_i^{F\prime}(\Delta)$ 得以推出，且 $\Gamma \succ_i^{sumAL\prime} \Delta$ 随之成立。

若 $\Gamma \sim_i^{sumAL} \Delta$，则 $\text{sum}_i^F(\Gamma) = \text{sum}_i^F(\Delta)$ 且 $\text{v}_i(\Gamma) = \text{v}_i(\Delta)$。利用与前面相同的方程，可推出 $\Gamma \succeq_i^{sumAL\prime} \Delta$。

基于求和的偏好和基于最小值的偏好下的 II 型单调性。令 $\text{j} \in \Gamma(\text{i}) \setminus \Delta(\text{i})$，且 $\text{v}_j(\Gamma) \geq \text{v}_j(\Delta)$。由此可得，$\text{v}_i'(\Gamma) = \text{v}_i(\Gamma) + \text{n} + 1$，$\text{v}_i'(\Delta) = \text{v}_i(\Delta)$，$\text{v}_j'(\Gamma) = \text{v}_j(\Gamma) + \text{n} + 1$，且 $\text{v}_j'(\Delta) = \text{v}_j(\Delta)$。此外，

$$\text{sum}_i^{F\prime}(\Gamma) = \text{sum}_i^F(\Gamma) + v_j(\Gamma) + n + 1, \tag{3}$$
$$\text{sum}_i^{F\prime}(\Delta) = \text{sum}_i^F(\Delta) + v_j(\Delta), \tag{4}$$
$$\min_i^{F\prime}(\Gamma) = \min\left(\min_i^F(\Gamma), v_j(\Gamma) + n + 1\right), \tag{5}$$
$$\min_i^{F\prime}(\Delta) = \min\left(\min_i^F(\Delta), v_j(\Delta)\right), \tag{6}$$
$$\min_i^{F+\prime}(\Gamma) = \min\left(\min_i^F(\Gamma), v_j(\Gamma) + n + 1, v_i(\Gamma) + n + 1\right), \text{ and} \tag{7}$$
$$\min_i^{F+\prime}(\Delta) = \min\left(\min_i^F(\Delta), v_j(\Delta), v_i(\Delta)\right). \tag{8}$$

(1) 求和SF和最小社会朋友偏好：若 $\Gamma \succeq_i^{SF} \Delta$，则 $\text{v}_i(\Gamma) \geq \text{v}_i(\Delta)$。因此，$\text{v}_i'(\Gamma) = \text{v}_i(\Gamma) + \text{n} + 1 \geq \text{v}_i(\Delta) + \text{n} + 1 > \text{v}_i(\Delta) = \text{v}_i'(\Delta)$，这意味着 $\Gamma \succ_i^{SF\prime} \Delta$。

(2) 求和EQ：如果 $\Gamma \succeq^{sumEQ}{}_i \Delta$，那么 $\text{sum}_i^F(\Gamma) + \text{v}_i(\Gamma) \geq \text{sum}_i^F(\Delta) + \text{v}_i(\Delta)$。结合 (3)、(4) 以及 $\text{v}_j(\Gamma) \geq \text{v}_j(\Delta)$，可得 $\text{sum}_i^{F\prime}(\Gamma) + \text{v}_j'(\Gamma) > \text{sum}_i^{F\prime}(\Delta) + \text{v}_j'(\Delta)$。因此，$\Gamma \succ^{sumEQ\prime}{}_i \Delta$。

(3) 求和AL：如果 $\Gamma \succeq_i^{sumAL} \Delta$，那么 $\text{sum}_i^F(\Gamma) \geq \text{sum}_i^F(\Delta)$。结合 (3)、(4) 以及 $\text{v}_j(\Gamma) \geq \text{v}_j(\Delta)$，可得 $\text{sum}_i^{F\prime}(\Gamma) > \text{sum}_i^{F\prime}(\Delta)$，因此 $\Gamma \succ_i^{sumAL\prime} \Delta$。

(4) 最小均衡：首先，假设 $\Gamma \succ^{minEQ}{}_i \Delta$。于是有 $\min\left(\min_i^F(\Gamma), \text{v}_i(\Gamma)\right) > \min\left(\min_i^F(\Delta), \text{v}_i(\Delta)\right)$。由此可得 $\Gamma \succ^{minEQ\prime}{}_i \Delta$，因为

$$\begin{aligned} \min_i^{F+\prime}(\Gamma) &= \min\left(\min_i^F(\Gamma), v_j(\Gamma) + n + 1, v_i(\Gamma) + n + 1\right) \\ &> \min\left(\min_i^F(\Delta), v_j(\Gamma), v_i(\Delta)\right) \geq \min\left(\min_i^F(\Delta), v_j(\Delta), v_i(\Delta)\right) = \min_i^{F+\prime}(\Delta). \end{aligned} \tag{9}$$

其次，假设 $\Gamma \sim^{minEQ}{}_i \Delta$。则 $\min\left(\min_i^F(\Gamma), \text{v}_i(\Gamma)\right) = \min\left(\min_i^F(\Delta), \text{v}_i(\Delta)\right)$。与式 (9) 类似，可得 $\min_i^{F+\prime}(\Gamma) \geq \min_i^{F+\prime}(\Delta)$。因此，$\Gamma \succeq^{minEQ\prime}{}_i \Delta$。

(5) 最小联盟：首先，假设 $\Gamma \succ_i^{minAL} \Delta$。那么，要么 (i) $\min_i^F(\Gamma) > \min_i^F(\Delta)$，要么 (ii) $\min_i^F(\Gamma) = \min_i^F(\Delta)$ and $\text{v}_i(\Gamma) > \text{v}_i(\Delta)$。

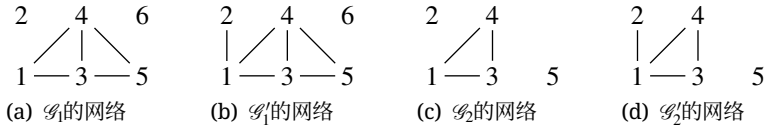
在 (i) 的情况下，由于 $\Gamma \succ_i^{minAL\prime} \Delta$，可得

$$\begin{aligned} \min_i^{F\prime}(\Gamma) &= \min\left(\min_i^F(\Gamma), v_j(\Gamma) + n + 1\right) \geq \min\left(\min_i^F(\Gamma), v_j(\Delta) + n + 1\right) \\ &> \min\left(\min_i^F(\Delta), v_j(\Delta)\right) = \min_i^{F\prime}(\Delta). \end{aligned} \tag{10}$$

在 (ii) 的情况下，与式 (10) 类似，可得 $\min_i^{F\prime}(\Gamma) \geq \min_i^{F\prime}(\Delta)$。此外，$\text{v}_i(\Gamma) > \text{v}_i(\Delta)$ 蕴含 $\text{v}_i'(\Gamma) > \text{v}_i'(\Delta)$。因此，$\Gamma \succ_i^{minAL\prime} \Delta$。

其次，假设 $\Gamma \sim_i^{minAL} \Delta$。那么 $\min_i^F(\Gamma) = \min_i^F(\Delta)$ 且 $\text{v}_i(\Gamma) = \text{v}_i(\Delta)$。与式 (10) 类似，我们得到 $\min_i^{F\prime}(\Gamma) \geq \min_i^{F\prime}(\Delta)$。此外，$\text{v}_i(\Gamma) = \text{v}_i(\Delta)$ 意味着 $\text{v}_i'(\Gamma) > \text{v}_i'(\Delta)$。因此，$\Gamma \succ_i^{minAL\prime} \Delta$。

基于最小值的偏好下的 I 型单调性。为说明 $\succeq^{minSF}$ 并非 I 型单调，考虑博弈 $\mathscr{G}_1$，其朋友网络如图 3a所示。此外，考虑联盟结构 $\Gamma = \{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6\}\}$ 和 $\Delta = \{\{1,2\},\{3,4,5,6\}\}$，以及玩家 $\text{i} = 1$ 和 $\text{j} = 2$，满足 $2 \in \Gamma(1) \cap \Delta(1)$，且 $\text{v}_2(\Gamma) = -1 = \text{v}_2(\Delta)$。有 $\text{v}_1(\Gamma) = \text{v}_1(\Delta) = -1$，$\min_1^F(\Gamma) = 2\text{n}$，且 $\min_1^F(\Delta) = 2\text{n} - 1$。因此，$\Gamma \succ_1^{minSF} \Delta$。



(a) $\mathscr{G}_1$的网络 (b) $\mathscr{G}_1'$的网络 (c) $\mathscr{G}_2$的网络 (d) $\mathscr{G}_2'$的网络

图 3：定理 6 证明中的朋友网络

现在，让 2 成为 1 的朋友后，得到博弈 $\mathscr{G}_1'$，其朋友网络如图3b所示。对于这个博弈，我们有 $v_1'(\Gamma) = v_1'(\Delta) = n$，且 $\min_1^{F'}(\Gamma) = \min_1^{F'}(\Delta) = n$。这意味着 $\Gamma \sim_1^{minSF'} \Delta$，与 I 型单调性相矛盾。

要说明 $\succeq^{minEQ}$ 和 $\succeq^{minAL}$ 不是 I 型单调的，考虑图 3c 中具有朋友网络的博弈 $\mathscr{G}_2$。考虑联盟结构 $\Gamma = \{\{1,2,3,4\},\{5\}\}$ 和 $\Delta = \{\{1,2,3,4,5\}\}$，以及玩家 $i = 1$ 和 $j = 2$，其中 $2 \in \Gamma(1) \cap \Delta(1)$，且 $v_2(\Gamma) = -3 > -4 = v_2(\Delta)$。成立 $\min_1^{F^+}(\Gamma) = \min_1^{F}(\Gamma) = 2n-1$，并且 $\min_1^{F^+}(\Delta) = \min_1^{F}(\Delta) = 2n-2$。因此，$\Gamma \succ_1^{minEQ} \Delta$ 和 $\Gamma \succ_1^{minAL} \Delta$。

现在，让 2 成为 1 的朋友，会得到博弈 $\mathscr{G}_2'$，其朋友网络如图 3d 所示。对于这个博弈，我们有 $\min_1^{F^+\prime}(\Gamma) = \min_1^{F'}(\Gamma) = n$，且 $\min_1^{F^+\prime}(\Delta) = \min_1^{F'}(\Delta) = n$。这意味着 $\Gamma \sim_1^{minEQ'} \Delta$ 和 $\Gamma \sim_1^{minAL'} \Delta$，与 I 型单调性相矛盾，从而完成证明。 □

请注意，利他主义享乐模型 [1, 5] 对 EQ 和 AL 都违反了 I 型单调性和 II 型单调性。因此，我们扩展的基于求和的利他主义模型的三种程度均满足这两种单调性，这一点相当引人注目。

4 ACFG 中的稳定性

联盟形成博弈中的主要问题是哪些联盟结构可能形成。对于享乐博弈，已有多种经过深入研究的稳定性概念；每种概念都指出给定的联盟结构是否会被参与者接受，或者是否存在其他更有可能形成的联盟结构。尽管我们考虑的是更一般的联盟形成博弈，但可以轻松地将这些定义调整到我们的框架中。

设 $(N \succeq)$ 是一个 ACFG，其偏好为 $\succeq = (\succeq_1, \ldots, \succeq_n)$，由朋友网络通过利他主义的三个层次之一导出，并且参与者的估值采用基于求和或基于最小值的聚合。我们使用以下记号。对于联盟结构 $\Gamma \in \mathscr{C}_N$、玩家 $i \in N$ 和联盟 $C \in \Gamma \cup \{\emptyset\}$，$\Gamma_{i \to C}$ 表示将 i 转入 C 后形成的联盟结构，即

$$\Gamma_{i \to C} = \Gamma \setminus \{\Gamma(i), C\} \cup \{\Gamma(i) \setminus \{i\}, C \cup \{i\}\}.$$

此外，我们用 $\Gamma_{C \to \emptyset}$（其中 $C \subseteq N$）表示所有属于 C 的玩家离开各自的联盟并组成一个新联盟后形成的联盟结构，即

$$\Gamma_{C \to \emptyset} = \Gamma \setminus \{\Gamma(j) \mid j \in C\} \cup \{\Gamma(j) \setminus C \mid j \in C\} \cup \{C\}.$$

最后，对于任意两个联盟结构 $\Gamma, \Delta \in \mathscr{C}_N$，令 $\#_{\Gamma \succ \Delta} = |\{i \in N \mid \Gamma \succ_i \Delta\}|$ 表示偏好 Γ 而非 Δ 的玩家人数。现在，我们可以定义常见的稳定性概念。

定义 7. 联盟结构 Γ 称为

- 纳什稳定，当且仅当没有玩家更愿意加入另一个联盟：

$$(\forall i \in N)(\forall C \in \Gamma \cup \{\emptyset\})[\Gamma \succeq_i \Gamma_{i \to C}];$$

- 个体理性，当且仅当没有玩家更愿意单独行动：

$$(\forall i \in N)[\Gamma \succeq_i \Gamma_{i \to \emptyset}];$$

- 若没有玩家更愿意加入另一个联盟，且无需损害该联盟中的任何玩家就能转入该联盟，则该联盟是个体稳定的：

$$(\forall i \in N)(\forall C \in \Gamma \cup \{\emptyset\})\left[\Gamma \succeq_i \Gamma_{i \to C} \vee (\exists j \in C)[\Gamma \succ_j \Gamma_{i \to C}]\right];$$

• 若没有玩家更愿意加入另一个联盟，且无需损害新旧联盟中的任何玩家就能转入该联盟，则该联盟是契约式个体稳定的：

$$(\forall i \in N)(\forall C \in \Gamma \cup \{\emptyset\})\left[\Gamma \succeq_i \Gamma_{i\to C} \vee (\exists j \in C)[\Gamma \succ_j \Gamma_{i\to C}] \vee (\exists k \in \Gamma(i))[\Gamma \succ_k \Gamma_{i\to C}]\right];$$

• 完全个体稳定：不存在任何玩家偏好另一个联盟，且可以转入该联盟而不损害任何其他玩家：

$$(\forall i \in N)(\forall C \in \Gamma \cup \{\emptyset\})\left[\Gamma \succeq_i \Gamma_{i\to C} \vee (\exists l \in N \setminus \{i\})[\Gamma \succ_l \Gamma_{i\to C}]\right];$$

• 核心稳定：不存在非空联盟阻挡 Γ：

$$(\forall C \subseteq N, C \neq \emptyset)(\exists i \in C)[\Gamma \succeq_i \Gamma_{C\to\emptyset}];$$

• 严格核心稳定：不存在任何联盟弱阻挡 Γ：

$$(\forall C \subseteq N)(\exists i \in C)[\Gamma \succ_i \Gamma_{C\to\emptyset}] \vee (\forall i \in C)[\Gamma \sim_i \Gamma_{C\to\emptyset}];$$

• 受欢迎：对于每个其他联盟结构 Δ，偏好 Γ 胜过 Δ 的玩家人数不少于偏好 Δ 胜过 Γ的玩家人数：

$$(\forall \Delta \in \mathscr{C}_N, \Delta \neq \Gamma)\left[\#_{\Gamma\succ\Delta} \geq \#_{\Delta\succ\Gamma}\right];$$

• 严格受欢迎：对于每个其他联盟结构 Δ，偏好 Γ 胜过 Δ 的玩家人数多于偏好 Δ胜过 Γ的玩家人数：

$$(\forall \Delta \in \mathscr{C}_N, \Delta \neq \Gamma)\left[\#_{\Gamma\succ\Delta} > \#_{\Delta\succ\Gamma}\right];$$

• 完美：不存在任何玩家偏好任何联盟结构胜过 Γ：

$$(\forall i \in N)(\forall \Delta \in \mathscr{C}_N)[\Gamma \succeq_i \Delta].$$

请注意，“完全个体稳定性”是我们在此引入的新概念。它强化了契约个体稳定性的概念；在联盟形成博弈中，这一概念是合理的，因为玩家的偏好也可能受到其并未加入的联盟的影响。

现在，我们从计算复杂性的角度研究相关的验证问题和存在性问题。我们假定读者熟悉复杂性类 P（确定性多项式时间）、NP（非确定性多项式时间）和 coNP（NP 集合补集的类）。关于计算复杂性的更多背景知识，可参阅 Garey 和 Johnson [25] 以及 Rothe [26]等人的教科书。给定一个稳定性概念α，我们定义：

- α-验证：给定一个 ACFG (N $\succeq$) 和一个联盟结构 $\Gamma \in \mathscr{C}_N$，Γ 是否满足 α?
- α-存在性：给定一个 ACFG (N $\succeq$)，是否存在一个满足 α的联盟结构 $\Gamma \in \mathscr{C}_N$?

表2总结了在基于求和的和基于最小值的 SF 偏好下，这些问题的结果。本节还将给出 EQ 和 AL 的结果。不过，在表2中，我们只标明 EQ 和 AL 的结果是否与 SF 的结果一致。

4.1 个体理性

验证个体理性很容易：我们只需遍历所有代理人，并在每次迭代中比较两个联盟结构。由于可以在多项式时间内计算参与者效用，因此可以在关于代理人数的多项式时间内验证个体理性。存在性问题是平凡的，因为 $\Gamma = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$ 总是个体理性的。此外，我们给出以下刻画。

定理8。给定一个 ACFG (N $\succeq$)，若联盟结构 $\Gamma \in \mathscr{C}_N$

表2：基于求和和基于最小值的SF ACFG中的复杂度结果

稳定性概念 α	α-验证	α-存在性
个体理性	属于P类[1]	平凡[1]
纳什稳定性	属于 P类[1]	平凡[1]
个体稳定性	属于 P类[1]	平凡的[1]
核心稳定性	coNP 完全[2]	平凡的
严格核心稳定性	属于 coNP[2]	平凡
受欢迎性	coNP 完全[2]	非平凡[1]
严格受欢迎性	coNP 完全[2]	coNP 困难
完美性	属于 P类[2]	属于 P类[3]

[1]对基于求和的均衡和基于最小值的均衡以及利他型 ACFG 同样成立[2] 对于任意 ACFG，属于 coNP[3] 对于基于求和的 EQ ACFG，属于 coNP

1. 在基于求和的社会福利、基于求和的均衡、基于求和的利他主义、基于最小值的社会福利或基于最小值的利他偏好下，当且仅当对所有玩家 $i \in N$ 都成立： $\Gamma(i)$ 包含 i 的一位朋友，或者 i 独自一人。形式化地说：$(\forall i \in N)[\Gamma(i) \cap F_i \neq \emptyset \vee \Gamma(i) = \{i\}]$;

2. 在基于最小值的 EQ 偏好下，当且仅当对于所有玩家 $i \in N$， $\Gamma(i)$ 包含 i 的一个朋友，或者 i 是孤立的，或者 i 的某个朋友的 Γ 估值小于或等于 i 对 Γ 的估值，形式化地表示为：$(\forall i \in N)[\Gamma(i) \cap F_i \neq \emptyset \vee \Gamma(i) = \{i\} \vee (\exists j \in F_i)[v_j(\Gamma) \leq v_i(\Gamma)]]$。

证明。1. 为证明从左到右的蕴含，若 Γ 个体理性，我们反设 $\Gamma(i) \cap F_i = /0$ 且 $\Gamma(i) \neq \{i\}$，其中某个玩家 $i \in N$。首先，我们注意到，对所有 $j \in F_i$，都有 $v_j(\Gamma) = v_j(\Gamma_{i\to\emptyset})$，因为 i 的行动不会影响各自的联盟。由此可直接得出，在所有考虑的利他主义模型中，玩家 i 对 Γ 和 $\Gamma_{i\to\emptyset}$ 的效用仅取决于她自己的估值，而 $\Gamma_{i\to\emptyset}$ 的估值高于 Γ（因为 $\Gamma(i)$ 中有敌人，而 $\Gamma_{i\to\emptyset}(i)$ 中没有）。因此，i 更偏好 $\Gamma_{i\to\emptyset}$ 而非 Γ，所以 Γ 不具备个体理性。这就产生了矛盾。

对于所有考虑的利他主义模型，从右到左的蕴含显然成立。

2. 从左到右，我们有 Γ 个体理性；为反证起见，假设存在玩家 $i \in N$，使得 $\Gamma(i) \cap F_i = /0$ 且 $\Gamma(i) \neq \{i\}$，并且对所有 $j \in F_i$，都有 $v_j(\Gamma) > v_i(\Gamma)$。由于 i 是 $F_i \cup \{i\}$ 中最不满意的玩家，因此 $u^{minEQ}{}_i(\Gamma) = v_i(\Gamma)$。又因为对所有 $j \in F_i$，都有 $v_j(\Gamma_{i\to\emptyset}) = v_j(\Gamma) > v_i(\Gamma)$，且 $v_i(\Gamma_{i\to\emptyset}) = 0 > v_i(\Gamma)$，我们立即得到 $u^{minEQ}{}_i(\Gamma_{i\to\emptyset}) > u^{minEQ}{}_i(\Gamma)$ 且 $\Gamma_{i\to\emptyset} \succ^{minEQ}{}_i \Gamma$。这与 Γ 具备个体理性矛盾。

从右向左，我们需要考虑两种情况。首先，如果 $\Gamma(i) \cap F_i \neq /0$ 或 $\Gamma(i) = \{i\}$ 对某个 $i \in N$ 成立，那么显然有 $\Gamma \succeq^{minEQ}{}_i \Gamma_{i\to\emptyset}$。其次，如果 $\Gamma(i) \cap F_i = /0$ 且 $\Gamma(i) \neq \{i\}$，我们知道至少存在一个 $j \in F_i$，使得 $v_j(\Gamma) \leq v_i(\Gamma) < 0$。令 j' 表示 i 在 Γ 中最不满意的朋友（如果有多个，则随机选取一个）。由于 $\Gamma(i) \cap F_i = /0$，对于所有 $j \in F_i$，都有 $\Gamma(j) = \Gamma_{i\to\emptyset}(j)$。因此，$j'$ 在这两种联盟结构中都是 i 最不满意的朋友，并且我们有 $u^{minEQ}{}_i(\Gamma) = v_{j'}(\Gamma) = v_{j'}(\Gamma_{i\to\emptyset}) = u^{minEQ}{}_i(\Gamma_{i\to\emptyset})$。因此，$\Gamma \sim^{minEQ}{}_i \Gamma_{i\to\emptyset}$，所以 Γ 是个体理性的。

□

4.2 纳什稳定性

由于联盟结构 $\Gamma \in \mathscr{G}_N$ 中至多有 $|N|$ 个联盟，我们可以在多项式时间内验证纳什稳定性：只需遍历所有代理人 $i \in N$ 以及所有（至多 $|N|+1$ 个）联盟 $C \in \Gamma \cup \{\emptyset\}$，并检查 $\Gamma \succeq_i \Gamma_{i\to C}$ 是否成立。由于我们可以在多项式时间内检查玩家对任意两个联盟结构的利他偏好，且迭代次数至多为二次量级（$|N| \cdot (|N|+1)$），因此对于任意 ACFG，纳什稳定性验证属于 P类。

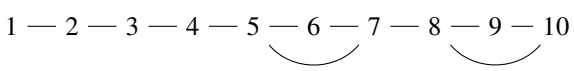


图 4：例 10 中的朋友网络

对于任意 ACFG，纳什稳定性的存在性显然属于 P类；事实上，Nguyen 等人 [1] 为利他型享乐博弈给出的同一示例在这里也适用。具体而言，对于 $C = \{i \in N \mid F_i = \emptyset\} = \{c1,\ldots, c_k\}$，联盟结构 $\{\{c_1\},\ldots,\{c_k\}, N \setminus C\}$ 是纳什稳定的。

4.3 个体稳定性

对于个体稳定性、契约个体稳定性和完全个体稳定性，判定是否存在也显然属于 P类。纳什稳定性蕴含这三种概念，因此，上文给出的纳什稳定联盟结构也具有（契约；完全）个体稳定性。

验证玩家 a 这些稳定性概念的判定也属于 P类。与纳什稳定性类似，我们可以遍历所有并枚举所有联盟，并在多项式时间内检查相应条件。

4.4 核心稳定性和严格核心稳定性

现在我们转而讨论核心稳定性，并陈述关于基于求和和基于最小值的 SF ACFG 的一些结果。我们首先证明，对于 SF ACFG，存在（严格）核心稳定解是显而易见的。

定理 9. 设 $(N \succeq^{SF})$ 是一个（基于求和或基于最小值的）SF ACFG，其底层朋友网络为 G。进一步设 $C_1,\ldots,C_k$ 是 G 的连通分量的顶点集。那么 $\Gamma = \{C_1,\ldots,C_k\}$ 严格核心稳定（因此也是核心稳定的）。

证明。为导出矛盾，假设 Γ 并非严格核心稳定，即存在一个联盟 $D \neq /0$ 弱阻挡 Γ。考虑任意玩家 $i \in D$。由于 i 弱偏好于从 $\Gamma(i)$ 偏离到 D，D 中 i 的朋友数量必然至少与 $\Gamma(i)$ 中的一样多。由于 $\Gamma(i)$ 包含 i 的所有朋友，D 也必须包含 i 的所有朋友。出于同样的原因，这些朋友也都必须将自己的所有朋友纳入 D，如此等等。因此，D 包含来自连通分量 $\Gamma(i)$ 的所有玩家，即 $\Gamma(i) \subseteq D$。

由于 D 弱阻挡了 Γ，D 不可能等于 $\Gamma(i)$，因此必须包含某个 $\ell \notin \Gamma(i)$。然而，这会导致矛盾，因为 ℓ 是 i 的敌人；如果 D 包含的朋友数量与 $\Gamma(i)$相同，但敌人数量多于 $\Gamma(i)$，那么 i 会更偏好 Γ 而非 $\Gamma_{D\to\emptyset}$。□

然而，定理 9 中的联盟结构在 EQ 和 AL 偏好下不一定是核心稳定的。

例 10。设 N 为 $= \{1,\ldots,10\}$，并考虑图 4 所示的朋友网络 G。考虑由 G 的连通分量构成的联盟结构（即仅包含大联盟：$\Gamma = \{N\}$）以及联盟 $C = \{8,9,10\}$。在基于求和的和基于最小值的 EQ 与 AL 偏好下，C 会阻挡 Γ。为了解释这一点，考虑玩家 7、8、9 和 10 如何评价 Γ 和 $\Gamma_{C\to\emptyset}$:

$$v_7(\Gamma) = v_8(\Gamma) = 30-6 = 24, \qquad v_7(\Gamma_{C\to\emptyset}) = 20-4 = 16,$$
$$v_9(\Gamma) = v_{10}(\Gamma) = 20-7 = 13, \qquad v_8(\Gamma_{C\to\emptyset}) = v_9(\Gamma_{C\to\emptyset}) = v_{10}(\Gamma_{C\to\emptyset}) = 20.$$

于是我们得到

- $\mathrm{sumF}_8{}^+(\Gamma) = 74 < 76 = \mathrm{sumF}_8{}^+(\Gamma C_{\to/0})$，且 $\mathrm{sumF}_9{}^+(\Gamma) = \mathrm{sumF}_{10}{}^+(\Gamma) = 50 < 60 = \mathrm{sumF}_9{}^+(\Gamma C_{\to/0}) = \mathrm{sumF}_{10}{}^+(\Gamma C_{\to/0})$，因此 $\Gamma C_{\to\emptyset} \succ_{\mathrm{sumEQ}\, i}\, \Gamma$ 对所有 $i \in C$；
- $\mathrm{sumF}_8(\Gamma) = 50 < 56 = \mathrm{sumF}_8(\Gamma C_{\to/0})$，且 $\mathrm{sumF}_9(\Gamma) = \mathrm{sumF}_{10}(\Gamma) = 37 < 40 = \mathrm{sumF}_9(\Gamma C_{\to/0}) = \mathrm{sumF}_{10}(\Gamma C_{\to/0})$，因此 $\Gamma C_{\to\emptyset} \succ_{\mathrm{sumALi}}\, \Gamma$ 对所有 $i \in C$；
- $\mathrm{minF}_8{}^+(\Gamma) = \mathrm{minF8}(\Gamma) = 13 < 16 = \mathrm{minF}_8{}^+(\Gamma C_{\to/0}) = \mathrm{minF8}(\Gamma C_{\to/0})$ 和 $\mathrm{minF}_9{}^+(\Gamma) = \mathrm{minF9}(\Gamma) = \mathrm{minF}_{10}{}^+(\Gamma) = \mathrm{minF10}(\Gamma) = 13 < 20 = \mathrm{minF}_9{}^+(\Gamma C_{\to/0}) = \mathrm{minF9}(\Gamma C_{\to/0}) = \mathrm{minF}_{10}{}^+(\Gamma C_{\to/0}) = \mathrm{minF10}(\Gamma C_{\to/0})$，这意味着对于所有 $i \in C$，$\Gamma C_{\to\emptyset} \succ$最小均衡 $i\,\Gamma$ 以及 $\Gamma C_{\to\emptyset} \succ$最小联盟$i\,\Gamma$。

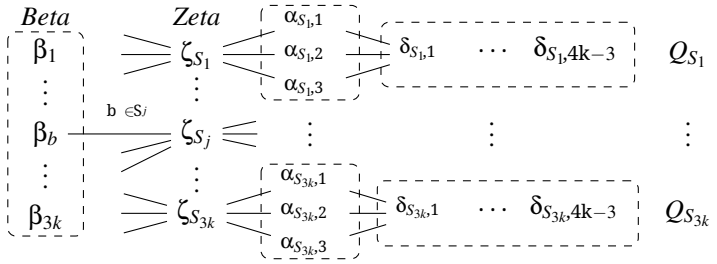


图 5：定理 11 证明中使用的朋友网络，用于证明在基于最小值的 SF ACFG 中，核心稳定性验证是 coNP 困难的。围绕一组玩家的虚线矩形表示这些玩家彼此都是朋友。

因此，在基于求和的和基于最小值的 EQ 与 AL 偏好下，C 阻挡了 Γ。

谈到（严格）核心稳定性验证，我们可以证明，在自私优先偏好下，这个问题是困难的；我们猜测，这种困难性也适用于平等对待和利他偏好。

定理 11. 对于任意 ACFG，严格核心稳定性验证和核心稳定性验证都属于 coNP。对于（基于求和的和基于最小值的）SF ACFG，核心稳定性验证甚至是 coNP 完全的。

证明。要证明严格核心稳定性验证和核心稳定性验证属于 coNP，考虑 ACFG $(N \succeq)$ 中任意一个联盟结构 $\Gamma \in \mathscr{C}_N$。如果存在一个联盟 $C \subseteq N$（弱）阻挡 Γ，那么 Γ 就不是（严格）核心稳定的。因此，我们非确定性地猜测一个联盟 $C \subseteq N$，并检查 C 是否（弱）阻挡 Γ。这可以在多项式时间内完成，因为在我们所有的利他主义模型中，对于所有 Γ 和 $\Gamma_{C\to\emptyset}$，都可以在多项式时间内验证 C 中代理人对这些联盟结构的偏好。

为了证明基于最小值的 SF ACFG 中核心稳定性验证的 coNP 困难性，我们使用 RX3C。RX3C 是 3 元集合精确覆盖的一个受限变体，且已知为 NP 完全 [25, 27]。我们给出一个从 RX3C 到我们验证问题补问题的多项式时间多对一归约。设 $(B\ \mathscr{S})$ 是一个 RX3C 实例，由集合 $B = \{1,\ldots,3k\}$ 以及一族 3 元子集 $\mathscr{S} = \{S1,..., S_{3k}\}$ 构成，其中 B 的每个元素恰好出现在 $\mathscr{S}$中的三个集合内。问题是：在 $\mathscr{S}$中，B 是否存在一个精确覆盖？也就是说，是否存在一个子集 $\mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$，满足 $|\mathscr{S}'| = k$ 且 $\bigcup_{S\in\mathscr{S}'} S = B$。我们假设 $k > 4$。

现在，我们根据 $(B\ \mathscr{S})$ 构造如下 ACFG。玩家集合为 $N = \{\beta_b \mid b \in B\} \cup \{\zeta_S, \alpha_{S,1}, \alpha_{S,2}, \alpha_{S,3}, \delta_{S,1}, \ldots, \delta_{S,4k-3} \mid S \in \mathscr{S}\}$，并定义以下集合

$$\begin{aligned} Beta &= \{\beta_b \mid b \in B\}, \\ Zeta &= \{\zeta_S \mid S \in \mathscr{S}\}, \text{ and} \\ Q_S &= \{\zeta_S, \alpha_{S,1}, \alpha_{S,2}, \alpha_{S,3}, \delta_{S,1}, \ldots, \delta_{S,4k-3}\} \text{ for each } S \in \mathscr{S}. \end{aligned}$$

图 5 展示了朋友网络，其中一组玩家周围的虚线矩形表示这些玩家彼此都是朋友：

- Beta 中的所有玩家彼此都是朋友。
- 对于每个 $S \in \mathscr{S}$, ζ_S 中的玩家，都与每个满足 $b \in S$ 的 β_b 是朋友，并且与 α_S1, α_S2，以及 α_S3 中的玩家是朋友。
- 对于每个 $S \in \mathscr{S}$, α_S1, α_S2, α_S3，以及 δ_S1 中的玩家，他们彼此都是朋友。
- 对于每个 $S \in \mathscr{S}$，$\{\delta_S1, \ldots, \delta_S(4k-3)\}$ 中的所有玩家彼此都是朋友。

此外，考虑联盟结构 $\Gamma = \{Beta, Q_{S_1}, \ldots, Q_{S_{3k}}\}$。现在我们将证明，$\mathscr{S}$包含 B 的一个精确覆盖，当且仅当 Γ 在基于最小值的 SF 模型下不具备核心稳定性。

仅当：假设 B 存在一个精确覆盖 $\mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$。那么 $|\mathscr{S}'| = k$。考虑联盟 $C = Beta \cup \{\zeta_S \mid S \in \mathscr{S}'\}$。C 阻挡 Γ，即，对于所有 $i \in C$，$\Gamma_{C\to\emptyset} \succ_i^{minSF} \Gamma$，因为 (a) 每个 $\beta_b \in Beta$ 的玩家在 C 中有 $3k$ 个朋友，而在 Beta 中只有 $3k-1$ 个朋友；(b) 每个 ζ_S 与 $S \in \mathscr{S}'$ 的玩家在 C 中有 3 个朋友和 $4k-4$ 个敌人，而在 Q_S 中有 3 个朋友和 $4k-3$ 个敌人。

若：假设 Γ 不是核心稳定的，且令 $C \subseteq N$ 为一个阻挡 Γ的联盟。那么，对于所有 $i \in C$，$\Gamma_{C\to\emptyset} \succ_i^{minSF} \Gamma$。首先，注意 $C \in$中的每个 i 都需要在 C 中拥有至少与其在 Γ(i) 中一样多的朋友。因此，如果任何 $\alpha_{S,\ j}$或 $\delta_{S,\ j}$属于 C，就可以直接推出 $Q_S \subseteq C$。然而，由于 Q_S是 Γ 中的一个联盟，且所有其他玩家（来自 $N \setminus Q_S$）都是所有 δ类玩家的敌人，因此任何满足 $Q_S \subseteq C$ 的联盟 C 都不能成为阻挡 Γ的联盟。这一矛盾意味着没有任何 $\alpha_{S,\ j}$或 $\delta_{S,\ j}$属于 C。

现在我们有 $C \subseteq$Beta$\cup$Zeta。由于任意 $\beta_b \in C$ 中都有 $3k-1$ 朋友，且在 $\Gamma(\beta_b)$ 中没有敌人，并且更偏好$\Gamma_{C\to\emptyset}$而非 Γ，因此以下情况之一成立：(a) β_b 在 C 中至少有 3k 个朋友；或 (b) β_b 有 3k 个 -1 朋友，且在 C 中没有敌人，并且 β_b的朋友认为 $\Gamma_{C\to\emptyset}$ 比 Γ更有价值。为导出矛盾，假设某个 $\beta_b \in C$ 满足 (b)。首先注意，C 中恰有 3k 个玩家（即 β_b和 β_b的 3k 个 -1朋友）。现在我们区分两种情况：

情况 1：β_b的 3k 个 -1 朋友全都是 β-玩家。那么 C 由所有 β-玩家组成，即 C ＝Beta。这与事实矛盾，因为 Beta 已经是 Γ中的一个联盟。

情形 2：C 中有一些 ζ-玩家是 β_b 的朋友。由于 β_b 总共有三位 ζ-朋友，且 C 中没有敌人，因此 C 中有一至三位 ζ-玩家。由此，C 中有 $3k-3$ 至 $3k-1$β-玩家。于是，其中一位 β-玩家在 C 中没有 ζ-朋友。（至多三位 ζ-玩家最多与九位 β-玩家是朋友，但 $3k-3>9$ 对于 $k>4$。）因此，这位 β-玩家在 C 中只有其他（至多 $3k-2$）位 β-玩家是朋友，并且不认为 $\Gamma_{C\to\emptyset}$ 优于 Γ。这是矛盾。

因此，选项 (a) 对每个 $\beta_b \in C$ 都成立。总而言之，每位 β_b恰好有三位 ζ-朋友和 $3k-1$ β-朋友。因此，β_b在 C 中的朋友至少有 $3k-3$ 位是 β-玩家，且 β_b在 C 中的朋友至少有一位是 ζ-玩家。再将 β_b 本人计入，则 C 中至少有 $3k-2$ β- 玩家。由于这 $3k-2$ β- 玩家在 C 中都至少有一位 ζ- 朋友，因此 C 中至少有 k ζ-玩家。（注意，$k-1$ ζ-玩家最多与 $3k-3$β-玩家是朋友。）

考虑某个 $\zeta_S \in C$。由于 ζ_S在 Q_S 中有三位朋友和 $4k-3$ 个敌人，C 中至多有三位朋友，且更偏好 $\Gamma_{C\to\emptyset}$而非 Γ，因此 ζ_S恰好有三位朋友，且在 C 中至多有 $4k-3$ 个敌人。因此，C 至多包含 $4k-3+3+1=4k+1$ 个玩家。

到目前为止，我们知道 C 中至少有 $3k-2$ β类玩家。如果 C 中恰好有 $3k-2$（或 $3k-1$）β类玩家，那么这些玩家各自在 C 中只有 $3k-3$（或 $3k-2$）位 β类朋友，并且还需要在 C 中至少有三位（或两位）ζ类朋友。因此，C 中 β类玩家与 ζ类玩家之间至少有 $(3k-2)\cdot 3=9k-6$（或 $6k-2$）条边。于是 C 中至少有 $3k-2$（或 2k）位 ζ类玩家。因此，C 中至少有 $(3k-2)+(3k-2)=6k-4$（或 $5k-1$）位玩家，这与 C 中至多有 $4k+1$位玩家矛盾。因此，C 中恰好有 3k β类玩家。

总而言之，C 中恰有 3k 个 β-玩家，至少有 k 个 ζ-玩家，且至多有 4k 个 $+1$玩家。因此，C 中有 k 个或 $k+1$ ζ-玩家。为导出矛盾，假设 C 中有 k 个 $+1$ ζ-玩家。于是，每个$\zeta_S \in C$ 在 C 中都有 4k 个 -3 敌人。由于 ζ_S更偏好 $\Gamma_{C\to\emptyset}$而非 Γ，这意味着 ζ_S在 C 中恰有三个朋友和 4k 个 -3 敌人，并且 ζ_S的朋友赋予 $\Gamma_{C\to\emptyset}$的最小值高于 ζ_S的朋友赋予 Γ 的最小值。在这两种联盟结构中，最小值均由ζ_S的 α-朋友决定。然而，由于当 ζ_S 偏离到 C 时，这些 α- 玩家失去了 ζ_S 这个朋友，因此赋予 Γ 的最小值高于赋予 $\Gamma_{C\to\emptyset}$ 的最小值。这就产生了矛盾。因此，C 中恰有 k 个 ζ-玩家。最后，由于 3k 个 $\beta_b \in C$ 中的每一个都以 k 个 $\zeta_S \in C$ 中的一个为朋友，因此 $\{S \mid \zeta_S \in C\}$是 B 的一个精确覆盖。至此，基于最小值的 SF ACFG 的 coNP 困难性证明完成。

对于基于求和的 SF ACFG，核心稳定性验证的 coNP 困难性可以通过类似的构造来证明。同样，给定 RX3C 的一个实例 $(B, \mathscr{S})$，其中 $B=\{1,\ldots,3k\}, \mathscr{S}=\{S1,\ldots,S_{3k}\}$，且 $k>8$，我们构造如下 ACFG。玩家集合为 $N=\{\beta_b \mid b \in B\}\cup\{\zeta_S, \alpha_{S,1}, \alpha_{S,2}, \alpha_{S,3}, \delta_{S,1},\ldots,\delta_{S,4k-3} \mid S \in \mathscr{S}\}$。我们定义集合 Beta $=\{\beta_b \mid b \in B\}$以及每个 $S \in \mathscr{S}$ 对应的 $Q_S=\{\alpha_{S,1}, \alpha_{S,2}, \alpha_{S,3}, \delta_{S,1},\ldots,\delta_{S,4k-3}\}$。朋友网络如图6所示，其中一组玩家周围的虚线矩形表示这些玩家彼此都是朋友：

- Beta 中的所有玩家彼此都是朋友。
- 对于每个 $S \in \mathscr{S}$，Q_S 中的所有玩家彼此都是朋友。
- 对于每个 $S \in \mathscr{S}$, ζ_S 都与 α_S1、 $\alpha_{S,}2$ 和 $\alpha_{S,}3$，以及每个满足 $b \in S$ 的 β_b 都是朋友。

类似 与上述论证类似，可以证明联盟结构 $\Gamma=\{\text{Beta}\}\cup\{\{\zeta_S\}\cup Q_S \mid S \in \mathscr{S}\}$ 并非
核心稳定的 当且仅当 $\mathscr{S}$包含 B 的精确覆盖时，在基于求和的 SF 偏好下 □

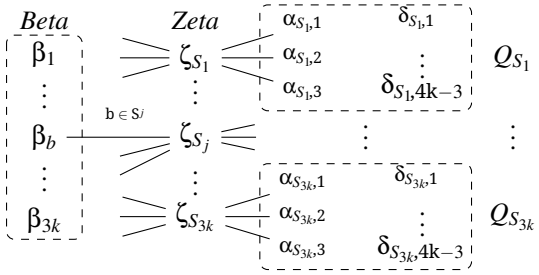


图6：定理 11 证明中的朋友网络，用于证明基于求和的 SF ACFG 中核心稳定性验证的 coNP 困难性。玩家群组周围的虚线矩形表示这些玩家彼此都是朋友。

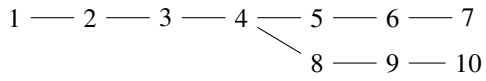


图 7：例 12 的朋友网络

4.5 受欢迎性与严格受欢迎性

现在我们来考察受欢迎性和严格受欢迎性。对于所有考虑的利他主义模型，都存在一些博弈，使得其中不存在（严格）受欢迎的联盟结构。

例 12. 设 $N = \{1,\dots,10\}$，并考虑图 7 所示的朋友网络。对于任何基于求和或基于最小值的利他主义程度，都不存在严格受欢迎的联盟结构，也不存在受欢迎的联盟结构。由于完美性蕴含受欢迎性，因此该 ACFG 也不存在完美联盟结构。

回想脚注 2，对于这个有十名玩家的博弈，共有 115,975 种可能的联盟结构；在本例中，我们用蛮力法逐一进行了检验。

我们现在证明，在基于求和和基于最小值的 SF 偏好下，验证给定的联盟结构是否受欢迎或严格受欢迎是困难的；此外，判断给定的 SF ACFG 是否存在严格受欢迎的联盟结构也很困难。

定理 13. 对于任意 ACFG，受欢迎性验证和严格受欢迎性验证都属于 coNP。对于（基于求和和基于最小值的）SF ACFG，受欢迎性验证和严格受欢迎性验证均为 coNP 困难，而严格受欢迎性存在性为 coNP 困难。

证明。首先，我们注意到这些验证问题属于 coNP：要验证给定的联盟结构Γ 不是（严格）受欢迎的，我们可以非确定性地猜测一个联盟结构 Δ，在多项式时间内比较这两个联盟结构，并且仅当 Δ 比（或至少与） Γ更受欢迎时接受。

为了证明基于最小值的 SF ACFG 中严格受欢迎性验证的 coNP 困难性，我们再次采用从 RX3C 出发的多项式时间多对一归约。设 $(B, \mathscr{S})$ 是 RX3C 的一个实例，其中包含一个集合 $B = \{1,\dots,3k\}$ 以及一个由 3 元子集组成的集合族 $\mathscr{S} = \{S1,\cdots, S_{3k}\}$。回顾一下，B 中的每个元素恰好出现在 $\mathscr{S}$ 中的三个集合里，问题是是否存在 B 的一个精确覆盖 $\mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$。

现在，我们基于该实例构造一个朋友网络。玩家集合为 $N = \{\alpha_1,\dots,\alpha_{2k}\} \cup \{\beta_b \mid b \in B\} \cup \{\zeta_S, \eta_{S,1}, \eta_{S,2} \mid S \in \mathscr{S}\}$，因此总共有 $n = 14k$ 个玩家。为方便起见，我们定义 $Alpha = \{\alpha_1,\dots,\alpha_{2k}\}$、$Beta = \{\beta_b \mid b \in B\}$，以及 $Q_S = \{\zeta_S, \eta_{S,1}, \eta_{S,2} \mid S \in \mathscr{S}\}$（其中 $S \in \mathscr{S}$）。朋友网络如图 8 所示，玩家组周围的虚线方框表示组内所有玩家彼此都是朋友：$Alpha \cup Beta$ 中的所有玩家彼此都是朋友；对于每个 $S \in \mathscr{S}$，Q_S 中的所有玩家彼此都是朋友；并且 ζ_S 是每个满足 $b \in S$ 的 β_b 的朋友。

我们考虑联盟结构 $\Gamma = \{Alpha \cup Beta\} \cup \{Q_S \mid S \in \mathscr{S}\}$，现在将证明：当且仅当 Γ 在基于最小值的 SF 偏好下不严格受欢迎时，$\mathscr{S}$ 包含 B 的一个精确覆盖。

仅当：假设 B 存在一个精确覆盖 $\mathscr{S}' \subset \mathscr{S}$，我们定义联盟结构 $\Delta = \{Alpha \cup Beta \cup \bigcup_{S \in \mathscr{S}'} Q_S\} \cup \{Q_S \mid S \in \mathscr{S} \setminus \mathscr{S}'\}$。现在我们将证明，在基于最小值的自私优先偏好下，$\Delta$ 与 Γ 同样受欢迎。

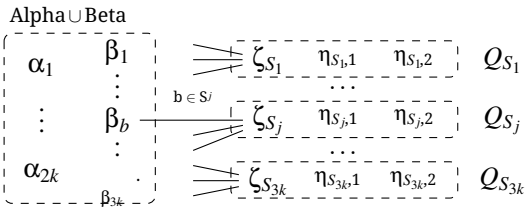


图 8：定理 13 证明中的朋友网络，用于证明基于最小值的 SF ACFG 中严格受欢迎性验证的 co NP 困难性。玩家群组周围的虚线矩形表示这些玩家彼此都是朋友。

首先，所有 2k α玩家都更偏好 Δ而非 Γ，因为在 Δ中，他们只会给自己的联盟增加敌人。其次，3kβ玩家更偏好 Δ而非 Γ，因为每个 β玩家都会多一个 ζ朋友，因此拥有 5k 个朋友，而不是 5k 个 − 1。接下来，我们考虑 $S \in \mathscr{S}'$对应的 Q_S组，也就是在 Δ中加入 Alpha∪Beta 的那些组。我们观察到，这些 Q_S组中的每个ζ_S玩家都更偏好 Δ 而非 Γ，因为 ζ_S 多了三个β朋友。另一方面，对于η玩家来说，新联盟中只有更多敌人，因此 η 玩家更偏好 Γ 而非 Δ。由于我们有 $|\mathscr{S}'| = k$，这意味着 k 个 ζ玩家更偏好 Δ 而非 Γ，而 2k 个 η玩家更偏好 Γ 而非 Δ。最后，我们考虑其余 $S \in \mathscr{S} \setminus \mathscr{S}'$对应的 Q_S组。在这里，包含这些玩家的联盟在 Γ 和 Δ中相同。因此，对于每个玩家 $p \in Q_S$，我们有 $v_p(\Gamma) = v_p(\Delta)$。所以，玩家必须向朋友询问他们的估值。对于 $S \in \mathscr{S} \setminus \mathscr{S}'$的 $\zeta_S \in Q_S$，在两种结构中，她的朋友的最小值都由一个η朋友给出，因为$\eta_{S,1}$ 和$\eta_{S,2}$ 对 Γ 和 Δ的估值均为 $n \cdot 2$；而 ζ_S的β朋友对 Γ的估值为 $n \cdot (5k - 1)$，对 Δ的估值为 $n \cdot 5k - (3k - 1)$。因此，我们有 $u^{minSF}_{\zeta_S}(\Gamma) = u^{minSF}_{\zeta_S}(\Delta)$，所以有 2k 个ζ玩家持无差异态度。$Q_S$中 $S \in \mathscr{S} \setminus \mathscr{S}'$对应的η玩家也持无差异态度，因为他们所有朋友对 Γ 和 Δ 的估值都相同。总计，$\#_{\Delta \succ \Gamma} = |\text{Beta} \cup \{\zeta_S \mid S \in \mathscr{S}'\}| = 4k = |\text{Alpha} \cup \{\eta_{S,1}, \eta_{S,2} \mid S \in \mathscr{S}'\}| = \#_{\Gamma \succ \Delta}$，因此Δ 与 Γ恰好同样受欢迎，所以 Γ 并非严格受欢迎。

若：假设 Γ 并非严格受欢迎，则存在某个联盟结构 $\Delta \in \mathscr{C}_N$，满足 $\Delta \neq \Gamma$，使得在基于最小值的 SF 偏好下，Δ 至少与 Γ 一样受欢迎。现在我们将证明，这意味着在 $\mathscr{S}$ 中存在 B 的一个精确覆盖。

首先，我们注意到，所有 α-玩家最偏好的联盟都是 Alpha∪Beta，因为其中包含他们所有的朋友，且不包含任何敌人。因此，如果 Alpha ∪Beta $\notin \Delta$，则有 $\Gamma \succ^{minSF}_{\alpha} \Delta$；如果 Alpha∪Beta $\in \Delta$，则有 $\Gamma \sim^{minSF}_{\alpha} \Delta$。

为导出矛盾，我们假设 Alpha∪Beta $\in \Delta$。由于 $\Delta \neq \Gamma$，Q_S组中的玩家必须采用不同的划分。然而，这不会提高任何玩家的估值，因为 Q_S 中的每位玩家都只会失去朋友并增加敌人。这意味着，没有任何 β 玩家更偏好 Δ 而非 Γ，因为他们在 Γ 中属于同一个联盟，而且他们的朋友并没有更满意。我们还发现，Q_S组中至少有三名玩家不再属于同一个联盟，因此他们更偏好 Γ 而非 Δ。这与我们的假设矛盾，因为我们假设 Δ至少与 Γ一样受欢迎。因此，Alpha∪Beta $\notin \Delta$。

现在考虑η玩家。对于每个 $S \in \mathscr{S}$，我们知道 Q_S 是$\eta_{S,1}$ 和 $\eta_{S,2}$ 估值最高的联盟。因此，同样地，$\eta_{S,1}$ 和 $\eta_{S,2}$ 更偏好 Γ 而非 Δ，当且仅当 $Q_S \notin \Delta$；否则他们无差异。定义 $k' = |\{S \in \mathscr{S} | Q_S \notin \Delta\}|$。因此，$2k'$ 是更偏好 Γ 而非 Δ的η玩家数量，其余 $6k - 2k'$ η名玩家则对 Γ 和 Δ无差异。我们先列出一些观察结果：

1. 所有 2k α-玩家都更偏好 Γ Δ。

2. $2k'$ η-玩家更偏好 Γ Δ，而 $6k - 2k'$ η-玩家无差异。

3. $3k - k'$ ζ-玩家在两个联盟结构中都处于同一个联盟，因此他们的效用取决于朋友的估值。在 Γ 中，他们朋友的最小值由一名 η-玩家决定。由于这名 η-玩家在 Δ 中也处于同一个联盟，因此赋予相同的估值，所以朋友的最小值不可能在 Δ中高于 Γ。因此，$3k - k'$ ζ-玩家无差异，或更偏好 Γ Δ。

4. 我们总共有 14k 名玩家，因此最多可以有 $14k - 2k - 2k' - (6k - 2k') - (3k - k') = 3k + k'$ 名偏好 Δ 而非 Γ的玩家。

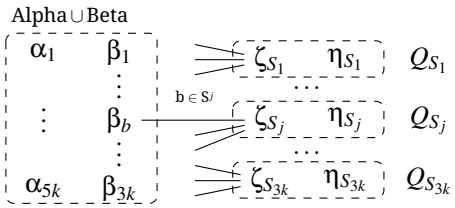


图 9：定理 13 的证明中使用的朋友网络，用于证明在基于求和的 SF ACFG 中验证严格受欢迎性是 coNP 困难的。包围一组玩家的虚线矩形表示这些玩家彼此都是朋友。

接下来，我们证明 k′ = k。首先，假设 k′ > k：我们有 $\#_{\Gamma\succ\Delta} \geq 2k + 2k'$，由于 k′ > k，因此有 2k + 2k′ > 3k + k′ ≥ $\#_{\Delta\succ\Gamma}$。这与 $\#_{\Gamma\succ\Delta} \leq \#_{\Delta\succ\Gamma}$ 矛盾，因此得到 k′ ≤ k。

其次，假设 k′ <k：由于每个 ζ-玩家有三个 β-朋友，且有 k′ ζ 个$_S$玩家不在其各自的 Q Δ联盟中，因此至多有 3k′ β 个玩家在 ζ 中获得一个 Δ朋友。其余的 3k − 3k′ 个 β-玩家在 Δ 中至多有 5k − 1 个朋友，即所有其他 α-和 β-玩家。但由于 Alpha∪Beta ∉ Δ，他们也至少会增加一个敌人，因此有 3k − 3k′ β 个玩家更偏好 Γ。这意味着我们有 $\#_{\Gamma\succ\Delta} \geq 2k + 2k' + 3k - 3k' = 5k - k'$，并且 $\#_{\Delta\succ\Gamma} \leq 3k + k' - (3k - 3k') = 4k'$。由于 k′ < k，我们有 5k − k′ > 5k − k = 4k > 4k′，因此 $\#_{\Gamma\succ\Delta} > \#_{\Delta\succ\Gamma}$，这再次构成矛盾。因此我们得出结论：k′ ≥k，且总计 k′ =k。

因此，我们知道有 4k 个玩家更喜欢 Γ 而非 Δ，即所有 α玩家，以及不再属于 Q_S 的 2k 个 η 玩家。扣除所有无差异的玩家后，可以看出，为确保 $\#_{\Gamma\succ\Delta} \leq \#_{\Delta\succ\Gamma}$，所有其他玩家都必须更喜欢 Δ 而非 Γ 。这些其他玩家是 3k 个 β玩家，以及不再属于 Q_S 的 k 个 ζ玩家。最后，只有当每个 β玩家在 Δ中都获得一位 ζ朋友时，这才有可能。因此，这 k 个 ζ玩家中的每一个都必须与三个不同的 β 玩家成为朋友。所以，集合 $\{S \in \mathscr{S} | Q_S \notin \Delta\}$ 是 B 的一个精确覆盖。

为了证明基于求和的 SF ACFG 的严格受欢迎性验证是 coNP 困难的，我们采用类似的构造。对于 RX3C 的一个实例 (B, $\mathscr{S}$)，其中 $B = \{1, \ldots, 3k\}$ 且 $\mathscr{S} = \{S1, \ldots, S_{3k}\}$，并且 B 中的每个元素恰好出现在 $\mathscr{S}$中的三个集合里，我们构造如下 ACFG。玩家集合为 $N = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{5k}\} \cup \{\beta_b | b \in B\} \cup \{\zeta_S, \eta_S | S \in \mathscr{S}\}$。令 $Alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{5k}\}$，$Beta = \{\beta_b | b \in B\}$，并对每个 $S \in \mathscr{S}$ 令 $Q_S = \{\zeta_S, \eta_S\}$。朋友网络如图 9 所示，玩家群组周围的虚线矩形表示其中所有玩家彼此为朋友：Alpha ∪Beta 中的所有玩家彼此为朋友；对于每个 $S \in \mathscr{S}$，ζ_S 与 η_S 是朋友，且每个 β_b 都与 $b \in S$ 是朋友。

考虑联盟结构 $\Gamma = \{Alpha \cup Beta, Q_{S_1}, \ldots, Q_{S_{3k}}\}$。我们证明，$\mathscr{S}$包含 B 的一个精确覆盖，当且仅当 Γ 并非严格受欢迎。

仅当：假设 B 存在一个精确覆盖 $\mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$，并考虑联盟结构 $\Delta = \{Alpha \cup Beta \cup \bigcup_{S\in\mathscr{S}'} Q_S\} \cup \{Q_S | S \in \mathscr{S} \setminus \mathscr{S}'\}$，可以用与前文类似的论证证明 $\#_{\Delta\succ\Gamma} = |\{\beta_1, \ldots, \beta_{3k}, \zeta_{S_1}, \ldots, \zeta_{S_{3k}}\}| = 6k = |\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{5k}\} \cup \{\eta_S | S \in \mathscr{S}'\}| = \#_{\Gamma\succ\Delta}$。因此，Δ和 Γ同样受欢迎。

如果：假设 Γ 并非严格受欢迎，即存在联盟结构 $\Delta \in \mathscr{C}_N, \Delta \neq \Gamma$，满足 $\#_{\Gamma\succ\Delta} \leq \#_{\Delta\succ\Gamma}$，可以用与前文类似的方法证明，集合 $\{S \in \mathscr{S} | Q_S \notin \Delta\}$ 是 B 的一个精确覆盖。

通过对上述归约稍作修改，可以证明严格受欢迎性存在性和受欢迎性验证的相关结果。

为了证明基于最小值的和基于求和的 SF ACFG 的严格受欢迎性存在性是 coNP 困难的，我们考虑与之前相同的两个归约，但问题实例中不再将联盟结构 Γ 作为输入的一部分。此时，当且仅当不存在严格受欢迎的联盟结构时，B 才存在精确覆盖。具体而言，若 B 存在精确覆盖，则如上文证明所定义的 Γ 和 Δ 打成平手，而其他所有联盟结构都被 Γ 击败。若 B 不存在精确覆盖，则 Γ 击败其他所有联盟结构，因此它是严格受欢迎的。

利用与严格受欢迎性验证相同的构造（见图 8 和图 9），并将玩家数量

分别减少到 $2k-1$ 和 $5k-1$，可以证明基于最小值的和基于求和的 SF ACFGs 的受欢迎性验证是 coNP 完全的。当且仅当 B 存在精确覆盖时，如上所定义的 Γ 不受欢迎。 □

4.6 完美性

现在转向完美性问题，我们从SF模型开始。

定理14. 对于任意基于求和的或基于最小值的SF ACFG $(N \succeq)$，若其底层朋友网络为G，则联盟结构 $\Gamma \in \mathscr{C}_N$ 完美，当且仅当它由G的连通分量构成，且这些连通分量全都是团。

证明. 从左到右，假设联盟结构 $\Gamma \in \mathscr{C}_N$ 完美。那么，对于所有参与者 $i \in N$ 以及所有联盟结构 $\Delta \in \mathscr{C}_N$, $\Delta \neq \Gamma$，都有：i弱偏好于 Γ 而非 Δ。由此可得，对于所有 $\Delta \in \mathscr{C}_N, \Delta \neq \Gamma$ 以及 $i \in N$，$v_i(\Gamma) \geq v_i(\Delta)$。因此，每个参与者 $i \in N$ 都具有最大估值 $v_i(\Gamma) = n \cdot |F_i|$，并且与她所有的朋友、而不与任何敌人在一起。这意味着 Γ 中的每个联盟都是一个连通分量，也是一个团。

从右向左的蕴含显而易见。 □

由于这一刻画易于检验，因此对于基于求和的和基于最小值的 SF ACFG，可以在多项式时间内验证联盟结构是否完美。由定理14可直接得出，相应的存在性问题也属于 P类。

推论15. 对于任意基于求和的或基于最小值的 SF ACFG $(N \succeq)$，若其底层朋友网络为 G，则存在完美联盟结构，当且仅当 G 的所有连通分量都是团。

我们还可以得到以下上界。

命题16. 对于任意 ACFG，完美性验证问题属于 coNP。

证明. 考虑任意 ACFG $(N \succeq)$。联盟结构 $\Gamma \in \mathscr{C}_N$ 不是完美的，当且仅当存在参与者 $i \in N$ 以及一个联盟结构 $\Delta \in \mathscr{C}_N$，使得 $\Delta \succ_i \Gamma$。因此，我们可以非确定性地猜测一个参与者 $i \in N$ 和一个联盟结构 $\Delta \in \mathscr{C}_N$，并在多项式时间内验证 $\Delta \succ_i \Gamma$ 是否成立。 □

此外，我们开始刻画 ACFG 的完美性。连通图分量的直径是其中任意两个顶点之间距离的最大值。对于基于求和的 EQ ACFG，我们得到以下推论。

命题17. 对于任意一个底层朋友网络为 G 的基于求和的 EQ ACFG，若联盟结构 Γ 对其而言是完美的，则 Γ 由 G 的连通分量组成，且所有这些分量的直径都至多为二。

证明. 我们首先证明，在完美联盟结构中，所有代理人都必须与自己的所有朋友处于同一联盟。为反证，假设 Γ 是完美的，但存在 $i, j \in N$，使得 $j \in F_i$ 且 $j \notin \Gamma(i)$。我们分两种情况讨论。

情况1：所有 $f \in F_i \cap \Gamma(i)$ 在 $\Gamma(j)$ 中都有朋友。考虑由 $\Gamma(i)$ 和 $\Gamma(j)$ 合并得到的联盟结构 Δ，即 $\Delta = \Gamma \setminus \{\Gamma(i)\ \Gamma(j)\} \cup \{\Gamma(i) \cup \Gamma(j)\}$。可以看出，i 及 i 的所有朋友要么在 Δ 中多获得一个朋友，要么所在联盟保持不变：首先，i 保留了来自 $\Gamma(i)$ 的所有朋友，并额外获得 j 作为朋友。因此，i 在 Δ 中的朋友至少比在 Γ 中多一个，且有 $v_i(\Delta) > v_i(\Gamma)$。其次，所有 $f \in F_i \cap \Gamma(i)$ 在 $\Gamma(j)$ 中都有朋友，因此也会因两个联盟合并而至少多获得一个朋友。因此，对所有 $f \in F_i \cap \Gamma(i)$，都有 $v_f(\Delta) > v_f(\Gamma)$。第三，所有 $f \in F_i \cap \Gamma(j)$ 都把 i 当作朋友。因此，他们也会因合并而多获得一个朋友。于是，对所有 $f \in F_i \cap \Gamma(j)$，都有 $v_f(\Delta) > v_f(\Gamma)$。最后，所有不在 $\Gamma(i)$ 或 $\Gamma(j)$ 中的 $f \in F_i$，对 Γ 和 Δ 的评价相同，因为它们在两个联盟结构中的联盟相同。因此，对所有满足 $f \notin \Gamma(j)$ 且 $f \notin \Gamma(i)$ 的 $f \in F_i$，都有 $v_f(\Delta) = v_f(\Gamma)$。综上，我们有 $u^{sumEQ}_i(\Delta) > u^{sumEQ}_i(\Gamma)$，因此 i 更偏好 Δ 而非 Γ，这与 Γ 是完美的相矛盾。

情况 2：存在一个 $f \in F_i \cap \Gamma(i)$，它在 $\Gamma(j)$ 中没有朋友。考虑 j 移至 $\Gamma(i)$ 后形成的联盟结构 Δ，即 $\Delta = \Gamma_{j \to \Gamma(i)}$。令 $k \in F_i \cap \Gamma(i)$ 为在

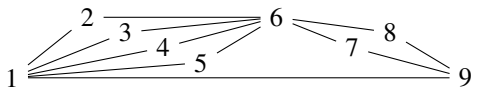


图10：示例19的朋友网络

Γ(j) 中没有朋友的代理人之一。则 $v_k(\Delta) = v_k(\Gamma) - 1$；$v_i(\Delta) = v_i(\Gamma) + n$；对于所有 $f \in F_k \cap \Gamma(i)$，若 $f \neq i$，则有 $v_f(\Delta) \geq v_f(\Gamma) - 1$；并且对于所有 $f \in F_k$，若 $f \notin \Gamma(i)$（且 $f \notin \Gamma(j)$），则有 $v_f(\Delta) = v_f(\Gamma)$。因此，

$$\begin{aligned} u_k^{sumEQ}(\Delta) &= \sum_{a \in F_k \cup \{k\}} v_a(\Delta) = \sum_{a \in F_k \cap \Gamma(i), a \neq i} v_a(\Delta) + \sum_{a \in F_k \setminus \Gamma(i)} v_a(\Delta) + v_k(\Delta) + v_i(\Delta) \\ &\geq \sum_{a \in F_k \cap \Gamma(i), a \neq i} v_a(\Gamma) - 1 + \sum_{a \in F_k \setminus \Gamma(i)} v_a(\Gamma) + v_k(\Gamma) - 1 + v_i(\Gamma) + n \\ &= \sum_{a \in F_k \cup \{k\}} v_a(\Gamma) - (|F_k \cap \Gamma(i)| - 1) - 1 + n \\ &= u_k^{sumEQ}(\Gamma) - \underbrace{|F_k \cap \Gamma(i)|}_{<n} + n > u_k^{sumEQ}(\Gamma). \end{aligned}$$

因此，k 更喜欢 Δ，而不是 Γ，这再次与 Γ 是完美的相矛盾。

接下来，假设 Γ 是完美的，但 Γ 中存在一个直径大于二的联盟 C。那么，C 中存在参与者 i、j ∈，两者之间的距离大于二。因此，j 是 i 的敌人，也是 i 所有朋友的敌人。由此可知，i 更喜欢联盟结构 $\Gamma_{j \to \emptyset}$，而不是 Γ，这与 Γ 是完美的相矛盾。

总而言之，在基于求和的 EQ ACFG 的完美联盟结构 Γ 中，每个参与者都与其所有朋友在一起，并且 Γ 中的每个联盟的直径都至多为二。这意味着 Γ 由 G 的连通分量构成，且所有这些分量的直径都至多为二。□

由命题16和17可得以下推论。

推论18。对于基于求和的 EQ ACFG，完美性的存在性属于 coNP。

然而，命题17并非等价命题。如下例所示，其逆命题不成立。

。

例19. 考虑图10中朋友网络 G 上的基于求和的 EQ ACFG ($N \succeq^{sumEQ}$)。联盟结构 $\Gamma = \{N\}$ 由 G 的唯一连通分量组成，其直径为二。然而，参与者1更偏好 $\Delta = \{\{1,\ldots,6\},\{7,8,9\}\}$ 而非 Γ，因为

$$\begin{aligned} u_1^{sumEQ}(\Gamma) &= v_1(\Gamma) + \cdots + v_5(\Gamma) + v_9(\Gamma) = (9 \cdot 5 - 3) + 4 \cdot (9 \cdot 2 - 6) + (9 \cdot 3 - 5) = 112 \\ &< 113 = (9 \cdot 4 - 1) + 4 \cdot (9 \cdot 2 - 3) + (9 \cdot 2 - 0) = v_1(\Delta) + \cdots + v_5(\Delta) + v_9(\Delta) \\ &= u_1^{sumEQ}(\Delta). \end{aligned}$$

因此，Γ 并非完美。

5 结论与开放问题

我们提出将 Nguyen 等人 [1] 以及 Wiechers 和 Rothe [5] 提出的利他型享乐博弈模型推广到一般的联盟形成博弈。我们将这些更一般的模型与享乐博弈中的利他主义进行了比较，并通过消除享乐博弈这一限制带来的一些关键缺点，说明了本研究的动机。具体而言，我们证明，我们的一般利他偏好的所有程度都是一致的，而利他享乐偏好的所有程度并非如此。此外，我们所有基于求和的利他主义程度都满足两类单调性，而相应的享乐型平等与利他待遇偏好却不满足这两类单调性。

此外，我们还研究了常见的稳定性概念，并初步对相关的验证问题和存在性问题进行了计算分析（我们的研究结果概览见表2）。我们还

利用底层朋友网络的图论性质，对部分稳定性概念给出了刻画。作为未来工作，我们计划完成这项分析，弥合复杂性理论上下界之间的所有差距，并对所有稳定性概念给出完整刻画。

致谢

我们感谢 IJCAI'20 的匿名评审提供的宝贵意见。本研究部分获得了德国研究联合会（DFG）项目 RO 1202/14-2and RO 1202/21-1 的资助。第一作者和第三作者部分获得了北莱茵-威斯特法伦州资助计划"研究学院"框架内"在线参与"研究项目的支持。

参考文献

[1] Nguyen, N., Rey, A., Rey, L., Rothe, J., Schend, L.：利他型享乐博弈。载于：第15届国际自主智能体与多智能体系统会议论文集，第251–259页。IFAA-MAS，新加坡（2016）[2] Dimitrov, D., Borm, P., Hendrickx, R., Sung, S.-C.：享乐博弈中的简单优先级与核心稳定性。《社会选择与福利》26(2)，421–433（2006）[3] Aziz, H., Brandt, F., Seedig, H.G.：计算加性可分享乐博弈中的理想划分。《人工智能》195，316–334（2013）[4] Aziz, H., Savani, R.：享乐博弈。载于：Brandt, F., Conitzer, V., Endriss, U., Lang, J., Procaccia, A.（编）《计算社会选择手册》，第356–376页。剑桥大学出版社，剑桥（2016）。第15章[5] Wiechers, A., Rothe, J.：基于最小化的利他享乐博弈中的稳定性。载于：第9届欧洲人工智能初阶研究人员研讨会论文集，第2655卷，第3页。CEUR-WS.org，圣地亚哥-德孔波斯特拉（2020）[6] Schlueter, J., Goldsmith, J.：超利他型享乐博弈。载于：第33届佛罗里达人工智能研究学会国际会议论文集，第160–165页。AAAI出版社，迈阿密（2020）[7] Bullinger, M., Kober, S.：基数型享乐博弈中的忠诚。载于：第30届国际人工智能联合会议论文集，第66–72页。ijcai.org，蒙特利尔（2021）[8] Ashlagi, I., Krysta, P., Tennenholtz, M.：社会情境博弈。载于：第4届互联网与网络经济国际研讨会论文集，第675–683页。施普林格，上海（2008）[9] Bil`o, V., Celi, A., Flammini, M., Gallotti, V.：社会情境拥堵博弈。《理论计算机科学》514，21–35（2013）[10] Hoefer, M., Penn, M., Polukarova, M., Skopalik, A., V¨ocking, B.：体谅均衡。载于：第22届国际人工智能联合会议论文集，第234–239页。AAAI出版社/IJCAI，巴塞罗那（2011）[11] Anagnostopoulos, A., Becchetti, L., B. de Keijzer, Sch¨afer, G.：社会情境博弈的低效性。载于：第6届算法博弈论国际研讨会论文集，第219–230页。施普林格，亚琛（2013）[12] Hoefer, M., Skopalik, A.：原子拥堵博弈中的利他主义。载于：第17届欧洲算法年度研讨会论文集，第179–189页。施普林格，哥本哈根（2009）[13] Chen, P., Keijzer, B.d., Kempe, D., Sch¨afer, G.：利他型博弈的鲁棒无政府代价。载于：第7届互联网与网络经济国际研讨会论文集，第383–390页。施普林格，新加坡（2011）

[14] Apt, K., Sch¨afer, G.：策略博弈的自私程度。《人工智能研究杂志》49，207–240（2014）[15] Rahn, M., Sch¨afer, G.：通过社会贡献博弈界定利他主义的低效程度。载于：第9届互联网与网络经济国际研讨会论文集，第391–404页。施普林格，剑桥（2013）[16] Kerkmann, A., Rothe, J.：联盟形成博弈中的利他主义。载于：第29届国际人工智能联合会议论文集，第347–353页。ijcai.org，横滨（2020）[17] Bell, E.T.：迭代指数整数。《数学年刊》，539–557（1938）[18] Rota, G.-C.：集合划分的数量。《美国数学月刊》71(5)，498–504（1964）[19] Sung, S.-C., Dimitrov, D.：加性享乐博弈中的计算复杂性。《欧洲运筹学杂志》203(3)，635–639（2010）[20] Woeginger, G.：加性享乐博弈核心稳定性的一个困难性结果。《数学社会科学》65(2)，101–104（2013）[21] Cechl´arov´a, K., Romero-Medina, A.：联盟形成博弈中的稳定性。《国际博弈论杂志》29(4)，487–494（2001）[22] Cechl´arov´a, K., Hajdukov´a, J.：具有B-偏好的稳定划分的计算复杂性。《国际博弈论杂志》31(3)，353–364（2003）[23] Kerkmann, A.M., Lang, J., Rey, A., Rothe, J., Schadrack, H., Schend, L.：具有序数偏好和阈值的享乐博弈。《人工智能研究杂志》67，705–756（2020）[24] Rothe, J., Schadrack, H., Schend, L.：由波达计数法诱导的、包含朋友、敌人和中立玩家的享乐博弈。《数学社会科学》96，21–36（2018）[25] Garey, M., Johnson, D.：《计算机与难解性：NP完全性理论指南》。W. H. Freeman and Company，纽约，美国（1979）[26] Rothe, J.：《复杂性理论与密码学：密码复杂性导论》。EATCS理论计算机科学丛书。施普林格，海德堡和柏林，德国（2005）[27] Gonzalez, T.：使最大簇间距离最小化的聚类。《理论计算机科学》38，293–306（1985）