arXiv:2301.05682v1 [cs.LG] 13 Jan 2023

N使用阈值查询进行随机累积分布函数估计 s

Princewill Okoroafor[1], Vaishnavi Gupta[1], Robert Kleinberg[1], 和 Eleanor Goh[1]

[1]康奈尔大学，纽约州伊萨卡

pco9@cornell.edu, vg222@cornell.edu, rdk@cs.cornell.edu, eg552@cornell.edu

摘要

估计标量数据集的经验分布是一项基础且根本的任务。在这篇论文中，我们研究具有两个难点的情形下如何估计经验分布。首先，算法无法直接观察数据，而只能针对每个样本进行有限次阈值查询。其次，我们不假设数据独立同分布，而是允许由任意过程生成样本，其中包括自适应对手。例如，在对卖家通过试探标价来估计消费者对某种产品的支付意愿分布进行建模时，这些考量就很有意义：报出一个价格并观察消费者的购买决策，等同于针对其支付意愿提出一次阈值查询；而消费者支付意愿的分布可能随时间呈非平稳变化，因为早期采用者与后期采用者可能存在显著差异。

我们的主要结果在常数因子范围内刻画了：对于由 [n]，个元素组成的序列，使用每个样本一次阈值查询，将其经验累积分布函数估计到 ε 加性误差所需的样本复杂度。该复杂度仅以对数形式依赖于 n；我们的结果也可以被理解为将现有的含噪二分搜索的对数复杂度结果扩展到了噪声具有非随机性的更具挑战性的情形。在设计算法的过程中，我们考虑了一个更一般的模型，在该模型中，算法允许对每个样本进行有限次数的同步阈值查询。我们使用 Blackwell 可接近性定理和指数权重法解决了这一问题。作为一个具有独立意义的副结果，我们刻画了确定性累积分布函数估计算法所需的同步阈值查询的最小次数。

1 引言

估计标量数据集的经验分布是一项基础且重要的任务。例如，估计数据流的分位数是流式算法中历史最悠久、研究最为深入的问题之一（Greenwald 和 Khanna，2001年；Karnin 等人，2016年；Manku 等人，1998；Munro 和 Paterson，1980），其应用还包括数据库（Greenwald 和 Khanna，2001年）、网络健康监测（Cormode 等人，2004年）以及无线传感器网络（Shrivastava 等人，2004年）等。理想情况下，数据分析师希望能够假设数据值是独立同分布的，并且可以直接观测。然而，在所关注的应用中，这些假设可能并不成立。

1. 在许多情境中，只能通过将样本与指定阈值进行比较，并判断每个样本是否小于或等于相应阈值，来间接评估样本。例如，卖家会尝试不同的标价，以估计消费者对某种产品或服务的支付意愿分布。其他例子包括：通过不同难度级别的通过/不通过测试（例如游泳测试），获取有关个体能力分布的信息；或让消费者将新产品与质量已知的产品进行比较，以评估新产品的质量。（行为科学领域有大量证据表明，与主观数值评分相比，采用序数比较更能可靠地获取人类受试者对质量的判断（Ali 和 Ronaldson，2012年；Chapelle 等人，2012年；Larichev 等人，1995；Moshkovich 等人，2002）。）

2. 样本独立同分布这一假设也可能不成立。回到标价应用，产品的早期采用者在支付意愿上可能与后期采用者大不相同；而后期采用者的支付意愿甚至可能取决于早期消费者的采用率，而采用率又取决于向他们提供的标价。类似的应用也出现在重复竞价的拍卖场景中：互联网广告商通过调整自己的竞价来估计中标价的分布。为考虑其他竞标者行为受到的复杂影响，假设输入序列为最坏情况，而非独立同分布，非常有用（Weed 等人，2016年）。

在这项工作中，我们研究如何在非随机设置下使用阈值查询来估计一个数列的经验分布；该设置不对生成数列的过程作任何假设。我们的模型甚至允许由自适应对手构造数列。我们假设算法针对数列中的每个元素提出一次阈值查询，并且在对手生成数列的下一个元素之前，查询及其答案都会告知双方。我们要解决的核心问题是：要将定义在 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ 上的分布的经验累积分布函数估计到误差不超过 ε，其样本复杂度是多少？更具体地说，最小的 T 是多少，才能使某个随机化算法以至少 3/4 的概率成功学习到任意数列 $x_1, \ldots, x_T$ 的经验累积分布函数的一个估计值，且该估计值与真实经验累积分布函数之间的差异（按 L_∞ 范数衡量）至多为 ε？在本文中，我们通过证明渐近匹配的上界和下界，将这个问题的答案确定到一个常数因子以内。事实上，即使在随机设置下，我们的下界也成立；在该设置中，元素 $x_1, \ldots, x_T$ 是取自定义在 $[n]$ 上的分布的独立同分布样本。因此，我们的结果揭示了一个或许令人意外的结论：相差至多一个常数因子时，随机设置与非随机设置下累积分布函数估计的样本复杂度没有区别。

1.1 与含噪二分搜索和中位数估计的关系

我们称 $m \in [n]$ 是数列 $x_1, x_2, \ldots, x_T$ 的一个 ε-近似中位数，如果数列中至少有 $(\frac{1}{2} - \varepsilon)T$ 个元素小于或等于 m，且至少有 $(\frac{1}{2} - \varepsilon)T$ 个元素大于或等于 m。近似中位数估计可归约为近似累积分布函数估计：若 $\hat{F}$ 是 $x_1, \ldots, x_T$ 的经验累积分布函数的一个 ε-精确估计值，那么满足 $\hat{F}(m-1) < \frac{1}{2} \leq \hat{F}(m)$ 的索引 m 就是一个近似中位数。

在一个特殊情形下，若 $x_1, x_2, \ldots, x_T$ 被限制为常数序列，那么累积分布函数估计和中位数估计都等价于二分搜索：经验累积分布函数是一个取值为 $\{0, 1\}$ 的阶梯函数，在某个 $x \in [n]$ 处有一个阶跃，而 x 是唯一的近似中位数。因此，这两项任务都等价于通过形如 $x \leq q_t$ 的查询来确定 x 的值。由此，我们所研究的问题可以解释为二分搜索的一种推广，其中比较查询的答案受到非随机噪声的干扰。

这一与二分搜索的联系带来的一个直接推论是，近似累积分布函数估计和近似中位数估计的样本复杂度下界为 $\lfloor \log_2(n) \rfloor$。在一个重要的特殊情形下，当 ε 是一个较小的常数（例如 $\varepsilon = 0.01$）时，我们在这篇论文中提出的算法达到这一平凡下界，误差仅相差一个常数因子；与此前已知的非随机设置下累积分布函数估计和中位数估计的最佳界相比，样本复杂度有了指数级改进。

1.2 技术

鉴于累积分布函数估计是二分搜索的推广，而且我们所追求的样本复杂度界——$O(\log n)$，在常数 ε 的情况下——与二分搜索的查询复杂度相匹配，一个自然的想法是尝试设计递归结构类似于二分搜索的累积分布函数估计算法。事实上，在随机设置下，Karp 和 Kleinberg (2007) 提出了一种基于带回溯的二分搜索的中位数估计算法，其样本复杂度在 $O(\log n)$ 当 ε 为常数时成立。以该算法为子程序，Meister and Nietert (2021) 展示了如何在随机设置下解决累积分布函数估计问题，代价是样本复杂度额外增加一个 $1/\varepsilon$ 因子。在非随机设置下，也可以类似地尝试基于分治策略进行累积分布函数估计或中位数估计，逐步锁定样本密度较高的区间。然而，这里存在一个显而易见的困难：过去的样本与当前和未来的样本未必有任何关联。因此，若聚焦于包含许多过去样本的区间，算法的注意力可能会偏离包含大多数当前样本的区间，从而无法维持准确的累积分布函数估计。我们尚不知道如何克服这一困难，也不知道如何基于带回溯的分治原则设计非随机累积分布函数估计算法。

相反，为了设计我们的算法，我们先绕道考虑一个更一般的模型：在该模型中，CDF 估计算法允许对每个样本进行 k 次同步阈值查询。当 $k = 1$ 时，这与我们的原始模型相符；但当 k 超过 $\frac{1}{\varepsilon}$ 时，问题会发生有趣的定性变化：它变得可以通过确定性算法求解。为了解决这一问题，我们证明，利用阈值查询计算一个以概率 1 达到精确度要求的 CDF 估计值，等价于一个关于双人博弈中凸集可接近性的问题，该博弈具有向量收益。Blackwell 可接近性定理为我们提供了一个判据，用以确定通过拉斯维加斯随机算法求解 CDF 估计所需的同步查询次数；该算法几乎必然终止，并输出一个误差不超过ff的答案。利用 ε的指数权重可接近性算法Perchet (2015)，我们证明这一目标实际上可以

通过确定性算法实现，且只需 O(log(n)/ε) 轮次，每轮进行 O(1/ε) 次同步查询。我们认为，这种用于 CDF 估计的确定性同时查询算法的设计与分析本身也可能具有独立的研究价值。它还是设计随机化算法的重要一步，该算法能够在原始的非随机设置中仅通过对每个样本进行一次阈值查询来求解 CDF 估计。我们针对该问题的算法可以解释为对确定性同时查询算法进行随机化模拟：它从确定性算法推荐的 O(1/ε) 次同步查询中随机抽取一次，然后利用重要性加权，生成一个无偏估计值，以估计同时执行所有推荐查询时本会得到的收益向量。

1.3 相关工作

如前所述，我们的问题将含噪二分搜索推广到了非随机噪声情形。Meister and Nietert（2021）首次研究了这一推广，并证明：使用一种朴素算法可得到样本复杂度上界 O(n log(n)/ε^2)。该算法在每个时间步 $t \in [T]$ 查询一个均匀随机阈值 $q_t \in [n]$，并通过对满足 $q_t = i$ 的时间步中观测到的值取平均，来估计 $\hat{F}(i)$。换言之，朴素算法将对 $[n]$ 上累积分布函数的估计问题拆分成 n 个相互独立的点估计问题，每个 $i \in [n]$，对应一个问题；它们分别通过直接对 F(i) 进行足够多次查询来求解，使查询样本的平均值能够近似总体平均值。这忽略了经验累积分布函数必须是单调函数这一事实，也忽略了单调性等形状约束通常能够降低估计的样本复杂度（Barlow 等，1972）。或许令人意外的是，Meister 和 Nietert 证明，当 $\varepsilon = O(1/n)$ 时，{-}准确度累积分布函数估计的下界与朴素算法的样本复杂度相差至多一个常数因子。但对于一般的 $\varepsilon > 0$ 情形，上界和下界之间仍存在指数级差距。我们的工作弥合了这一差距，证明了对所有 n 和 $\varepsilon > 0$ 均成立的紧确界（相差至多常数因子）；当 $\varepsilon = \Omega(1)$ 时，该结果将 Meister-Nietert 上界降低了指数级。在我们的工作之前，人们尚不清楚累积分布函数估计算法能否在渐近意义上优于朴素算法。

关于含噪二分搜索的早期研究假设存在一种随机噪声模型：每次比较查询都以 $\frac{1}{2} + \varepsilon$ 的概率给出正确答案，否则就翻转答案。在该模型中，Burnashev 和 Zigangirov（1974）提出并分析了一种样本复杂度为 O(log(n)/ε^2) 的算法；他们实际上证明，该算法的复杂度在相差一个 $1 + o(1)$ 因子的意义下是最优的。随后，Ben-Or 和 Hassidim（2008）为同一算法给出了更精确的样本复杂度界。在相同的随机噪声模型下，Feige 等人（1994）提出了另一种含噪二分搜索算法，其复杂度为 O(log(n)/ε^2)；他们还针对若干其他基础问题（例如在同一含噪比较模型下进行排序）提供了算法。Karp 和 Kleinberg（2007）将随机含噪比较模型推广到这样一种情形：查询得到正确答案的概率取决于被比较元素的具体身份，但始终大于 1 2；他们证明，在这种情形下，含噪二分搜索的 O(log(n)/ε^2) 样本复杂度界仍然成立。Meister 和 Nietert⁻（2021）展示了如何将 Karp-Kleinberg 含噪二分搜索算法用作累积分布函数估计算法的子程序；当对手是随机的时，该算法的样本复杂度为 O(log(n)/ε^3)。（按照前文引入的记号，这意味着序列 $x_1, x_2, \ldots, x_T$ 是通过从固定但未知的分布中抽取独立同分布样本而生成的。）

文献中已有许多研究探讨了特定约束下的分布学习。 Han 等人 (2018) 和 Barnes 等人 (2020) 为分布式网络中结构化分布学习问题证明了各种极小极大下界。在他们的设定中，网络中的每个节点观测一个独立的

从底层分布中抽取的样本，并且设有一个中央处理器，网络中的每个节点都会向其通信 k 比特。Acharya 等人 (2020) 大幅推广了 Barnes 等人的结果，为多种局部信息约束下的分布式参数估计提出了统一下界，其中包括通信、隐私和数据访问约束。他们通过考虑一组信道来建模其设定，样本经由这些信道传递以获得观测。利用这一通用模型，Acharya 等人 得以重新得到 Barnes 等人提出的下界。另有一项类似的设定，其中n 个节点可以观测 m个样本，并使用 l 比特通信信息，该设定由Acharya 等人 (2021) 提出并分析。与以往研究一样，我们将问题建模为一组约束下的分布学习。我们不再关注分布式模型中的通信信道，而是将约束定义在算法可进行的阈值查询序列上。

分布估计问题也在在线动态定价和拍卖的背景下得到研究。卖家通过为商品设定价格，并观察买方是否购买，与买方反复互动。拍卖师通过自适应地选择保留价来学习获胜分布。尽管这两种情境都仅限于二元反馈：观察商品是否被购买，但这些领域的文献（Kleinberg 和 Leighton，2003；Leme 等人，2021a；Blum 等人，2015；Leme 等人，2021b）假设分布固定或缓慢变化，并且通常会尝试将相对于事后最佳固定价格的某种遗憾最小化。我们不对分布作任何假设。

2 阈值查询模型

我们首先描述 Meister and Nietert （2021）定义的累积分布函数估计问题。在每个时间步 t，对手生成一个样本 $x_t \in [n+1]$，算法 $\mathcal{A}$ 生成一个查询 $q_t \in [n]$，双方均不了解对方的选择。随后，算法接收反馈 $\mathbf{1}(x_t \le q_t)$，并对 x_1、…、x_t 生成累积分布函数估计 $\hat{F}_t$，同时将 q_t 揭示给对手。对手可以自适应地行动，即可以根据之前 $t-1$ 个时间步的历史记录来选择 x_t。令 F_t 定义为 $F_t(i) = \frac{1}{t}\sum_{\tau=1}^{t} \mathbf{1}(x_\tau \le i)$，它是序列 x_1、…、x_t 的经验累积分布函数，其中 $F_t(0) = 0$。他们将算法在时间 t 的估计误差定义为经验累积分布函数 F_t 与算法估计值 $\hat{F}_t$ 之间的柯尔莫哥洛夫–斯米尔诺夫距离：$[n] \to [0,1]$。换言之，估计误差为 $\|\hat{F}_t - F_t\|_\infty := \sup_{i\in[n]} |\hat{F}_t(i) - F_t(i)|$。

我们从两个方面对这一表述进行推广。首先，我们允许对手在每个时间步选择任意单调函数 v_t：$[n] \to [0,1]$，而不是选择一个样本 $x_t \in [n]$。这推广了原始设定，因为 $v_t(i) = \mathbf{1}(x_t \le i)$ 是一个单调阶跃函数。因此，选择 $x_t \in [n]$ 等价于选择一个单调阶跃函数。随后，可以很容易地将 F_t 重新定义为这些单调函数的经验平均，即 $F_t(i) = \frac{1}{t}\sum_{\tau=1}^{t} v_\tau(i)$。其次，我们不再要求算法每个样本只能进行一次查询，而是允许算法对每个样本进行指定次数的查询，该查询预算可以是 1 到 n 之间的任意值。现在，我们将对阈值查询模型（TQM）进行形式化定义。考虑一个由参数 n、k 定义的在线估计环境，其中每个轮次 t 的时序如下：

1. 对手选择一个单调函数 v_t：$[n] \to [0,1]$。
2. 算法选择一组（至多）k 个查询点：$q_{1,t} \le \ldots \le q_{k,t} \in [n]$；对手观察这些查询点。
3. 算法收到反馈：$y_{1,t} \le \ldots \le y_{k,t} \in [0,1]$，其中 $y_{i,t} = v_t(q_{i,t})$。

我们将把一个称为 具有这种交互结构的环境称为 k-TQM，我们将

参数 k 称为查询预算。由于我们主要关注查询预算等于 1 的情况，因此将 1-TQM 简称为 TQM。

在 T 轮次结束时，算法返回一个函数 G_T：$[n] \to [0,1]$。如果该算法满足以下保证：对于所有 $\tau \geq T$，针对任意（可能是自适应的）对手，$\|G_\tau - F_\tau\| \leq \varepsilon$ 的概率至少为 3 4，则称该算法具有准确度 ε 和样本复杂度 T。¯为简便起见，我们有时将准确度为 ε 且样本复杂度为 T 的算法称为 (ε, T)-算法。我们关注以下问题：

1. 对于固定的准确度 ε 和查询预算 k，最小样本复杂度是多少？换句话说，对于 k-TQM，存在一个 (ε, T)-算法时，最小的 T 是多少？2. 对于固定的准确度 ε 和样本复杂度 T，查询预算必须多大？换句话说，对于 k-TQM，存在一个 (ε, T)-算法时，最小的 k 是多少？

对于 $k = 1$，我们的工作表明，第一个问题的答案是 $O\left(\log n_{\varepsilon^3}\right)$，且在常数因子范围内是紧的。我们还在 T 相对于 n 和 ε 足够大时，精确地解决了第二个问题，证明对于确定性算法，查询预算 $k = \frac{1}{2\varepsilon} - 1$ 是必要且充分的；对于随机化算法，查询预算 $k = 1$ 也是必要且充分的。

为简单起见，如果存在一个用于 k-TQM 的 (ε, T)-算法，我们就称一对 (k, T) 是可实现的。k-TQM 的算法可以是确定性的，也可以是随机化的。注意，对于所有 $\tau \geq T$ 和所有对手，k-TQM 的一个准确度为 ε 的确定性算法必须以概率 1 实现保证 $\|G_\tau - F_\tau\|_\infty \leq \varepsilon$。

2.1 阈值查询模型的确定性算法

The Meister and Nietert (2021) 的结果可以解释为针对 TQM 的一个 $\left(\varepsilon, O\left(n \log n_{\varepsilon^2}\right)\right)$-算法。相比之下，TQM 不存在确定性算法。事实上，通过鸽巢原理论证[1]，可以证明，准确度为 ε且样本复杂度有限的确定性算法必须具有查询预算 $k \geq \frac{1}{2\varepsilon} - 1$。这表明，当 k 较小时，k -TQM 的确定性算法与随机化算法之间存在定性差异。

或许我们研究查询预算为 $k > 1$ 的确定性算法最重要的原因，是它有助于指导我们设计查询预算为 1 的随机化算法。事实上，我们针对 TQM（即查询预算为 1）设计的算法，是通过模拟具有更大查询预算的确定性算法来实现的。Meister and Nietert (2021) 中的算法可以看作是在模拟一个查询预算为 n 的确定性算法，该算法在每个时间步查询每个点。这一观察表明，可以通过先设计查询效率更高的 Meister and Nietert (2021) 的确定性 k-TQM 算法，再使用随机化算法对其进行模拟，从而改进该算法的样本复杂度。我们的目标有两个：使查询预算和样本复杂度同时尽可能小。自然地，TQM 的任何模拟算法的样本复杂度都取决于这两个参数。然而，查询预算越小，实现 ε-准确的累积分布函数估计所需的样本复杂度就越大。简单的确定性 n-TQM 算法保证对每个 ε-准确的累积分布函数估计，且 $T \geq 1$，即其样本复杂度为 1。在 附录 C 中，我们展示了两种基础确定性算法：一种的查询预算为 $O(\sqrt{n}/\varepsilon)$，样本复杂度为 $O(1/\varepsilon)$；另一种的查询预算为 $O\left(\log n_{\varepsilon}\right)$，其样本复杂度为

[1]论证见引理 C.1

$O\left(\log n_{\varepsilon}\right)$。然而，这两种基础算法都没有达到确定性算法可能实现的最低查询预算。利用 Blackwell 可接近性定理，在 第3节 中，我们证明了存在一种查询预算为 $O(1/\varepsilon)$、准确度为 ε 且样本复杂度有限的确定性算法。随后，在 第 4 节 中，我们利用乘法权重方法证明，该算法可以设计为具有 $O\left(\log n_{\varepsilon}\right)$ 的样本复杂度。在 第5节 中，我们利用重要性加权将该算法调整为适用于 TQM，并证明其样本复杂度有 $O\left(\log n_{\varepsilon^3}\right)$ 的上界。在 第6节 中，我们证明了 TQM 的一个下界，该下界与我们的上界仅相差一个常数因子；在 第7节 中，我们讨论了一些推广和未来工作。

3 运用可接近性求解 TQM

3.1 Blackwell 可接近性回顾

Blackwell 可接近性（Blackwell，1956年）将重复两人零和博弈的问题推广到收益为向量而非标量的博弈。在 Blackwell 可接近性博弈中，每个时刻 t，两位玩家依次进行互动：首先，玩家1选择一个行动 $a_t \in A$；接着，玩家2选择一个行动 $b_t \in B$；最后，玩家1获得向量值收益 $h(a_t, b_t) \in \mathbb{R}^d$。假设玩家行动集合 A、B 是有限维向量空间中的紧凸子集，且 h 是定义在 $A \times B$ 上的双仿射函数。玩家1的目标是保证平均收益收敛到某个期望的闭凸目标集 $S \subseteq \mathbb{R}^d$。形式化地说，给定目标集 $S \subseteq \mathbb{R}^d$，玩家1的目标是选择行动 $a_1, a_2, \ldots \in A$，使得无论玩家2采取何种行动 $b_1, b_2, \ldots \in B$，

$$\mathrm{dist}\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} h(x_t, y_t), S\right) \to 0 \quad \text{as} \quad T \to \infty \tag{1}$$

行动 a_t 可以依赖于实际实现的收益 向量 $h_s(a_s, b_s)$，其中 $s = 1, 2, \ldots\ldots, t-1$。若玩家1拥有一种策略，无论玩家2如何行动，该策略都能实现目标（1），则称集合 S 是可接近的。Blackwell 可接近性定理指出，凸集 $S \subset \mathbb{R}^d$ 是可接近的，当且仅当每个包含 S 的闭半空间都是可接近的。这是一个方便的可接近性判据，因为可以通过计算相关零和博弈的值，或等价地求解线性规划，来检验一个半空间是否可接近。

3.2 可接近性归约

针对 k-TQM 的确定性算法在时刻 t 选择查询 $q_{1,t} \le q_{2,t} \le \cdots \le q_{k,t}$，并收到反馈 $y_{1,t} \le y_{2,t} \le \cdots \le y_{k,t}$，其中 $y_{i,t} = v_t(q_{i,t})$。为方便记号，我们将 $q_{0,t} = 0$、$q_{k+1,t} = n + 1$、$y_{0,t} = 0$、$y_{k+1,t} = 1$ 作如下约定。

对于索引 $i \in [n]$，，定义 $l_t(i)$ 和 $u_t(i)$ 如下

$$\ell_t(i) = \max\{y_{j,t} \mid 0 \le j \le k+1,\ q_{j,t} \le i\}, \qquad u_t(i) = \min\{y_{j,t} \mid 0 \le j \le k+1,\ q_{j,t} \ge i\}.$$

这是根据算法查询的值所能推导出的关于 $F_t(i)$ 的最紧下界和上界。令 $d_t(i) = u_t(i) - l_t(i)$。在时间 T，依据查询到的值，$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} v_t(i)$ 的最佳下界和上界分别为 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} l_t(i)$ 和 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_t(i)$。因此，我们知道 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} v_t(i)$ 位于一个宽度为 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} d_t(i)$ 的区间内。当该区间宽度对每个 $i \in [n]$, 都小于或等于 2ε 时

可以安全地停止，并输出一个估计值 G_T：$[n] \to [0,1]$，其定义为将 $G_T(i)$ 设为区间 $h \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} l_t(i), \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_t(i)i$ 的中点。
这启发了将确定性查询模型表述为向量收益博弈的如下形式。在每一轮中：

1. 对手选择单调非递减的 $v_t : [n] \to [0,1]$。
2. 算法同时选择 $q1,_t \le \cdots \le q_{k,t}$。这对应于玩家1的行动。
3. 反馈 $y_{i,t} = v_t(q_{i,t})$ 对于 $i = 1, 2, \ldots, k$ 被揭示。这对应于玩家2的行动 .
4. n 维损失向量为 $d_t = (d_t(1), d_t(2), \cdots, d_t(n))$。在我们的归约中，这对应于时间 t 的向量值收益。

我们试图弄清楚的问题是：对于哪些 k，存在一种算法，能够保证趋近于集合 $(-\infty, 2\varepsilon]^n$？如果该集合是可趋近的，那么 T 必须多大，才能确保算法到该集合的 L_∞ 距离为 $O(\varepsilon)$？

命题 3.1. 在查询预算为 k 的向量收益博弈中，只要 $k + 1 \ge \frac{1}{2\varepsilon}$，集合 $(-\infty, 2\varepsilon]^n$ 就是可趋近的。

证明。要证明 $S = (-\infty, 2\varepsilon]^n$ 是可趋近集合，我们需要证明每个包含 S 的半空间都是可趋近的。包含 S 的半空间是形如以下形式的集合 H

$$H = \left\{ \mathbf{x} \middle| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b \right\}$$

其中 $a_1, a_2, \ldots\ldots$、a_n 均为非负数，且至少有一个严格为正，并且 $b \ge \sum_{i=1}^{n} a_i(2\varepsilon)$。不失一般性[2],，令 b 等于 $2\varepsilon \sum_{i=1}^{n} a_i$。此外，在不改变半空间 H 的前提下，我们可以对 $a_1, \ldots\ldots$、a_n 和 b 进行归一化，使得 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ 且 $b = 2\varepsilon$。以下假设我们已采用这种归一化方式。
对于 $j = 1, \ldots, k$，令

$$q_j = \min \left\{ q \middle| \sum_{i=1}^{q} a_i \ge \frac{j}{k+1} \right\}. \tag{2}$$

我们旨在证明，对于对手所选择的任意 v_t，当算法按照公式 (2) 中定义的方式选择 q_1、...、q_k 时，损失向量 d_t 属于 H。[3] 为方便记号，令 $q_0 = 0$、$q_{k+1} = n + 1$，并令 $v_t(0) = 0$、$v_t(n + 1) = 1$。根据 q^j 的定义可知，

$$\sum_{i=q_j+1}^{q_{j+1}-1} a_i = \sum_{i=1}^{q_{j+1}-1} a_i - \sum_{i=1}^{q_j} a_i < \frac{j+1}{k+1} - \frac{j}{k+1} = \frac{1}{k+1}. \tag{3}$$

[2]否则，H 是另一个半空间 H′ 的真超集，后者也包含 S。要证明 H 是可接近的，只需证明 H′ 是可接近的。[3]为简洁起见，我们在指代查询 $q_{j,t}$时使用记号 q^j

此外，注意到对于 $i = q_j$，有 $u_t(i) = l_t(i) = v_t(q_j)$，$d_t(i) = 0$；而对于 $q_j < i < q_{j+1}$，有 $u_t(i) = v_t(q_{j+1})$，$l_t(i) = v_t(q_j)$，$d_t(i) = v_t(q_{j+1}) - v_t(q_j)$。因此，

$$\sum_{i=1}^{n} a_i d_t(i) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=q_j+1}^{q_{j+1}-1} a_i (v_t(q_{j+1}) - v_t(q_j))$$
$$\leq \sum_{j=0}^{k} \frac{v_t(q_{j+1}) - v_t(q_j)}{k+1} = \frac{v_t(q_{k+1}) - v_t(q_0)}{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

右侧小于或等于 $b = 2\varepsilon$，当 $k+1 \geq \frac{1}{2\varepsilon}$ 时。这证实了每个包含 S 的半空间都是可接近的，因此 S 是可接近的。■

4 使用并行查询进行累积分布函数估计的乘法权重算法

在本节中，我们将可接近性证明（命题 3.1）转化为一个确定性算法，其查询预算为 $k = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor$，准确度为 ε，样本复杂度为 $9^{\ln n \varepsilon}$。设计该算法的关键，是在每一轮 t 使用乘法权重算法选择系数 a_i、$_t$，然后按照可接近性证明中的做法，使用公式（2）选择查询点 q_1、$_t$、.....、$q_{k,\ t}$，以响应这些系数。

算法 1：用于 k-TQM 的乘法权重算法

1 初始化：$\eta = 1/3$;
2 $w_{i,0} = \frac{1}{n}$ 对于 $i \in [n]$;
3 对于 $t = 1, 2, \ldots, T$ **do**
4 $W = \sum_{i=1}^{n} w_{i,t-1}$;
5 对于 $i \in [n]$ 令 $a_{i,t} = w_{i,t-1}/W$;
6 对于 $j \in [k]$，令 $q_{j,\ t} = \min\left\{q \mid \sum_{i=1}^{q} a_{i,\ t} \geq j_{k+1}\right\}$;
7 查询点 $q_{1,\ t}, \ldots, q_{k,\ t}$，并获得答案 $y_{1,\ t}, \ldots, y_{k,\ t}$;
8 令 $q_{0,\ t} = 0$ 和 $q_{k+1,\ t} = n$;
9 对于 $i \in [n]$，执行
10 $l_t(i) = \max\{y_{j,\ t} \mid 0 \leq j \leq k+1,\ q_{j,\ t} \leq i\}$;
11 $u_t(i) = \min\{y_{j,\ t} \mid 0 \leq j \leq k+1,\ q_{j,\ t} \geq i\}$;
12 $d_t(i) = u_t(i) - l_t(i)$;
13 $w_{i,\ t} = w_{i,\ t-1} \cdot (1+\eta)^{d_t(i)}$;
14 **end**
15 结束
16 输出：$G_T[i] = \frac{1}{2T} \sum_{t=1}^{T} (l_t(i) + u_t(i))$ 对所有 $i \in [n]$。

定理 4.1. 当 $k + 1 \geq \frac{1}{\varepsilon}$ 时，算法 1 以准确度 ε 和样本复杂度 $9^{\ln n\varepsilon}$ 求解 k-TQM。

证明。权重 $w_{i,\ t}$ 和系数数 $a_{i,\ t}$ 在算法1中按照标准 Hedge 算法在参数 $\eta = 1/3$ 下的更新方程演变；根据该算法的分析，

Arora 等人（2012），我们得到不等式

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n} a_i d_t(i) \geq (1-\eta)\max_{i\in[n]}\{\sum_{t=1}^{T} d_t(i)\} - \frac{\ln n}{\eta}. \tag{4}$$

根据 命题 3.1 的证明，我们知道，对于所有 t，$\sum_{i=1}^{n} a_i d_t(i) \leq \frac{1}{k+1}$。将此界代入不等式（4），可得

$$\frac{T}{k+1} \geq (1-\eta)\max_{i\in[n]}\left\{\sum_{t=1}^{T} d_t(i)\right\} - \frac{\ln n}{\eta} = \frac{2}{3}\max_{i\in[n]}\left\{\sum_{t=1}^{T} d_t(i)\right\} - 3\ln n \geq \frac{2}{3}\max_{i\in[n]}\left\{\sum_{t=1}^{T} d_t(i)\right\} - \frac{\varepsilon}{3}T, \tag{5}$$

其中，第二个不等式由 $T \geq 9\ln n\varepsilon$ 这一事实推出。回想起 $\eta = \frac{1}{3}$、$k+1 \geq \frac{1}{\varepsilon}$，我们得到

$$\begin{aligned}
\varepsilon T &\geq \frac{2}{3}\max_{i\in[n]}\left\{\sum_{t=1}^{T} d_t(i)\right\} - \frac{\varepsilon}{3}T \\
\frac{4}{3}\varepsilon T &\geq \frac{2}{3}\max_{i\in[n]}\left\{\sum_{t=1}^{T} d_t(i)\right\} \\
2\varepsilon &\geq \max_{i\in[n]}\left\{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} d_t(i)\right\}.
\end{aligned}$$

最后一个不等式右侧等于区间 $\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} l_t(i), \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_t(i)\right]$ 的宽度。保证该区间包含 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} v_t(i)$，且其中点为 $G_T(i)$，因此我们可以确定 $|G_T(i) - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} v_t(i)| \leq \frac{1}{2}(2\varepsilon) = \varepsilon$，如所需。■

5 使用重要性加权的随机化算法

在第 4 节中，我们介绍了一种确定性算法，其准确度为 ε，查询预算为 $\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\rfloor$，样本复杂度为 $9\ln n\varepsilon$。此前我们指出，任何确定性算法都无法在查询预算低于 $\frac{1}{2\varepsilon} - 1$ 的情况下达到准确度 ε。本节将关注查询预算为 1 的随机化算法。

一种自然的方法是模拟上一节中的确定性算法；也就是说，运行算法 1 的一步，以获得一组 k 个查询点，并在接下来的 $O\left(k\log n\right)$ 个时间步中，随机抽取其中一个 k 个点进行查询，从而获得在每个 ε 个查询点处对累积分布函数的 -精确估计值。这种方法可以成功实施，但本文省略了具体细节。然而，所得样本复杂度上界比最优上界大 k 倍，因子为 $\Omega\left(\ln\ln n_{\varepsilon}\right)$。造成这种情况的一个主要原因是，算法在 固定 的一组 k 个点中进行抽样，并持续 $O\left(k\log n_{\varepsilon^2}\right)$ 个时间步，尽管算法的累积分布函数估计值不断变化，而且算法 1 可能会建议一组不同的 k 个查询点。

为避免必须预先选定一组固定查询点这一问题，我们采用多臂老虎机文献中一种称为重要性加权的方法。我们无法查询所有点 $q_{1,t}、\ldots、q_{k,t}$ 以获得反馈 $y_{1,t}、\ldots、y_{k,t}$，因此我们改为均匀随机地选择一个点 $q_{m,t}$，以获得反馈 $y_{m,t}$。我们将数值设为 $\hat{y}_{j,t}$：若 $j = m$，则为 $k \cdot y_{m,t}$；否则为 0。然后，我们用这些数值继续执行算法

$\hat{y}_{1,t}, \ldots, \hat{y}_{k,t}$ 而非 $y_{1,t}, \ldots, y_{k,t}$。

算法 2：使用重要性加权的随机化 MW 算法

初始化：$k = \frac{2}{\varepsilon}, \eta = \varepsilon^2/16$;
$w_{i,0} = \frac{1}{n}$ 对于 $i \in [n]$;
对于 $t = 1, 2, \ldots, T$ **do**
  $W = \sum_{i=1}^{n} w_{i,t-1}$;
  对于 $i \in [n]$，令 $a_{i,t} = w_{i,t-1}/W$;
  对于 $j \in [k]$，令 $q_{j,t} = \min\left\{q \;\middle|\; \sum_{i=1}^{q} a_{i,t} \geq \frac{j}{k+1}\right\}$;
  设 $q_{0,t} = 0$ 和 $q_{k+1,t} = n$;
  对于 $j \in [k]$，令 $\hat{y}_{j,t} = 0$;
  从 $[k]$ 中均匀抽取 m 个样本;
  查询 $q_{m,t}$ 并接收 $y_{m,t}$;
  集合 $\hat{y}_{m,t} = k \cdot y_{m,t}$;
  对于 $i \in [n]$，执行
    $\hat{l}_t(i) = \hat{y}_{r,t}$ 其中 $r = \max\{j \mid 0 \leq j \leq k+1, q_{j,t} \leq i\}$;
    $\hat{u}_t(i) = \hat{y}_{r,t}$ 其中 $r = \min\{j \mid 0 \leq j \leq k+1, q_{j,t} \geq i\}$;
    $\hat{d}_t(i) = \hat{u}_t(i) - \hat{l}_t(i)$;
    $w_{i,t} = w_{i,t-1} \cdot (1+\eta)^{\hat{d}_t(i)}$;
  end
结束
输出：$\hat{G}_T[i] = \frac{1}{2T}$ 对所有 $i \in [n]$，$\sum_{t=1}^{T}(\hat{l}_t(i) + \hat{u}_t(i))$。

定理 5.1. 算法 2 在准确度为 ε、样本复杂度为 $^{64}\log n\varepsilon^3$ 的条件下求解 TQM。

定理的证明见附录 B。

6 下界

本节概述一个证明，说明第 2 行 的样本复杂度在信息论意义上是最优的，误差至多为一个常数因子。完整证明见附录 A。

定理 6.1. 对于任意 $n > 1, \varepsilon > 0$，任何使用每个样本进行一次阈值查询、以准确度ε解决累积分布函数估计问题的算法，都至少需要 $T_0 = \Omega(\min\{n, \frac{1}{\varepsilon}\cdot\log(n)/\varepsilon^2)$ 个样本。

当 $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$ 时，这是Meister andNietert (2021) 的定理 6，因此本节余下部分将讨论 $n > \frac{1}{\varepsilon}$ 时的证明。为方便起见，假设[4] 数字 $k = \frac{1}{6\varepsilon}$ 和 $m = n/k = 6\varepsilon n$ 都是正整数。接下来，我们将定义一个由 $\theta \in [m]^k$ 参数化的概率分布族。它们的累积分布函数 $\{F_\theta \mid \theta \in [m]^k\}$ 经过设计，具有三个性质。

1. 对于任意函数 $\hat{F}$ 至多存在一个 $\theta \in [m]^k$ 使得 $\|\hat{F} - F_\theta\|_\infty < \frac{3\varepsilon}{2}$。因此，给定一个 $\frac{3\varepsilon}{2}$-精确的 F_θ 估计值，我们可以推导出 θ。（引理 A.2）

[4]这些假设是不失一般性的。首先将 ε 至多增大 6 倍，以确保 $\frac{1}{6\varepsilon}$ 是不超过 n 的整数；然后将 n 至多缩小一半，以确保 n 能被 $\frac{1}{6\varepsilon}$ 整除。对 ε 和 n 所做的这些调整只会影响下界中大 Ω 表达式的隐含常数。

2. 非正式地说，任意一系列 $1/\varepsilon^2$ 阈值查询至多揭示关于 $O(1)$ 比特的信息θ。在证明中，这一结论通过学习者在 θ上的先验分布与后验分布之间的预期 KL 散度，以信息论意义上的形式化方式表述。（引理 A.13）

3. 从 $\theta \in [m]^k$ 上的均匀先验出发，经过任意一系列阈值查询后，后验分布都是乘积分布。换言之，将 θ写成一个 k 元组 $(\theta_1,\ldots,\theta_k)$，则在后验分布下，该元组的 k 个坐标相互独立。（引理 A.3）

现在假设对手通过从 $\theta \in [\mathrm{m}]^k$ 中均匀随机抽样，然后从累积分布函数为 F_θ 的概率分布中抽取 T 个独立样本，生成序列 $\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_T$。利用 Dvoretzky-Kiefer-Wolfowitz 不等式，我们将说明，以至少 7 8 的概率，样本的经验累积分布函数与 F_θ 的 L_∞ 范数距离小于 $\frac{\varepsilon}{2}$。因此，对经验分布的 ε 精度估计值也是对 F_θ 的 $\frac{3\varepsilon}{2}$ 精度估计值，从而能够唯一确定 θ 的值。这意味着，若某算法以至少 3 4 的概率输出样本经验分布的 ε 精度估计值，则它也必须以至少 5 8 的概率学得 θ 的精确值；θ 是一个熵为 k log(m) 的随机变量。由于学习关于 θ 的单比特信息需要 $\Omega(1/\varepsilon^2)$ 次查询，因此以常数概率学得 θ 的精确值需要 $\Omega(\mathrm{k}\log(\mathrm{m})/\varepsilon^2)$ 次查询。回顾 k 和 m 的定义可知，该下界为 $\Omega(\log(\varepsilon\mathrm{n})/\varepsilon^3)$。定理 6.1 给出了更强的下界 $\Omega(\log(\mathrm{n})/\varepsilon^3)$；当 $1/\varepsilon = \mathrm{n}^{1-o(1)}$ 时，该下界在渐近意义上更大。为在这种情况下加强下界，我们利用该构造的第三个性质——关于 θ 的后验分布是乘积分布——证明在算法输出其估计值时，先验分布与后验分布之间的期望 KL 散度具有更强的下界。

7 讨论与开放问题

为了解决在线累积分布函数估计问题，我们转而研究了一个更一般的设定——阈值查询模型。尽管我们完整刻画了使用阈值查询进行在线累积分布函数估计的样本复杂度，但这仅解决了 k-TQM 在 $k = 1$ 情况下的样本复杂度问题。未来工作的一个方向是刻画查询预算 k 取任意值时的最优样本复杂度。另一个方向是将阈值查询模型扩展到 Kolmogorov-Smirnov 距离以外的其他距离度量。需要注意的是，本文提出的算法完全是自适应的。然而，在某些实际场景中，可能会存在延迟问题。这引出了一个问题：对于非自适应算法，查询预算和样本复杂度是否会更高？如果会，高出多少？附录 C讨论了其中一些特殊情形。

一个值得考虑的自然扩展是连续支持设定，其中查询和样本可以是区间 $[0,1]$ 中的任意实数值。若没有额外假设，该设定下的累积分布函数估计将变得难以处理。这是因为可能的取值有无穷多个，算法无法通过有限次查询覆盖所有取值。然而，Meister and Nietert (2021) 指出，如果指定感兴趣的分辨率 r，那么令 $n = O(1/r)$，问题就可化为离散支持情形。我们想知道，对对手的概率密度函数作出哪些假设，才能使累积分布函数估计问题变得可处理，以及我们的方法是否适用。另一个值得探讨的方向是研究更高维的推广，以估计多元分布——此时样本是向量值的，算法则使用线性阈值函数（即半空间）查询数据。

在第1节中，我们指出了在线动态定价和拍卖等相关应用领域中的一些相关工作。我们想知道，我们的技术是否也能扩展到这些场景中。

参考文献

Acharya, J.、Canonne, C.、Liu, Y.、Sun, Z. 和 Tyagi, H.（2021）。每位用户拥有多个样本的分布式估计：精确速率与相变。载于 Ranzato, M.、Beygelzimer, A.、Dauphin, Y.、Liang, P. 和 Vaughan, J. W.（编），《神经信息处理系统进展》，第34卷，第18920–18931页。Curran Associates, Inc. 4 Acharya, J.、Canonne, C. L.、Sun, Z. 和 Tyagi, H.（2020）。信息约束下交互式高维估计的统一下界。CoRR，abs/2010.06562。4 Ali, S. 和 Ronaldson, S.（2012）。卫生经济学和卫生服务研究中的序数偏好 elicitation 方法：使用离散选择实验和排序方法。《英国医学通报》，103(1):21–44。1 Arora, S.、Hazan, E. 和 Kale, S.（2012）。乘法权重更新方法：一种元算法及其应用。《计算理论》，8(6):121–164。9 Auer, P.、Cesa-Bianchi, N.、Freund, Y. 和 Schapire, R. E.（2002）。非随机多臂老虎机问题。《SIAM计算杂志》，32(1):48–77。23 Barlow, R. E.、Bartholomew, D. J.、Bremner, J. M. 和 Brunk, H. D.（1972）。序约束下的统计推断：保序回归理论与应用。Wiley。3 Barnes, L. P.、Han, Y. 和 Ozgur, A.（2020）。通过 Fisher 信息在通信约束下学习概率分布的下界。《机器学习研究杂志》，21(236):1–30。3, 4 Ben-Or, M. 和 Hassidim, A.（2008）。贝叶斯学习者在含噪二分搜索中是最优的（对量子搜索也相当不错）。载于《2008年第49届IEEE计算机科学基础研讨会》，第221–230页。IEEE。3 Blackwell, D.（1956年）。向量收益极小极大定理的一个类比。《太平洋数学杂志》，6(1):1–8。6 Blum, A.、Mansour, Y. 和 Morgenstern, J.（2015）。从部分观测中学习估值分布。载于《第二十九届AAAI人工智能会议论文集》，AAAI’15，第798–804页。AAAI出版社。4 Burnashev, M. V. 和 Zigangirov, K. S.（1974）。受控观测的区间估计问题。《信息传输问题》，10:223–231。（俄文发表）。3 Chapelle, O.、Joachims, T.、Radlinski, F. 和 Yue, Y.（2012）。交错搜索评估的大规模验证与分析。《ACM信息系统汇刊》（TOIS），30(1):1–41。1 Cormode, G.、Johnson, T.、Korn, F.、Muthukrishnan, S.、Spatscheck, O. 和 Srivastava, D.（2004年）。流处理速度下的整体式UDAF。载于《2004年ACM SIGMOD数据管理国际会议论文集》，第35–46页。1 Dvoretzky, A.、Kiefer, J. 和 Wolfowitz, J.（1956年）。样本分布函数与经典多项式估计量的渐近极小极大性质。《数学统计年刊》，27(3):642–669。22

Feige, U., Raghavan, P., Peleg, D., 和 Upfal, E.（1994）。带噪信息计算。SIAM计算杂志，23(5):1001–1018。3 Freedman, D. A.（1975）。鞅的尾概率。概率年刊，3(1):100 – 118。24 Greenwald, M. 和 Khanna, S.（2001）。节省空间的在线分位数摘要计算。ACM SIGMOD Record，30(2):58–66。1 Han, Y., Özgür, A., 和 Weissman, T.（2018）。通信约束下分布式参数估计的几何下界。载于《第31届学习理论会议论文集》，COLT 2018，机器学习研究论文集第75卷，第3163–3188页。PMLR。2020年的 arXiv（v3）版本修正了一些问题并包含更多结果。3 Karnin, Z., Lang, K., 和 Liberty, E.（2016）。数据流中的最优分位数近似。载于《2016年IEEE第57届计算机科学基础年会（FOCS）论文集》，第71–78页。IEEE。1 Karp, R. M. 和 Kleinberg, R.（2007）。含噪二分搜索及其应用。载于第18届 ACM-SIAM 离散算法研讨会（SODA）论文集，第881–890页。2, 3 Kleinberg, R. 和 Leighton, T.（2003）。了解需求曲线的价值：在线标价拍卖的遗憾界。载于《2003年IEEE计算机科学基础第44届年会论文集》，第594–605页。4 Larichev, O., Olson, D., Moshkovich, H., 和 Mechitov, A.（1995）。多属性决策中的数值测量与基数测量：精确到什么程度才足够？组织行为与人类决策过程，64(1):9–21。1 Leme, R. P., Sivan, B., Teng, Y., 和 Worah, P.（2021a）。针对移动目标学习定价。载于 Meila, M. 和 Zhang, T.（编），《第38届国际机器学习会议论文集》，机器学习研究论文集第139卷，第6223–6232页。PMLR。4 Leme, R. P., Sivan, B., Teng, Y., 和 Worah, P.（2021b）。收入最大化的定价查询复杂度。CoRR，abs/2111.03158。4 Manku, G. S., Rajagopalan, S., 和 Lindsay, B. G.（1998）。单遍且有限内存条件下的近似中位数及其他分位数。ACM SIGMOD Record，27(2):426–435。1 Meister, M. 和 Nietert, S.（2021）。利用比较反馈进行学习：样本统计量的在线估计。载于《算法学习理论》，第983–1001页。PMLR。2, 3, 4, 5, 10, 11, 15, 21 Moshkovich, H. M., Mechitov, A. I., 和 Olson, D. L.（2002）。多属性决策分析中的序数判断。欧洲运筹学杂志，137(3):625–641。1 Munro, J. I. 和 Paterson, M. S.（1980）。有限存储下的选择与排序。理论计算机科学，12(3):315–323。1 Perchet, V.（2015）。指数权重可达性及其在校准和遗憾最小化中的应用。动态博弈与应用，5:136–153。2

Shrivastava, N., Buragohain, C., Agrawal, D., 和 Suri, S.（2004年）。中位数及更多：传感器网络的新型聚合技术。载于 第2届嵌入式联网传感器系统国际会议，第239–249页。1

Weed, J., Perchet, V., 和 Rigollet, P.（2016年）。重复拍卖中的在线学习。载于 Feldman, V.、Rakhlin, A. 和 Shamir, O. 编，第29届学习理论年会，第49卷，收录于机器学习研究论文集，第1562–1583页，哥伦比亚大学，纽约，纽约州，美国。PMLR。1

A 下界的证明

本节中，我们始终假设$n > \frac{1}{\varepsilon}$，因为$n \le \frac{1}{\varepsilon}$的情形已由定理 6.1 中Meister and Nietert （2021）证明。此外，正如第6节所述，不失一般性，我们假设$n = km$，其中$k = \frac{1}{6\varepsilon}$。

我们先在 附录 A.1中描述在 $[n]$ 上构造一个由 $\theta \in [m]^k$ 参数化的分布族。随后，我们在 附录 A.2 中回顾 KL 散度的一些基本事实，它是证明中主要的信息论工具。最后，附录 A.3完成证明。

A.1 分布族

由于 $n = km$，每个 $[n]$ 中的元素都可以唯一表示为 $(a-1)m+b$ 的形式，其中 $a \in [k]$，$b \in [m]$。对于 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \in [m]^k$，令 I_θ 表示集合

$$I_\theta = \{(a-1)m + \theta_a \mid a \in [k]\}$$

并令 D_θ 表示 $[n]$ 上的概率分布，该分布是按以下抽样规则生成的。

1. 以概率 1/2 输出 I_θ 中的一个均匀随机元素。
2. 以 1/4 的概率输出 1。
3. 以 1/4 的概率输出 n。

D_θ 的累积分布函数是函数 F_θ，其在 $i = (a-1)m+b$ 处的值，当 $a \in [k], b \in [m]$, 给定时，由以下公式确定

$$F_\theta((a-1)m+b) = \begin{cases} \frac{1}{4} + 3(a-1)\varepsilon & \text{if } b < \theta_a \\ \frac{1}{4} + 3a\varepsilon & \text{if } b \ge \theta_a,\ (a-1)m+b < n \\ 1 & \text{if } (a-1)m+b = n. \end{cases} \tag{6}$$

引理 A.1. 如果 θ、θ' 是 $[m]^k$ 中任意两个不同的元素，那么 $\|F_\theta - F_{\theta'}\|_\infty = 3\varepsilon$。

证明。根据 F_θ 和 $F_{\theta'}$ 的定义，显然 $F_\theta(n) = F_{\theta'}(n) = 1$，并且对于 $i = (a-1)m + b < n$，$F_\theta(i)$ 和 $F_{\theta'}(i)$ 都属于集合 $\{\frac{1}{4} + 3(a-1)\varepsilon, \frac{1}{4} + 3a\varepsilon\}$，因此 $|F_\theta(i) - F_{\theta'}(i)|$ 不会超过 3ε。因此，$\|F_\theta - F_{\theta'}\|_\infty \le 3\varepsilon$。

由于我们假设了 θ, θ'，因此存在某个 $a \in [k]$，使得 θ_a, θ'_a。不失一般性，假设 $\theta_a < \theta'_a$。那么，对于 $i = (a-1)m + \theta_a$，我们有 $F_\theta(i) - F_{\theta'}(i) = 3\varepsilon$。因此，$\|F_\theta - F_{\theta'}\|_\infty \ge 3\varepsilon$。■

引理 A.2. 对于任意函数 $\hat{F}: [n] \to [0,1]$，至多存在一个 $\theta \in [m]^k$ 满足 $\|\hat{F} - F_\theta\|_\infty < \frac{3\varepsilon}{2}$。

证明。该引理可直接由引理 A.1 以及以下事实得出：L_∞ 范数满足三角不等式。■

在接下来的证明中，我们将考虑在如下方式生成的输入序列 $x_1, x_2, \ldots, x_T$ 上执行一个固定但任意的累积分布函数估计算法：先均匀随机地抽取 $\theta \in [m]^k$，然后令

$x_1, x_2, \ldots, x_T$为来自 D_θ 的 T 个独立样本。令 $(q_1, y_1), (q_2, y_2), \ldots, (q_T, y_T)$ 表示算法的查询及其响应所构成的随机 $[n]\times\{0,1\}$ 值序列。对于 $0 \le t \le T$，令 $p_t(\theta)$ 表示在给定 $(q_1, y_1), \ldots, (q_t, y_t)$ 后 θ 的后验分布。（当 $t = 0$ 时，这只是 θ 的先验分布，即 $[m]^k$ 上的均匀分布。）

引理 A.3. 对于 $0 \le t \le T$，对于所有查询与响应序列 $(q_1, y_1), \ldots, (q_t, y_t)$，后验分布 p_t 是乘积分布。换言之，若 $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in [m]^k$ 服从 p_t，则随机变量 $\theta_1, \ldots, \theta_k$ 相互独立。

证明。证明采用关于 t 的归纳法。在基础情形中，p_0 是 $[m]^k$上的均匀分布，因此是乘积分布。对于归纳步骤，将 $q_t \in [n]$ 写作 $q_t = (a_t - 1)m + b_t$，其中 $a_t \in [k], b_t \in [m]$。给定 q_t 时，y_t 的分布仅取决于参数 θ_{a_t}。因此，若 p_{t-1} 是乘积分布，则对 (q_t, y_t)进行条件化的贝叶斯更新会改变 θ_{a_t} 的边缘分布，同时使其与 θ_j 保持独立，对所有 j，a_t均如此。■

A.2 KL 散度回顾

对于有限集合 Ω 上的两个概率分布 p、q，其 Kullback-Leibler 散度（以下简称 KL 散度）定义为

$$D_{KL}(p \| q) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \ln\left(\frac{p(\omega)}{q(\omega)}\right). \tag{7}$$

当 $p(\omega) = 0$右侧（7）中的求和项按零处理。

在本节和下一节中，若 p 是定义在变量对 (X, Y) 上的分布，则 p(X)、p(Y) 分别表示 X 和 Y 的边缘分布，而 p(X|Y)、p(Y|X) 分别表示给定 Y 时 X 的条件分布以及给定 X 时 Y 的条件分布。

引理 A.4. 若 p、q 是定义在同一集合上的任意两个概率分布，则 $D_{KL}(p \| q) \ge 0$。

证明。函数 $\phi(x) = -\ln(x)$ 是凸函数，因此根据詹森不等式，

$$\begin{aligned}\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \ln\left(\frac{p(\omega)}{q(\omega)}\right) &= \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \phi\left(\frac{q(\omega)}{p(\omega)}\right) \\ &\ge \phi\left(\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \cdot \frac{q(\omega)}{p(\omega)}\right) \\ &= \phi\left(\sum_{\omega \in \Omega} q(\omega)\right) = \phi(1) = 0.\end{aligned}$$

■

A.2.1 链式法则及其推论

引理 A.5（KL 散度的链式法则）。若 p、q 是定义在对 (X,Y) 上的概率分布，则

$$D_{KL}(p \| q) = D_{KL}(p(Y) \| q(Y)) + \mathbb{E}_{Y \sim p} D_{KL}(p(X|Y) \| q(X|Y)). \tag{8}$$

证明。对于任意 y，由贝叶斯定律可得

$$\ln p(X = x|Y = y) = \ln p(X = x,\ Y = y) - \ln p(Y = y)$$
$$\ln q(X = x|Y = y) = \ln q(X = x,\ Y = y) - \ln q(Y = y)$$
$$\ln\left(\frac{p(X = x|Y = y)}{q(X = x|Y = y)}\right) = \ln\left(\frac{p(X = x,\ Y = y)}{q(X = x,\ Y = y)}\right) - \ln\left(\frac{p(Y = y)}{q(Y = y)}\right)$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{Y\sim p} D_{KL}\left(p(X|Y)\,\|\,q(X|Y)\right) &= \sum_y p(Y = y) \sum_x p(X = x|Y = y) \ln\left(\frac{p(X = x|Y = y)}{q(X = x|Y = y)}\right) \\
&= \sum_{x,y} p(X = x, Y = y) \ln\left(\frac{p(X = x|Y = y)}{q(X = x|Y = y)}\right) \\
&= \sum_{x,y} p(X = x, Y = y) \ln\left(\frac{p(X = x,\ Y = y)}{q(X = x,\ Y = y)}\right) - \sum_{x,y} p(X = x, Y = y) \ln\left(\frac{p(Y = y)}{q(Y = y)}\right) \\
&= \sum_{x,y} p(X = x, Y = y) \ln\left(\frac{p(X = x,\ Y = y)}{q(X = x,\ Y = y)}\right) - \sum_{y} p(Y = y) \ln\left(\frac{p(X = x,\ Y = y)}{q(X = x,\ Y = y)}\right) \\
&= D_{KL}\left(p\,\|\,q\right) - D_{KL}\left(p(Y)\,\|\,q(Y)\right).
\end{aligned}$$

■

链式法则有几个推论对我们很有用。

引理 A.6。如果 p、q 是定义在 t 元组 $X_1, \ldots, X_t$ 上的概率分布，那么

$$D_{KL}\left(p\,\|\,q\right) = \sum_{s=1}^{t} \mathbb{E}_{X_1,\ldots,X_{s-1}\sim p} D_{KL}\left(p(X_s|X_1, \ldots, X_{s-1})\,\|\,q(X_s|X_1, \ldots, X_{s-1})\right). \tag{9}$$

证明。 该引理可通过对 t 进行归纳法证明，其中基础情形 $t = 1$ 显然成立，而归纳步骤直接应用 引理A.5 即可。 ■

引理 A.7。如果 p、q 是定义在 t 元组 $X_1, \ldots, X_t$ 上的概率分布，并且 p 和 q 都是乘积分布，那么

$$D_{KL}\left(p\,\|\,q\right) = \sum_{s=1}^{t} D_{KL}\left(p(X_s)\,\|\,q(X_s)\right). \tag{10}$$

证明。 由于 p 是乘积分布， $p(X_s|X_1, .., X_{s-1}) = p(X_s)$，q 也同样如此。该引理现在可直接由 引理 A.6 得出。 ■

引理 A.8. 若 p、q 是定义在配对变量 (X, Y) 上且具有相同边缘分布的概率分布——即 p(X) = q(X) 且 p(Y) = q(Y)——则

$$\mathbb{E}_{X\sim p} D_{KL}\left(p(Y|X)\,\|\,q(Y|X)\right) = D_{KL}\left(p\,\|\,q\right) = \mathbb{E}_{Y\sim p} D_{KL}\left(p(X|Y)\,\|\,q(X|Y)\right). \tag{11}$$

证明. KL 散度的链式法则给出以下等式

$$\begin{aligned} D_{KL}(p\|q) &= D_{KL}(p(X)\|q(X)) + \mathbb{E}_{X\sim p} D_{KL}(p(Y|X)\|q(Y|X)) \\ &= D_{KL}(p(Y)\|q(Y)) + \mathbb{E}_{Y\sim p} D_{KL}(p(X|Y)\|q(X|Y)). \end{aligned}$$

该引理现在可由两个相同概率分布的 KL 散度为零这一事实得出。 ■

引理 A.9. 设 Ω, Σ 为有限集，且 $f : \Omega \to \Sigma$ 是一个函数。对于 Ω 上的两个概率分布 p、q，令 p^f 和 q^f 分别表示从 p 或 q 中抽取 ω 时 $f(\omega)$ 的概率分布。那么

$$D_{KL}(p\|q) \geq D_{KL}\left(p^f \| q^f\right). \tag{12}$$

证明。令 $\Gamma \subset \Omega \times \Sigma$ 表示 f 的图，即 $\Gamma = \{(\omega, f(\omega)) \mid \omega \in \Omega\}$。令 $\tilde{p}$、$\tilde{q}$ 分别表示从 p 或 q 中抽取 ω 时 $(\omega, f(\omega))$ 的概率分布。函数 $\omega \mapsto (\omega, f(\omega))$ 是概率空间 (Ω, p) 与 $(\Gamma, \tilde{p})$ 之间的保概率双射，同时也是概率空间 (Ω, q) 与 $(\Gamma, \tilde{q})$ 之间的保概率双射。因此，$D_{KL}(p\|q) = D_{KL}(\tilde{p}\|\tilde{q})$。现在利用链式法则和 KL 散度的非负性（引理 A.4 和 A.5），

$$D_{KL}(\tilde{p}\|\tilde{q}) = D_{KL}\left(p^f \| q^f\right) + \mathbb{E}_{f(\omega)\sim p^f} D_{KL}(p(\omega|f(\omega))\|q(\omega|f(\omega))) \geq D_{KL}\left(p^f \| q^f\right).$$

■

最后，我们将使用两个关于伯努利分布 KL 散度的引理。第一个给出了当 q(0) 和 q(1) 都不接近零时 $D_{KL}(p\|q)$ 的上界。第二个给出了当 q(0) 接近零且 p(0) 远离零时 $D_{KL}(p\|q)$ 的下界。

引理 A.10. 若 p、q 是定义在 $\{0, 1\}$ 上的两个概率分布，且 $q(0)$、$q(1) > 0$，则

$$D_{KL}(p\|q) \leq (p(0) - q(0))^2 \left(\frac{1}{q(0)} + \frac{1}{q(1)}\right). \tag{13}$$

证明。利用不等式 $\ln(1 + x) \leq x$，以及 $p(0) - q(0) = -(p(1) - q(1))$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned} D_{KL}(p\|q) &= p(0)\ln\left(\frac{p(0)}{q(0)}\right) + p(1)\ln\left(\frac{p(1)}{q(1)}\right) \\ &= p(0)\ln\left(1 + \frac{p(0) - q(0)}{q(0)}\right) + p(1)\ln\left(1 + \frac{p(1) - q(1)}{q(1)}\right) \\ &\leq p(0)\cdot\frac{p(0) - q(0)}{q(0)} + p(1)\cdot\frac{p(1) - q(1)}{q(1)} \\ &= p(0)\cdot\frac{p(0) - q(0)}{q(0)} - p(1)\cdot\frac{p(0) - q(0)}{q(0)} \\ &= (p(0) - q(0))\cdot\left(\frac{p(0)}{q(0)} - \frac{p(1)}{q(1)}\right) \\ &= (p(0) - q(0))\cdot\left(1 + \frac{p(0) - q(0)}{q(0)} - 1 - \frac{p(1) - q(1)}{q(1)}\right) \\ &= (p(0) - q(0))\cdot\left(\frac{p(0) - q(0)}{q(0)} + \frac{p(0) - q(0)}{q(1)}\right) \\ &= (p(0) - q(0))^2\cdot\left(\frac{1}{q(0)} + \frac{1}{q(1)}\right). \end{aligned}$$

■

引理 A.11. 若 p、q 是定义在 $\{0,1\}$ 上的概率分布，且 $q(1) \le \frac{1}{2} \le p(1)$，则

$$D_{KL}(p \| q) \ge \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{4q(1)}\right). \tag{14}$$

证明。设 $x = p(0)$。我们先计算 $D_{KL}(p \| q)$ 关于 x 的偏导数 .

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} D_{KL}(p \| q) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[x \ln(x) - x \ln(q(0)) + (1-x)\ln(1-x) - (1-x)\ln(q(1))\right] \\ &= ln(x) + 1 - \ln(q(0)) - \ln(1-x) - 1 + \ln(q(1)) \\ &= \ln\left(\frac{xq(1)}{(1-x)q(0)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x - xq(0)}{q(0) - xq(0)}\right).\end{aligned}$$

当 $x < q(0)$ 时，偏导数为负；当 $x > q(0)$ 时，偏导数为正。由于我们假设 $p(0) \le \frac{1}{2} \le q(0)$，当 $p(0)$ 在范围 $[0, \frac{1}{2}]$ 内变化时，$D_{KL}(p \| q)$ 的最小值出现在 $p(0) = \frac{1}{2}$，此时

$$D_{KL}(p \| q) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2q(0)}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2q(1)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4q(0)q(1)}\right) \ge \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4q(1)}\right).$$

■

引理 A.12. 假设 p 和 q 是定义在 k 元组 $X = (X_1, \ldots, X_k)$ 上的乘积分布，并且存在一个 k 元组 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*)$ 和一个数 $m \ge 2$，使得对于所有 i，$p(X = x^*) \ge \frac{1}{2}$，而 $q(X_i = x_i^*) \le \frac{1}{m}$。那么

$$D_{KL}(p \| q) \ge \frac{k}{2}\ln\left(\frac{m}{4}\right) \quad \text{and} \quad D_{KL}(q \| p) \ge \frac{k}{2}\ln\left(\frac{k}{3}\right). \tag{15}$$

证明。由引理 A.7 可知，$D_{KL}(p \| q) = \sum_{i=1}^{k} D_{KL}(p(X_i) \| q(X_i))$，且 $D_{KL}(q \| p) = \sum_{i=1}^{k} D_{KL}(q(X_i) \| p(X_i))$。为方便起见，令 p_i 表示分布 $p(X_i)$，令 q_i 表示分布 $q(X_i)$。若定义 $f(x_i)$：当 $x_i = x_i^*$ 时取 1，当 x_i, x_i^* 时取 0，则 $p_f i(1) = p(X_i = x_i^*) \ge p(X = x^*) \ge \frac{1}{2}$，且 $q_f i(1) = q(X_i = x_i^*) \le \frac{1}{m} \le \frac{1}{2}$。根据引理 A.9 和 A.11，

$$D_{KL}(p_i \| q_i) \ge D_{KL}\left(p_i^f \| q_i^f\right) \ge \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4q_i^f(1)}\right) \ge \frac{1}{2}\ln\left(\frac{m}{4}\right).$$

对 i 求和可得上界 $D_{KL}(p \| q) \ge_k 2\ln\left(\frac{m}{4}\right)$。

为证明 $D_{KL}(q \| p)$ 的下界，首先定义 $z_i = p(X_i, x_i^*)$。由于 $p(X = x^*) \ge \frac{1}{2}$，我们知道 $\prod_{i=1}^{k}(1 - z_i) \ge \frac{1}{2}$。利用算术-几何平均不等式，可得

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(1 - z_i) \ge (1/2)^{1/k} = e^{-\ln(2)/k} > 1 - \frac{\ln 2}{k}$$

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} z_i < \frac{\ln 2}{k}.$$

再次应用算术-几何平均不等式，可得

$$\prod_{i=1}^{k} z_i < \left(\frac{\ln 2}{k}\right)^k$$
$$\sum_{i=1}^{k} \ln(z_i) < k \ln\left(\frac{\ln(2)}{k}\right) < k \ln\left(\frac{3}{4k}\right)$$
$$\sum_{i=1}^{k} \ln(4z_i) < k \ln\left(\frac{3}{k}\right).$$

现在，我们按照上一段中的方法继续。令 g(X$_i$) = 1 if X$_i$, x$_i^*$，且 g(X$_i$) = 0 if X$_i$ = x$_i^*$。我们有 p^g i (1) = p$_i$(X$_i$, x$_i^*$) = z$_i$，由于不等式 Q$_{i=1}^k$(1 − z$_i$) ≥ $\frac{1}{2}$ implies1 − z$_i$ ≥$\frac{1}{2}$ 对每个 i 都成立，因此该值小于或等于 1 2。与此同时，q^g i (1) = q$_i$(X$_i$, x$_i^*$) = 1 − q$_i$(X$_i$ = x$_i^*$) ≥ 1 − $\frac{1}{}$m ≥ $\frac{1}{2}$。根据引理 A.9 和 A.11，

$$D_{KL}(q_i \| p_i) \geq D_{KL}\left(q_i^f \| p_i^f\right) \geq \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{4p_i^f(1)}\right) = -\frac{1}{2}\ln(4z_i).$$

对 i 求和，得到

$$D_{KL}(q \| p) \geq -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \ln(4z_i) > \frac{k}{2}\ln\left(\frac{k}{3}\right).$$

■

A.3 完成证明

本节将完成定理 6.1的证明。为此，假设 n > 1/ε，并且给定一个算法，该算法使用 T 次阈值查询，以至少 3 4 的概率生成一个精度为 ε 的累积分布函数估计。我们旨在证明 T ≥ Ω(k log(n)/ε^2) = Ω(log(n)/ε^3)。

令 H = ((q$_1$, y$_1$), . . . , (q$_T$, y$_T$)) 表示在算法处理输入序列 x$_1$, . . . , x$_T$（可能是随机序列）时得到的查询与响应随机历史记录。我们将考虑关于参数向量 θ 和历史记录 H 组成的对 (θ, H) 的两个联合分布 p，˚p。分布 p 是通过以下方式得到的分布：均匀随机地抽取参数向量 $\theta \in [m]^k$，然后从 D$_\theta$ 中抽取 T 个独立样本 x$_1$, . . . , x$_T$，最后在输入序列 x$_1$, . . . , x$_T$ 上运行算法以生成历史记录 H。分布 ˚p 是乘积分布 p(θ) × p(H)。换言之，从 ˚p 中随机抽取一个样本的方式是：从边缘分布 p(H) 中抽取随机历史记录 H，并独立地抽取一个与 H 毫无关联的均匀随机参数向量 $\theta \in [m]^k$。

由于 p 和 ˚p 具有相同的边缘分布，引理 A.8告诉我们

$$\mathbb{E}_\theta D_{KL}(p(H|\theta) \| \mathring{p}(H|\theta)) = D_{KL}(p \| \mathring{p}) = \mathbb{E}_H D_{KL}(p(\theta|H) \| \mathring{p}(\theta|H)) \tag{16}$$
$$\mathbb{E}_\theta D_{KL}(\mathring{p}(H|\theta) \| p(H|\theta)) = D_{KL}(p \| \mathring{p}) = \mathbb{E}_H D_{KL}(\mathring{p}(\theta|H) \| p(\theta|H)) \tag{17}$$

下一个引理给出了式 (16) 和 (17) 左侧各量的上界。

引理 A.13. 对任意 $\theta \in [m]^k$,

$$D_{KL}(p(H|\theta) \| \mathring{p}(H|\theta)) \leq 48\varepsilon^2 T \quad \text{and} \quad D_{KL}(\mathring{p}(H|\theta) \| p(H|\theta)) \leq 48\varepsilon^2 T \tag{18}$$

证明。我们使用 KL 散度的链式法则，引理 A.5。对于 $s = 1, 2, \ldots\ldots, T$ 令 H_s 表示由前 $q_1, y_1), \ldots\ldots, (q_s, y_s)$ 组成的随机变量，其中包含前 s 个查询及响应。

$$D_{KL}\left(p(H|\theta) \,\|\, \mathring{p}(H|\theta)\right) = \sum_{s=1}^{T} D_{KL}\left(p((q_s, y_s)|H_{s-1}, \theta) \,\|\, \mathring{p}((q_s, y_s)|H_{s-1}, \theta)\right) \tag{19}$$

再次应用 KL 散度的链式法则，可以进一步拆解和式中的每一项。

$$\begin{aligned} D_{KL}\left(p((q_s, y_s)|H_{s-1}, \theta) \,\|\, \mathring{p}((q_s, y_s)|H_{s-1}, \theta)\right) &= D_{KL}\left(p(q_s|H_{s-1}, \theta) \,\|\, \mathring{p}(q_s|H_{s-1}, \theta)\right) \\ &\quad + D_{KL}\left(p(y_s|q_s, H_{s-1}, \theta) \,\|\, \mathring{p}(y_s|q_s, H_{s-1}, \theta)\right) \end{aligned} \tag{20}$$

由于算法仅根据 q_s 和 H_{s-1} 来选择，因此条件分布 $p(q_s|H_{s-1}, \theta)$ 和 $\mathring{p}(q_s|H_{s-1}, \theta)$ 完全相同，因此右侧的第一项（20）为零：

$$D_{KL}\left(p(q_s|H_{s-1}, \theta) \,\|\, \mathring{p}(q_s|H_{s-1}, \theta)\right) = 0 \tag{21}$$

至于第二项，为简化记号，我们分别用 $\mathrm{p}(\mathrm{y}_s|\mathrm{q}_s, \mathrm{H}_{s-1}, \theta)$ 和 $\mathring{\mathrm{p}}(\mathrm{y}_s|\mathrm{q}_s, \mathrm{H}_{s-1}, \theta)$ 表示 p_s 和 $\mathring{\mathrm{p}}_s$。于是，$\mathrm{p}_s(0) = 1 - \mathrm{F}_\theta(\mathrm{q}_s)$，而 $\mathring{\mathrm{p}}_s(0) = \mathbb{E}[1 - \mathrm{F}_{\theta'}(\mathrm{q}_s)]$，其中右侧的期望是通过从条件分布 $\mathrm{p}(\theta|\mathrm{H}_{s-1})$ 中采样 θ' 计算得到的。引理 A.1 告诉我们，对于每个 θ'，都有 $|\mathrm{F}_\theta(\mathrm{q}_s) - \mathrm{F}_{\theta'}(\mathrm{q}_s)| \le 3\varepsilon$，因此

$$|p_s(0) - \mathring{p}_s(0)| \le 3\varepsilon. \tag{22}$$

若 $\mathrm{q}_s = \mathrm{n}$，则在两个概率分布 p 和 $\mathring{\mathrm{p}}$ 下，y_s 都确定性地等于 1，因此当 $\mathrm{q}_s = \mathrm{n}$ 时，$\mathrm{D}_{KL}(\mathrm{p}_s \,\|\, \mathring{\mathrm{p}}_s) = 0$。否则，$\mathring{\mathrm{p}}_s(0)$ 属于区间 $\mathrm{h}\,1\,4, 3\,4\,\mathrm{i}$，且 $\mathring{\mathrm{p}}_s(1) = 1 - \mathring{\mathrm{p}}_s(0)$，因此

$$\frac{1}{\mathring{p}_s(0)} + \frac{1}{\mathring{p}_s(1)} \le \frac{1}{1/4} + \frac{1}{3/4} = \frac{16}{3}. \tag{23}$$

现在，应用 引理 A.10，

$$D_{KL}\left(p_s \,\|\, \mathring{p}_s\right) \le (p_s(0) - \mathring{p}_s(0))^2 \cdot \frac{16}{3} \le \frac{16}{3}(3\varepsilon)^2 = 48\varepsilon^2. \tag{24}$$

不等式 $D_{KL}\left(p(H|\theta) \,\|\, \mathring{p}(H|\theta)\right) \le 48\varepsilon^2 T$ 可由合并各行（19）、（20）、（21）、（24）得到。引理陈述中的第二个不等式可通过类似的论证得到，只需将 p 与 $\mathring{p}$ 的角色互换。

■

定理 6.1的证明如下结束。

定理 6.1 的证明。Meister 和 Nietert（2021）的定理 6 已经证明，存在通用常数 $\mathrm{c} > 0$，使得当 $\varepsilon \le 1/(\mathrm{n} + 1)$ 时，$\mathrm{T} \ge \mathrm{cn}\log(\mathrm{n})/\varepsilon^2$。这对我们的证明有两个推论。首先，为完成证明，我们只需考虑 $\varepsilon > 1/(\mathrm{n} + 1)$ 的情形；此时该定理断言下界为 $\mathrm{T} = \Omega(\log(\mathrm{n})/\varepsilon^3)$。其次，若定义 $\mathrm{n}' = \mathrm{j}\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{k} - 1$，则 $\varepsilon \le 1/(\mathrm{n}' + 1)$，因此 Meister 和 Nietert（2021）的定理 6 证明，对 $[\mathrm{n}']$ 上概率分布的累积分布函数估计问题至少需要

$$cn' \log(n')/\varepsilon^2 \ge c' \ln(1/\varepsilon)/\varepsilon^3 \tag{25}$$

个样本。（这里，$c' > 0$ 是另一个通用常数。）由于在 $[n]$ 上的累积分布函数估计可以推广到在 $[n']$ 上的累积分布函数估计，因此在 $[n]$ 上进行累积分布函数估计的样本复杂度也有如下界（右侧）：(25)：

$$T \ge c' \ln(1/\varepsilon)/\varepsilon^3. \tag{26}$$

回顾第 1 节，累积分布函数估计可以推广二分搜索，因此 T ≥ ⌊log(n)⌋ ≥ $\frac{1}{2}$log(n)。如果 $\varepsilon \geq$min{c′, 1/256} 那么 1 2 log(ꝛ) ≥ $\frac{1}{2}\cdot(\min\{c', 1/256\})^{-3}\cdot\log(n)/\varepsilon^3$，所以 T = Ω(log(n)/$\varepsilon^3$)，如所述。因此，在证明余下部分中，我们可以假设

$$\varepsilon < \min\left\{c', \frac{1}{256}\right\}. \tag{27}$$

设 F^{emp} 表示 T 个 $x_1, \ldots, x_T$的经验分布。在分布 p下，这些样本是从 D_θ中独立同分布抽样得到的，因此根据 Dvoketzky-Kiefer-Wolfowitz 不等式（Dvoretzky 等人，1956年）

$$p\left(\|F_{\text{emp}} - F_\theta\|_\infty \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq 2e^{-T\varepsilon^2/2}. \tag{28}$$

将 (26) 中 T 的下界代入，并将 (ε 27) 中的上界代入，可得

$$2e^{-T\varepsilon^2/2} \leq 2e^{-c'\ln(1/\varepsilon)/(2\varepsilon)} \leq 2e^{-\ln(1/\varepsilon)/2} \leq 2e^{-\ln(256)/2} = \frac{1}{8}. \tag{29}$$

若 ˆF 表示我们的算法生成的累积分布函数估计，则该算法的概率近似正确性保证断言：

$$p\left(\|\hat{F} - F_{\text{emp}}\|_\infty > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4}. \tag{30}$$

结合不等式（27）、（28）、（29），并利用联合界和三角不等式，可得

$$p\left(\|F_{\text{emp}} - F_\theta\|_\infty \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ or } \|\hat{F} - F_{\text{emp}}\|_\infty > \varepsilon\right) \leq \frac{3}{8}$$
$$p\left(\|F_{\text{emp}} - F_\theta\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \text{ and } \|\hat{F} - F_{\text{emp}}\|_\infty \leq \varepsilon\right) \geq \frac{5}{8}$$
$$p\left(\|\hat{F} - F_\theta\|_\infty < \frac{3\varepsilon}{2}\right) \geq \frac{5}{8}.$$

现在定义两个随机变量 ˆθ、 θ_{MLE} 如下：ˆθ 是使其对应的累积分布函数 $F_{\hat{\theta}}$ 在 L_∞ 中最接近 F^{emp} 的 θ 取值，而 θ_{MLE} 是使条件概率 p($\theta = \theta_{\text{MLE}}$ | H) 最大的 θ 取值。根据引理 A.1，我们知道，只要 ‖ ˆF − $F_\theta\|_\infty < \frac{3\varepsilon}{2}$，就有 $\theta = \hat{\theta}$，因此 p($\theta = \hat{\theta}$) ≥ $\frac{5}{8}$。根据θ_{MLE}的定义，有

$$p(\theta = \theta_{\text{MLE}}|H) \geq p(\theta = \hat{\theta}|H) \tag{31}$$

对所有 H，对两边的 (31) 关于 H 取期望，并使用迭代期望定律，推得

$$p(\theta = \theta_{\text{MLE}}) \geq p(\theta = \hat{\theta}) = \frac{5}{8}. \tag{32}$$

我们将良好历史定义为满足 p($\theta = \theta_{\text{MLE}}$|H) ≥ $\frac{1}{2}$ 的历史记录 H。我们有

$$\frac{5}{8} \leq p(\theta = \theta_{\text{MLE}}) \leq p(H \text{ is good}) \cdot 1 + p(H \text{ is not good}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p(H \text{ is good}), \tag{33}$$

因此 p(H 为良好历史) ≥ $\frac{1}{4}$。

当历史记录 H 良好时，这意味着 $p(\theta = \theta_{\text{MLE}}|H)$ ≥ $\frac{1}{2}$ 而 $q(\theta|H)$ 是 $[m]^k$ 上的均匀分布，因此 $q(\theta_i = (\theta_{\text{MLE}})_i|H) = \frac{1}{m}$ 对所有 $i \in [k]$均成立。引理 LemmaA.12 的条件均已满足，因此我们可以

得出不等式 $D_{KL}(p(\theta|H) \| q(\theta|H)) \geq_k 2 \ln\left(\frac{m}{4}\right)$ 以及 $D_{KL}(q(\theta|H) \| p(\theta|H)) \geq_k 2 \ln\left(\frac{k}{3}\right)$ 在 $\underline{H}$ 良好时成立。由于 H 良好的概率至少为 1 4，因此我们有

$$\mathbb{E}_H D_{KL}(p(\theta|H) \| q(\theta|H)) \geq \frac{k}{8} \ln\left(\frac{m}{4}\right) \tag{34}$$

$$\mathbb{E}_H D_{KL}(q(\theta|H) \| p(\theta|H)) \geq \frac{k}{8} \ln\left(\frac{k}{3}\right). \tag{35}$$

利用引理 A.13 以及方程（16）和（17，可得

$$48T\varepsilon^2 \geq \mathbb{E}_\theta D_{KL}(p(H|\theta) \| q(H|\theta)) = \mathbb{E}_H D_{KL}(p(\theta|H) \| q(\theta|H)) \geq \frac{k}{8} \ln\left(\frac{m}{4}\right) \tag{36}$$

$$48T\varepsilon^2 \geq \mathbb{E}_\theta D_{KL}(q(H|\theta) \| p(H|\theta)) = \mathbb{E}_H D_{KL}(q(\theta|H) \| p(\theta|H)) \geq \frac{k}{8} \ln\left(\frac{k}{3}\right). \tag{37}$$

将不等式（36）和（37）相加，得到

$$96T\varepsilon^2 \geq \frac{k}{8} \ln\left(\frac{km}{12}\right). \tag{38}$$

回想一下，$k = \frac{1}{6\varepsilon}$ 且 $km = n$，可得 $T > \frac{1}{4800\varepsilon^3} \ln\left(\frac{n}{12}\right)$，由此完成证明：$T = \Omega(\log(n)/\varepsilon^3)$。■

B 定理 5.1 的证明

证明。在证明中，我们将用 $\mathbb{E}_t[\cdots]$ 表示随机变量在给定前 $t-1$ 轮的历史记录以及对手对 v_t 的选择条件下的条件期望。对于 $\mathrm{Var}[\cdots]$，我们也采用类似的 $\hat{}$ 记号变更。注意，$\mathbb{E}_t[\hat{u}_t] = u_t$ 且 $\mathbb{E}_t[l_t] = l_t$。这是因为 $u_t(i)$ 以概率 $k \cdot u_t(i)$ 出现，否则为 0。对 l_t 的论证类似。因此，$\mathbb{E}_t[\hat{d}_t] = d_t$。直观地说，算法 2 之所以有效，是因为尽管我们没有观测到 d_t，仍然可以得到 d_t 的无偏估计。

权重 $w_{i,t}$ 以及系数 fi 数 $a_{i,t}$ 在算法 1 按照 Auer 等人（2002）提出的标准 EXP3 算法的更新方程演化。根据该算法的分析，

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{d}_t(i) \geq \max_{i \in [n]} \left\{ \sum_{t=1}^{T} \hat{d}_t(i) \right\} - \frac{\ln n}{\eta} - \eta \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} a_i \hat{d}_t^2(i). \tag{39}$$

取期望后，我们得到

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{n} a_i d_t(i) \geq \max_{i \in [n]} \left\{ \sum_{t=1}^{T} d_t(i) \right\} - \frac{\ln n}{\eta} - \eta \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} a_i \mathbb{E}[\hat{d}_t^2(i)]. \tag{40}$$

为界定右侧的最后一项，我们利用迭代期望定律：$\mathbb{E}[\hat{d}_t^2(i)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}_t[\hat{d}_t^2(i)]]$。现在，若 $i = q_{j,t}$ 对某个 j 成立，则 $\hat{u}_t(i) = \hat{l}_t(i)$，因此 $\hat{d}_t(i) = 0$。另一方面，若 $q_{j,t} < i < q_{j+1,t}$ ^ ^ ^，则 $d_t(i) = k \cdot u_t(i)$ 的概率为 1/k，$d_t(i) = -k \cdot l_t(i)$ 的概率为 1/k，否则 $d_t(i) = 0$。因此，

$$\mathbb{E}_t[\hat{d}_t^2(i)] = \frac{1}{k}\left(k^2 u_t^2(i) + k^2 \ell_t^2(i)\right) \leq \frac{1}{k}\left(k^2 + k^2\right) = 2k. \tag{41}$$

应用迭代期望定律，我们有 $\mathbb{E}[\hat{d}_t^2(i)] \le 2k$。这一点，加上 $\sum_{j=1}^n a_i \le 1$，使我们能够将方程简化为

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n} a_i d_t(i) \ge \max_{i\in[n]}\left\{\sum_{t=1}^{T} d_t(i)\right\} - \frac{\ln n}{\eta} - 2\eta T k \tag{42}$$

根据 命题 3.1 的证明，我们知道，对于所有 t，$\sum_{i=1}^n a_i d_t(i) \le \frac{1}{k+1}$。代入这个界

$$\frac{T}{k+1} \ge \max_{i\in[n]}\left\{\sum_{t=1}^{T} d_t(i)\right\} - \frac{\ln n}{\eta} - 2\eta k T \tag{43}$$

$$\frac{T}{k+1} + \frac{\ln n}{\eta} + 2\eta k T \ge \max_{i\in[n]}\left\{\sum_{t=1}^{T} d_t(i)\right\} \tag{44}$$

回想一下，当 $k = \frac{2}{\varepsilon}$, $\eta = \frac{\varepsilon^2}{16} = \frac{\varepsilon}{8k}$, $T \ge \frac{64\ln(n)}{\varepsilon^3}$ 时，我们得到 $\frac{T}{k+1} \le \frac{\varepsilon T}{2}$, $\frac{\ln n}{\eta} \le \frac{\varepsilon T}{4}$, $2\eta k T \le \frac{\varepsilon T}{4}$。因此

$$\frac{\varepsilon}{2}T + \frac{\varepsilon}{4}T + \frac{\varepsilon}{4}T \ge \max_{i\in[n]}\left\{\sum_{t=1}^{T} d_t(i)\right\}$$

$$\varepsilon \ge \max_{i\in[n]}\left\{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} d_t(i)\right\}.$$

最后一个不等式右侧等于区间 $\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} l_t(i),\ \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_t(i)\right]$ 的宽度。可以保证该区间包含 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} v_t(i)$，且其中点为 $G_T(i)$，因此我们可以确定 $\left|G_T(i) - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} v_t(i)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$。然而，由于算法只能观察到估计值 $\hat{u}_t$ 和 $\hat{l}_t$，它并不知道 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} l_t(i)$ 和 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_t(i)$ 的实际值。接下来，我们将依靠集中性结果证明，经过 $T \ge \frac{64\ln n}{\varepsilon^3}$ 后，以高概率，估计值 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \hat{l}_t(i)$ 和 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t(i)$ 将接近真实值 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} l_t(i)$ 和 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_t(i)$。由于估计值 $\hat{l}_t$ 和 $\hat{u}_t$ 的期望是正确的，并且 $\mathbb{E}[\hat{l}_t^2(i)] = k l_t^2(i)$（同样，$\mathbb{E}[\hat{u}_t^2(i)] = k u_t^2(i)$），我们有

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{\ell}_t(i)\right) = \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}\mathrm{Var}\left(\hat{\ell}_t(i)\right) = \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}(k-1)\ell_t^2(i) \le \frac{k}{T} \tag{45}$$

对每个 $i \in [n]$。利用 Freedman (1975证明的伯恩斯坦不等式的鞅变体，我们有

$$\mathrm{P}\left[\left|\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{\ell}_t(i) - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\ell_t(i)\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right] \le 2\exp\left(-\frac{T^2(\varepsilon/2)^2}{2(k-1)(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\ell_t(i)) + \frac{2}{3}kT(\varepsilon/2)}\right) \le 2\exp\left(-\frac{T(\varepsilon/2)^2}{3k}\right) \tag{46}$$

这小于 $1/4n$，因为 $T \ge \frac{64\ln n}{n\varepsilon^3}$。
按照对 $u_t(i)$ 的类似分析，我们得到 $\mathrm{P}\left[\left|\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{u}_t(i) - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}u_t(i)\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right]$ 小于 $1/4n$。因此，以高概率，区间 $\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{l}_t(i), \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{u}_t(i)\right]$ 包含 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} v_t(i)$，并且接近真实区间 $\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} l_t(i), \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_t(i)\right]$ 的中点。因此，以高概率，

$$\left|\hat{G}_T(i) - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} v_t(i)\right| \le \left|\hat{G}_T(i) - G_T(i)\right| + \left|G_T(i) - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} v_t(i)\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ as desired.} \tag{47}$$

■

C 阈值查询模型的基本算法

引理 C.1. 任何确定性算法都无法在查询预算少于 $\frac{1}{2\varepsilon} - 1$ 的情况下达到准确度 ε

证明。反设算法 $\mathcal{A}$在查询预算为 $k = \frac{1}{2\varepsilon} - 2$ 的情况下获得准确度 ε。设 $n \geq k + 1$。经过 T 个时间步后，存在一个点 p，在至少 T_{k+1} 个时间步内未被查询。若非如此，则所有点都已被查询 $n \cdot T_{k+1} \geq (k+1) \cdot T_{k+1} \geq kT$ 次（矛盾）。令 $G_T(p)$ 表示算法在时间 T 对该点的估计值，令 $F_T(p)$ 表示 p 被查询的时间步上的平均值。由于算法不知道在 T_{k+1} 个时间步内，函数在 p 处的值是 0 还是 1，因此

$$|G(p) - F_T(p)| > \frac{1}{2}\left|\left(F_T(p) + \frac{1}{k+1}\right) - \left(F_T(p) + \frac{0}{k+1}\right)\right| > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}\right) > \varepsilon \tag{48}$$

■

引理 C.2。对于单调阶跃函数，数对 $\left(k = (\frac{1}{\epsilon} + 1)\sqrt{n}, T_0 = \frac{1}{\epsilon}\right)$ 是可实现的。算法如下：每个时间步，算法始终查询点 $\{0, \lfloor\sqrt{n}\rfloor, 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, n\}$。算法维护这些点处阶跃函数的平均值 F。对于任意区间 $[m\sqrt{n}（m+1）\sqrt{n}]$，若满足 $F[(m+1)\sqrt{n}] - F[m\sqrt{n}] \geq \varrho$，算法就查询该区间内的每个点。

证明。注意到，从时间步 1 到 $\frac{1}{\epsilon}$，对于每个区间 $(m\sqrt{n}, (m+1)\sqrt{n})$，至多有 1 个时间步，我们不知道该区间内每个点的值。■

引理 C.3。对于任意单调函数，数对 $\left(k = (\frac{4}{\varrho} + 1)\sqrt{n}, T_0 = \frac{4}{\varrho}\right)$ 是稳健可实现的 [5]。算法如下：每个时间步，算法总是查询点 $\{0, \lfloor\sqrt{n}\rfloor, 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, n\}$。算法维护这些点处阶梯函数的平均值 $\hat{F}$。对于满足 $\hat{F}[(m+1)\sqrt{n}] - \hat{F}[m\sqrt{n}] \geq \varrho/4$ 的任一区间 $[m\sqrt{n}, (m+1)\sqrt{n}]$，算法会查询该区间内的每个点。

证明。我们通过对 T 进行归纳法来证明。我们将证明，在每个时间步 t 之后，$|\hat{F} - \frac{1}{t}P v_t|_\infty \leq \frac{1}{t} + \frac{3\epsilon}{4}$。假设该命题在第 t 个时间步之后成立。在时间步 $t+1$，算法会查询所有满足 $\hat{F}[(m+1)\sqrt{n}] - \hat{F}[m\sqrt{n}] \geq \varrho/4$ 的区间 $(m\sqrt{n}, (m+1)\sqrt{n})$。注意，根据归纳假设，没有任何区间的间隙大于 $\frac{1}{t+1} + \frac{3}{t}\epsilon$。因此，在第 $t+1$ 个时间步之后，对于跟踪区间中的任意点 p（即满足 $\hat{F}[(m+1)\sqrt{n}] - \hat{F}[m\sqrt{n}] \geq \varrho/4$ 的点），

$$\begin{aligned}\left|\hat{F}^{t+1}(p) - \frac{1}{t+1}\sum_{s=0}^{t+1} v_s(p)\right| &\leq \left|\frac{1}{t+1}\left(t \cdot \hat{F}^t(p) + y_p\right) - \frac{1}{t+1}\left(\sum_{s=0}^{t} v_s(p) + v_{t+1}(p)\right)\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{t+1}\left(t \cdot \hat{F}^t(p) - \sum_{s=0}^{t} v_s(p)\right) + \frac{1}{t+1}\left(y_p - v_{t+1}(p)\right)\right|\end{aligned}$$

根据归纳假设

$$< \left|\frac{t}{t+1}\left(\frac{1}{t} + \frac{3\epsilon}{4}\right)\right| + \left|\frac{1}{t+1}\left(y_p - v_{t+1}(p)\right)\right|$$

[5] 在原始模型中，我们假设算法观察到 y_p，其中 $|y_p - F_{t+1}(p)| \leq \varrho/4$，而不是直接接收 $F_{t+1}(p)$。这样做是为了简化模拟，但事实证明，最终算法并不需要这样做。

根据保证 $|y_p - v_{t+1}(p)| \le \varrho/4$

$$< \frac{1}{t+1} + \frac{t(3\epsilon/4)}{t+1} + \frac{\epsilon/4}{t+1}$$
$$< \frac{1}{t+1} + \frac{3\epsilon}{4}$$

对于未跟踪区间 $[p_1,p_2]$,，也就是说，对于满足 $\hat{F}[p_2] - \hat{F}[p_1] < \varrho/4$ 的区间，我们有，在第 $t+1$ 时间步之后，

$$\left|\hat{F}^{t+1}(p_2) - \hat{F}^{t+1}(p_1)\right| \le \left|\frac{1}{t+1}\left(t \cdot \hat{F}^t(p_2) + y_{p_2}\right) - \frac{1}{t+1}\left(t \cdot \hat{F}^t(p_1) + y_{p_1}\right)\right|$$
$$\le \left|\frac{t}{t+1}\left(\hat{F}^t(p_2) - \hat{F}^t(p_1)\right) + \frac{1}{t+1}\left(y_{p_2} - y_{p_1}\right)\right|$$

由于该区间未被跟踪

$$< \left|\frac{t}{t+1}(\epsilon/4) + \frac{1}{t+1}\right|$$
$$< \frac{1}{t+1} + \frac{\epsilon}{4}$$

由于点 p_1 和 p_2 从一开始就被跟踪，因此可知 $\left|\hat{F}^{t+1}(p_1) - \frac{1}{t+1}\sum_{s=0}^{t+1} v_s(p_1)\right| \le \varrho/4$，且 $\left|\hat{F}^{t+1}(p_2) - \frac{1}{t+1}\sum_{s=0}^{t+1} v_s(p_2)\right| \le \varrho/4$。这里的 $\varrho/4$ 来自噪声假设，即算法观测到 y，使得 $|y - v_t| \le \varrho/2$，但无法准确观测到 v_t。根据单调性，我们知道 $\frac{1}{t+1}\sum_{s=0}^{t+1} v_s(p_1) \le \frac{1}{t+1}\sum_{s=0}^{t+1} v_s(p) \le \frac{1}{t+1}\sum_{s=0}^{t+1} v_s(p_2)$。因此，对于未跟踪区间 $[p_1, p_2]$ 中的点 p，我们有

$$\left|\hat{F}^{t+1}(p) - \frac{1}{t+1}\sum_{s=0}^{t+1} v_s(p)\right| \le \left|\hat{F}^{t+1}(p_1) - \frac{1}{t+1}\sum_{s=0}^{t+1} v_s(p_1)\right| + \left|\hat{F}^{t+1}(p_2) - \hat{F}^{t+1}(p_1)\right|$$
$$+ \left|\hat{F}^{t+1}(p_2) - \frac{1}{t+1}\sum_{s=0}^{t+1} v_s(p_2)\right|$$
$$< \epsilon/4 + \epsilon/4 + \frac{1}{t+1} + \epsilon/4$$
$$< \frac{1}{t+1} + \frac{3\epsilon}{4}$$

因此，在经过 $T \ge \frac{4}{\epsilon}$ 后，可得 $|\hat{F} - \frac{1}{T}P v_T|_\infty \le \frac{1}{T} + \frac{3\epsilon}{4} \le \varrho$。

■

引理 C.4。对于单调阶跃函数，$\left(k = \log_{n\epsilon^2}, T_0 = \log_{n\epsilon}\right)$ 是可实现的。该算法的工作方式如下：在具有当前时间步不确定性的区间中点处插入一个新的查询点。也就是说，假设你的查询点为 $q_1, q_2, \ldots\ldots, q_k$。存在一个区间 (q_i, q_{i+1})，其中 $v_t[q_i] = 0$ 且 $v_t[q_{i+1}] = 1$。将新的查询点插入 $q = \lfloor (q_i + q_{i+1})/2 \rfloor$

证明。我们用关于 T 的归纳法证明这一点。我们将证明，在每个时间步 t 之后，对于任意点 p，若 p 位于相邻活动点之间，则 $|\hat{F}[p] - \frac{1}{t}P v_t[p]| \le \log_n - \log(p_2 - p_1)\, 2_t$。假设该命题在第 t 个时间步之后成立。在时间步 $t+1$，对手选择一个点 r，使其成为 v_{t+1} 的这一步。令

$[\mathrm{r}_1,\mathrm{r}_2]$ 为 r 所在区间的相邻活动点。由于算法将观察到 $\mathrm{v}_{t+1}[\mathrm{r}_1] = 0$ 和 $\mathrm{v}_{t+1}[\mathrm{r}_2] = 1$，对于该区间之外的任意点 p，可得

$$\begin{aligned}\left|\hat{F}^{t+1}(p) - \frac{1}{t+1}\sum_{s=0}^{t+1} v_s(p)\right| &\le \left|\frac{1}{t+1}\left(t\cdot\hat{F}^t(p) + v_{t+1}(p)\right) - \frac{1}{t+1}\left(\sum_{s=0}^{t} v_s(p) + v_{t+1}(p)\right)\right| \\ &\le \left|\frac{1}{t+1}\left(t\cdot\hat{F}^t(p) - \sum_{s=0}^{t} v_s(p)\right)\right|\end{aligned}$$

根据归纳假设

$$\le \frac{\log n - \log(p_2 - p_1)}{2(t+1)}$$

回想一下，该算法会在 r_1,r_2 的中点处插入一个新点 r_3。对于区间 $[\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2]$, 中的点 p

$$\begin{aligned}\left|\hat{F}^{t+1}(p) - \frac{1}{t+1}\sum_{s=0}^{t+1} v_s(p)\right| &\le \left|\frac{1}{t+1}\left(t\cdot\hat{F}^t(p) + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{t+1}\left(\sum_{s=0}^{t} v_s(p) + v_{t+1}(p)\right)\right| \\ &\le \left|\frac{1}{t+1}\left(t\cdot\hat{F}^t(p) - \sum_{s=0}^{t} v_s(p)\right) + \frac{1}{t+1}\left(\frac{1}{2} - v_{t+1}(p)\right)\right|\end{aligned}$$

根据归纳假设

$$\begin{aligned}&= \frac{\log n - \log(r_2 - r_1)}{2(t+1)} + \frac{1}{2(t+1)} \\ &= \frac{\log n - \log(r_2 - r_1) - \log 2}{2(t+1)} \\ &= \frac{\log n - \log(r_2 - r_3)}{2(t+1)}\end{aligned}$$

■