arXiv:2301.05704v1 [math.CO] 13 Jan 2023

关于 Knuth 的前向弧与后向弧猜想

聂子培 *

2023年1月16日

摘要

沿用 Janson 的方法，我们证明了 Knuth 的一个猜想：在出度服从几何分布的有向图中，深度优先搜索（DFS）产生的前向弧数和后向弧数具有相同的分布。

1 引言

在图中进行深度优先搜索（DFS）时，从一个未访问过的顶点 v 开始，并探索从 v 出发的每条弧。每当一条弧指向未访问过的顶点 u 时，就从 u 递归地执行深度优先搜索。重复这一过程，直到所有顶点都已访问。

在深度优先搜索过程中，每条弧恰好被探索一次。如果算法中的一条弧指向一个未访问过的顶点，则称其为树弧。树弧的集合构成图的一个生成森林，称为深度优先森林。我们还可以进一步对其余的弧进行分类。设 $v \to u$ 是一条非树弧。它称为

(a) 环，如果 $u = v$;

(b) 前向弧，如果 u 是深度优先森林中 v 的后代;

(c) 后向弧，如果 u 是深度优先森林中 v 的祖先;

(d) 否则为一条交叉弧。

对于整数 n 和实参数 $p \in (0,1)$，具有几何分布出度分布的有向图，是按以下方式生成的一个包含 n 个顶点的随机多重有向图。对于每个顶点 v，彼此独立地令 $d^+(v)$ 为一个众数为 0、均值为 $\frac{p}{1-p}$的几何分布随机变量。然后，我们从每个顶点 v出发创建 $d^+(v)$条弧 $v \to u$，其中这些 u是相互独立且均匀随机选取的顶点。

在《计算机程序设计艺术》的一章新内容中，Knuth 提出了以下关于具有几何出度分布的有向图中深度优先搜索的前向弧和后向弧数量的猜想。

*Lagrange数学与计算研究中心，华为。电子邮箱：niezipei@huawei.com。

猜想 1.1。 *[3,* 问题 7.4.1.2-*35]* 设 F 和 B 分别表示具有几何出度分布的有向图中深度优先搜索的前向弧和后向弧的数量。那么 F 与 B 服从相同的分布。

Knuth 验证了猜想 1.1 对于 $n \leqslant 9$，并声称“这一定是真的”。Jacquet 和 Janson [1, 定理 13] 证明了 $\mathbb{E}(F) = \mathbb{E}(B)$。Janson 提出了猜想 1.1的以下扩展。

猜想 1.2。 *[2,* 猜想 2。*1]* 设 L、F、B、C、T分别表示在具有几何出度分布的有向图中进行深度优先搜索时，自环、前向弧、后向弧、交叉弧和树弧的数量。那么 $(L、\ F、\ B+C、\ T)$ 与 $(L、\ B、\ F+C、\ T)$ 具有相同的分布。

Janson 验证了猜想 1.2 对于 $n \leqslant 18$。他还证明了猜想 1.2等价于一个涉及递归函数的恒等式。

$\widehat{\ }$ $\check{}$定理 1.3。 *[2,* 命题 3.2 和注记 3。*6]* 定义 $G_n(w、\ x、\ z)$ 以及 $G_n(w、\ x、\ z)$，使其满足以下递推关系

$$\widehat{G}_1(w,x,z) = \check{G}_1(w,x,z) = \frac{1}{1-w},$$

并且，对于 $n \geqslant 2$,

$$\widehat{G}_n(w,x,z) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\widehat{G}_k(w,x,z)\widehat{G}_{n-k}(w+kz,x,z)}{1-w-(n-1)x},$$

$$\check{G}_n(w,x,z) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\check{G}_k(w+x,x,z)\check{G}_{n-k}(w+kz,x,z)}{1-w}.$$

$\widehat{\ }$ $\check{}$那么，猜想 *1.2*成立，当且仅当 $G_n(w,\ x,\ z) = G_n(w,\ x,\ z)$ 对所有 $n \geqslant 1$。

$\widehat{\ }$ $\check{}$本文证明了恒等式 $G_n(w,x,z) = G_n(w,x,z)$。由此可推得，Knuth 猜想及其推广确实成立。

$\widehat{\ }$ $\check{}$定理 1.4。 定义 $G_n(w,\ x,\ z)$ 以及 $G_n(w,\ x,\ z)$ 如定理 *1.3*所定义。那么

$$\widehat{G}_n(w,x,z) = \check{G}_n(w,x,z)$$

对所有 $n \geqslant 1$。

我们证明的关键是一个多出一个参数的更强恒等式，即定理 2.3。正如 [4]在波利亚的 ´著作《怎样解题》中所说：“更有雄心的计划或许更有可能成功。”存在这样一个更强的恒等式，使得归纳证明优雅而简洁。

2 恒等式的证明

在本节中，我们将 x 和 z 视为常数形式变量。

定义函数 $G_n(w)$ 如下：

$$G_n(w) = \widehat{G}_n(1-w, -x, -z).$$

那么我们有递推公式

$$G_1(w) = \frac{1}{w},$$

并且，对于 $n \geqslant 2$,

$$G_n(w) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{G_k(w) G_{n-k}(w+kz)}{w+(n-1)x}.$$

设 k 和 n 是满足 $k < n$的两个正整数。定义函数 $F_{k,n}(w)$如下：

$$F_{1,n}(w) = G_n(w),$$

并且，对于 $k \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} F_{k,n}(w) = & \sum_{i=1}^{n-k-1} \frac{G_{n-k-i}(w+(k+i)z) F_{k,k+i}(w)}{w+(n-1)x} \\ & + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(w+iz) G_i(w+x) F_{k-i,n-i}(w+iz)}{w(w+(n-1)x)}. \end{aligned}$$

首先，我们推导出一个关于 $F_{2,\ n}$ 的公式。

定理 2.1. 对于每个 $n \geqslant 3$，我们有

$$F_{2,n}(w) = G_n(w) - \frac{G_{n-1}(w+z)}{w(w+x)}.$$

证明。我们对 n 使用数学归纳法。假设 $n \geqslant 3$，且该命题对所有小于 n 的值都成立。根据 $F_{k,\ n}$ 和 G_n 的定义，我们有

$$\begin{aligned} & F_{2,n}(w) \\ = & \sum_{i=1}^{n-3} \frac{G_{n-2-i}(w+(i+2)z) F_{2,i+2}(w)}{w+(n-1)x} + \frac{(w+z) G_1(w+x) F_{1,n-1}(w+z)}{w(w+(n-1)x)} \\ = & \sum_{i=1}^{n-3} \frac{G_{n-2-i}(w+(i+2)z)}{w+(n-1)x} \left(G_{i+2}(w) - \frac{G_{i+1}(w+z)}{w(w+x)} \right) \\ & + \frac{(w+z) G_{n-1}(w+z)}{w(w+x)(w+(n-1)x)} \\ = & \sum_{i=3}^{n-1} \frac{G_{n-i}(w+iz) G_i(w)}{w+(n-1)x} - \sum_{i=2}^{n-2} \frac{G_{n-1-i}(w+(i+1)z) G_i(w+z)}{w(w+x)(w+(n-1)x)} \\ & + \frac{(w+z) G_{n-1}(w+z)}{w(w+x)(w+(n-1)x)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{(w+(n-1)x)G_n(w)-G_{n-2}(w+2z)G_2(w)-G_{n-1}(w+z)G_1(w)}{w+(n-1)x}\\
&-\frac{(w+z+(n-2)x)G_{n-1}(w+z)-G_{n-2}(w+2z)G_1(w+z)}{w(w+x)(w+(n-1)x)}\\
&+\frac{(w+z)G_{n-1}(w+z)}{w(w+x)(w+(n-1)x)}\\
=&G_n(x)-\frac{G_{n-1}(w+z)}{w(w+x)}.
\end{aligned}
$$

因此，根据数学归纳法，该命题对每个 $n \geqslant 3$ 都成立。 □

其次，我们推导出一个关于 $F_{n-1,\ n}$ 的公式。

定理 2.2。对于每个 $n \geqslant 2$，我们有

$$
F_{n-1,n}(w)=\frac{G_{n-1}(w+x)}{w(w+(n-1)z)}.
$$

证明。我们对 n 使用数学归纳法。基例 $n=2$ 可以直接验证。假设$n \geqslant 3$，并且该命题对所有小于 n 的值都成立。那么，根据$F_{k,\ n}$ 和 G_n 的定义，我们有

$$
\begin{aligned}
&F_{n-1,n}(w)\\
=&\sum_{i=1}^{n-2}\frac{(w+iz)G_i(w+x)F_{n-1-i,n-i}(w+iz)}{w(w+(n-1)x)}\\
=&\sum_{i=1}^{n-2}\frac{G_i(w+x)G_{n-i-1}(w+x+iz)}{w(w+(n-1)x)(w+(n-1)z)}\\
=&\frac{G_{n-1}(w+x)}{w(w+(n-1)z)}.
\end{aligned}
$$

因此，根据数学归纳法，该命题对每个 $n \geqslant 2$ 都成立。 □

最后，我们推导出一个公式，用于计算 $F_{k,\ n}$ 与 $F_{k+1,\ n}$ 之间的差。

定理 2.3。对于每个 $1 \leqslant k \leqslant n-2$，我们有

$$
F_{k,n}(w)-F_{k+1,n}(w)=\frac{G_k(w+x)G_{n-k}(w+kz)}{w}.
$$

证明。 我们对 $k+n$进行归纳。根据定理 2.1，该命题对 $k=1$成立。假设 $2 \leqslant k \leqslant n-2$，且该命题对所有小于 $k+n$的值都成立。于是，根据定理 2.2 以及 $F_{k,\ n}$ 和 G_n的定义，我们有

$$
\begin{aligned}
&F_{k,n}(w)-F_{k+1,n}(w)\\
=&\sum_{i=0}^{n-k-2}\frac{G_{n-k-i-1}(w+(k+i+1)z)F_{k,k+i+1}(w)}{w+(n-1)x}\\
&-\sum_{i=1}^{n-k-2}\frac{G_{n-k-i-1}(w+(k+i+1)z)F_{k+1,k+i+1}(w)}{w+(n-1)x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{(w+iz)G_i(w+x)F_{k-i,n-i}(w+iz)}{w(w+(n-1)x)}\\
&-\sum_{i=1}^{k}\frac{(w+iz)G_i(w+x)F_{k-i+1,n-i}(w+iz)}{w(w+(n-1)x)}\\
=&\sum_{i=1}^{n-k-2}\frac{G_{n-k-i-1}(w+(k+i+1)z)}{w+(n-1)x}\left(F_{k,k+i+1}(w)-F_{k+1,k+i+1}(w)\right)\\
&+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{(w+iz)G_i(w+x)}{w(w+(n-1)x)}\left(F_{k-i,n-i}(w+iz)-F_{k-i+1,n-i}(w+iz)\right)\\
&+\frac{G_{n-k-1}(w+(k+1)z)F_{k,k+1}(w)}{w+(n-1)x}-\frac{(w+kz)G_k(w+x)F_{1,n-k}(w+kz)}{w(w+(n-1)x)}\\
=&G_k(w+x)\sum_{i=2}^{n-k-1}\frac{G_{n-k-i}(w+(k+i)z)G_i(w+kz)}{w(w+(n-1)x)}\\
&+G_{n-k}(w+kz)\sum_{i=1}^{k-1}\frac{G_i(w+x)G_{k-i}(w+x+iz)}{w(w+(n-1)x)}\\
&+\frac{G_{n-k-1}(w+(k+1)z)G_k(w+x)}{w(w+(n-1)x)(w+kz)}-\frac{(w+kz)G_k(w+x)G_{n-k}(w+kz)}{w(w+(n-1)x)}\\
=&G_k(w+x)\frac{(w+kz+(n-k-1)x)G_{n-k}(w+kz)-\frac{G_{n-k-1}(w+(k+1)z)}{w+kz}}{w(w+(n-1)x)}\\
&+G_{n-k}(w+kz)\frac{(w+kx)G_k(w+x)}{w(w+(n-1)x)}\\
&+\frac{G_{n-k-1}(w+(k+1)z)G_k(w+x)}{w(w+(n-1)x)(w+kz)}-\frac{(w+kz)G_k(w+x)G_{n-k}(w+kz)}{w(w+(n-1)x)}\\
=&\frac{G_k(w+x)G_{n-k}(w+kz)}{w}.
\end{aligned}
$$

因此，根据数学归纳法，该命题成立。 □

现在我们证明主定理。

定理的证明 *1.4*。 我们对 n进行归纳。基础情形 $n\leqslant 2$ 可以直接验证。假设 $n\geqslant 3$ 成立，并且该命题对所有小于n的值都成立。那么，根据定理 2.1、定理 2.2 和定理 2.3，我们有

$$
\begin{aligned}
&\breve{G}_n(1-w,-x,-z)\\
=&\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\breve{G}_k(1-w-x,-x,-z)\breve{G}_{n-k}(1-w-kz,-x,-z)}{w}\\
=&\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\widehat{G}_k(1-w-x,-x,-z)\widehat{G}_{n-k}(1-w-kz,-x,-z)}{w}\\
=&\sum_{k=1}^{n-1}\frac{G_k(w+x)G_{n-k}(w+kz)}{w}\\
=&G_n(w)-F_{2,n}(w)+\sum_{k=2}^{n-2}\left(F_{k,n}(w)-F_{k+1,n}(w)\right)+F_{n-1,n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= G_n(w) \\
&= \widehat{G}_n(1-w,-x,-z).
\end{aligned}
$$

因此，根据数学归纳法，该命题对每个 n 都成立。 □

参考文献

[1] Philippe Jacquet 与 Svante Janson。《几何度分布随机有向图中的深度优先搜索性能》。载于第 33 届算法分析的概率、组合与渐近方法国际会议（AofA 2022）。Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2022 年。

[2] Svante Janson。《几何出度分布随机有向图中深度优先搜索的后向弧与前向弧的 Knuth 猜想》。arXiv:2301.04131，2023 年。[3] Donald E. Knuth。《计算机程序设计艺术》。第 4 卷。分册预印本 12A。（初稿，2022年2月13日）。http://cs.stanford.edu/~knuth/fasc12a.ps.gz

[4] GeorgeP´olya。《怎样解题：数学方法的新面貌》。第 85 卷。普林斯顿大学出版社，2004 年。