arXiv:2301.05692v1 [math.OA] 13 Jan 2023

强莱布尼茨性质与格罗莫夫–豪斯多夫邻近度

KONRAD AGUILAR、Stephan Ramon Garcia、Elena Kim 和
FRÉDÉRIC LATRÉMOLIÈRE

摘要。我们构造了对强莱布尼茨性质敏感的对偶格罗莫夫–豪斯多夫邻近度的新版本。特别地，这一新距离在强莱布尼茨量子紧致度量空间类上是完备的。接着，给定一个 C*-代数的归纳极限，其中归纳极限中的每个 C*-代数都配备了强 Leibniz L-半范数，我们给出在归纳极限上赋予强 Leibniz L-半范数的充分条件，使得该归纳序列在这一新的格罗莫夫–豪斯多夫邻近度下收敛到归纳极限。作为应用，我们利用 Frobenius–Rieffel 范数在 AF-代数上赋予新的强 Leibniz L-半范数；相对于其无理参数，Effros–Shen 代数在格罗莫夫–豪斯多夫邻近度下收敛。

1. 引言与背景

非交换几何中，利普希茨半范数的对应物是什么？这个问题之所以引人关注，是因为人们发现，紧致度量空间的度量所定义的利普希茨半范数，能够在其取值于 C 的连续函数所构成的 C*-代数层面编码底层度量。因此，恰当的非交换利普希茨半范数概念是非交换度量空间的核心要素。一个良好的非交换利普希茨半范数定义，应当足够灵活，能够涵盖许多有趣的例子，同时又足够有力，能够推动一套有趣理论的发展。就我们的目的而言，有趣的理论是这样一种收敛理论：它将紧度量空间之间的格罗莫夫–豪斯多夫距离 [9] 推广到非交换几何中。

日期：2023年1月16日。2000 数学主题分类。主要分类：46L89、46L30、58B34。关键词与短语。格罗莫夫–豪斯多夫近似距离、量子度量空间、Effros–Shen 代数。第一作者衷心感谢丹麦独立研究基金通过“经典与量子距离”项目（资助编号：9040-00107B）提供的经费支持。第二作者部分获得美国国家科学基金会的 DMS-1800123 和 DMS-2054002 项目资助。第三作者获得美国国家科学基金会研究生研究奖学金资助，资助编号为 1745302。

量子紧度量空间理论起源于 Connes 关于谱三元组的研究；谱三元组为黎曼流形提供了非交换推广 [5, 6]。随后，Rieffel 着手探讨如何定义不依赖于微分结构的非交换度量空间对应物 [25,26], ，并力求使其定义足够灵活，同时仍能据此定义这类空间之间的量子 Gromov–Hausdorff 距离 [27]。量子紧度量空间由序单位空间 $\mathfrak{A}$ 与半范数 L 构成的有序对 $(\mathfrak{A},\mathrm{L})$ 给出。该半范数在态空间 $\mathscr{S}(\mathfrak{A})$ 上诱导出度量，这一度量能够度量弱*拓扑，称为 Monge–Kantoroich 度量，记作 mk_{L}。度量 mk_{L} 推广了由通常的利普希茨半范数构造的 Monge–Kantorovich 距离 [11], ，以及由谱三元组构造的 Connes 距离 [5], 。

对 Rieffel 的量子 Gromov–Hausdorff 距离的研究引出了两个自然问题。其一涉及重合性质。若 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是两个含幺 C*-代数，使得 $(\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}),\mathrm{L}_{\mathfrak{A}})$ 和 $(\mathfrak{sa}(\mathfrak{B}),\mathrm{L}_{\mathfrak{B}})$ 均为 Rieffel 意义下的量子紧度量空间，且相对于 Rieffel 距离的距离为零，其中 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$ 是 $\mathfrak{A}$ 的自伴元所构成的序单位空间，那么 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是否 *-同构并不明确。为获得这一理想性质而尝试强化 Rieffel 的构造，通常会限制量子紧度量空间的概念，例如将其限于某一类算子系统 [12] 或 C*-代数 [17]。另一个问题是，能否将 Rieffel 的距离扩展到涵盖量子度量以外的更多结构。例如，在研究具有形式 $(\mathfrak{sa}(\mathfrak{A}),\mathrm{L})$ 的量子紧度量空间时，其中 $\mathfrak{A}$ 是一个含单位 C*-代数，我们关注底层 C*-代数上的模、群作用以及其他此类高阶结构的收敛。这两个问题彼此相关：它们都需要一种与 C*-代数相适配的格罗莫夫–豪斯多夫距离。例如，Rieffel 关于模收敛的研究 [28, 29, 31, 32, 34] 表明，量子紧度量空间底层 C*-代数的 L-半范数与其乘法结构之间建立联系是可取的。为此，Rieffel 引入了强莱布尼茨 L-半范数的概念。然而，量子 Gromov–Hausdorff 距离并不适用于处理这类半范数（参见 [31] 中关于邻近度的讨论）。

第四位作者提出了一种可能的答案，以回应如何为 C*-代数和 Leibniz 半范数构造非交换的格罗莫夫–豪斯多夫距离类比这一问题：他引入了邻近度 [14, 15, 17, 18]，定义在由 C*-代数和满足某种莱布尼茨不等式的 L-半范数构造的一类量子紧度量空间上。此外，对偶格罗莫夫–豪斯多夫邻近度 [15] 在莱布尼茨量子紧致度量空间这一类空间上是完备的。然而，强 *Leibniz* 性质尚未得到探讨。因此，在第 2 节中，我们在 强 *Leibniz* 量子紧度量空间这一类空间上引入一种对偶格罗莫夫–豪斯多夫邻近度，并证明它在此类空间上是完备的。在第 3 节中，我们运用这一结果，在某些 C*-代数的归纳极限上构造强 Leibniz L-半范数，使得归纳序列在格罗莫夫–豪斯多夫邻近度下收敛到其归纳极限。为此，我们假设归纳序列中的 C*-代数上存在满足自然假设的强 Leibniz L-半范数，做法与 [1] 中相同。此外，

我们依照 Rieffel 的建议，利用 Frobenius–Rieffel 范数 [2, 24]，在所有配备忠实迹态的含幺 AF 代数上找到了强 Leibniz L-半范数。这些新的半范数仍保留了 [3], 的收敛结果，包括参数为无理数的 Effros–Shen 代数的收敛。

我们先介绍量子紧度量空间的以下概念。

记号 1.1。我们用 $\|\cdot\|_E$ 表示赋范向量空间 E 的范数。

定义 1.2。对于 $(A、B) \in [1,\infty) \times [0,\infty)$，一个$(A、B)$-量子紧度量空间$(\mathfrak{A}、\mathrm{L})$ 由含单位 C*-代数 $\mathfrak{A}$ 及定义在其稠密约当–李子代数 $\mathrm{dom}(\mathrm{L})$ 上的半范数 L 组成，其中 $\mathrm{dom}(\mathrm{L})$ 是 $\mathfrak{sa}(\mathfrak{A})$ 的稠密子代数，并满足以下条件。

(1) $\{a \in \mathrm{dom(L)}: \mathrm{L(a)} = 0\} = \mathrm{R1}_{\mathfrak{A}}$。(2) 在态空间 $\mathscr{S}(\mathfrak{A})$ 上定义的蒙日–康托罗维奇距离 mkL：$\forall \varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathfrak{A})\ \mathrm{mkL}(\varphi, \psi) = \sup\{|\varphi(a) - \psi(a)|: a \in \mathrm{dom(L)}, \mathrm{L(a)} \leqslant 1\}$，可诱导 $\mathscr{S}(\mathfrak{A})$ 上的弱*拓扑。

(3) 对所有 $a、b \in$ 定义域(L),

$$\max\left\{\mathrm{L}\left(\frac{ab+ba}{2}\right), \mathrm{L}\left(\frac{ab-ba}{2i}\right)\right\} \leqslant A\left(\mathrm{L}(a)\|b\|_{\mathfrak{A}} + \|a\|_{\mathfrak{A}}\mathrm{L}(b)\right) + B\mathrm{L}(a)\mathrm{L}(b).$$

(4) $\{a \in$ 定义域(L)：$\mathrm{L}(a) \leqslant 1\}$ 在 $\mathfrak{A}$中是闭的。

当上下文清楚时，我们称 L 为一个(A,B)-L-半范数或一个 L-半范数。

为简化记号，我们采用以下约定。

约定 1.3. 对于某些(A,B)-拟 Leibniz 量子紧致度量空间，我们固定一个类，其中 $A \geqslant 1$ 且$B \geqslant 0$。所有量子紧度量空间均属于此类，无需另行说明。

量子紧度量空间的类可以构成一个范畴 [13] 的对象；就我们的目的而言，下文定义的量子等距将为我们提供一种恰当的态射概念。

定义 1.4。两个量子紧致度量空间 $(\mathfrak{A},\mathrm{L}_{\mathfrak{A}})$ 和 $(\mathfrak{B},\mathrm{L}_{\mathfrak{B}})$ 之间的量子等距 $\pi:(\mathfrak{A},\mathrm{L}_{\mathfrak{A}}) \to (\mathfrak{B},\mathrm{L}_{\mathfrak{B}})$ 是一个满 *-同态 $\pi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$，满足 $\pi($定义域$(\mathrm{L}_{\mathfrak{A}})) \subseteq$ 定义域$(\mathrm{L}_{\mathfrak{B}})$，并且

$$\forall b \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_{\mathfrak{B}}) \quad \mathsf{L}_{\mathfrak{B}}(b) = \inf\{\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}(a) : a \in \mathrm{dom}(\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}), \pi(a) = b\}.$$

一个全量子等距映射 $\pi:(\mathfrak{A},\mathrm{L}_{\mathfrak{A}}) \to (\mathfrak{B},\mathrm{L}_{\mathfrak{B}})$ 是满足以下条件的量子等距：π 是一个 *-同构，并且 π^{-1} 也是量子等距。

邻近度是量子紧致度量空间之间的一种度量（模全量子等距映射），定义如下。

定义 1.5。设 $(\mathfrak{A}_1, \mathrm{L}_1)$ 和 $(\mathfrak{A}_2, \mathrm{L}_2)$ 为量子紧致度量空间。从 $(\mathfrak{A}_1, \mathrm{L}_1)$ 到 $(\mathfrak{A}_2, \mathrm{L}_2)$ 的隧道 $\tau = (\mathfrak{D}, \mathrm{L}_{\mathfrak{D}}, \pi_1, \pi_2)$ 是一个量子紧致度量空间 $(\mathfrak{D}, \mathrm{L}_{\mathfrak{D}})$，以及量子等距映射 $\pi_j: (\mathfrak{D}, \mathrm{L}_{\mathfrak{D}}) \to (\mathfrak{A}_j, \mathrm{L}_j)$，其中 $\mathrm{j} = 1, 2$。

隧道 τ 的广度 $\chi(\tau)$ 定义为

$$\chi(\tau) = \max_{j\in\{1,2\}} \mathsf{Haus}_{\mathsf{mk}_{\mathrm{L}_{\mathfrak{D}}}}(\mathscr{S}(\mathfrak{D}), \{\varphi \circ \pi_j : \varphi \in \mathscr{S}(\mathfrak{A}_j)\}).$$

记号 1.6. 设$(\mathfrak{A}, \mathsf{L}_{\mathfrak{A}})$ 和$(\mathfrak{B}, \mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$ 是两个量子紧致度量空间。从$(\mathfrak{A}, \mathsf{L}_{\mathfrak{A}})$ 到$(\mathfrak{B}, \mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$ 的所有隧道类记作

$$\mathscr{T}unnels[(\mathfrak{A}, \mathsf{L}_{\mathfrak{A}}) \longrightarrow (\mathfrak{B}, \mathsf{L}_{\mathfrak{B}})].$$

我们强调，根据约定（1.3），如果

$$\tau = (\mathfrak{D}, \mathsf{L}_{\mathfrak{D}}, \ldots) \in \mathscr{T}unnels[(\mathfrak{A}, \mathsf{L}_{\mathfrak{A}}) \longrightarrow (\mathfrak{B}, \mathsf{L}_{\mathfrak{B}})]$$

那么$(\mathfrak{D},\mathsf{L}_{\mathfrak{D}})$ 是一个(A, B)-量子紧度量空间，其中A 和B 在邻近度的构造过程中始终固定。

定义1.7。 两个量子紧度量空间$(\mathfrak{A}, \mathsf{L}_{\mathfrak{A}})$和$(\mathfrak{B}, \mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$ 之间的邻近度 为：

$$\Lambda^*((\mathfrak{A}, \mathsf{L}_{\mathfrak{A}}), (\mathfrak{B}, \mathsf{L}_{\mathfrak{B}})) = \inf\left\{\chi(\tau) : \tau \in \mathscr{T}unnels[(\mathfrak{A}, \mathsf{L}_{\mathfrak{A}}) \longrightarrow (\mathfrak{B}, \mathsf{L}_{\mathfrak{B}})]\right\}.$$

通过利用莱布尼茨性质，格罗莫夫–豪斯多夫近似距离为非交换几何提供了格罗莫夫–豪斯多夫距离的类比[14, 15, 17, 18]，，即定义在量子紧致度量空间类上的完备度量，并且在等距同构的量子紧致度量空间之间距离为零。此外，它在紧度量空间类上诱导的拓扑与通常的格罗莫夫–豪斯多夫距离所诱导的拓扑相同（将紧致度量空间(X,d) 与量子紧度量空间$(C(X), \mathrm{L})$ 对应，其中 L 是通常的利普希茨半范数）。

定义 1.2已证明颇有助益，并为在量子紧度量空间上定义某些高阶结构的新度量奠定了基础 [19–21],包括谱三元组 [22]。

然而，Rieffel 关于量子紧度量空间上的模的收敛的研究要求强化莱布尼茨性质，此外还要求利普希茨范数在逆映射下具有良好的性质 [30]，，如下所示。

定义 1.8 ([32, 定义 2.1])。 若某个 $C \geqslant 1$ 满足以下条件，则量子紧度量空间 $(\mathfrak{A}$, L) 是C-强 *Leibniz*的：对所有 $a \in$ 定义域(L) $\cap$GL($\mathfrak{A}$)；

(1) $a^{-1} \in \mathrm{dom}(\mathsf{L})$, and
(2) $\mathsf{L}\left(a^{-1}\right) \leqslant C \left\|a^{-1}\right\|_{\mathfrak{A}}^2 \mathsf{L}(a)$.

当 L 满足这些条件时，我们称 L 为C-强 *Leibniz* 。

如上所见，即使在估算两个强莱布尼茨量子紧致度量空间之间的邻近度时，用于计算邻近度的隧道本身也不必采用强莱布尼茨量子紧致度量空间。不过，邻近度的定义具有一定的灵活性，因此可以限制其构造中涉及的量子紧致度量空间类别。因此，如果只想研究强莱布尼茨量子紧致度量空间，我们可以应用 [17] 的方法，得到一种“强莱布尼茨近邻度”，例如，它为 Rieffel 关于模的工作提供了一个自然框架。

记号 1.9。 设 $C \geqslant 1$，并设 $(\mathfrak{A}, \mathsf{L}_{\mathfrak{A}})$ 和 $(\mathfrak{B}, \mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$ 是两个 C-强莱布尼茨量子紧致度量空间。所有从 $(\mathfrak{A}, \mathsf{L}_{\mathfrak{A}})$ 到 $(\mathfrak{B}, \mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$，形式为 $(\mathfrak{D}, \mathsf{L}_{\mathfrak{D}}, \pi_{\mathfrak{A}}, \pi_{\mathfrak{B}})$的隧道，其中 $(\mathfrak{D}, \mathsf{L}_{\mathfrak{D}})$ 也是 C-强莱布尼茨量子紧致度量空间，其类别记为

$$\mathscr{T}\mathit{unnels}\left[(\mathfrak{A}, \mathsf{L}_{\mathfrak{A}}) \xrightarrow{SL_C} (\mathfrak{B}, \mathsf{L}_{\mathfrak{B}})\right].$$

定义 1.10。 在所有C-强莱布尼茨量子紧致度量空间组成的类 $\mathcal{SL}_C$ 上，C-强莱布尼茨推近度 $\Lambda^*_{SL_C}$ 定义如下：

$$\Lambda^*_{SL_C}((\mathfrak{A}_1, \mathsf{L}_1), (\mathfrak{A}_2, \mathsf{L}_2)) = \inf\left\{\chi(\tau) : \tau \in \mathscr{T}\mathit{unnels}\left[(\mathfrak{A}_1, \mathsf{L}_1) \xrightarrow{SL_C} (\mathfrak{A}_2, \mathsf{L}_2)\right]\right\}$$

对于 $\mathcal{SL}_C$ 中任意两个$(\mathfrak{A}_1, \mathsf{L}_1)$和$(\mathfrak{A}_2, \mathsf{L}_2)$。若$C = 1$，则将 $\Lambda^*_{SL_C}$ 记作 Λ^*_{SL}。

当然，对于 $\mathcal{SL}_C$ 中任意$(\mathfrak{A}, \mathsf{L}_{\mathfrak{A}})$和$(\mathfrak{B}, \mathsf{L}_{\mathfrak{B}})$，下列不等式成立：

$$\Lambda^*_{SL_C}((\mathfrak{A}, \mathsf{L}_{\mathfrak{A}}), (\mathfrak{B}, \mathsf{L}_{\mathfrak{B}})) \geqslant \Lambda^*((\mathfrak{A}, \mathsf{L}_{\mathfrak{A}}), (\mathfrak{B}, \mathsf{L}_{\mathfrak{B}})). \tag{1.1}$$

因此，显然，强莱布尼茨性质是一个对称函数，并且当且仅当两个量子紧致度量空间完全量子等距时，其值为零。本文将证明，强莱布尼茨近邻度确实是一个完备度量，其中等同于全量子等距的空间视为相同。

随后，我们将强莱布尼茨近邻度的完备性应用于强莱布尼茨量子紧致度量空间的归纳极限。如 [1], 所述，非交换度量几何中的一个自然问题，是如何将 C*-代数归纳序列极限这一重要的范畴论概念与近邻度的收敛概念联系起来。沿着这一方向的首项研究见 [3], : 该研究在具有忠实迹态的含幺 AF 代数上构造了一个(2,0)-莱布尼茨 Lip-范数。具体而言，从一个含幺 AF 代数 $\mathfrak{A}$ 出发，选取一个忠实迹t 以及由有限维 C*-子代数构成的序列$(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中这些子代数属于 $\mathfrak{A}$，且 $\mathfrak{A}$ 是$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n$ 的闭包。利用对每个$n \in$ N均存在唯一的保t满射条件期望 $\mathbb{E}_n : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_n$ 这一事实，我们定义 Lip-范数如下：

$$\forall a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{A}) \quad \mathsf{L}(a) = \sup\left\{\dim \mathfrak{A}_n \, \|a - \mathbb{E}_n(a)\|_{\mathfrak{A}} : n \in \mathbb{N}\right\},$$

允许取值 ∞。在 [3], 中，作者证明了

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^*((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}), (\mathfrak{A}, \mathsf{L})) = 0,$$

随后，他们建立了 Effros–Shen 代数类和 UHF 代数类的邻近度连续性结果，这些代数类自然地由贝尔空间参数化。

然而，在适当条件下，尝试在量子紧致度量空间（不一定是有限维）的归纳极限上构造 Lip-范数，是很自然的做法：不从极限上的 L-半范数入手，而是利用邻近度的完备性。示例请参见 [1] 。本文利用强莱布尼茨近邻度的完备性，在某些强莱布尼茨量子紧致度量空间的归纳极限上构造强 Leibniz L-半范数，并将这些结果应用于 AF 代数，从而在一些 AF 代数上得到新的量子度量。这些新量子度量的强莱布尼茨性质源自 Rieffel 关于由标准差构造的半范数的强莱布尼茨性质的研究 [33], ，我们将这类半范数称为

Frobenius–Rieffel 半范数，并在 [2] 中对其有限维情形进行了细致研究。我们按照 [3]，的思路，利用新的强 Leibniz L-半范数，得到了以贝尔空间为参数的 Effros–Shen 代数和 UHF 代数的连续性结果。

2. 强 Leibniz 格罗莫夫–豪斯多夫近邻度

对偶格罗莫夫–豪斯多夫邻近度 [14, 16, 18] 的定义方式灵活，因此在构造过程中可以限制隧道的选择，以便在特定类别的量子紧度量空间中开展研究。我们运用这种灵活性，将邻近度专门化为强莱布尼茨量子紧度量空间这一类别上的邻近度 [31]，，其定义已在定义 1.8中回顾。由于它支配邻近度，因此具有所需的重合性质，而且显然是对称的。我们首先证明它满足三角不等式。

引理 *2.1.* 设 $(\mathfrak{A}, L_{\mathfrak{A}})$、$(\mathfrak{B}, L_{\mathfrak{B}})$ 和 $(\mathfrak{D}, L_{\mathfrak{D}})$ 属于 $\mathcal{SL}_C$，并设 $\pi_{\mathfrak{A}} : (\mathfrak{A}, L_{\mathfrak{A}}) \twoheadrightarrow (\mathfrak{D}, L_{\mathfrak{D}})$ 和 $\pi_{\mathfrak{B}} : (\mathfrak{B}, L_{\mathfrak{B}}) \twoheadrightarrow (\mathfrak{D}, L_{\mathfrak{D}})$ 为量子等距。对于所有 $\varepsilon > 0$，若对所有 $(a, b) \in$ 定义域$(L_{\mathfrak{A}}) \oplus$ 定义域$(L_{\mathfrak{B}})$，令

$$\mathsf{T}(a,b) = \max\left\{ \mathsf{L}_{\mathfrak{A}}(a), \mathsf{L}_{\mathfrak{B}}(b), \frac{1}{\varepsilon} \|\pi_{\mathfrak{A}}(a) - \pi_{\mathfrak{B}}(b)\|_{\mathfrak{D}} \right\},$$

则 T 是 $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$上的 C-强 *Leibniz* L-半范数。

证明。 根据 [18, 定理 3.1], $(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}, \mathsf{T})$ 是一个量子紧度量空间。因此，只需证明 T 是 C-强 Leibniz。

设 $(a, b) \in$ 定义域$(\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}) \oplus$ 定义域$(\mathsf{L}_{\mathfrak{B}}) =$ 定义域(T)，且 $(a, b) \in \mathrm{GL}(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})$。于是 $a \in$ 定义域$(\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}) \cap \mathrm{GL}(\mathfrak{A})$，且 $b \in$ 定义域$(\mathsf{L}_{\mathfrak{B}}) \cap \mathrm{GL}(\mathfrak{B})$。由于 $\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}$ 和 $\mathsf{L}_{\mathfrak{B}}$ 是 C-强 Leibniz 的，我们得出 $(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1}) \in$ 定义域(T)，并且

$$\mathsf{L}_{\mathfrak{A}}(a^{-1}) \leqslant C \left\|a^{-1}\right\|_{\mathfrak{A}}^2 \mathsf{L}_{\mathfrak{A}}(a) \quad \text{and} \quad \mathsf{L}_{\mathfrak{B}}(b^{-1}) \leqslant C \left\|b^{-1}\right\|_{\mathfrak{B}}^2 \mathsf{L}_{\mathfrak{B}}(b).$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
\left\|\pi_{\mathfrak{A}}(a^{-1}) - \pi_{\mathfrak{B}}(b^{-1})\right\|_{\mathfrak{D}} &= \left\|\pi_{\mathfrak{A}}(a^{-1})(\pi_{\mathfrak{B}}(b) - \pi_{\mathfrak{A}}(a))\pi_{\mathfrak{B}}(b^{-1})\right\|_{\mathfrak{D}} \\
&\leqslant \left\|a^{-1}\right\|_{\mathfrak{A}} \|\pi_{\mathfrak{A}}(a) - \pi_{\mathfrak{B}}(b)\|_{\mathfrak{D}} \left\|b^{-1}\right\|_{\mathfrak{B}} \\
&\leqslant \left\|a^{-1}\right\|_{\mathfrak{A}} \left\|b^{-1}\right\|_{\mathfrak{B}} \varepsilon \mathsf{T}(a,b) \\
&\leqslant \varepsilon \left\|(a^{-1}, b^{-1})\right\|_{\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}}^2 \mathsf{T}(a,b).
\end{aligned}$$

因此，$\mathsf{T}(a^{-1},b^{-1}) \leqslant C \|(a^{-1}, b^{-1})\|_{\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}}^2 \mathsf{T}(a, b)$，如所需。 □

因此，正如我们在 [14,16,18],中所讨论的，可以得到以下引理。

引理 2.2。 对于所有 $C \geqslant 1$，C-强 *Leibniz* 推近度 $\Lambda^* SL_C$ 是 $\mathcal{SL}_C$上的度量。

我们的目的是证明C-强莱布尼茨近邻度也是完备的。由于根据方程（1.1），近邻度是完备的，因此我们已经可以从 [16]得知 $\left(\mathcal{SL}_C, \Lambda^{*SL_C}\right)$ 中任意柯西序列的极限描述。

还需要证明的是，度量 Λ^* 下SL_C 度量的柯西序列的极限确实是C-强莱布尼茨的；此外，我们还必须检查在当前设定下， [16] 中构造的隧道是否是C-强莱布尼茨的。

在本节中，我们固定$C \geqslant 1$，并假设给定一个$(\mathfrak{A}_n, \mathrm{L}n)_{n\in\mathbb{N}}$ 序列，其中的每个空间都是C-强莱布尼茨量子紧致度量空间，并且对每个$n \in \mathbb{N}$，都存在一个隧道$(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\mathfrak{D}_n, \mathrm{T}n, \pi_n, \rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$，从$(\mathfrak{A}_n, \mathrm{L}n)$到$(\mathfrak{A}_{n+1}, \mathrm{L}n{+}1)$，使得$\chi(\tau_n) \leqslant \frac{1}{2^n}$，且$\mathrm{T}n$是$C$-强莱布尼茨的。

沿用[16, 节 6], 的记号，我们定义

$$\mathfrak{S} = \left\{ (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{D}_n : \forall n \in \mathbb{N} \quad \rho_n(d_n) = \pi_{n+1}(d_{n+1}) \text{ and } \sup_{n\in\mathbb{N}} \|d_n\|_{\mathfrak{D}_n} < \infty \right\},$$

and

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{S} \Big/ \{(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{S} : \lim_{n\to\infty} d_n = 0\}.$$

设$q : \mathfrak{S} \twoheadrightarrow \mathfrak{F}$ 是典范满射，它是一个*-满同态。

我们记录下关于 $\mathfrak{F}$上商范数的以下众所周知的计算。

引理 2.3. 对于所有$a \in \mathfrak{F}$ 以及所有$(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{S}$，若$q((d_n)_{n\in\mathbb{N}}) = a$，则

$$\|a\|_{\mathfrak{F}} = \limsup_{n\to\infty} \|d_n\|_{\mathfrak{D}_n}.$$

证明。 注意到 $\|a\|_{\mathfrak{F}} \leqslant \|d\|_{\mathfrak{S}}$ 只要 $q(d) = a$。因此，若 $N \in \mathbb{N}$且 $d^N = (0, \ldots, 0, \underbrace{d_N, d_{N+1}}, \ldots)$，则 $q(d^N) = a$，于是N 次

$$\|a\|_{\mathfrak{F}} \leqslant \left\|d^N\right\|_{\mathfrak{S}} = \sup_{n\geqslant N} \|d_n\|_{\mathfrak{D}_n}.$$

因此， $\|a\|_{\mathfrak{F}} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \|d_n\|_{\mathfrak{D}_n}$。

现在，设 $\varepsilon > 0$。根据商 C*-代数 $\mathfrak{F}$ 上范数的定义，存在 $e = (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{S}$ 使得 $q(e) = a$ 且 $\|e\|_{\mathfrak{S}} - \varepsilon \leqslant \|a\|_{\mathfrak{F}} \leqslant \|e\|_{\mathfrak{S}}$。又有 $\lim_{n\to\infty} \|e_n - d_n\|_{\mathfrak{D}_n} = 0$。因此，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有$n \geqslant N$，均有 $\|e_n - d_n\|_{\mathfrak{D}_n} < \varepsilon$。

因此，

$$\limsup_{n\to\infty} \|d_n\|_{\mathfrak{D}_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \|e_n\|_{\mathfrak{D}_n} + \varepsilon \leqslant \|e\|_{\mathfrak{S}} + \varepsilon \leqslant \|a\|_{\mathfrak{F}} + 2\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，我们得出结论：

$$\limsup_{n\to\infty} \|d_n\|_{\mathfrak{D}_n} \leqslant \|a\|_{\mathfrak{F}}. \qquad \square$$

对于任意 $d = (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{S})$，令

$$\mathsf{S}(d) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{T}_n(d_n),$$

允许取值 ∞。对于所有 $a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{F})$，我们定义

$$\mathsf{Q}(a) = \inf\{\mathsf{S}(d) : q(d) = a\},$$

再次允许 ∞。根据 [16],, 半范数 Q 是 $\mathfrak{F}$上的 Leibniz L-半范数。 [16] 中确立的关键事实是，$(\mathfrak{A}_n, \mathrm{L}n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在邻近度下收敛到 $(\mathfrak{F}, \mathsf{Q})$。现在我们证明，在我们的条件下，Q 也是$C$-强 Leibniz。

引理 2.4。 *L*-半范数 Q 是 *C*-强 *Leibniz*。

证明。 令 $a \in$ 定义域(Q) $\cap \mathrm{GL}(\mathfrak{F})$ 且 $\varepsilon > 0$。存在 $d = (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \in$ 定义域(S)，使得 $q(d) = a$，且 $\mathsf{S}(d) - \varepsilon \leqslant \mathsf{Q}(a) \leqslant \mathsf{S}(d)$。

令 $e = (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{S})$ 使得 $q(e) = a^{-1}$。根据定义，由于 $q(ed) = q(de) = 1_{\mathfrak{F}}$，我们得出

$$\lim_{n\to\infty} \|d_n e_n - 1_n\|_{\mathfrak{D}_n} = 0,$$

因此，存在 $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$，使得对所有 $\mathrm{n} \geqslant \mathrm{N}$，$\|\mathrm{d}_n \mathrm{e}_n - 1_n\|_{\mathfrak{D}_n} < 1$。因此，对所有 $\mathrm{n} \geqslant \mathrm{N}$，$\mathrm{d}_n$ e_n 在 $\mathfrak{D}_n$ 中可逆。于是，若 $\mathrm{n} \geqslant \mathrm{N}$，则 $\mathrm{d}_n(\mathrm{e}_n(\mathrm{d}_n\mathrm{e}_n)^{-1}) = 1_n$。由于 d 和 e 都是自伴的，$\|\mathrm{e}_n$ $\mathrm{d}_n - 1_n\|_{\mathfrak{D}_n} < 1$，因此当 $\mathrm{n} \geqslant \mathrm{N}$ 时，$\mathrm{e}_n\mathrm{d}_n \in$ 属于 $\mathrm{GL}(\mathfrak{D}_n)$；此外，$((\mathrm{e}_n\mathrm{d}_n)^{-1}\mathrm{e}_n)\mathrm{d}_n = 1_n$。因此，对所有 $\mathrm{n} \geqslant \mathrm{N}$，$\mathrm{d}_n \in$ 属于 $\mathrm{GL}(\mathfrak{D}_n)$。

现在定义 $h = (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{S}$，令其对所有 $n \in \mathrm{N}$ 满足：

$$h_n = \begin{cases} 1_n \text{ if } n < N, \\ d_n \text{ if } n \geqslant N. \end{cases}$$

根据构造，$h \in$ 属于 $\mathrm{GL}(\mathfrak{S})$，且 $q(h) = a$。此外，$q(h^{-1}) = a^{-1}$ 并且

$$h^{-1} = \left(1_0, \ldots, 1_{N-1}, d_N^{-1}, d_{N+1}^{-1}, \ldots\right).$$

由于 T_n 是C-强莱布尼茨的，对所有$n \in \mathrm{N}$，$h^{-1}{}_n \in$ 属于定义域(T_n)，并且

$$\mathsf{T}_n(h_n^{-1}) \leqslant C \left\|h_n^{-1}\right\|_{\mathfrak{D}_n}^2 \mathsf{T}_n(h_n).$$

此外，$\mathsf{S}(h) \leqslant \mathsf{S}(d)$（因为 $\mathsf{T}_n(1_n) = 0$），所以 $\mathsf{S}(h) \leqslant \mathsf{Q}(a) + \varepsilon$。根据引理（2.3），$\left\|a^{-1}\right\|_{\mathfrak{F}} = \limsup_{n\to\infty} \|h^{-1}{}_n \|_{\mathfrak{D}_n}$。因此，存在$N' \in \mathrm{N}$，使得若$n \geqslant N'$，则

$$\sup_{n\geqslant N'} \left\|d_n^{-1}\right\|_{\mathfrak{D}_n} - \varepsilon \leqslant \left\|a^{-1}\right\|_{\mathfrak{F}} \leqslant \sup_{n\geqslant N'} \left\|d_n^{-1}\right\|_{\mathfrak{D}_n}.$$

令$N'' = \max\{N, N'\}$，并定义$g \in \mathfrak{S}$ 为$g = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n = \begin{cases} 1_n \text{ if } n < N'', \\ d_n \text{ if } n \geqslant N''. \end{cases}$$

再次注意，$q(g) = a$ 以及 $\mathsf{S}(g) \leqslant \mathsf{S}(h) \leqslant \mathsf{Q}(a) + \varepsilon$。此外，$g \in \mathrm{GL}(\mathfrak{S})$，其中$q(g^{-1}) = a^{-1}$。

因此，

$$\begin{aligned}
\mathsf{Q}(a^{-1}) &\leqslant \mathsf{S}(g^{-1}) \\
&\leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{T}_n(g_n^{-1}) \\
&\leqslant \sup_{n\geqslant N''} \mathsf{T}_n(d_n^{-1}) \\
&\leqslant C \sup_{n\geqslant N''} \left\|d_n^{-1}\right\|_{\mathfrak{D}_n}^2 \sup_{n\geqslant N''} \mathsf{T}_n(d_n) \\
&\leqslant C \left(\left\|a^{-1}\right\|_{\mathfrak{F}} + \varepsilon\right)^2 \mathsf{S}(g) \\
&\leqslant C \left(\left\|a^{-1}\right\|_{\mathfrak{F}} + \varepsilon\right)^2 (\mathsf{Q}(a) + \varepsilon).
\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，

$$\mathsf{Q}(a^{-1}) \leqslant C \left\|a^{-1}\right\|_{\mathfrak{F}}^2 \mathsf{Q}(a).$$

因此，Q 是强莱布尼茨的。 □

现在我们推导出以下定理。

定理 2.5. 设 $C \geqslant 1$。$\mathcal{SL}_C$ 上的 *C*-强 *Leibniz* 推近度是完备的。

证明. 我们沿用上文引入的记号。我们已知($\mathfrak{F}$,Q) 是一个*C*-强 Leibniz 量子紧度量空间。

对每个$N \in \mathbb{N}$，令

$$\mathfrak{S}_N = \left\{(d_n)_{n\geqslant N} \in \prod_{n\geqslant N} \mathfrak{D}_n : \forall n \geqslant N \quad \rho_n(d_n) = \pi_{n+1}(d_{n+1}), \sup_{n\geqslant N} \|d_n\|_{\mathfrak{D}_n} < \infty\right\}.$$

我们还令 $\Pi_N((d_n)_{n\geqslant N}) = \pi_N(d_N) \in \mathfrak{A}_N$ 对所有$(d_n)_{n\geqslant N} \in \mathfrak{S}_N$均成立。C*-代数 $\mathfrak{F}$自然地 *-同构于

$$\mathfrak{S}_N \Big/ \{(d_n)_{n\geqslant N} \in \mathfrak{S}_N : \lim_{n\to\infty} d_n = 0\};$$

我们令 $q_N\colon \mathfrak{S}_N \twoheadrightarrow \mathfrak{F}$ 为相应的典范满射。

我们还令 $\mathsf{S}_N : (d_n)_{n\geqslant N} \mapsto \sup^{n\geqslant N}\mathsf{T}_n(d_n)$ （允许取值 ∞）。根据 [16],($\mathfrak{S}_N$, S_N) 是一个量子紧度量空间。

在 [16], 第四位作者证明了

$$\forall a \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{F}) \quad \mathsf{Q}(a) = \inf\{\mathsf{S}_N(d) : d \in \mathfrak{sa}(\mathfrak{S}_N), q_N(d) = a\}$$

并且 Π_N是到($\mathfrak{A}_N$, L_N)的量子等距。换言之，($\mathfrak{S}_N$, S_N, Π_N, q_N) 是从($\mathfrak{A}_N$, L_N) 到($\mathfrak{F}$, Q) 的一个隧道，其广度至多为 $\frac{1}{2^N}$。

只需证明 S_N 是*C*-强莱布尼茨的。这由定义立即可得：如果$d = (d_n)_{n\geqslant N} \in \mathrm{GL}(\mathfrak{S}_N) \cap$ 定义域(S_N)，那么

$$\mathsf{T}_n(d_n^{-1}) \leqslant C \left\|d_n^{-1}\right\|_{\mathfrak{D}_n}^2 \mathsf{T}_n(d_n)$$

对于所有$n \geqslant N$均成立，因此

$$\mathsf{S}_N(d^{-1}) \leqslant C \left\|d^{-1}\right\|_{\mathfrak{S}_N}^2 \mathsf{S}_N(d).$$

我们的证明至此完成。 □

3. 强莱布尼茨量子紧致度量空间的归纳极限

在 [1, 节 2], 中，第一作者在归纳极限上构造了量子紧致度量空间，使得给定的归纳序列在邻近度意义下收敛到该归纳极限。本节利用上一节的结果，将这些结论专门应用于强莱布尼茨量子紧致度量空间。作为本节及本文的一项主要应用，我们在 AF-代数上找到了强 Leibniz L-半范数，使得能够对强莱布尼茨近邻度进行明确估计，并使 Effros–Shen 代数也属于强莱布尼茨紧量子度量空间这一类。

定理 3.1. 固定 $C \geqslant 1$。令 $\mathfrak{A} = \overline{\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathfrak{A}_n}^{\|\cdot\|_{\mathfrak{A}}}$ 为一个含单位C^*-代数，使得$(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的含幺 C^*-代数的非递减序列。假设对所有 $n \in \mathbb{N}$，$(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$都是 C-强 *Leibniz* 量子紧度量空间。令 $(\beta(j))_{j\in\mathbb{N}}$ 为 $(0,\infty)$中的可求和序列。

对于所有 $n \in \mathbb{N}$

(1) 对于所有 $a \in \mathfrak{A}_n$，$\mathsf{L}_{n+1}(a) \leqslant \mathsf{L}_n(a)$ ；并且 *(2)* 对于所有 $a \in \mathfrak{A}_{n+1}$，$\mathsf{L}_{n+1}(a) \leqslant 1$，存在 $b \in \mathfrak{A}_n$，$\mathsf{L}_n(b) \leqslant 1$ 使得

$$\|a - b\|_{\mathfrak{A}} < \beta(n),$$

那么，在 $\mathfrak{A}$ 上存在一个 C-强 *Leibniz* 半范数L，使得$(\mathfrak{A},\mathsf{L})$ 是一个量子紧度量空间，其中

$$\Lambda^*_{SL_C}((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n), (\mathfrak{A}, \mathsf{L})) \leqslant 4 \sum_{j=n}^{\infty} \beta(j)$$

对于所有 $n \in \mathbb{N}$，因此

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^*_{SL_C}((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}_n), (\mathfrak{A}, \mathsf{L})) = 0.$$

证明。 由于定理 [1, Theorem 2.15]中的隧道是 C-强 Leibniz 的，根据引理 2.1，该结果立即由 [1, Theorem 2.15]和引理 2.4得到。 □

我们将注意力转向 AF情形。

定义 3.2（[4, 定义 1.5.9 和富山定理 1.5.10]）。设 $\mathfrak{A}$ 为含单位C*-代数，且 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ 为含单位C*-子代数。线性映射 $\mathrm{E}: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 是条件期望，当且仅当对所有 $\mathrm{b} \in \mathfrak{B}$，$\mathrm{E(b)} = \mathrm{b}$；对所有 $\mathrm{a} \in \mathfrak{A}$，$\mathrm{E(a)}\|_{\mathfrak{A}} \leqslant \|\mathrm{a}\|_{\mathfrak{A}}$ ；并且对所有 $\mathrm{a} \in \mathfrak{A}$、$\mathrm{b},\mathrm{b}' \in \mathfrak{B}$，$\mathrm{E(bab')} = \mathrm{bE(a)b'}$。

条件期望是忠实的，如果$E(a^*a) = 0$ 则$a = 0$。

定理—定义 3.3 ([33, 第 5] [24]和)。 设 $\mathfrak{A}$ 是含单位C^*-代数， $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ 是含单位C^*-子代数。若 $E\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 是忠实条件期望，则

$$\|a\|_E = \sqrt{\|E(a^*a)\|_{\mathfrak{A}}}$$

在 $\mathfrak{A}$ 上定义一个范数，称为与E.相关的Frobenius–Rieffel 范数。

由 C*-恒等式可立即推出 $\|\cdot\|_E \leqslant \|\cdot\|_{\mathfrak{A}}$。现在，我们为所有配备忠实迹态的含幺 AF-代数赋予强 Leibniz L-半范数，从而能够利用有限维 C*-子代数进行显式逼近。以下构造源自第一作者与最后一位作者在 [3], 中的工作；当时他们使用的是 C*-范数，而非 Frobenius–Rieffel 范数。然而， [3] 的 L-半范数目前仅知为拟 Leibniz，满足 $A = 2$ 和 $B = 0$；对于任何 $C \geqslant 1$，我们都不知道它们是否为强 Leibniz。尽管如此，由于 Rieffel 提出的建议（他于 2016 年秋季在丹佛大学举行的 AMS 西部分会期间向第一作者提出），即用他在 [33], 中的范数替换 C*-范数，我们现在得到了以下强 Leibniz L-半范数，同时仍保有 [3] 中所需的收敛结果。

定理 3.4。 设 $\mathfrak{A} = \overline{\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathfrak{A}_n}^{\|\cdot\|_{\mathfrak{A}}}$ 为一个带单位 AF 代数，配备忠实迹态 τ，使得 $\mathfrak{A}_0 = \mathbb{C}1_{\mathfrak{A}}$。令 $\mathcal{U} = (\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$，并设 $(\beta(n))_{n\in\mathbb{N}}$ 为正实数的可求和序列。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令

$$E_n^\tau : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_n$$

为唯一的保持 τ 不变的忠实条件期望。对于 $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$，令 $\kappa_n > 0$使得

$$\kappa_n\|a\|_{\mathfrak{A}} \leqslant \|a\|_{E_n^\tau}$$

对所有 $a \in \mathfrak{A}_{n+1}$均成立，并令 $\kappa = (\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}$。对于每个 $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$，令

$$\mathsf{L}^{\tau,\kappa}_{\mathcal{U}_n,\beta}(a) = \max_{m\in\{0,1,\ldots,n-1\}} \frac{\max\left\{\|a - E_m^\tau(a)\|_{E_m^\tau}, \|a^* - E_m^\tau(a^*)\|_{E_m^\tau}\right\}}{\kappa_m\beta(m)}$$

对所有 $a \in \mathfrak{A}_n$均成立，并令 $\mathsf{L}^{\tau,\kappa}_{\mathcal{U}_0,\beta} = 0$。

则对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}^{\tau,\kappa}_{\mathcal{U}_n,\beta})$ 是一个强莱布尼茨量子紧度量空间（带有 $(A,B,C) = (1,0,1)$），并且存在一个半范数 $\mathsf{L}^{\tau,\kappa}_{\mathcal{U},\beta}$，使得 $(\mathfrak{A}, \mathsf{L}^{\tau,\kappa}_{\mathcal{U},\beta})$ 是一个强莱布尼茨量子紧度量空间（带有 $(A,B,C) = (1,0,1)$），其中

$$\Lambda^*_{SL}((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}^{\tau,\kappa}_{\mathcal{U}_n,\beta}), (\mathfrak{A}, \mathsf{L}^{\tau,\kappa}_{\mathcal{U},\beta})) \leqslant 4\sum_{j=n}^{\infty}\beta(j)$$

对所有的 $n \in \mathbb{N}$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\Lambda^*_{SL}((\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}^{\tau,\kappa}_{\mathcal{U}_n,\beta}), (\mathfrak{A}, \mathsf{L}^{\tau,\kappa}_{\mathcal{U},\beta})) = 0.$$

证明。 令$n \in \mathrm{N}$。根据构造，对于$a \in \mathfrak{A}_n$， $\mathsf{L}^{\tau,\kappa}_{\mathcal{U}_n}$， $,_\beta(a) = 0$ 当且仅当$a = \mu 1_{\mathfrak{A}_n}$对于某个 $\mu \in \mathrm{C}$成立。因此，由于 $\mathfrak{A}_n$ 是有限维的， $\mathsf{L}^{\tau,\kappa}_{\mathcal{U}_n}$， $,_\beta$ 是$\mathfrak{A}_n$上的L-半范数。此外，$(\mathfrak{A}_n, \mathsf{L}^{\tau,\kappa}_{\mathcal{U}_n}, ,_\beta)$ 是一个强莱布尼茨紧量子度量空间（其中$A = 1$、$B = 0$、$C = 1$），由 [33, 命题5.4和定理5.5]可知。

根据构造，对于所有$n \in \mathbb{N}$和$a \in \mathfrak{A}$，我们有

$$\mathsf{L}^{\tau,\kappa}_{\mathcal{U}_{n+1},\beta}(a) = \mathsf{L}^{\tau,\kappa}_{\mathcal{U}_n,\beta}(a).$$

因此，定理 3.1 的 (1) 满足。

对于 (2)，令 $a \in \mathfrak{A}_{n+1}$ 使得 $\mathrm{L}^{\tau\,\kappa}_{\mathcal{U}_{n+1}},_{,\beta}(a) \leqslant 1$。考虑 $E^\tau_n(a) \in \mathfrak{A}_n$。我们有 $\|a - E^\tau_n(a)\|_{E_n} \leqslant \kappa_n\beta(n)$。因此，

$$\kappa_n\|a - E^\tau_n(a)\|_{\mathfrak{A}} \leqslant \|a - E^\tau_n(a)\|_{E_n} \leqslant \kappa_n\beta(n),$$

所以 $\|a - E^\tau_n(a)\|_{\mathfrak{A}} \leqslant \beta(n)$。注意，若 $n = 0$，则 $\mathrm{L}^{\tau\,\kappa}_{\mathcal{U}_n},_{,\beta}(E^\tau_n(a)) = 0 \leqslant 1$，结论即得。因此，在证明的其余部分中，假设 $n \geqslant 1$。

我们证明 $\mathrm{L}^{\tau\,\kappa}_{\mathcal{U}_n},_{,\beta}(E^\tau_n(a)) \leqslant 1$。注意，

$$\begin{aligned}
&\mathsf{L}^{\tau,\kappa}_{\mathcal{U}_n,\beta}(E^\tau_n(a)) \\
&\quad = \max_{m\in\{0,1,\ldots,n-1\}} \frac{\max\left\{\|E^\tau_n(a) - E^\tau_m(E^\tau_n(a))\|_{E^\tau_m}, \|E^\tau_n(a^*) - E^\tau_m(E^\tau_n(a^*))\|_{E^\tau_m}\right\}}{\kappa_m\beta(m)}.
\end{aligned}$$

令$m \in \{0, 1, \ldots, n\}$。现在，根据 [3, 定理 3 的证明，$E^\tau_m \circ E^\tau_n = E^\tau_m$。 [4, 定理 1.5.10（富山）], 表明$E_m$是正的，并且$E_m(\mathfrak{A}) \subseteq E_n(\mathfrak{A})$。因此，

$$\begin{aligned}
&E^\tau_m([E^\tau_n(a) - E^\tau_m(E^\tau_n(a))]^*[E^\tau_n(a) - E^\tau_m(E^\tau_n(a))]) \\
&\quad = E^\tau_m([E^\tau_n(a^*) - E^\tau_m(E^\tau_n(a^*))][E^\tau_n(a) - E^\tau_m(E^\tau_n(a))]) \\
&\quad = E^\tau_m(E^\tau_n(a^*)E^\tau_n(a) - E^\tau_n(a^*)E^\tau_m(E^\tau_n(a)) - E^\tau_m(E^\tau_n(a^*))E^\tau_n(a) \\
&\qquad + E^\tau_m(E^\tau_n(a^*))E^\tau_m(E^\tau_n(a))) \\
&\quad = E^\tau_m(E^\tau_n(a^*)E^\tau_n(a)) - E^\tau_m(E^\tau_n(a^*)E^\tau_m(E^\tau_n(a))) - E^\tau_m(E^\tau_m(E^\tau_n(a^*))E^\tau_n(a)) \\
&\qquad + E^\tau_m(E^\tau_m(E^\tau_n(a^*))E^\tau_m(E^\tau_n(a))) \\
&\quad = E^\tau_m(E^\tau_n(a^*)E^\tau_n(a)) - E^\tau_m(E^\tau_n(a^*))E^\tau_m(E^\tau_n(a)) - E^\tau_m(E^\tau_n(a^*))E^\tau_m(E^\tau_n(a)) \\
&\qquad + E^\tau_m(E^\tau_m(E^\tau_n(a^*))E^\tau_m(E^\tau_n(a))) \\
&\quad = E^\tau_m(E^\tau_n(a^*)E^\tau_n(a)) - E^\tau_m(a^*)E^\tau_m(a) - E^\tau_m(a^*)E^\tau_m(a) \\
&\qquad + E^\tau_m(E^\tau_m(E^\tau_n(a^*))E^\tau_m(E^\tau_n(a))) \\
&\quad = E^\tau_m(E^\tau_n(a^*)E^\tau_n(a)) - 2E^\tau_m(a^*)E^\tau_m(a) + E^\tau_m(E^\tau_m(E^\tau_n(a^*))E^\tau_m(E^\tau_n(a))) \\
&\quad = E^\tau_m(E^\tau_n(a^*)E^\tau_n(a)) - 2E^\tau_m(a^*)E^\tau_m(a) + E^\tau_m(a^*)E^\tau_m(a).
\end{aligned}$$

类似地，

$$\begin{aligned}
&E^\tau_m((a - E^\tau_m(a))^*(a - E^\tau_m(a))) \\
&\quad = E^\tau_m(a^*a) - 2E^\tau_m(a^*)E^\tau_m(a) + E^\tau_m(a^*)E^\tau_m(a) \\
&\quad = E^\tau_m(E^\tau_n(a^*a)) - 2E^\tau_m(a^*)E^\tau_m(a) + E^\tau_m(a^*)E^\tau_m(a).
\end{aligned}$$

由 [4, 命题 1.5.7], , $E^\tau_n(a^*a) - E^\tau_n(a^*)E^\tau_n(a) \geqslant 0$，因此

$$E^\tau_m(E^\tau_n(a^*a)) - E^\tau_m(E^\tau_n(a^*)E^\tau_n(a)) \geqslant 0$$

因为E^τ_m是一个条件期望。因此，

$$\begin{aligned}
&E^\tau_m([E^\tau_n(a) - E^\tau_m(E^\tau_n(a))]^*[E^\tau_n(a) - E^\tau_m(E^\tau_n(a))]) \\
&\qquad \leqslant E^\tau_m((a - E^\tau_m(a))^*(a - E^\tau_m(a))).
\end{aligned}$$

由于$E_m^\tau([E_n^\tau(a)-E_m^\tau(E_n^\tau(a))]^*[E_n^\tau(a)-E_m^\tau(E_n^\tau(a))])\geqslant 0$，我们得到

$$\begin{aligned}\|E_n^\tau(a)-E_m^\tau(E_n^\tau(a))\|_{E_m^\tau}^2&=\|E_m^\tau([E_n^\tau(a)-E_m^\tau(E_n^\tau(a))]^*[E_n^\tau(a)-E_m^\tau(E_n^\tau(a))])\|_{\mathfrak{A}}\\&\leqslant\|E_m^\tau((a-E_m^\tau(a))^*(a-E_m^\tau(a)))\|_{\mathfrak{A}}\\&=\|a-E_m^\tau(a)\|_{E_m^\tau}^2.\end{aligned}$$

因此，用a^*替换a，重复这一过程，我们便得到

$$\mathsf{L}^{\tau,\kappa}_{\mathcal{U}_n,\beta}(E_n^\tau(a))\leqslant\mathsf{L}^{\tau,\kappa}_{\mathcal{U}_{n+1},\beta}(a)\leqslant 1.$$

由定理3.1可完成证明。 □

在 [2], 矩阵代数直和上， κ_n 已显式求得一些等价常数。接下来的结果保证, 以这种方式得到的等价常数可以传递到归纳极限。

命题 3.5。设$(\mathfrak{A}_n,\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$是一个 *C*-*代数的归纳序列（参见 *[23,* 第 *6.1]*节），满足:

(1) $\mathfrak{A}_0=\mathbb{C}$ 和 $\mathfrak{A}_n=\bigoplus_{n=1}^{n}\mathfrak{M}_{d_n k_k}(\mathbb{C})$ 对所有 $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$均成立，其中 $d_{n,k}\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$对每个 $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ 和 $k\in\{1,2,\ldots,n_n\}$均成立；*(2)* $\alpha_n:\mathfrak{A}_n\to\mathfrak{A}_{n+1}$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$均为含幺 *-单同态；*(3)* 归纳极限 $\mathfrak{A}=\lim\longrightarrow(\mathfrak{A}_n,\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 配备了忠实的迹态τ。

对每个 $n\in\mathbb{N}$，令 $\alpha_{(n+1)},\alpha_{(n)}:\mathfrak{A}_n\to\mathfrak{A}$ 为满足下列条件的典范含幺 *-单同态

$$\alpha^{(n+1)}\circ\alpha_n=\alpha^{(n)}. \tag{3.1}$$

注意， $\mathfrak{A}=\cup_{n\in\mathbb{N}}\alpha_{(n)}(\mathfrak{A}_n)\|\cdot\|_{\mathfrak{A}}$ 和 $\alpha_{(n)}(\mathfrak{A}_n)\subseteq\alpha_{(n+1)}(\mathfrak{A}_{n+1})$ 以及 $\alpha_{(0)}(\mathfrak{A}_0)=\mathbb{C}1_{\mathfrak{A}}$（参见 *[23,* 第 *6* 节*.1]*）。对每个 $n\in\mathbb{N}$，令

$$E_n^\tau:\mathfrak{A}\to\alpha^{(n)}(\mathfrak{A}_n)$$

表示到 $\alpha_{(n)}(\mathfrak{A}_n)$. 上的唯一 τ-保持忠实条件期望。对每个 $n\in\mathbb{N}$，令

$$\tau_n=\tau\circ\alpha^{(n)}, \tag{3.2}$$

它是 $\mathfrak{A}_n$ 上的忠实迹态，并令

$$E_{n+1,n}^{\tau_{n+1}}:\mathfrak{A}_{n+1}\to\alpha_n(\mathfrak{A}_n)$$

为到 $\alpha_n(\mathfrak{A}_n)$上的唯一 τ_{n+1}-保持忠实条件期望。令 $\kappa_n>0$使得

$$\kappa_n\|a\|_{\mathfrak{A}_{n+1}}\leqslant\|a\|_{E_{n+1,n}^{\tau_{n+1}}}$$

对所有 $a\in\mathfrak{A}_{n+1}$ 均成立。

那么，对所有 $n\in\mathbb{N}$，

$$E_n^\tau\circ\alpha^{(n+1)}=\alpha^{(n+1)}\circ E_{n+1,n}^{\tau_{n+1}},$$

而且，

$$\kappa_n\|a\|_{\mathfrak{A}}\leqslant\|a\|_{E_n^\tau}$$

对所有 $a\in\alpha_{(n+1)}(\mathfrak{A}_{n+1})$。

证明。 设 $n \in \mathbb{N}$，并令 B_n 表示 $\mathfrak{A}_n$ 的矩阵单位集合。根据 [3, 式 (4.1)]，对于两个条件期望 E_n^τ 和 $E^{\tau_{n+1}}n+1$，n，对所有 $a \in \mathfrak{A}_{n+1}$

$$\begin{aligned}
E_n^\tau(\alpha^{(n+1)}(a)) &= \sum_{e\in B_n} \frac{\tau(\alpha^{(n+1)}(a)\alpha^{(n)}(e^*))}{\tau(\alpha^{(n)}(e^*)\alpha^{(n)}(e))}\alpha^{(n)}(e) \\
&= \sum_{e\in B_n} \frac{\tau(\alpha^{(n+1)}(a)\alpha^{(n)}(e^*))}{\tau(\alpha^{(n)}(e^*)\alpha^{(n)}(e))}\alpha^{(n+1)}(\alpha_n(e)) \\
&= \alpha^{(n+1)}\left(\sum_{e\in B_n} \frac{\tau(\alpha^{(n+1)}(a)\alpha^{(n)}(e^*))}{\tau(\alpha^{(n)}(e^*)\alpha^{(n)}(e))}\alpha_n(e)\right) \\
&= \alpha^{(n+1)}\left(\sum_{e\in B_n} \frac{\tau(\alpha^{(n+1)}(a)\alpha^{(n+1)}(\alpha_n(e^*)))}{\tau(\alpha^{(n+1)}(\alpha_n(e^*)\alpha_n(e))}\alpha_n(e)\right) \\
&= \alpha^{(n+1)}\left(\sum_{e\in B_n} \frac{\tau_{n+1}(a\alpha_n(e^*))}{\tau_{n+1}(\alpha_n(e^*)\alpha_n(e))}\alpha_n(e)\right) \\
&= \alpha^{(n+1)}(E_{n+1,n}^{\tau_{n+1}}(a))
\end{aligned}$$

因此

$$E_n^\tau \circ \alpha^{(n+1)} = \alpha^{(n+1)} \circ E_{n+1,n}^{\tau_{n+1}}.$$

令 $a \in \alpha(n+1)(\mathfrak{A}_{n+1})$。因此，存在唯一的 $a_{n+1} \in \mathfrak{A}_{n+1}$，使得 $a =\alpha(n+1)(a n+1)$。我们有

$$\begin{aligned}
\|a\|_{E_n^\tau}^2 &= \left\| E_n^\tau\left(\alpha^{(n+1)}(a_{n+1})^*\alpha^{(n+1)}(a_{n+1})\right)\right\|_{\mathfrak{A}} \\
&= \left\| E_n^\tau\left(\alpha^{(n+1)}(a_{n+1}^*a_{n+1})\right)\right\|_{\mathfrak{A}} \\
&= \left\| \alpha^{(n+1)}\left(E_{n+1,n}^{\tau_{n+1}}(a_{n+1}^*a_{n+1})\right)\right\|_{\mathfrak{A}} \\
&= \left\| E_{n+1,n}^{\tau_{n+1}}(a_{n+1}^*a_{n+1})\right\|_{\mathfrak{A}_{n+1}} \\
&\geqslant \kappa_n^2\|a_{n+1}\|_{\mathfrak{A}_{n+1}}^2 \\
&= \kappa_n^2\|a\|_{\mathfrak{A}}^2.
\end{aligned}$$

因此，

$$\kappa_n\|a\|_{\mathfrak{A}} \leqslant \|a\|_{E_n^\tau}$$

如所期望的。 □

Effros–Shen 代数在 [3] 中的收敛依赖于归纳序列的有限维子代数上的 L-半范数连续场。尽管定理 3.4的 L-半范数与 [3, 定理 3.5], 中的 L-半范数结构相似，但我们还需要两个重要事实，以确保定理 3.4中的 L-半范数也能在适当意义下构成 L-半范数连续场。第一，命题 3.6处理了将 C*-范数替换为 Frobenius–Rieffel 范数这一问题；第二个事实则处理等价常数的连续性问题。这些特定的等价常数已在 [2, 定理 5.2] 中显式计算并证明。

命题 *3.6.* 设 $N \in N$，$n_1, n_2, \ldots, n_N \in N \setminus \{0\}$，且 $\mathfrak{A} = \oplus_{k=1}^{N} \mathfrak{M}_{n_k}(C)$。设 $M \in N \setminus \{0\}$，$m_1, m_2, \ldots, m_M \in N \setminus \{0\}$，且 $\mathfrak{B} = \oplus_{k=1}^{M} \mathfrak{M}_{m_k}(C)$。假设存在一个含幺 *-单同态 $\alpha: \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$。对于每个 $n \in N \cup \{\infty\}$，令 $v^n \in (0,1)^N$，并令 $\tau_{\mathbf{v}^n}$ 为忠实迹态，对所有 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_N) \in \mathfrak{A}$ 定义如下：

$$\tau_{\mathbf{v}^n}(a) = \sum_{k=1}^{N} \frac{v_k^n}{n_k} \mathrm{Tr}(a_k),$$

其中Tr 表示矩阵的迹。令 $E^{\tau_{\mathbf{v}^n}}: \mathfrak{A} \to \alpha(\mathfrak{B})$ 表示唯一的保留 $\tau_{\mathbf{v}^n}$ 的忠实条件期望 *onto* $\alpha(\mathfrak{B})$。

若$(\mathbf{v}^n)_{n\in\mathbb{N}}$逐坐标收敛到$\mathbf{v}^\infty$，则$(\|\cdot\|_{E^{\tau_{\mathbf{v}^n}}})_{n\in\mathbb{N}}$在$(\mathfrak{A}, \|\cdot\|_{\mathfrak{A}})$的任意紧集上一致收敛到 $\|\cdot\|_{E^{\tau_{\mathbf{v}^\infty}}}$，因而在 $\mathfrak{A}$上逐点收敛。

证明。 令B为 $\mathfrak{B}$的矩阵单位集合。取$a = (a_1, a_2, \ldots, a_N) \in \mathfrak{A}$。根据 [3, Expression (4.1)], , 对每个$n \in \mathrm{N} \cup \{\infty\}$,

$$E^{\tau_{\mathbf{v}^n}}(a) = \sum_{e\in B} \frac{\tau_{\mathbf{v}^n}(a\alpha(e^*))}{\tau_{\mathbf{v}^n}(\alpha(e)\alpha(e^*))}\alpha(e).$$

条件$(\mathbf{v}^n)_{n\in\mathbb{N}}$逐坐标收敛到$\mathbf{v}^\infty$，等价于$(\tau_{\mathbf{v}^n})_{n\in\mathbb{N}}$弱*收敛到 $\tau_{\mathbf{v}^\infty}$。因此，根据加法和标量乘法的连续性，$(E^{\tau_{\mathbf{v}^n}}(a))_{n\in\mathbb{N}}$关于 $\|\cdot\|_{\mathfrak{A}}$收敛到$E^{\tau_{\mathbf{v}^\infty}}(a)$。

现在，我们证明在 $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|_{\mathfrak{A}})$ 的任意紧集上一致收敛。设 $C \subset \mathfrak{A}$ 关于 $\|\cdot\|_{\mathfrak{A}}$ 是紧的。设 $\varepsilon > 0$。由紧致性可知，存在 $N \in \mathrm{N}$ 以及 $a_1, a_2, \ldots, a_N \in C$，使得

$$C \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} \{a \in \mathfrak{A} : \|a - a_k\|_{\mathfrak{A}} < \varepsilon/3\}.$$

由逐点收敛，取 $\mathrm{N}' \in \mathrm{N}$，使得对于所有 $\mathrm{n} \geqslant \mathrm{N}'$ 且 $\mathrm{k} \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{N}\}$，都有 $\|\mathrm{E}^{\tau_{\mathbf{v}^n}}(\mathrm{a}_k) - \mathrm{E}^{\tau_{\mathbf{v}^\infty}}(\mathrm{a}_k)\|_{\mathfrak{A}} < \varepsilon/3$。令 $\mathrm{n} \geqslant \mathrm{N}'$，并令 $\mathrm{a} \in \mathrm{C}$。于是存在 $\mathrm{k} \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{N}\}$，使得 $\|\mathrm{a} - \mathrm{a}_k\|_{\mathfrak{A}} < \varepsilon/3$。因此，

$$\begin{aligned}
\|E^{\tau_{\mathbf{v}^n}}(a) - E^{\tau_{\mathbf{v}^\infty}}(a)\|_{\mathfrak{A}} &\leqslant \|E^{\tau_{\mathbf{v}^n}}(a) - E^{\tau_{\mathbf{v}^n}}(a_k)\|_{\mathfrak{A}} + \|E^{\tau_{\mathbf{v}^n}}(a_k) - E^{\tau_{\mathbf{v}^\infty}}(a_k)\|_{\mathfrak{A}} \\
&\quad + \|E^{\tau_{\mathbf{v}^\infty}}(a_k) - E^{\tau_{\mathbf{v}^\infty}}(a)\|_{\mathfrak{A}} \\
&< \|E^{\tau_{\mathbf{v}^n}}(a - a_k)\|_{\mathfrak{A}} + \frac{\varepsilon}{3} + \|E^{\tau_{\mathbf{v}^\infty}}(a - a_k)\|_{\mathfrak{A}} \\
&\leqslant \|a - a_k\|_{\mathfrak{A}} + \frac{\varepsilon}{3} + \|a - a_k\|_{\mathfrak{A}} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

其中，最后第二个不等式用到了定义 3.2 。

因此，由反三角不等式以及平方根函数的一致连续性，$(\sqrt{\|E^{\tau_{\mathbf{v}^n}}(\cdot)\|_{\mathfrak{A}}})_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|_{\mathfrak{A}})$ 的任意紧集上收敛到 $\sqrt{\|E^{\tau_{\mathbf{v}^\infty}}(\cdot)\|_{\mathfrak{A}}}$。由于单点集是紧的，因此在 $\mathfrak{A}$ 上逐点收敛。□

现在我们聚焦于 Effros–Shen 代数，并从 [8] 中给出的定义开始。设 $\theta \in \mathrm{R}$ 为无理数。存在唯一的整数序列 $(r_n^\theta)_{n\in\mathbb{N}}$

其中，对于所有 $n \in \mathrm{N} \setminus \{0\}$，都有 $r_n^\theta > 0$

$$\theta = \lim_{n\to\infty} r_0^\theta + \cfrac{1}{r_1^\theta + \cfrac{1}{r_2^\theta + \cfrac{1}{r_3^\theta + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{r_n^\theta}}}}}.$$

当 $\theta \in (0,1)$ 时，我们有 $r_0^\theta = 0$。序列 $(r_n^\theta)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是 θ [10] 的连分数展开。

接下来，我们定义 Effros–Shen 代数的有限维 C*-子代数。对于每个 $n \in \mathrm{N}$，定义

$$p_0^\theta = r_0^\theta, \quad p_1^\theta = 1 \quad \text{and} \quad q_0^\theta = 1, \quad q_1^\theta = r_1^\theta,$$

并令

$$p_{n+1}^\theta = r_{n+1}^\theta p_n^\theta + p_{n-1}^\theta$$

and

$$q_{n+1}^\theta = r_{n+1}^\theta q_n^\theta + q_{n-1}^\theta.$$

序列 $\left(p_n^\theta/q^{n\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$（其渐近分数为 p_n^θ/q_n^θ）收敛到 θ。事实上，对于每个$n \in$N，

$$\frac{p_n^\theta}{q_n^\theta} = r_0^\theta + \cfrac{1}{r_1^\theta + \cfrac{1}{r_2^\theta + \cfrac{1}{r_3^\theta + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{r_n^\theta}}}}}.$$

现在，我们定义赋予 Frobenius–Rieffel 范数的 C*-代数。令$\mathfrak{A}_{\theta,\,0} = \mathbb{C}$，并且对每个 $n \in \mathbb{N}_0$，令

$$\mathfrak{A}_{\theta,n} = \mathfrak{M}_{q_n^\theta}(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{M}_{q_{n-1}^\theta}(\mathbb{C}).$$

这些代数构成一个归纳序列，其映射为

$$\alpha_{\theta,n} : a \oplus b \in \mathfrak{A}_{\theta,n} \mapsto \operatorname{diag}(a,\ldots,a,b) \oplus a \in \mathfrak{A}_{\theta,n+1}, \tag{3.3}$$

其中，在 $\mathfrak{A}_{\theta,\,n+1}$ 的第一个直和项的对角线上有r_{n+1}^θ 个a 的副本。根据构造，这是一个含幺 *-单同态。对于$n = 0$,

$$\alpha_{\theta,0} : \lambda \in \mathfrak{A}_{\theta,0} \mapsto \operatorname{diag}(\lambda,\ldots,\lambda) \oplus \lambda \in \mathfrak{A}_{\theta,1}.$$

与 θ 相关联的*Effros–Shen* 代数是归纳极限（见[23, 第 6 节.1]）

$$\mathfrak{A}_\theta = \varinjlim (\mathfrak{A}_{\theta,n}, \alpha_{\theta,n})_{n\in\mathbb{N}}.$$

存在唯一的忠实迹态 τ_θ on $\mathfrak{A}_\theta$，使得对于每个$n \in \mathrm{N}\setminus\{0\}$, $\tau_{\theta,n}$（见表达式（3.2））， $(a,b) \in \mathfrak{A}_{\theta,n}$ 定义为

$$\tau_{\theta,n}(a,b) = t(\theta,n)\frac{1}{q_n^\theta}\mathrm{Tr}(a) + (1-t(\theta,n))\frac{1}{q_{n-1}^\theta}\mathrm{Tr}(b),$$

其中

$$t(\theta,n)=(-1)^{n-1}q_n^\theta(\theta q_{n-1}^\theta-p_{n-1}^\theta)\in(0,1)$$

（参见 [3, 引理 5.5]）。

对每个 $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$，定义

$$\kappa_{\theta,n}=\sqrt{\frac{\theta q_n^\theta-p_n^\theta}{\left(\theta q_{n-2}^\theta-p_{n-2}^\theta\right)r_n^\theta(r_n^\theta+1)^2}}$$

如[2, 定理 5.2] 中所示，并令 $\kappa_\theta=(\kappa_{\theta,n})_{n\in\mathbb{N}}$，

$$\beta_\theta(n)=\frac{1}{\dim(\mathfrak{A}_{\theta,n})}=\frac{1}{(q_n^\theta)^2+(q_{n-1}^\theta)^2},$$

$$\mathcal{U}_n^\theta=\alpha_\theta^{(n)}(\mathfrak{A}_{\theta,n})$$

如表达式（3.1）中所示。对每个 $a\in\alpha_{(n)\,\theta}(\mathfrak{A}_{\theta,n})$，令

(3.4)

$$\mathsf{L}_{\theta,n}(a)=\mathsf{L}_{\mathcal{U}_n^\theta,\beta_\theta}^{\tau_\theta,\kappa_\theta}(a)=\max_{m\in\{0,1,\dots,n-1\}}\frac{\max\left\{\|a-E_m^{\tau_\theta}(a)\|_{E_m^{\tau_\theta}},\|a^*-E_m^{\tau_\theta}(a^*)\|_{E_m^{\tau_\theta}}\right\}}{\kappa_{\theta,m}\beta_\theta(m)}$$

如定理3.4中所示。

定理 3.7。若 $\theta\in(0,1)\setminus\mathbb{Q}$，则存在一个强 *Leibniz L*-半范数 L_θ 在$\mathfrak{A}_\theta$ 上，使得 $A=1$，$B=0$，$C=1$ 满足

$$\Lambda_{SL}^*((\mathfrak{A}_\theta,\mathsf{L}_\theta),(\mathfrak{A}_{\theta,n},\mathsf{L}_{\theta,n}))\leqslant 4\sum_{j=n}^{\infty}\beta_\theta(j) \tag{3.5}$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\Lambda_{SL}^*((\mathfrak{A}_\theta,\mathsf{L}_\theta),(\mathfrak{A}_{\theta,n},\mathsf{L}_{\theta,n}))=0.$$

证明。令 $n\in\mathbb{N}$。根据 [2, 定理 5。2]和命题 3.5,

$$\kappa_{\theta,n}\|a\|_{\mathfrak{A}_\theta}\leqslant\|a\|_{E_n^{\tau_\theta}}$$

对所有 $a\in\alpha_{(n+1)\ \theta}(\mathfrak{A}_{\theta,\ n+1})$。由定理 3.4，证明完成。 □

现在我们证明关于 Effros–Shen 代数的主要结果。

定理 3.8。映射

$$\theta\in(0,1)\setminus\mathbb{Q}\longmapsto(\mathfrak{A}_\theta,\mathsf{L}_\theta),$$

其中L_θ 由表达式(3.5)定义，它相对于$(0,1)\setminus\mathbb{Q}$ 上的通常拓扑以及由 Λ^*SL诱导的拓扑是连续的。

证明。设 $(\theta(\mathrm{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ 是 (0, 1) \Q 中的一个序列，且收敛于 $\theta(\infty)\in(0,1)\setminus\mathrm{Q}$。设 $\varepsilon>0$。由 [10], $(1/\mathrm{q}_m^\theta)_{m\in\mathbb{N}}$ 对所有 $\theta\in(0,1)\setminus\mathrm{Q}$ 都是平方可和的。此外，若 $\Phi=\phi-1$，其中 ϕ 是黄金比例，则对所有 $\mathrm{m}\in\mathrm{N}$ 和 $\mathrm{n}\in\mathrm{N}\cup\{\infty\}$，$\mathrm{q}_m^{\theta(n)}\geqslant\mathrm{q}_m^\Phi$。选取 $\mathrm{N}_1\in\mathrm{N}$，使得

$$4\sum_{j=N_1}^{\infty}\frac{1}{(q_j^\Phi)^2+(q_{j-1}^\Phi)^2}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

那么定理3.7 保证

$$\Lambda^*_{SL}((\mathfrak{A}_{\theta(n)}, \mathsf{L}_{\theta(n)}), (\mathfrak{A}_{\theta(n),N_1}, \mathsf{L}_{\theta(n),N_1})) \leqslant 4 \sum_{j=N_1}^{\infty} \frac{1}{(q_j^{\Phi})^2 + (q_{j-1}^{\Phi})^2} < \frac{\varepsilon}{3}$$

对所有 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。

根据 [3, 命题 5.10],, 选择 $N_2 \in \mathbb{N}$，使得

$$q_{N_1}^{\theta(n)} = q_{N_1}^{\theta(\infty)} \quad \text{and} \quad q_{N_1-1}^{\theta(n)} = q_{N_1-1}^{\theta(\infty)}$$

对所有 $n \geqslant N_2$。因此，$\mathfrak{A}_{\theta(n),\ N_1} = \mathfrak{A}_{\theta(\infty),\ N_1}$ 对所有 $n \geqslant N_2$。根据[3, 引理 5.12] 的证明，结合命题 3.6 和 [2, 定理 5.2],, 对所有$a \in \mathfrak{A}_{\theta(\infty),\ N_1}$，我们有

$$\lim_{m\to\infty} \mathsf{L}_{\theta(N_2+m),N_1} \circ \alpha^{(N_1)}_{\theta(N_2+m)}(a) = \mathsf{L}_{\theta(\infty),N_1} \circ \alpha^{(N_1)}_{\theta(\infty)}(a).$$

因此，根据与 [3, 引理 5.13] 相同的证明

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^*_{SL}((\mathfrak{A}_{\theta(n),N_1}, \mathsf{L}_{\theta(n),N_1}), (\mathfrak{A}_{\theta(\infty),N_1}, \mathsf{L}_{\theta(\infty),N_1})) = 0.$$

因此，我们可以选择$N_3 \geqslant N_2$ 使得

$$\Lambda^*_{SL}((\mathfrak{A}_{\theta(n),N_1}, \mathsf{L}_{\theta(n),N_1}), (\mathfrak{A}_{\theta(\infty),N_1}, \mathsf{L}_{\theta(\infty),N_1})) < \frac{\varepsilon}{3}$$

对于所有$n \geqslant N_3$。因此，若$n \geqslant N_3$,，则

$$\begin{aligned}
&\Lambda^*_{SL}((\mathfrak{A}_{\theta(n)}, \mathsf{L}_{\theta(n)}), (\mathfrak{A}_{\theta(\infty)}, \mathsf{L}_{\theta(\infty)})) \\
&\quad \leqslant \Lambda^*_{SL}((\mathfrak{A}_{\theta(n)}, \mathsf{L}_{\theta(n)}), (\mathfrak{A}_{\theta(n),N_1}, \mathsf{L}_{\theta(n),N_1})) \\
&\qquad + \Lambda^*_{SL}((\mathfrak{A}_{\theta(n),N_1}, \mathsf{L}_{\theta(n),N_1}), (\mathfrak{A}_{\theta(\infty),N_1}, \mathsf{L}_{\theta(\infty),N_1})) \\
&\qquad + \Lambda^*_{SL}((\mathfrak{A}_{\theta(\infty),N_1}, \mathsf{L}_{\theta(\infty),N_1}), (\mathfrak{A}_{\theta(\infty)}, \mathsf{L}_{\theta(\infty)})) \\
&\quad < \frac{\varepsilon}{3} + \Lambda^*_{SL}((\mathfrak{A}_{\theta(n),N_1}, \mathsf{L}_{\theta(n),N_1}), (\mathfrak{A}_{\theta(\infty),N_1}, \mathsf{L}_{\theta(\infty),N_1})) + \frac{\varepsilon}{3} \\
&\quad < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

根据三角不等式。 □

因此，我们看到， [2] 中得到的等价常数对这一连续性结果至关重要。没有任何保证表明任意等价常数都能得到相同的结果。不过，命题3.10 表明，我们也可以使用最佳等价常数来获得定理3.8中映射的连续性；对于有限维空间，最佳等价常数必定存在。目前，我们并不知道[2, 定理 5.2]中的等价常数是否为最佳常数，但我们选择用这些常数来证明定理3.8 ，因为它们能通过显式的 L-半范数保证连续性，而无需使用由未知最佳常数构造的 L-半范数。因此，命题3.10旨在说明：如果无法计算出能保证连续性的显式等价常数，那么至少可以借助最佳等价常数的存在性来获得连续性。首先，我们证明一个引理。

引理 3.9。 设$(C,\ d)$ 为一个紧致度量空间。设$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 X 上一列实值连续函数，并设 $f\colon\ X\ \to\mathbb{R}$ 为连续函数。

若$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 一致收敛于 f，则(最小值$_{x\in C}f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于最小值$_{x\in C}f(x)$，且(最大值$_{x\in C}f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于最大值$_{x\in C}f(x)$。

证明。由于 C 是紧的，对于所有 $\mathrm{n}\ \in \mathrm{N}$，都有 $\inf_{x\in C}\mathrm{f}\,(\mathrm{x})\ =\min_{x\in C}\mathrm{f}\,(\mathrm{x})\ =\min \mathrm{f}$ 且 $\inf_{x\in C}\mathrm{f}_n(\mathrm{x})\ =\min_{x\in C}\mathrm{f}_n(\mathrm{x})\ =\min \mathrm{f}_n$。令 $\varepsilon>0$。存在一个 $\mathrm{N}\ \in\mathbb{N}$，使得对于 $\mathrm{n}\ \geqslant\mathrm{N}$，我们有 $|\mathrm{f}_n(\mathrm{x})\ -\mathrm{f}\,(\mathrm{x})|<\varepsilon/2$，对所有 $\mathrm{x}\ \in\mathrm{C}$ 均成立。那么对于 $\mathrm{n}\ \geqslant\mathrm{N}$，

$$f(x)-\varepsilon/2<f_n(x)<f(x)+\varepsilon/2$$

对于所有$x\ \in C$。我们对该不等式取下确界，得到

$$\min f-\varepsilon/2\leqslant\min f_n\leqslant\min f+\varepsilon/2,$$

这意味着 $|\min f\ -\min f_n|\leqslant\varepsilon/2<\varepsilon$。

用类似的论证可证明将 min 替换为 max 时结论仍成立。 □

命题 3.10. 设$(V,\|\cdot\|)$ 是一个有限维赋范向量空间。设$(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 V 上的范数序列，且在$(V,\ \|\cdot\|)$的单位球上一致收敛于 V 上的范数 $\ \|\cdot\|_\infty$。

若对每个 $n\ \in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$，都有

$$\kappa_n\|\cdot\|\leqslant\|\cdot\|_n\leqslant\lambda_n\|\cdot\|$$

其中 $\kappa_n>0,\lambda_n>0$ 是尖锐的，则$(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 κ_∞，且$(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 λ_∞。

证明。 设$n\ \in\mathrm{N}\cup\{\infty\}$。首先注意，$a\ \in V\ \mapsto\|a\|_n$ 关于 $\|\cdot\|$ 是连续的，因为这些范数等价。因此，由于<style id='17}$a\ \in V:\ \|a\|=1\}$ 因有限维性而紧，<style id='27}$a\|_n\in\mathrm{R}:a\ \in V,\|a\|=1\}$ 是紧的。因此

$$\inf\{\|a\|_n\in\mathbb{R}:a\in V,\|a\|=1\}=\min\{\|a\|_n\in\mathbb{R}:a\in V,\|a\|=1\}>0$$

因为 $\|a\|=1$ 意味着$a\ \neq0$，因此 $\|a\|_n>0$。由于 κ_n 是最佳的，

$$\kappa_n=\min\{\|a\|_n\in\mathbb{R}:a\in V,\|a\|=1\}.$$

因此，根据引理 3.9，$(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 κ_∞，因为$(V,\|\ \|)$ 的单位球面由有限维性可知是紧的。其余结果可类似地推出。□

因此，将这一结果与命题 3.6结合起来，我们还可以得到定理 3.8 的证明，其中使用的是 κ_n^θ 在表达式 3.4中的最佳常数，而非 [2,定理 5。2]。

作为最后一个结果，我们将展示 UHF 代数的收敛与其重数序列的收敛之间的关系。与 Effros–Shen 情形不同，后者的连续性结果依赖于等价常数在某种适当意义下的连续性；UHF 代数的收敛则不受所选等价常数的影响。首先，我们详细说明用于描述重数序列收敛的度量空间，以及 UHF 代数类的标准构造。

定义 3.11。 贝尔空间 $\mathscr{N}$是集合$(\mathrm{N}\setminus\{0\})^{\mathbb{N}}$，并赋予度量 d。对于任意两个 $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$、$(y(n))_{n\in\mathbb{N}}$，其中属于 $\mathscr{N}$，定义为

$$d_{\mathscr{N}}\left((x(n))_{n\in\mathbb{N}},(y(n))_{n\in\mathbb{N}}\right)=\begin{cases}0 & \text{if } x(n)=y(n) \text{ for all } n\in\mathbb{N},\\ 2^{-\min\{n\in\mathbb{N}:x(n)\neq y(n)\}} & \text{otherwise.}\end{cases}$$

接下来，我们以适合本文需求的方式定义 UHF 代数。给定 $(\beta(n))_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{N}$，令

$$\boxtimes\beta(n)=\begin{cases}1 & \text{if } n=0,\\ \prod_{j=0}^{n-1}(\beta(j)+1) & \text{otherwise.}\end{cases}$$

对每个 $n\in\mathrm{N}$，定义一个含幺 *-单同态如下：

$$\mu_{\beta,n}: a\in\mathfrak{M}_{\boxtimes\beta(n)}(\mathbb{C})\longmapsto \operatorname{diag}(a,a,\ldots,a)\in\mathfrak{M}_{\boxtimes\beta(n+1)}(\mathbb{C}),$$

其中，$\beta(n)+1$ 个 a 出现在对角矩阵(a、a、.....、a)中。令 $\mathrm{uhf}((\beta(n))_{n\in\mathbb{N}})=\varinjlim(\mathfrak{M}_{\boxtimes\beta(n)}(\mathrm{C}),\mu_{\beta,n})_{n\in\mathbb{N}}$。映射

$$(\beta(n))_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{N}\longmapsto \mathrm{uhf}((\beta(n))_{n\in\mathbb{N}})$$

是映到所有 UHF 代数按 *同构分类所得类的满射，其中 [7, 第 III 章.5]。

对每个 $n\in\mathrm{N}$，令

$$\gamma_\beta(n)=\frac{1}{\dim(\mathfrak{M}_{\boxtimes\beta(n)}(\mathbb{C}))},$$

并令

$$\rho_\beta$$

为 $uhf((\beta(n))_{n\in\mathbb{N}})$ 上唯一的忠实迹态，并设

$$\mathcal{V}_n^\beta=\mu_\beta^{(n)}(\mathfrak{M}_{\boxtimes\beta(n)}(\mathbb{C}))$$

如表达式 (3.1) 所示。

接下来，令 $\rho_{\beta,n+1}$ 表示 $\mathfrak{M}_{\boxtimes\beta(n+1)}(\mathrm{C})$ 上唯一的忠实迹态。固定 $\lambda_n^\beta>0$，使得

$$\lambda_n^\beta\|a\|_{\mathfrak{M}_{\boxtimes\beta(n+1)}(\mathbb{C})}\leqslant\|a\|_{E^{\rho_{\beta,n}}} \tag{3.6}$$

对所有 $\mathrm{a}\in\mathfrak{M}_{\boxtimes\beta}(\mathrm{n}+1)(\mathrm{C})$，其中 $\mathrm{E}^{\rho_{\beta,n}}:\mathfrak{M}_{\boxtimes\beta}(\mathrm{n}+1)(\mathrm{C})\to\mu_{\beta,n}(\mathfrak{M}_{\boxtimes\beta}(\mathrm{n})(\mathrm{C}))$ 是到 $\mu_{\beta,n}(\mathfrak{M}_{\boxtimes\beta}(\mathrm{n})(\mathrm{C}))$ 上唯一的忠实 $\rho_{\beta,n+1}$-保持条件期望。此处注意，λ_n^β 既不是显式给定的，也不一定是最佳常数；并且我们假设 λ_n^β 仅依赖于 $\mathfrak{M}_{\boxtimes\beta}(\mathrm{n}+1)(\mathrm{C})$，这是允许的，因为 $\rho_{\beta,n+1}$ 是 $\mathfrak{M}_{\boxtimes\beta}(\mathrm{n}+1)(\mathrm{C})$ 上唯一的忠实迹态。令 $\lambda^\beta=(\lambda_n^\beta)_{n\in\mathbb{N}}$。

对于每个$a\in\mu_{(n)}{}^{\beta}(\mathfrak{M}_{\boxtimes\beta(n)}(\mathrm{C}))$，令

$$\mathrm{L}_{\beta,n}^{\mathscr{N}}(a)=\mathrm{L}_{\mathcal{V}_n^\beta,\gamma_\beta}^{\rho_\beta,\lambda}(a) \tag{3.7}$$

如定理 3.4。

定理 3.12。该映射

$$\beta \in \mathscr{N} \longmapsto (\mathsf{uhf}((\beta(n))_{n\in\mathbb{N}}), \mathsf{L}_{\beta}^{\mathscr{N}}),$$

其中，$\mathsf{L}_{\beta}^{\mathscr{N}}$在定理3.4 中利用表达式(3.7)中定义的 L-半范数来定义，并且关于贝尔空间及由 $\Lambda^{*}SL$ 诱导的拓扑是连续的。

证明。 此证明的大部分内容已由[3, 定理 4.9]的证明完成。剩下的只是证明等价常数的连续性，而这可类似于[3, 定理 4.9]的证明得出。事实上，若$d_{\mathscr{N}}(\beta,\eta) < \frac{1}{2^m}$，则对所有$k \leqslant n$，我们有 $\lambda^{\beta}{}_{k} = \lambda^{\eta}{}_{k}$，因为

（1）$\rho_{\beta,k+1} = \rho_{\eta,k+1}$, (2) $\mathfrak{M}_{\boxtimes\beta}(\mathrm{k}_{+1})(\mathrm{C}) = \mathfrak{M}_{\boxtimes\eta}(\mathrm{k}_{+1})(\mathrm{C})$, (3) $\mu_{\beta,k}(\mathfrak{M}_{\boxtimes\beta}(\mathrm{k})(\mathrm{C})) = \mu_{\eta,k}(\mathfrak{M}_{\boxtimes\eta}(\mathrm{k})(\mathrm{C}))$, and (4) $\mathrm{E}^{\rho_{\beta},k} = \mathrm{E}^{\rho_{\eta},k}$,

这包含确定 $\lambda^{\beta}{}_{k}$ 和 $\lambda^{\eta}{}_{k}$所需的全部信息。 □

参考文献

1. Konrad Aguilar，归纳极限 C*-代数与紧量子度量空间，《澳大利亚数学学会杂志》**111** (2021)，第 3 期，289–312，arXiv:1807.10424。MR 4337940 2. Konrad Aguilar、Stephan Ramon Garcia 和 Elena Kim，有限维 *C**-代数上的 *Frobenius-Rieffel* 范数，《算子矩阵》**16** 4502032 3 2022 3, 733 758, 2112 13164 ( ), no. – arXiv: . . MR . Konrad Aguilar 和 Frédéric Latrémolière，*AF* 代数上的量子超度量与 *Gromov-Hausdorff* 邻近度，《数学研究》**231** (2015)，第 2 期，149–193，arXiv: 1511.07114。MR 3465284 4. N. P. Brown 和 N. Ozawa，*C**-代数与有限维逼近，《数学研究生丛书》，第 88 卷，美国数学会，2008。5. A. Connes，紧度量空间、*Fredholm* 模与超有限性，《遍历理论与动力系统》**9** 1007407 6 1989 2, 207 220 ( ), no. – . MR .，非交换几何，学术出版社，圣迭戈，加利福尼亚州，_____ 1994 1303779 。 7 * 6, MR . Kenneth R. Davidson，*C* -代数举例，Fields Institute 专著，第 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1996 1402012 8 . MR . E. G. Effros 和 C. L. Shen，近似有限 *C**-代数与连分数，《印第安纳大学数学杂志》**29** (1980)，第 2 期，191–204。9. M. Gromov，黎曼与非黎曼空间的度量结构，《数学进展》，Birkhäuser，1999。10. G. H. Hardy 和 E. M. Wright，数论导论，第六版，牛津大学出版社，牛津，2008。11. L. Kantorovitch，求解若干类极值问题的新方法，《苏联科学院学报》（新系列）**28** (1940)，211–214。MR 0003456 12. D. Kerr，矩阵量子 *Gromov-Hausdorff* 距离，《泛函分析杂志》**205**(2003)，第 1 期，132–167，math.OA/0207282。13. F. Latrémolière，模 *Gromov-Hausdorff* 邻近度，已提交（2016），67 页，ArXiv: 1608.04881。14. ，对偶 *Gromov-Hausdorff* 邻近度的紧性定理，《印第安纳大学数学杂志》**66**(2017)，第 5 期，1707–1753。MR 3718439 15. Frédéric Latrémolière，模糊环面与量子环面关于量子 *Gromov-Hausdorff* 邻近度的收敛：一种显式方法，《明斯特数学杂志》**8** 3549521 16 2015 1, 57 98 9**103** 2015 ( )，第 – 期。MR .，对偶 *Gromov-Hausdorff* 邻近度，《纯粹与应用数学杂志》 ( ) ( )，第 2 期，303–351。MR 3298361 17. ，量子 *Gromov-Hausdorff* 邻近度，《美国数学会汇刊》**368** (2016)，第 1 期，365–411。MR 3413867

18. ，三角不等式与对偶 *Gromov-Hausdorff* 邻近度，《印第安纳大学数学杂志》**66** (2017)，第 1 期，297–313。MR 3623412 19. ，模 *Gromov-Hausdorff* 邻近度，《数学论文集》**544** (2019)，70，arXiv:1608.04881。MR 4036723 20. ，协变 *Gromov-Hausdorff* 邻近度，《数学研究》**251** (2020)，第 2 期，135–169，arXiv:1805.11229。MR 4045657 21. ，对偶模 *Gromov-Hausdorff* 邻近度与完备性，《非交换几何杂志》**15** (2021)，第 1 期，347–398，arXiv:1811.04534。MR 4248216 22. ，度量谱三元组的 *Gromov-Hausdorff* 邻近度，《数学进展》**404** (2022)，论文编号 108393，56，rXiv:1811.10843。MR 4411527 23. Gerard J. Murphy，*C**-代数与算子理论，学术出版社，波士顿，马萨诸塞州，1990。MR 1074574 24. M. A. Rieffel，*C**-代数的诱导表示，《数学进展》**13** (1974)，176–257。25. ，由紧群作用诱导的态上的度量，《数学文献》**3** (1998)，215–229。MR 1647515 26. ，态空间上的度量，《数学文献》**4** (1999)，559–600，math.OA/9906151。27. ，量子度量空间的 *Gromov-Hausdorff* 距离，第 168 卷，2004，附录 1 由 Hanfeng Li 撰写，《量子度量空间的 Gromov-Hausdorff 距离。矩阵代数在量子 Gromov-Hausdorff 距离下收敛到球面》，第 1 2055927 28 65– 页。MR .，*Lipschitz* 延拓常数等于投影常数，《当代数学》**414** (2006)，147–162，ArXiv: math/0508097。29. ，若干紧齐性空间上的等变向量丛与 *Dirac* 算子的整体视角，《当代数学》**449** (2008)，399–415，ArXiv: math/0703496。30. ，收敛到余伴随轨道的矩阵代数之间的距离，《纯数学专题讨论会论文集》**81** (2010)，173–180，ArXiv: 0910.1968。31. ，“矩阵代数收敛到球面”的 *Leibniz* 半范数，《Clay 数学会议录》**11** (2010)，543–578，ArXiv: 0707.3229。32. ，向量丛与 *Gromov-Hausdorff* 距离，《K 理论杂志》**5** (2010)，39–103，ArXiv: math/0608266。33. ，标准差是强 *Leibniz* 半范数，《纽约数学杂志》**20** (2014)，35–56，arXix: 1208.4072。MR 3159395 34. ，“矩阵代数收敛到球面”的矩阵桥，《算子代数及其应用》，《当代数学》，第 671 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2016，ArXiv: 1502.00329，第 209–233 页。

数学与统计系，波莫纳学院，610 N. COLLEGE AVE.，克莱蒙特，CA 91711电子邮件地址：konrad.aguilar@pomona.edu网址：https://aguilar.sites.pomona.edu数学与统计系，波莫纳学院，610 N. COLLEGE AVE.，克莱蒙特，CA 91711电子邮件地址：stephan.garcia@pomona.edu网址：https://pages.pomona.edu/~sg064747数学系，麻省理工学院，77 MASSACHUSET

S

AVE，CAMBRIDGE，MA 02139电子邮件地址：elenakim@mit.eduDEPARTMENT OF MATHEMATICS，UNIVERSITY OF DENVER，DENVER，CO 80208电子邮件地址：frederic@math.du.edu网址：https://math.du.edu/~frederic/