arXiv:2301.05736v1 [math.CO] 13 Jan 2023

球面公式

OLIVER KNILL

Abstract. 球面公式指出，在任意有限抽象单纯复形中，以偶数维单形为中心的单位球面的欧拉示性数之和，等于以奇数维单形为中心的单位球面的欧拉示性数之和。因此，若某个几何空间的单位球面具有恒定的欧拉示性数（如流形），那么它的单位球面要么全都具有零欧拉示性数，要么该空间本身具有零欧拉示性数。尤其是，奇数维流形具有零欧拉示性数。通常可在代数拓扑中借助庞加莱对偶性和黎曼-赫尔维茨公式证明这一事实；也可以由莫尔斯函数的存在性推导得出，因为在奇数维中，该函数及其相反数的莫尔斯指标之和为零。高斯–博内定理也表明，奇数维德恩-索默维尔空间具有零欧拉示性数，因为它们具有恒定的零曲率。零曲率现象可从积分几何的角度理解为指标期望或德恩-索默维尔关系。

1. Energy Formula

1.1. 有限抽象单纯复形 G 是一个有限的非空集合族，并且在取有限非空子集的运算下封闭。它具有有限拓扑，其中星形集 $U(x) = \{y, x \subset y\}$ 构成一个拓扑基。核心集 $K(x) = \{y, y \subset x\}$是该拓扑中的闭集。与扎里斯基拓扑类似，它不是豪斯多夫的。事实上， G 中的相邻元素无法由开集分离。但该拓扑具有所需的连通性性质。星形集 $U(x)$的闭包 $B(x)$称为单位球。 $B(x)$的拓扑边界 $S(x) = B(x) \setminus U(x)$是单位球面，有时也称为 x的链接。定义 $w(x) = (-1)^{\dim(x)}$ ，对于$A \subset G$，令 $w(G) = \sum_{x \in A} w(x)$表示 A的欧拉示性数。

日期：2023年1月12日。关键词和短语：德恩–黑加德、德恩-索默维尔、高斯-博内、Poincar´e-Hopf、Euler-Poincar´e、莫尔斯–萨德。

1.2. 我们先从一个能量公式开始，它将欧拉示性数表示为任意一对单形之间的总势能 $\sum_{x,\ y} g(x,y)$。势能 $g(x,y)$是格林函数

$$g(x,y) = w(x)w(y)w(U(x) \cap U(y)) \ .$$

这定义了一个幺模 $n \times n$ 矩阵，当 G 有 n 个元素 [71, 95, 76,84, 78]时。该矩阵是连接拉普拉斯算子 $L(x,y) = 1$的逆，当 $x \cap y \neq \emptyset$ 且 $L(x,y) = 0$ 时则不是。若$\sum_{x,\ y} g(x,y)$是总能量，我们已经证明，点 $V(x)$处的势$= \sum_y g(x,y)$可以简化为 $w(x)w(U(x))$。包含 x 的最小开集的欧拉示性数与 x 处的势相关，后者也可视为曲率，是 x处 $w(x)$的对偶。我们直接且独立地验证一下。

定理 1（能量公式）。$\sum_{x \in G} w(x)w(U(x)) = w(G)$。

证明。将 ± 1值函数 $w(x)$替换为更一般的函数$h(x)$，并定义 $w_h(G) = \sum_x h(x)$和 $g_h(x) = w(x)w_h(U(x))$。映射 $h \to g_h$ 是线性的，能量公式也是线性的，因此只需在 $h(x_0) = 1$ 对 $x \neq x_0$成立的情况下证明该公式。此时右侧为 $w_h(G) = 1$。现在来看左侧$\sum_{x \in G} w(x)w(U(x))$。这是对所有满足 $x_0 \in U(x)$的 $w(x)$求和，这意味着$\sum_{x,\ x \subset x_0} w(x)$，但这是单纯复形 $\{x \subset x_0\} = \overline{\{x_0\}}$ 的欧拉示性数，而它恒为 1。因此，左侧也为 1。□

2. Sphere Formula

2.1. 欧拉示性数是定义在单形复形上的一个非常特殊的泛函。它是一个（$n+1$）维赋值空间中的一点 F，其中的函数满足 $F(A) + F(B) = F(A \cup B) + F(A \cap B)$，对 A和 B的任意子集均成立。

引理 1（局部赋值）。 $w(B(x)) = w(U(x)) + w(S(x))$

证明。对于任意子集 A、$B \subset G$，无论它们是开集、闭集还是两者皆非，赋值公式 $w(A) + w(B) = w(A \cup B) - w(A \cap B)$均成立，因为每个用于计算$k$维单形数量的基本赋值 $f_k(G)$都满足该公式，而 w 是这类基本赋值的线性组合。□

2.2. 单位球 $B(x)$ 定义为星 $U(x) = \{y, x \subset y\}$ 的闭包，它是一个闭集，包含 x 及其单纯复形核心 $\overline{\{x\}} = \{y, y \subset x\}$。2

引理 2（单位球）。 $w(B(x)) = 1$ 对所有 x均成立。

证明。对 $B(x)$ 中元素的个数使用归纳法。若 $B(x)$ 只有一个元素，则它有 $w(B(x)) = 1$。通过移除一个不同于 x 的元素 $y \in B(x)$，可以缩小 $B(x)$ 的规模。复形 $B'(x) = B(x) \setminus U(y)$ 现在是较小的 $G \setminus U(y)$中的一个单位球 $B'(x)$。归纳假设保证 $w(B'(x)) = 1$。局部赋值公式给出 $w(B(x))) = w(B'(x)$。□

2.3. 对所有复形均可得到（见 [83] 推论 6）。
定理 2（球面公式）。$\sum_{x \in G} w(x)w(S(x)) = 0$。

证明。性质 $\sum_{x \in G} w(x)w(B(x)) = \sum_{x \in G} w(x) = w(G)$ 因而归结为 w 的定义。从球面公式 $\sum_{x \in G} w(x)w(B(x)) = w(G)$ 中减去 $\sum_{x \in G} w(x)w(U(x)) = w(G)$，并使用局部赋值公式： $w(B(x)) = w(U(x)) + w(S(x))$。□

2.4. 类比于格林函数 $g(x, y) = w(x)w(y)w((U(x) \cap U(y))$，其超迹为 $w(G)$，我们可以考察球面格林矩阵 $s(x, y) = w(x)w(y)w(S(x) \cap S(y))$。球面定理表明， s 的超迹为 0。在我们的实验中，我们注意到一个尚未解释的事实：矩阵 s 总是奇异的。读者不妨使用下面提供的代码进行实验。这与格林矩阵 g 形成对比，后者总是幺模的，也就是说，其行列式为 1 或 -1。

2.5. 在此语境下，我们提及 Hadwiger 定理的一个离散类比：赋值线性空间的维数为 $\dim(G) + 1$，而统计 k 维单形的 f-向量 $f_k(G)$ 构成了从 $k = 0$ 到 $\dim(G)$ 的基。欧拉示性数$w(G) = \sum_{k=0}^{\dim(G)} (-1)^k f_k(G)$ 是唯一能保持重心细分运算的赋值；该运算在 f 向量上诱导一个线性映射 $f \to Qf$，从而得到一个映射 $w \to Q^T w$，其具体矩阵为 $Q(x, y) =$斯特林数$(x, y)x!$，且只有一个特征值 1。对应于 Q^T 的特征向量为 $(1, -1, 1, -1, ...)$。从谱的角度来看，重心细分的动力学[67, 69]很有趣。

3. Euler's Gem

3.1. 对于 $x \in G$，指标 $i(x) = 1 - w(S(x))$ 表示从 G 中去掉开集 $U(x)$ 后，欧拉示性数如何变化。如果$H = G \setminus U(x)$，那么

$$w(G) = w(H) + w(B(x)) - w(S(x)) = w(H) + w(U(x)) = w(H) + i(x) .$$

这意味着，在约化 $G \to H = G \setminus U(x)$ 下，欧拉示性数的变化为 $w(H) = w(G) - i(x)$。这一过程可以导出相当一般的庞加莱-霍普夫定理。下面我们将介绍一个适用于单纯复形的版本。

3.2. 归纳地说，若存在$x \in G$，使得两个闭集 $S(x)$ 和 $G \setminus U(x)$ 都是可缩的，则称复形 G 为可缩的。为建立归纳法，规定单点复形 $G = 1$为可缩的。我们刚刚在单位球引理的证明中看到，每个单位球都是可缩的。

3.3. 若复形 G 的每个单位球面 $S(x)$ 都是一个（$d-1$）球面，则称其为 d-流形。若复形 G 是一个 d-流形，且对某个 x， $G \setminus U(x)$是可缩的，则称其为 d-球面。空复形 $G = 0$ 被规定为（-1）球面。

定理 3（欧拉瑰宝）。 $w(G) = 1 + (-1)^d$ 对每个 d-球面 G均成立。

证明。根据球面的定义，存在 $x \in G$，使得 $G - U(x)$是可缩的。由赋值公式和 $w(B(x)) = 1$，利用归纳法可得 $1 = w(G - U(x)) = w(G) + w(B(x)) - w(S(x)) = w(G) + 1 - (1 + (-1)^{(d-1)})$，因此 $w(G) = 1 + (-1)^d$。□

3.4. 由此可得：

推论 1. 如果 G 的所有单位球面 $S(x)$ 都具有相同的欧拉示性数，那么对所有 x，要么 $w(G) = 0$，要么 $w(S(x)) = 0$。

证明. 原因是，如果 $w(S(x)) = c$，那么根据球面公式，$\sum_x w(x)$ $c = 0$。这意味着，要么 $c = 0$，要么 $\sum_x w(x) = w(G) = 0$。□

3.5. 若一串收缩或逆扩张步骤能将复形 G 变为 1，则称复形 G与 1 同伦等价。傻瓜帽是最简单的、无法收缩却与 1 同伦等价的复形之一。该空间有一种实现，其 f-向量为 (17, 52, 36)。还可以考察更一般的球面，只需将“可缩”替换为“与 1 同伦等价”即可。不过，这样做并不实际，因为判断复形 G 是否与 1 同伦等价很困难，甚至是 NP 完全问题；而判断其是否可缩则可以在多项式时间内完成。尽管如此，欧拉瑰宝公式对这些更一般的空间仍然成立。还可以通过考察德恩-索默维尔空间，进一步扩展这一类空间。

3.6. 单纯复形 G可视为一种特殊的 CW复形，其中单形 $x = x_k$ 沿时间线依次添加：先从零维单形开始，将它们附着到 (-1)-球面 0 上，其中 $i(x) = 1$；然后添加一维单形，可将其视为附着到具有 $i(x) = -1$ 的 0-球面上的胞腔；接着添加二维胞腔，依此类推。由于每一步都满足 $i(x) = w(x)$，因此可以将 $w(G) = \sum_x i(x)$ 解释为庞加莱-霍普夫公式。如果允许将胞腔附着到 $G_{k+1} = G_k +_{U_k} x_k$ 可缩部分 S_k，从而得到 $w(G_{k+1}) = w(G_k) + 1 - w(S_k) = w(G - k)$，或者将新的胞腔附着到球面 S_k上，此时 $w(G_{k+1}) = w(G_k) + 1 - w(S_k) = w(G_k) + (1 + (-1)^{\dim(S(x_k)}$，那么，若 $x = x_k$编码了构造过程，莫尔斯函数$f(x) = k$以及 $i_f(x) = 1 - w(S_f^-(x))$ 与 $S_f^-(x) = \{y \in S(x) \ f(y) < f(x)\}$便是庞加莱-霍普夫指标。维数 $\dim(B(x_k)$ 即莫尔斯指标，而庞加莱-霍普夫公式 $w(G) = \sum_x i_f(x)$ 成立。

3.7. 以立方体CW复形为例，首先构造一个有 8 个顶点和 12 条边的立方体单纯复形，然后沿着莫尔斯指标为 2、庞加莱-霍普夫指标为 $i_f(x)$ 的圆形复形添加 6 个胞腔。此时，庞加莱-霍普夫公式为 $w(G) = \sum_x i_f(x) = 8 - 12 + 6 = 2$，由此得到柏拉图立体的欧拉公式 $w(G) = v - e + f = 2$，这是笛卡尔的一项发现。通过推广星的概念所定义的亚历山德罗夫拓扑，将 $U(x)$ 作为开集的基，仍然为该 CW复形赋予一种有限拓扑。如果加入一个新的指标 x_k，那么对于每个 $x \in U(x_k)$，都会追溯性地将 x_k 添加到 $U(x)$ 中。现在，CW复形的数据结构由一个集合 G、一个定义在 G 上的有限拓扑的基，以及一个函数 $f : G \to \mathbb{N}$ 组成，该函数说明了这种结构是如何构建的。“单纯复形”这一数据结构更易于处理，但通常代价更高，因为必须处理更多胞腔。立方体CW复形只有 6 个面、12 条边和 8 个顶点，而三角剖分立方体有 24 个面、36 条边和 $14{=}8{+}6$ 个顶点

4. Zero Characteristic

4.1. Euler-Gem 公式和球面公式共同立即得出零欧拉示性数的结论：

推论 2（推论）。所有奇数维流形都满足 $w(G) = 0$。

证明。根据 Euler-Gem 公式，对于奇数维流形，每个单位球面的欧拉示性数都是 2。由球面公式可得 $0 = \sum_x w(x)w(S(x)) = \sum_x w(x)$ $2 = w(G)$。□5

4.2. 如前所述，证明表明，对于任意复形 G，若其单位球面 $S(x)$ 的欧拉示性数恒为 c，则这个常数必定是 $c = 0$，或者 G 的欧拉示性数为零。举例来说，我们可以取一个欧拉示性数为 2 的任意偶数维流形的悬挂。三维中的一个小例子是两个射影平面的一个拷贝的悬挂。存在采用 $f_G = (15, 42, 28)$ 的显式实现。这不是流形，但所有单位球面的欧拉示性数都是 2。曲率为常数 0。另一个三维非流形例子是环面与球面的不交并的悬挂。下面将使用 Dehn-Sommerville 构造更一般的类。

4.3. 上述推论通常使用庞加莱对偶性来证明，它表明贝蒂向量（$b_0, b_1, \ldots, b_{\dim(G)}$）是回文的 $b_k = b_{\dim(G)-k}$。贝蒂数 $b_k(G)$ 定义为复形 G 中含有 n 个元素时，霍奇矩阵 $L = (d + d^*)^2$ 中分块 L_k 的零度。外微分 $df(x) = \sum_{y \subset x, |x|-|y|=1} \mathrm{sign}(x|y) f(y)$ 也是一个满足 $d^2 = 0$ 的矩阵 $n \times n$，因此 $L = dd^* + d^*d$ 是分块对角的。限制在 $\dim(x) = k$ 的 x 上的函数称为 k-形式。矩阵 d 以及 L 取决于单形的初始任意定向，该定向会影响 $\mathrm{sign}(x|y)$；若 y 的定向与 x 的诱导定向一致，则其值定义为 1，-1 则取其他值。若通过固定极大单形的定向来为所有单形确定定向，则称复形是可定向的。但定义导数 d 并不要求复形可定向。改变定向相当于对所有形式施加正交变换，因此只是希尔伯特空间中的基变换，而 d 和 L 就作用于该空间上。谱以及零度 $b_k(G)$ 均不受影响。

4.4. 只有当 ′可定向时，庞加莱对偶才成立；这意味着可以为极大单形定向，使它们在交集上的顺序相容。对于所有单纯复形，都有欧拉-庞加莱公式 $\sum_k (-1)^k b_k = w(G)$。这个恒等式不过是运用秩-零化度定理的线性代数；在此处，这一定理就是霍奇关系，它联系了狄拉克算子的秩 $\mathrm{ran}(D) = \mathrm{ran}(d) \oplus \mathrm{im}(d^*)$与秩 $\ker(D)$。如果 d_k 将 k 形式映射到 $k+1$ 形式，而 d^*_{k+1} 将 $k+1$ 形式映射到 k 形式，则可看出$b_k = \dim(\ker(d_k/\mathrm{ran}(d_{k-1})$。如果 f_k 是 k形式的维数，也就是 G中 k单形的数量，便可立即得到$\sum_k (-1)^k b_k = \sum_k (-1)^k f_k$。还可以通过考察来推导欧拉-庞加莱公式

热核 e^{-tL}的 str(e^{-tL})，其中 str(A) $= \sum_{x\in G} w(x)A(x,x)$ 是超迹。McKean-Singer 指出，偶形式与奇形式上的非零特征值相同，因此 str(e^{-tL}) $=w(G)$ 为常数。但由于 $w(G)$是整数，且当 t很大时， e^{-tL} 接近 L的核，因此当 t 很大时，左边等于$\sum_k (-1)^k b_k$ ；而对于 $t=0$ ，有$\sum_k (-1)^k f_k$。

4.5. 如果 H 是一个不可定向的奇数维流形，可以考察其双重覆盖 G，应用庞加莱对偶可知 $w(G) = 0$，然后利用黎曼-赫尔维茨关系 $w(H) = w(G/A) = w(G)/|A|$。对于一个在 G上无不动点地作用于 H 的群 $A = \mathbb{Z}_2$ ，黎曼-赫尔维茨公式更为一般，还可以纳入分歧点的情形；在这些点上， A 的轨道比通常情况下更小。许多复形都可以看作较简单复形 H 的分支覆盖G ，而后者可以看作有限群 A 作用于 G 所得的 $H = G/A$ 。无论如何，代数拓扑与一些代数几何结合起来，可以说明奇数维流形的欧拉示性数必定为零。下面我们还将提到另一种简单的经典方法，它运用莫尔斯理论，并利用这样一个事实：若流形的维数为奇数，则莫尔斯函数在临界点处的指标满足$i_f(x) = -i_{-f}(x)$。

4.6. 为什么球面定理不适用于立方体或正十二面体？因为我们在顶点处有欧拉示性数恒为 3 的单位球面。原因在于，必须考察 G中的所有单位球面，而不只是空间零维部分的单位球面。对于立方体单纯复形 G，我们有八个零维点$x \in G$ 和十二个一维点 $x \in G$。对于零维 x ， $w(S(x)) = 3$ ；而对于一维 $x \in G$，我们有 $w(S(x) = 2$ 。现在， $8*3 = 24$和 $12*2 = 24$。欧拉示性数为 $8-12 = -4$，可以理解为一个带有 6 个孔洞的二球面的欧拉示性数，因此 $2-6 = -4$。在正十二面体的情形下，它是 $2-12 = -10$。

4.7. 下一节中，我们将把欧拉示性数的一般形式写成位于 0 维单纯形上的曲率之和。对于一维复形，顶点 x 处的曲率为 $K(x) = 1 - |S(x)|/2$。将曲率 $\sum_x K(x) = |V| - \sum_x |S(x)|/2 = |V| - |E| = f_0(G) - f_1(G)$ 相加，就是在任意一维复形 G 中应用欧拉握手公式 $\sum_v f_0(S(v)) = f_1(G)$。对于立方体或正十二面体复形，顶点上的曲率为常数 $-1/2$，因此欧拉示性数分别为 $8*(-1/2) = -4$ 或 $20*(-1/2) = -10$ 。7

5. Gauss-Bonnet

5.1. 设 $f = (f_0, \ldots, f_d)$ 表示 G 的 f-向量，其中 $f_k(G)$ 是 G 中长度为 $k+1$ 的元素个数。定义单纯形生成函数

$$f_G(t) = 1 + \sum_{k=0}^{d} f_k(G) t^{k+1}$$

并简称为 f 函数。定义 $F_G(t) = \int_0^t f_G(s)\ ds$。这里虽然涉及微积分，但请注意，$f_G$ 是一个多项式；处理多项式时，只需声明 $\frac{d}{dt} t^n = n t^{n-1}$ 和 $\int_0^t s^n ds = t^{n+1}/(n+1)$，就能保持在有限的框架内。如此看来，写下导数和积分只是记号。尽管如此，我们并未调用任何极限；微积分作为背景理论，会用极限来解释这些表达式。关于下文，请参见 [77]。请注意，曲率位于空间的零维部分。

定理 4（高斯-博内）。 $f_G(t) - 1 = \sum_{v \in V} F_{S(v)}(t)$。

证明。每个 $y \in S(x)$都带有一个电荷 t^{k+1}，因此 $f_G(t)$计算总电荷。每个 k-单纯形 $y \in S(x)$在 $U(x)$中定义了一个$(k+1)$-单纯形 $z \subset G$，它带有电荷 t^{k+2}。它包含$(k+2)$个顶点。将此电荷平均分配给这些点后，每个点获得电荷$t^{k+2}/(k+2)$。曲率 $F_{S(x)}(t)$将 z的所有电荷相加。□

5.2. 对于 $t = -1$，可以将欧拉示性数写成曲率之和，从而得到一种更传统的形式

$$w(G) = \sum_{v \in V} K(v)\ ,$$

其中 $K(x) = F_{S(x)}(-1)$ 是莱维特曲率，是连续统中高斯-博内-切恩曲率 [19] 的离散对应物。$K(v)$ 在 $f_{-1} = 1$ 时的显式公式为

$$K(v) = \sum_{k=-1}^{d} (-1)^k \frac{f_k(S(v))}{k+2}$$

该公式出现在 [90]，并被置于 [56] 的高斯-博内背景下（撰写那篇论文时，我们并不知道 [90]）。一旦认识到欧拉示性数是函数 $w(x) = (-1)^{\dim(x)}$ 的总能量，并且我们可以通过给每个 $\dim(x)+1$ 顶点 v（位于 x 中）赋予 $w(x)/(\dim(x)+1)$，将这一数值转移到零维部分，这一点就显而易见了。考察顶点 v上的总值时，我们关注的是有多少量被传递给了我们。

5.3. 我们也将这种曲率解释为 Poincar´e-Hopf 指数的期望

$$K(v) = \mathrm{E}[i_f(v)]$$

例如，取一个为所有着色赋予相同权重的概率测度 f。要在单复形中表述庞加莱-霍普夫定理，可以从顶点上的函数 $f: V \to R$ 入手，其中 R 是一个有序环，例如 $\mathbb{Z}$，且 $V = \{x \in G, \dim(x) = 0\}$。现在定义指标 $i_f(v) = \sum_{x,\ v \in x \text{是最大值 } on\ x} w(x)$。由于每个单形能量 $w(x)$ 现在都必须移至 x 中 f 取最大值的顶点上，我们得到庞加莱-霍普夫结果

$$\sum_x w(x) = \sum_{v \in V} i_f(v) \ .$$

在高斯-博内情形中，值 $w(x)$ 已被平均分配给 x 中的每个顶点，共有 $\dim(x) + 1$ 个顶点。现在可以写作 $i_f(v) = 1 - w(S_f^-(v))$，其中 $S_f^-(v)$ 由 $S(v)$ 中所有单形组成，这些单形的所有 f 值都小于 $f(v)$。这个集合 $S_f^-(v)$ 是闭集。

6. 德恩-索默维尔

6.1. h-函数 $h_G(x) = (x-1)^d f_G(1/(x-1))$生成形式为以下形式的系数 h_k

$$h_G(x) = h_0 + h_1 x + \cdots + h_d x^d + h_{d+1} x^{d+1} \ .$$

换言之，它是 h-向量的生成函数

$$(h_0, h_1, \ldots, h_{d+1}) \ .$$

G称为德恩-索默维尔的，当且仅当该向量是回文的，也就是说，对所有 $i = 0, \ldots, d+1$，均有 $h_i = h_{d+1-i}$。

引理 3. G 是德恩-索默维尔的，当且仅当 $f_G(t)$ 满足 $f(t) + (-1)^d f(-1-t)$，也就是说，$g(t) = f(t-1/2)$ 是偶函数或奇函数。

证明. h 是回文的，当且仅当 $h(t)$ 的根 $= 1 + h_0 t + \cdots + h_d t^{d+1} = (t-1)^d f(1/(t-1))$ 在对合$t \to 1/t$下保持不变。这等价于 f 的根在对合 $t \to -1-t$ 下保持不变，因此也等价于 f-函数具有对称性 $f(-1-t) = \pm f(t)$。如果 G 是维数最大的复形 d，且f_G满足 $f(t) + (-1)^d f(-1-t)$，那么 $f(-1) = (-1)^d f(0)$，因此$w(G) = 1 + f(-1) = 1 + (-1)^d$。□

6.2. 设 $G+H=G\cup H\cup\{x+y,x\in G,y\in H\}$ 是 G与 H的图论中的联接。由于 $f_{G+H}(t)=f_G(t)f_H(t)$，我们立即看出，若 G和H 是德恩-索默维尔的，则联接 $G+H$ 也仍是德恩-索默维尔的。此外，对 G 和H 进行重心细分，以及沿球面 S 取它们的连通和，所得空间都是德恩-索默维尔的。德恩-索默维尔空间的边细分也仍是德恩-索默维尔的。

推论 3. 奇数维 Dehn-Sommerville 空间，尤其是奇数维流形，都具有零欧拉示性数。

6.3. 定义 $\mathcal{X}_{(-1)}=\{\}$ 并递归地定义 $\mathcal{X}_d=\{G\mid w(G)=1+(-1)^d, S(x)\in\mathcal{X}_{d-1},\forall x\in G\}$。若 $G,H\in\mathcal{X}$，则 $G+H\in\mathcal{X}$，因为 $S_{G+H}(x)=S(x)+H$对于 $x\in G$成立，而 $S_{G+H}(x)=G+S(x)$ 对于 $x\in H$成立。此外，关于欧拉示性数的假设仍适用于$w(G)=1-f_G(-1)\in\mathbb{Z}_2=\{-1,1\}$，且 $w(G+H)=f_G(-1)f_G(-1)$ 仍属于 $\{-1,1\}$。

推论 4. 每个欧拉示性数为 $1+(-1)^d$ 的 d-流形都是 Dehn-Sommerville。

证明。原因在于单位球面是球面，因此满足德恩-索默维尔关系。高斯-博内公式表明， f-向量G 作为德恩-索默维尔表达式的积分，也满足德恩-索默维尔关系。□

6.4. 德恩-索默维尔关系令人瞩目。例如，对于任意4维球面， f-向量满足

$$-22f_1+33f_2-40f_3+45f_4=0\ .$$

例如，对于顶点为 $f=(f_0,f_1,f_2,f_3,f_4)=$(10, 40, 80, 80, 32) 的最小4维球面，有

$$(10,40,80,80,32)\cdot(0,-22,33,-40,45)=0\ .$$

7. Poincaré-Hopf

7.1. 再次，令 $V=\subset G$为 G中 0 维集合的集合。它可以自然地与 $\bigcup_x x$ 对应（尽管两者并不相同。对象 $\{\{v\}\}$与 $\{v\}$并不相同）。定义在 V 上的函数是局部单射的，当且仅当 $f(v)\neq f(w)$ 对每个 $w\in S(x)\cap V$都成立。对于这样的函数，定义 $S_f^-(v)=\{x\in S(v)\ f(v)<f(w)\ \forall w\in V\cap S(v)\}$ 以及 $S_f^+(v)=\{S(v)\ f(v)>f(w)\ \forall w\in V\cap S(v)\}=S_{-f}^-(v)$。庞加莱-霍普夫定理保证

$$w(G)=\sum_{w\in V\cap S(v)}i_f(w)=\sum_{w\in V\cap S(v)}i_{-f}(w)\ .$$

7.2. 根据 [59], , 现在有

$$w(G) = \sum_{w \in V \cap S(v)} j_f(w) \ ,$$

其中 $j_f(w) = (i_f(w) + i_{-f}(w))/2$ 是两个指标的平均值。赋值公式给出

$$w(S^-(v)) + w(S^+(v)) = w(S(v)) - w(C(v)) \ ,$$

其中 $C(v)$ 是 $S(v)$ 中 $f - f(v)$ 符号发生变化的单形 x。将这些元素视为图中的顶点并取其惠特尼复形，自然就得到 G 的重心细分的一个子单纯复形。赋值公式等价于

$$w(S(v)) - 2 - j_f(v) = w(C_f(v)) \ .$$

我们将 $C_f(v)$ 称为 f 在 v 处的中心流形。在经典莫尔斯理论中，这是临界点附近小球面 $S_r(v)$ 上的流形 $\{w \in S_r(v) \ f(w) = f(v)\}$；根据经典萨德定理，它通常是一个 $(d-2)$ 维流形或空集。

7.3. 对于莫尔斯函数 f，空间 $C_f(v)$ 实际上是一个 $(d-2)$ 维流形或空集。对于流形上的莫尔斯函数，每个临界点处也有对称指标 $j_f(v) = i_f(v) + i_{-f}(v) = 0$，因此可以再次推导出零欧拉示性数的结论。重心细分 G_1 是这样的图的惠特尼复形：若 G 中的两个集合互相包含，则它们之间有边相连：

定理 5（离散萨德定理）。如果 G 是一个 d-流形，且 $f : G \to R$ 局部单射，那么对于任意 $c \neq f(V)$，$\{f = c\}$ 是 G_1 中的一个离散（$d-1$）-流形。

证明。可以用归纳法按维数证明。为了证明单位球面 $S(x)$ 是一个（$d-1$）球面，注意到根据归纳法，每个单位球面（一个（d-1）球面）上的交集 $\{f = c\}$ 是一个 $d-2$ 维流形。但我们还可以进一步说明：一般而言，在 G_1 中，每个单位球面都是 $S^-(x) = \{y \in S(x) \ y \subset x\}$ 和 $S^+(x) = \{y \in S(x) \ x \subset y\}$ 的图论中的联接。现在，由于 $f - f(x)$ 在 $S^+(x)$ 上变号，但根据归纳法在 S^- 上不变号，所以 $S^+(x)$ 中的水平曲面是一个维数低一维的球面。球面 $S(x) \cap \{f = c\}$ 在 G 的水平曲面中，现在是 $S^-(x)$ 与 $S^+(x)$ 中的水平 $\{f = c\}$ 的图论中的联接；后者是 $S^+(x)$ 中余维为 1 的球面。□

7.4. 局部单射函数 f 的对称指标为 $j_f(v) = [2 - w(S(v)) - w(C_f(v))]/2$，其中 $C_f(v)$ 是 $S(v)$ 中的中心流形。（见 [59]）

7.5. 若 G 是奇数维 d 维流形，则 $S(v)$ 是偶数维球面，而根据离散萨德定理， $C_f(v)$ 是一个 $(d-2)$ 维流形。因此我们有 $w(S(v)) - 2 = 0$ ，因为 $S(v)$ 是偶数维球面。对称指标为

$$j_f(v) = w(C(v)) = 0 \, .$$

我们看到，对两个函数 $f, -f$ 取平均得到的指标期望给出的曲率恒为 0。结论仍然是 $w(G) = 0$。

7.6. 指标公式在偶数维度下也很有趣：例如对于一个 4维流形，可以将高斯-博内曲率视为 $j_f(v) = 1 - w(C_f(v))/2$ 的期望。这样，我们就可以用“随机二维中心流形” $C_f(x)$的欧拉示性数的期望来理解 4维流形的欧拉示性数。在正曲率的情形下， $C_v(v)$ 是连通的；根据流形分类，这表明 $w(C_f(v)) \leq 2$，因此 $j_f(v) \geq 0$，这与米尔诺 [16] 的观察相符：对于正曲率的 4维流形，高斯-博内-陈曲率非负。维数达到 6 及以上时，这一论证不再适用，因为曲率可能已经变为负值 [33, 55]。参见 [44, 6, 9]。指标分析提示我们，应当寻找这样的函数概率空间：其中 $j_f(v) \geq 0$，而且不是恒为 0。这等价于 $w(C_f(v)) \leq 2$。

8. Some references

8.1. 有限抽象单纯复形这一概念由 Dehn 和 Heegaard 提出 [20, 13, 96]。Dehn-Sommerville关系可追溯至 Dehn 和 Sommerville [23, 54, 101, 98, 91, 12, 40, 51, 7]。欧拉示性数最初用于研究柏拉图立体，最早由笛卡尔通过实验加以研究。欧拉在 $d = 2$ 的情形以及平面图的情形下给出了宝石公式[53, 89, 36, 105]。欧拉示性数也在不变赋值的背景下得到研究[38, 52]。在赋值空间中，它是唯一经过规范化且在重心细分下保持不变的赋值；该空间的维数为 $(\dim(G) + 1)$。关于与单纯复形相关的有限拓扑空间，见[1, 112, 92]。关于连续统中的 McKean-Singer，见 [93, 19], ；关于高维经典高斯-博内定理，见 [3, 2, 27, 15, 106, 19]；关于离散情形，见 [90]。关于 Poincar´e-Hopf，见 [102, 43, 94]。关于离散莫尔斯理论中的离散莫尔斯理论概念，见 [28, 29, 31, 32, 30] 。关于数字拓扑中球面的概念，见 [46, 47, 25] 、[26] ；关于离散微分几何，见 [11] 。拓扑学家将单纯复形的几何实现称为“多胞体”，但大多数

多胞体文献讨论的是凸多胞体，因此是 d-球面的几何实现 [109, 18, 37, 49, 116]。早在离散领域中，离散同伦的概念就已由 [114] 和 Evako 研究。[14]中出现了一项关键的简化。积分几何等几何中的概率概念可追溯至 [10, 108, 4, 5, 100]。图论中的联接由 [117] 引入。关于流形的历史，参见 [48, 110]。在德恩-索默维尔的背景下，图的算术也随之出现。流形在不交并下保持不变，但在联接运算下不保持不变。而球面，乃至更一般的 Dehn–Sommerville空间，则构成联接幺半群。关于图的乘法，参见 [111, 107, 45, 39]。Hopf猜想很早就出现在高斯-博内定理的背景中 [42, 3, 27, 2, 15, 17, 19]。Hopf猜想 [44] 在六十年代再次出现 [9] [16] ，并被列为问题集 [115]中的第8和第10题。关于高斯-博内定理的历史评述，见 [17], ；关于流形，见 [21, 48]。曲率的离散概念最早出现于 [24]，随后被用于图着色等研究背景 [8]。二维情形下也出现了各种变体[34, 103, 104, 41, 99, 113]。

8.2. 过去几年里，我们一直在探讨这个主题，通常采用图论框架；这种框架几乎与单纯复形框架等价，因为每个图都自然对应一个Whitney单纯复形，它由完全子图的顶点集构成；而每个单纯复形 G 都会定义一个图，其中 G 是顶点，且当一个顶点包含在另一个顶点中时，两者之间就有连边。许多文献将图视为一维单纯复形，也就是说，图上的单纯复形就是 1-骨架复形 $V \cup E$。在拓扑图论中，人们研究嵌入曲面 [35] 中的图，因此会涉及二维 CW 复形，其中嵌入的连通分支充当 2-胞腔。图与单纯复形之间有着密切联系，因为有多种方法可以从图构造更高维的单纯复形。Whitney 构造是最自然的一种，因为连通性、几何性质、微分几何性质或上同调性质，都与人们对几何实现的预期相符。 [22, 97] ，尤其是 [50]。

8.3. 关于与能量定理相关的庞加莱-霍普夫，请参见[58, 80, 81, 79]。关于能量主题，请参见 [76, 84, 78, 83]。关于指标期望，请参见 [60, 65, 59, 86, 75]。关于萨德定理，请参见 [68]，该定理试图接近经典萨德定理。关于高斯-博内定理，请参见 [57, 56, 70, 72, 77]。关于霍普夫类型问题的一些离散研究，请参见 [85, 86]，关于常曲率的研究请参见 [75]。关于霍奇或 McKean-Singer 主题，请参见 [61, 63] 。关于有限拓扑的主题

关于图或复形，请参见 [66, 88]。关于综述性尝试，请参见 [62, 74, 64]。关于我们自己对图的算术的探索，包括 Zykov-Sabidussi 环及其对偶 Shannon 环，请参见 [73, 87, 82]。

9. Code

9.1. 以下代码可供感兴趣的读者尝试文中介绍的一些概念。计算机利用 Whitney 函子，根据随机图生成随机复形，效果良好。使用给定参数生成的随机复形通常为 4—5 维。

```
Cl[A_]:=If[A=={},{},删除[并集[排序[展平[映射[子集,A],1]],1]];
F向量[G_]:=If[长度[G]==0,{},删除[BinCounts[映射[长度,G]],1]];
Ffunction[G_,t_]:=模块[{f=F向量[G],n},清除[t];n=长度[f];
  If[长度[G]==0,1,1+总和[f[[k]]*t^k,{k,n}]]];
Whitney[s_]:=If[长度[边列表[s]]==0,映射[{#}&,顶点列表[s]],
  映射[排序,排序[Cl[查找团[s,Infinity,全部]]]]];
U[G_,x_]:=模块[{u={}},
  对[若[子集判定[G[[k]],x],u=追加[u,G[[k]]]],{k,长度[G]}];u];
星星[G_]:=表[U[G,G[[k]]],{k,长度[G]}];
球体[G_]:=表[u=U[G,G[[k]]];补集[Cl[u],u],{k,长度[G]}]
w[x_]:=-(-1)^长度[x];        Chi[A_]:=Total[映射[w,A]];
g[G_]:=模块[{V=星星[G],n=长度[G]},表[w[G[[k]]]*w[G[[l]]]*
  Chi[交集[V[[k]],V[[l]]]],{k,n},{l,n}]];
sg[G_]:=模块[{V=球体[G],n=长度[G]},表[w[G[[k]]]*w[G[[l]]]*
  Chi[交集[V[[k]],V[[l]]]],{k,n},{l,n}]];
曲率[G_,t_]:=模块[{h=Ff函数[G,y]},积分[h,{y,0,t}]];
曲率[G_,t_]:=模块[{S=球体[G]},表[If[长度[G[[k]]]==1,
  曲率[S[[k]],t],0],{k,长度[S]}]];
Levitt[G_]:=-曲率[G,t]/.t->(-1);
Zykov[A_,B_]:=模块[{q=最大[展平[A]],Q,G=A},
  Q=表[B[[k]]+q,{k,长度[B]}];
  执行[G=追加[G,并集[A[[a]],Q[[b]]]],{a,长度[A]},{b,长度[Q]}];
  G=并集[G,Q];      我f[A=={},G=B];如果[B=={},G=A];G];
DehnSommervilleQ[G_]:=模块[{f},清除[t];f=Ff函数[G,t];
   简化[f]===简化[(f/.t->-1-t)]];

s=随机图[{20,100}];G=Whitney[s];          K=Levitt[G];Q=sg[G];
打印["f-vector ...",F向量[G]];
打印["Gauss-Bonnet",..Total[K]==Chi[G]];
H=Whitney[循环图[4]];球面3=Zykov[H,H];球面5=Zykov[球面3,H];
打印["3-.球面..is.平面.",并集[Levitt[球面3]]=={0}];
打印["5-.球面..is.平坦...",并集[Levitt[球面5]]=={0}];
打印["绿色-星.矩阵..是幺模的。.Det=...",Det[g[G]]];
打印["零空间.球面的..格林.矩阵:...",Length[零空间[Q]]];
打印["球面.公式...",求和[w[G[[k]]]*Q[[k,k]],{k,长度[G]}]==0];
打印["3-球面is..Dehn-Sommerville.",DehnSommervilleQ[球面公式3]];
打印["5-球面是..Dehn-Sommerville.",DehnSommervilleQ[球面5]];
打印["圆盘不是D-S",不是[DehnSommervilleQ[Whitney[星图[5]]]]];
```

一个尚待解答的问题是格林球面矩阵 $s(x,y) = w(x)w(y)w(S(x) \cap S(y))$ 的核相对较大这一现象有何意义。鉴于 $g(x,y) = w(x)w(y)w(U(x) \cap U(y))$ 总是

幺模，这一点颇令人意外。我们在实验中尝试探究零度与 f-向量之间的关联。

References

[1] P. Alexandroff。《离散空间》。Mat. Sb. 2, 2, 1937.[2] C. Allendoerfer 和 A. Weil。黎曼多面体的高斯-博内定理。《美国数学会汇刊》，53:101–129, 1943.[3] C.B. Allendoerfer。黎曼流形的欧拉数。《美国数学杂志》，62:243, 1940.[4] T. Banchoff。嵌入多面体的临界点与曲率。《微分几何杂志》，1:245–256, 1967.[5] T. F. Banchoff。嵌入多面体曲面的临界点与曲率。《美国数学月刊》，77:475–485, 1970.[6] M. Berger。《黎曼几何全景》。施普林格，2003.[7] M. Berger。《微分几何的雅各布天梯》。施普林格出版社，柏林，2009.[8] H-G. Bigalke。Heinrich Heesch，晶体几何、镶嵌与四色问题研究。Birkh¨auser，1988.[9] R.L. Bishop 和 S.I. Goldberg。广义高斯-博内定理的若干推论。《美国数学会汇刊》，112:508–535, 1964.[10] W. Blaschke。《积分几何讲义》。Chelsea Publishing Com- pany，纽约，1949.[11] A. Bobenko 和 Y. Suris。《离散微分几何：可积结构》，数学研究生教材第 98 卷。美国数学会，2008.[12] F. Brenti 和 V. Welker。重心细分的 f-向量。《数学杂志》，259(4):849–865, 2008.[13] G. Burde 和 H. Zieschang。复形概念的发展。载于《拓扑学史》。爱思唯尔，1999.[14] B. Chen、S-T. Yau 和 Y-N. Yeh。图同伦与Graham同伦。《离散数学》，241(1-3):153–170, 2001。Helge Tverberg荣誉论文选集。[15] S.-S. Chern。闭黎曼流形高斯-博内公式的一个简单内蕴证明。《数学年刊》，45, 1944.[16] S-S. Chern。G-结构的几何。《美国数学会通报》，72:167–219, 1966.[17] S-S. Chern。关于高斯-博内定理的历史评述。载于《分析及其他》，第209–217页。Academic Press，波士顿，马萨诸塞州，1990.[18] H.S.M. Coxeter。《正多胞体》。多佛出版社，纽约，1973.[19] H.L. Cycon、R.G.Froese、W.Kirsch 和 B.Simon。《薛定谔算子——及其在量子力学与整体几何中的应用》。施普林格出版社，1987.[20]M. Dehn 和 P. Heegaard。位置分析。《数学科学百科全书》，III.1.1:153–220, 1907.[21] J. Dieudonne。《代数拓扑与微分拓扑史，1900—1960年》。Birkh¨auser，1989.[22]R.A. Piccinini、D.L. Ferrario。《拓扑学中的单纯结构》。施普林格，2011。

[23] D. Dommerville。n维空间中多胞体角度和与体积之间的关系。《英国皇家学会学报A辑》，115:103–19, 1927.[24] E. Eberhard。《多面体形态学》。Teubner Verlag，1891.[25]A.V. Evako。离散空间中的维数。《国际理论物理学杂志》，33(7):1553–1568, 1994.[26] A.V. Evako。数字正规n维空间中的若尔当-布劳威尔定理 Z^n。http://arxiv.org/abs/1302.5342, 2013.[27] W. Fenchel。黎曼流形的全曲率（i）。《伦敦数学学会杂志》，15:15, 1940.[28] R. Forman。胞腔复形的离散莫尔斯理论。载于《几何、拓扑与物理》，会议论文集《几何与拓扑讲义》，IV，第112–125页。Int. Press，剑桥，马萨诸塞州，1995.[29] R. Forman。胞腔复形的莫尔斯理论。《数学进展》，第90页，1998.[30] R. Forman。组合微分拓扑与几何。载于《几何组合学新视角》，38, 1999.[31] R. Forman。欧拉示性数是有限单纯复形唯一的局部确定数值不变量，并且对每个锥都赋予相同的数值。《离散与计算几何》，23:485–488, 2000.[32] R. Forman。《离散莫尔斯理论指南》。《洛塔林组合学研讨班》，48, 2002.[33] R. Geroch。正截面曲率并不意味着高斯-博内被积函数为正。《美国数学会会刊》，54, 1976.[34] M. Gromov。双曲群。载于《群论论文集》，数学科学研究所出版物第8卷，第75–263页。施普林格，1987.[35] J.L. Gross 和 T.W. Tucker。《拓扑图论》。约翰·威立父子公司，1987.[36] B. Gr¨unbaum。你的多面体和我的多面体是同一回事吗？载于《离散与计算几何》，算法与组合第25卷，第461–488页。施普林格，柏林，2003.[37] B. Gr¨unbaum。《凸多胞体》。施普林格，2003.[38] H. Hadwiger。《体积、表面积与等周性质讲义》。施普林格出版社，柏林，1957, 1957.[39] R. Hammack、W. Imrich 和 S. Klavˇzar。《乘积图手册》。离散数学及其应用（博卡拉顿）。CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，第二版，2011。Peter Winkler作序。[40] G. Hetyei。单纯复形的斯特林多项式。《离散与计算几何》，35:437–455, 2006.[41] Y. Higuchi。平面图的组合曲率。《图论杂志》，38:220–229, 2001.[42] H. Hopf。关于闭超曲面的整体曲率。《数学年刊》，95(1):340–367, 1926.[43] H. Hopf。关于闭超曲面的整体曲率。《数学年刊》，95:340–367, 1926.[44] H. Hopf。《微分几何与拓扑形状》。《德国数学家联合会年报》，41:209–228, 1932.[45] W. Imrich 和 S. Klavzar。《乘积图：结构与识别》。约翰·威立父子公司，纽约，2000。

[46] A. Ivashchenko. 可缩变换不会改变图的同调群。《离散数学》，126(1-3):159–170, 1994.[47] A.V. Ivashchenko. 球面与环面的图。《离散数学》，128(1-3):247– 255, 1994.[48] J. James. 拓扑学史。载于《拓扑学史》，1999.[49] C. Goodman-Strauss J.H. Conway, H.Burgiel. 事物的对称性。A.K. Peterse, Ltd., 2008.[50] J. Jonsson. 图的单纯复形，数学讲义第1928卷。施普林格，2008.[51] D. Klain. 三角剖分流形的 Dehn-Sommerville关系。http://faculty.uml.edu/dklain/ds.pdf, 2002.[52]D.A. Klain and G-C. Rota. 几何概率导论。Lezioni Lincee。Accademia nazionale dei lincei, 1997.[53] V. Klee. 组合几何中的欧拉示性数。《美国数学月刊》，70(2):第119–127页，1963.[54] V. Klee. 庞加莱对偶定理的组合类比。《加拿大数学杂志》，16:517–531, 1964.[55] P.F. Klembeck. 关于 Geroch 对代数 Hopf 猜想的反例。美国数学会会议录，59, 1976.[56] O. Knill. 图论高斯–博内–切恩定理。http://arxiv.org/abs/1111.5395, 2011.[57] O. Knill. 一种离散高斯–博内型定理。《数学元素》，67:1–17, 2012.´O. Knill. 图论中的庞加莱-霍普夫定理。http://arxiv.org/abs/1201.1162, 2012.[59] O. Knill. 简单图的指标公式。http://arxiv.org/abs/1205.0306, 2012.[60] O. Knill. 网络的指标期望与曲率。http://arxiv.org/abs/1202.4514, 2012.[61] O. Knill. 图论中的 McKean-Singer公式。http://arxiv.org/abs/1301.1408, 2012.[62] O. Knill. 图论中的 Green-Stokes、Gauss-Bonnet 和 Poincare-Hopf 定理。http://arxiv.org/abs/1201.6049, 2012.[63] O. Knill. 图的狄拉克算子。http://http://arxiv.org/abs/1306.2166, 2013.[64] O. Knill. 拓扑图论中的经典数学结构。http://arxiv.org/abs/1402.2029, 2014.[65] O. Knill. 从图着色得到的曲率。http://arxiv.org/abs/1410.1217, 2014.[66] O. Knill. 一种图同胚的概念。http://arxiv.org/abs/1401.2819, 2014.[67] O. Knill. 重心细分的图谱。http://arxiv.org/abs/1508.02027, 2015.[68] O. Knill. 图论中的萨德定理。http://arxiv.org/abs/1508.05657, 2015.[69] O. Knill. 重心细分的普适性。http://arxiv.org/abs/1509.06092, 2015.

[70] O. Knill. 多线性赋值的高斯-博内定理。http://arxiv.org/abs/1601.04533, 2016.[71] O. Knill. 关于拓扑学中的弗雷德霍姆行列式。
https://arxiv.org/abs/1612.08229, 2016.[72] O. Knill. 关于单纯复形的德恩-索末维尔泛函。https://arxiv.org/abs/1705.10439, 2017.[73] O. Knill. 关于图的算术。
https://arxiv.org/abs/1706.05767, 2017.[74] O. Knill. 单纯复形的奇妙世界。
https://arxiv.org/abs/1804.08211, 2018.[75] O. Knill. 图或黎曼流形的恒定指标期望曲率。https://arxiv.org/abs/1912.11315, 2019.[76] O. Knill. 单纯复形的计数矩阵。https://arxiv.org/abs/1907.09092, 2019.[77] O. Knill. 从高斯-博内定理导出德恩-索末维尔关系。https://arxiv.org/abs/1905.04831, 2019.[78] O. Knill. 能量化单纯复形。https://arxiv.org/abs/1908.06563, 2019.´O. Knill. 关于庞加莱-霍普夫定理和高斯-博内定理的更多讨论。
https://arxiv.org/abs/1912.00577, 2019.[80] O. Knill. 参数化庞加莱-霍普夫定理与图的团基数。https://arxiv.org/abs/1906.06611, 2019.´O. Knill. 图上向量场的庞加莱-霍普夫定理。https://arxiv.org/abs/1911.04208, 2019.[82] O. Knill. 复形、图、同伦、乘积与香农容量。https://arxiv.org/abs/2012.07247, 2020.[83] O. Knill. 单纯复形的能量。《线性代数及其应用》，600:96–129, 2020.[84] O. Knill. 能量化复形的格林函数。https://arxiv.org/abs/2010.09152, 2020.[85]O. Knill. 积分几何霍普夫猜想。https://arxiv.org/abs/2001.01398, 2020.[86]O. Knill. 关于流形的指标期望曲率。https://arxiv.org/abs/2001.06925, 2020.[87] O. Knill. 关于图的算术的评述。https://arxiv.org/abs/2106.10093, 2021.[88] O. Knill. 有限几何的有限拓扑。http://arxiv.org/abs/2301.03156, 2023.[89] I. Lakatos.《证明与反驳》。剑桥大学出版社，1976.[90] N. Levitt. 欧拉示性数是有限复形唯一的、由局部决定的数值同伦不变量。《离散与计算几何》，7:59–67, 1992.[91] A. Luzon and M.A. Moron. 帕斯卡三角形、斯特林数与欧拉示性数的唯一不变性。arxiv.1202.0663, 2012.[92] J.P. May. 有限拓扑空间。芝加哥 REU 讲义，2003-2008,2008.

[93] H.P. McKean和I.M. Singer。曲率与拉普拉斯算子的特征值。《微分几何杂志》，1(1):43–69，1967。[94] M. Morse。一般边界条件下向量场的奇异点。《美国数学杂志》，51，1929。[95] S.K. Mukherjee和S. Bera。Oliver Knill《单模性定理》的一个简单初等证明。《线性代数及其应用》，第124–127页，2018。[96]E.S. Munkholm和H.J. Munkholm。Poul Heegaard，《Dehn-Heegaard Enzyklop¨adie》条目（1907）。http://www.imada.sdu.dk/ˆhjm/heegaard3.stor/heegaard3.stor.html，1998，访问于2017年10月4日。[97] J.R. Munkres。《代数拓扑学基础》。Addison-Wesley，1984。[98]S. Murai和I. Novik。带边界流形的面数。http://arxiv.org/abs/1509.05115，2015。[99] O. Narayan和I. Saniee。网络的大尺度曲率。《物理评论E》，84，2011。[100] L. Nicolaescu。《流形几何讲义》。世界科学出版社，第二版，2009。[101] I. Novik和E. Swartz。Klee 的德恩–索末维尔关系的应用。《离散与计算几何》，42(2):261–276，2009。[102] H. Poincar´e。关于由微分方程定义的曲线 III。《纯粹与应用数学杂志》，第167–244页，1885。[103] E. Presnov和V. Isaeva。位置信息作为形态发生场的对称性。《Forma》，5:59–61，1990。[104] E. Presnov和V. Isaeva。生物形态发生的局部与全局方面。《科学与技术思辨》，14:68，1991。[105] D.S. Richeson。《欧拉的宝石》。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2008。多面体公式与拓扑学的诞生。[106] S. Rosenberg。《黎曼流形上的拉普拉斯算子》，伦敦数学会学生教材第31卷。剑桥大学出版社，1997。[107] G. Sabidussi。图乘法。《数学杂志》，72:446–457，1959/1960。[108] L.A. Santalo。积分几何导论。Hermann and Editeurs，巴黎，1953。[109] L. Schl¨afli。多重连续性理论。康奈尔大学图书馆数字馆藏，1901。[110] E. Scholz。流形概念，1850—1950。载于《拓扑学史》。Elsevier，1999。[111] C. Shannon。噪声信道的零差错容量。《IRE信息论汇刊》，2:8–19，1956。[112] R.E. Stong。有限拓扑空间。《美国数学会汇刊》，第325–340页，1965。[113] T. R´eti，E. Bitay，Z. Kosztol´anyi。关于具有正组合曲率的多面体图。《匈牙利理工学报》，2:19–37，2005。[114] J.H.C. Whitehead。单纯空间、核与m群。《伦敦数学会会刊》，45(1):243–327，1939。[115] S.T. Yau。问题部分。载于《微分几何研讨班》，《数学年刊研究丛书》第102卷。普林斯顿大学出版社，1982。[116] G.M. Ziegler。《多胞体讲义》。施普林格出版社，1995。

[117] A.A. Zykov。关于线性复形的一些性质。（俄文）。Mat. Sbornik N.S., 24(66):163–188，1949。

Department of Mathematics, Harvard University, Cambridge, MA, 02138