arXiv:2301.05769v1 [math.LO] 13 Jan 2023

微分闭域与锥上的普遍性

RUSSELL MILLER

Abstract. Marker 和作者在 [21] 中证明，所有特征 0 的可数微分闭微分域 K 这一类，在结构谱的普适性方面“只差一个跳跃”：对于每个非平凡的可数结构 $\mathfrak{M}$，都存在某个 K，其谱是 $\mathfrak{M}$的谱在跳跃映射下的原像；反过来，对于每个 K，也都存在这样的 $\mathfrak{M}$。我们证明，只要在微分域的语言中加入一个描述某种代数超越性质的谓词，就能弥补所缺少的跳跃。由此得到的新语言下微分闭域的普适性结果，不仅涵盖结构谱，还包括许多与可计算范畴性相关的性质。然而，后者的普适性结果仅在某个特定Σ^0_1 预言机集合之上的锥上成立，而该集合的可判定性状况仍然未知。此外，对于自同构群，即便不要求有效性，微分闭域也根本不具备普适性。

我们还为 [21]补充了一则简短勘误（备注 3.2）。

1. 引言

特征零的普通微分闭域理论 DCF_0 与该特征下代数闭域的理论 ACF_0 有着根本性的相似之处。这两个理论都是完全且可判定的，并且都具有量词消去性质。然而，模型论学家发现，DCF_0 在若干方面比 ACF_0更复杂。例如，DCF_0的莫雷秩为 $\omega+1$（见 [19, 推论 5.14]），而 ACF_0, 的莫雷秩为 1：代数闭域的每个可定义子集必定是有限集或余有限集，而一个代数微分方程则可能有无穷多个解。

在代数闭域理论$_0$, 中，当然，可数模型由其超越次数刻画，而超越次数必须是基数 $\leq \omega$，因此这样的模型至多只有可数多个。Hrushovski 和 Sokolovi´c [14] 通过证明微分闭域理论$_0$ 有连续统多个可数模型，确立了这两种理论之间的另一项重大差异。为此，他们针对每个可数图 G构造了一个微分闭域理论$_0$的模型 $\mathscr{D}(G)$

本文的研究部分由西蒙斯基金会的资助编号581896以及纽约市立大学 PSC-CUNY研究奖计划的多项资助支持。作者参加由美国国家科学基金会资助编号 DMS-1928930 支持、并于2022年夏季在加利福尼亚州伯克利的西蒙斯-劳弗数学科学研究所举办的项目期间，与 David Marker、Matthew Harrison-Trainor 和 Tom Scanlon 进行了有益的交流。

~ ~使得 $\mathscr{D}(G) \cong \mathscr{D}(G)$当且仅当 $G \cong G$。（[28] 对他们的结果作了很好的描述。）在[21], 中，Marker 和作者考察了从 G 构造 $\mathscr{D}(G)$的过程在多大程度上是有效的。结果表明，该过程是图灵可计算的：给定原子图$D(G)$，就能以统一且有效的方式生成原子图 $D(\mathscr{D}(G))$。事实上，结论还更强：即使仅给出 $D(G)$的一个近似，也能统一地计算出 $D(\mathscr{D}(G))$。然而，反过来则不成立：通常无法根据 $\mathscr{D}(G)$的任意一个副本，计算出 G 的一个副本的原子图。 [21]的主要结果表述如下。（回顾定义：对于可数结构 A，Spec(A) = {deg(D(B)) : B $\cong$ A & dom(B) = ω}。）

定理 1.1（ [21]中的定理 5.5）。集合 S 是某个微分闭域理论$_0$ 模型的图灵度谱，当且仅当存在一个可数的、自同构非平凡图 G ，使得

$$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{d} : \boldsymbol{d}' \in Spec(G)\}.$$

特别地，对于图 G，Spec($\mathscr{D}(G)$) 是在跳跃运算 $\boldsymbol{d} \mapsto \boldsymbol{d}'$ 下 Spec(G) 的原像。

所有定义域为 ω 的对称、无自反且自同构非平凡的图所构成的图类 Graphs，已知对于所有标准的可计算结构理论性质都是普适的。这一结果主要见于 [13], ，尽管其中的各个方面此前已经得到证明。事实证明，对于 [13] 首次出现时尚未被认识到的某些性质，这一结果同样成立。complete 一词常与“universal”互换使用，以命名这一性质。这里我们选择使用“universal”，因为我们将在其他几种意义上使用“complete”：指极大相容理论、极大相容类型、生成完全类型的公式 $\varphi(x)$、没有缺失边的图，以及在算术层级或博雷尔层级中各自层级内具有最大复杂度的 ω 子集。

普适性包括这样一个事实：每个自同构非平凡结构的谱，也都是 Graphs 中某个图的谱。它还包括一系列大量的其他性质，我们将在第 5 节中详细说明这些性质。本文旨在精确阐明定理 1.1 中的直觉：DCFields$_0$（DCF$_0$ 的可数模型类）距离具有普适性仅“一次跳跃”之遥。我们将证明，当在微分域的语言中加入一个一元关系符号C 时——该符号恰好适用于那些在微分闭包 $\widehat{\mathbb{Q}}$ 中的某个特定微分子域$\mathbb{Q}A$上代数的元素——所得的、使用这一语言的 DCF$_0$ 可数模型类 DCFC，对于许多可计算模型论性质而言都是普适的，其意义与 Graphs 中的情形相同，只是这种普适性在一个锥上成立。下面我们将进一步阐述这一概念。当然， $C(x)$ 是 x 的一个 Σ_1性质，它由可计算的 $L_{\omega_1\omega}$ 公式定义；该公式断言 x 是A上的某个非平凡代数方程的解。（此外， A 本身在 $\widehat{\mathbb{Q}}$中无需参数即可定义。）因此，DCFields$_0$ 所“缺少”的那一次跳跃，源于在 DCF$_0$的模型中判定A上的代数性这一困难。

另一方面，我们将在第 6 节指出，这些普适性结果无法推广到自同构群：在这一语境下，图的复杂性仅仅高于 DCF_0的模型。

澄清一下： C 定义的是关于 $\mathbb{Q}A$ 的域论代数性，而非微分代数性。在第 4 节中，我们将讨论另一种做法：用一个定义更自然的符号替换 C，即关于 $\mathbb{Q}$ 本身的代数依赖二元关系；所得结果等价。

在 [24], Poonen、Schoutens、Shlapentokh 和作者的工作中，他们使用可计算函子的概念证明，计数域$_p$ （任意固定特征 $p \geq 0$）这一类在 [13]意义下是普遍的。当然，函子主要出现在范畴论中；事实上，这些作者将计数域$_p$ 视为一个范畴，正如我们在这里对上述各类所做的那样。

定义 1.2. 计数域$_p$、$\mathrm{DCFields}_0$, DCFC 和图是一些范畴，其对象是给定类中定义域为 ω 的所有结构（分别为：特征 $p \geq 0$的域、理论 DCF_0, 的模型、签名中带有代数性谓词 C的 DCF_0 模型，以及对称、无自反且自同构非平凡的图）；从对象 M 到另一对象 N的态射，恰好是将 M 映到 N上的那些同构。（图范畴中的元素可描述为 $(\omega^2 - \{(x,x) : x \in \omega\})$ 的对称无限余无限子集。）

由于代数性谓词 C is $L_{\omega_1\omega}$可定义，范畴 DCFC 和 $\mathrm{DCFields}_0$ 具有完全相同的对象和完全相同的态射。然而，同一个对象在这两个范畴中的原子图不同（一个带有C，另一个不带），而就可计算性而言，它们是不同的范畴。具体来说，一个 $\mathrm{DCFields}_0$ 中的呈现 K ϵ可能在那里具有可计算的原子图$D(K)$，但作为 DCFC 中的对象，同一个 K 可能不再可计算，因为在 $\mathbb{Q}A$ 上的代数性在 K 中可能不可判定。还应注意，与 $\mathrm{DCFields}_0$, 不同，DCFC 并非某个完备理论的所有可数模型所组成的集合，因为理论无法确保 C 恰好对那些在 $\mathbb{Q}A$ 上代数的元素成立。（存在一个无限公理模式，规定 C 对所有这类代数元素成立，但反向蕴含需要一个无穷公式。）

就本文的目的而言，我们有必要对可计算函子的概念进行相对化和推广。该概念最初定义于 [24]。我们先进行相对化。

定义 1.3. 设 $S \subseteq \omega$。从上文任一范畴 C 到另一任意范畴 D 的一个 S-可计算函子 $\mathscr{F}$，是一个通常意义上的范畴论函子，并且还满足以下性质：存在图灵泛函 Φ 和 Φ_*，使得对于 C 中所有结构 M 和 N，以及 C 中所有同构 $f : M \to N$，

- $\Phi^{S\oplus D\,(M)}$ 计算出 $\mathscr{F}(M)$ 的原子图；并且
- $\Phi^{S\oplus D\,(M)\,\oplus f\oplus D\,(N)}{}_*$ $= \mathscr{F}(f)$，计算从 $\mathscr{F}(M)$的定义域ω到 $\mathscr{F}(N)$ 的定义域 ω的同构 $\mathscr{F}(f)$。

如果固定的预言机集合 S 是可判定的，那么按照 [24, 定义 3.1]的含义，该函子是一个可计算函子。

起初，我们希望将这一概念应用于图和 DCFC，并以与 [24] 对图和域所做的相同方式，使用来自 [21], 的构造。但由于下文将要讨论的原因，这行不通。因此，我们将采用较弱的范畴归约概念，省去通常称为“函子性”的要求。

定义 1.4. 从上述任一范畴 C 到另一范畴 D 的范畴归约 $\mathscr{F}$ 由两个映射组成（如同函子一样，二者都记作 $\mathscr{F}$）：一个将 C 的每个对象 M 映射到 D 中的一个对象 $\mathscr{F}(M)$，另一个将 C 的每个态射 $f : M \to N$ 映射到 D 中的一个态射 $\mathscr{F}(f) : \mathscr{F}(M) \to \mathscr{F}(N)$。态射上的映射 $\mathscr{F}$ 不必保持复合，也不必将恒等态射映射为恒等态射。

固定 $S \subseteq \omega$。若范畴归约 $\mathscr{F}$ 还满足以下性质，则称其为 S-可计算的：存在图灵泛函 Φ 和 Φ_*，使得对于 C 中所有结构 M 和 N，以及 C 中所有同构 $f : M \to N$，

- $\Phi^{S \oplus D(M)}$ 可计算出 $\mathscr{F}(M)$ 的原子图；并且
- $\Phi^{S \oplus D(M) \oplus f \oplus D(N)_*} = \mathscr{F}(f)$，计算从 $\mathscr{F}(M)$ 的定义域 ω 到 $\mathscr{F}(N)$ 的定义域 ω 的同构 $\mathscr{F}(f)$。

如果预言机集合 S 是可判定的，那么 $\mathscr{F}$ 就是一个可计算范畴约化。

我们将仿照 [24], 的例子，使用预言机计算一个从图到 DCFC 的归约 $\mathscr{D}$，然后再从 $\mathscr{D}$ 的像构造一个回到图的可计算归约 $\mathscr{G}$，使得两个方向的复合在相应范畴上都是恒等函子（相差一个可计算自然同构，如下文所定义）。第一个变化是，$\mathscr{D}$ 不是函子，尽管 $\mathscr{G}$ 会是函子。这将排除某些普适性性质的考量：特别是，我们的构造并未确立 DCFC 对自同构群的普适性。

第二个特别之处在于，尽管 $\mathscr{G}$ 将是可计算的，$\mathscr{D}$ 却只能相对于一个预言机集合 T_∞ 才是可计算的；该集合包含一些在特定理论 $\mathrm{DCF}_0 \cup D(K_\infty)$ 中完全的公式。在第 3.1 小节中，我们将讨论 DCF_0 的特定模型 K_∞，以及利用该模型定义的这个预言机集合。T_∞ 是 ω 的一个特定子集，在微分代数中定义；其可判定性目前仍是一个未决问题：已知它是一个 Σ^0_1 集合，但据目前所知，它的图灵度可能是任意可计算可枚举度，从 0 到 $\mathbf{0}'$。如果 T_∞ 最终被证明是可判定的，那么这两种范畴归约都将是可计算的，而第 5 节中关于 DCFC 的普适性结果也将完全成立。否则，DCFC 可能会成为第一个自然结构类的例子：它相对于某个预言机具有普适性，但本身并不具有普适性。在后一种情况下，我们会说 DCFC 在 T_∞ 之上的锥上具有普适性。第 5 节将对此作出解释。不过，无论属于上述哪种情况，

这些结果都将进一步印证 [21] 的结论：微分闭域的可计算结构论复杂度远高于代数闭域。

2. Background on differential fields

2.1. 生成类型的公式。微分域的微分闭包 K 被定义为理论 DCF $\cup D(K)$ 的素模型，这与域的代数闭包 F 是 ACF$\cup D(F)$ 的素模型一样。在这两种情形下，特征都由原子图决定，即 $D(K)$ 或 $D(F)$；这里我们只考虑特征零的域。作为素模型，微分闭包恰好实现该理论 DCF $\cup D(K)$（等价地，$\mathrm{DCF}_0 \cup D(K)$）上的主类型，因此每个元素 $a \in \widehat{K}$ 都由某个公式$\alpha(x)$刻画（在 K上的自同构意义下），其中 $\widehat{K} \vDash \alpha(a)$，且 $\alpha(x)$生成 DCF $\cup D(K)$ 上的一个完整（完全）类型。具有此性质的公式 $\alpha(x)$称为理论 DCF_0的完全公式。由于 DCF_0 具有量词消去性质，可以假定这个生成公式 $\alpha(x)$是无量词的。

在代数闭域理论 $\cup D(F)$ 中，同样的分析也成立；在那里，生成公式总可以取为 $p(x) = 0$ 的形式，其中 p 遍历 $F[X]$ 中的不可约多项式。对于某些域 F，无法从 $D(F)$ 判定 $F[X]$ 中的多项式是否不可约；但对于所有有限生成域，这一问题都是可判定的。在微分域中，这些生成公式最自然的类比是微分多项式环 $K\{Y\} = K[Y, Y', Y'', \ldots]$ 上的受约束对 (p, q)，其中系数属于 K。

定义 2.1. 设 $p, q \in K\{Y\}$。若满足以下条件，则称对 (p, q) 为受约束对：

- p 是首一且不可约的，并且其阶严格高于 q；并且
- 对于任意阶低于 p 的 $h \in K\{Y\}$，以及任意满足$p(y) = 0 \neq q(y)$ 和 $p(z) = 0 \neq q(z)$ 的 $y, z \in \widehat{K}$，

$$h(y) = 0 \iff h(z) = 0.$$

我们用 $T_K = \{(p, q) \in (K\{Y\})^2 : (p, q)$ 是受约束的$\}$ 表示 K 上所有受约束对的集合。其补集 T_K ——非受约束对的集合——可在 $D(K)$ 中一致地递归枚举。

为确保每个 $a \in K$ 都实现一个受约束对，我们约定非零常元多项式的阶为 -1：因此，尽管 $Y - a$ 的阶为 0，数对 $(Y - a, 1)$ 仍属于 T_K。

利用量词消去，我们可以得出结论：对于每个受约束对（p, q），公式 $p(Y) = 0 \neq q(Y)$ 生成一个类型。反过来，众所周知，$\mathrm{DCF}_0 \cup D(K)$ 上的每个主类型都由这样的公式生成。因此，这些公式自然发挥着与域 F 上的不可约多项式方程相同的作用。（事实上，公式 $p(Y) = 0 \neq q(Y)$ 对 Blum 在 [3] 中给出的 DCF_0, 标准公理化至关重要。）

然而，正如前面所述，DCF_0 在某些方面比 ACF_0, 更复杂，目前尚未解决 $T_{\mathbb{Q}}$ 是否可判定的问题。这里，$\mathbb{Q}$ 被视为一个常微分域，其中每个元素的导数都为 0：因此，$\mathbb{Q}$ 是特征零微分域理论 DF_0 的素模型（这些域不一定是微分闭的！）。

为清楚起见，我们在此指出，这里关于主类型和完备公式所陈述的所有定理，都适用于微分域的标准语言。当把关系 C 添加到该语言中时，许多事情都会发生变化。添加 C 不会改变任何同构关系，因为 C 是 $L_{\omega_1\omega}$-可定义的；但由于它不能由任何有限公式定义，因此无法轻易将关于类型的定理从 DCF_0 转移到更大的语言中。然而，在 $K \in$DCFC 中，每个元素在 DCF_0, 的语言中仍然实现一个主类型，并且每个这样的类型仍然可以被实现；只有涉及 C 的公式会造成问题。

在 [10], Harrington 证明了，每个特征为 0 的可计算微分域 K 都有一个可计算的微分闭包。在此过程中，他证明了存在所有关于理论 $\mathrm{DCF}_0 \cup D(K)$的主类型的统一可计算枚举。然而，正如他自己所指出的，他的证明并未说明如何在该枚举中识别每个类型的生成元。他的证明很容易进行相对化，从而得到以下结果。

推论 2.2（参见 [10] 中的推论 3(i)）。存在图灵泛函 Θ 和 Γ，使得每当 $D(K)$ 是特征零微分域 K 的原子图（通过 G ¨odel 编码为 ω 的子集）时，$\Theta^{D(K)}$ 都能计算出一个微分闭域 $\widehat{K}$ 的原子图，而 $g_K = \Gamma^{D(K)}$ 能计算出一个将 K 嵌入 $\widehat{K}$ 的微分域嵌入，并且 $\widehat{K}$ 是该嵌入的像 $g_K(K)$ 的微分闭包。因此，$\widehat{K}$ 实现了 $\mathrm{DCF}_0 \cup D(g_K(K))$ 的所有主类型，但不实现其他任何类型。

□

2.2. 有用事实。

命题 2.3。设 K 是一个微分域，其微分闭包为 $\widehat{K}$。那么其代数闭子域

$$\overline{K} = \{y \in \widehat{K} : y \text{ is algebraic over } K\}$$

$\widehat{\ }$ 中的 K 实际上是一个微分子域，即在微分算子 δ 下封闭；并且存在一个图灵泛函 Φ，它以 K 的原子图作为预言机，输出（一个副本的）K 作为微分域的原子图，同时计算导数以及 $+$ 和 $\cdot$；它还会输出一个微分域嵌入 $f : K \hookrightarrow \overline{K}$，使得 K 在该嵌入的像 $f(K)$ 上代数。

$\widehat{\ }$ 证明。K 在微分算子 δ 下的闭包显然成立：如果 $y \in K$ 有 $h(y) = \sum a_n y^n = 0$，且所有 $a_n \in K$，那么

$$0 = \delta(h(y)) = \sum \delta(a_n) y^n + \delta(y) \cdot \sum n a_n y^{n-1},$$

从而得到一个公式，将 $\delta(y)$ 表示为 K 上关于 y 的（代数）有理函数。

拉宾定理给出了 K的代数闭包的有效呈现 $\overline{K}$，以及所需的嵌入 $f : K \hookrightarrow \overline{K}$。有了上面的公式（而不只是一个在 $K[T]$ 中以 $\delta(y)$ 为根的多项式），我们就能计算出 δ，从而将K 的原子图扩充，使其包含关于 δ的原子事实。因此，我们可以避免使用 Harrington 定理，尽管它也足以达到目的。请注意，上面对 $\delta(y)$ 的计算并不要求代数多项式 $h \in K[Y]$不可约——这很重要，因为我们并未假设 K 具有分裂算法。□

显然，$\widehat{K}$ 在 Harrington 定理给出的微分闭包 $\overline{K}$ 中是可计算可枚举的。人们或许希望 K 在其中是可判定的。在一些简单情形下确实如此，尤其是当 K 本身是一个常数域时（因为此时 $y \in K \Leftrightarrow \delta(y) = 0$）。然而，一般而言，这就要求 K的完全公式集合 T_K 是可判定的：借助一个 T_K预言机，我们可以找到满足给定 $y \in K$的受约束对 $(p, q)^{\widehat{}}$，并得出结论：当且仅当 p 的阶为 0 时，$y \in K$。这一情形对于下文的构造十分重要。

3. Construction of the Reductions $\mathscr{D}$ and $\mathscr{G}$

如前所述，我们现在构造第 5 节结果所需的两个范畴归约。第一个归约 $\mathscr{D}$ 将范畴 Graphs 映射到范畴 DCFC，即特征零的微分闭域范畴；其签名中包含代数性谓词 C，用于定义在 $\mathbb{Q}A$ 上的代数性（如下所述）。这$\mathscr{D}$ 需要一个预言机集合；其（近似）逆 $\mathscr{G}$ 将是一个可计算函子。

对于 Graphs 中的图 G，过程 $\mathscr{D}$ 最好通过设想将 G 的边枚举出来，而不是判定出来，来理解。为了将此形式化，我们简要描述另一对可计算函子 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{F}$，以便在这两个概念之间来回转换。以 $D(G)$ 为输入时，$\mathscr{H}$ 计算出的输出将是图 $\mathscr{H}(G)$ 中边的一个枚举；也就是说，它是 ω^3 的一个子集，其在投影 $(x, y, s) \mapsto (x, y)$ 下的像，恰好是 $\mathscr{H}(G)$ 中所有相邻节点对的集合。

$\mathscr{H}$以图 G 在定义域 ω上的原子图 $D(G)$作为输入。对于每个节点 $x \in G$，新图 $\mathscr{H}(G)$都有一个节点 c_x，之所以能够识别它，是因为图中还添加了由另外三个节点组成的环，其中一个节点与 c_x相邻。对于每个 $x < y$，我们还添加一个节点 d_{xy}，使其同时与 c_x 和 c_y相邻；并在 d_{xy} 上附加一个长度为5的环（如果 $D(G)$表明 x 和 y 相邻），或一个长度为7的环（如果 $D(G)$表明它们不相邻）。这定义了图 $\mathscr{H}(G)$，但 $\mathscr{H}$在输入 G 上的输出是对该新图中各条边的枚举。

逆函子 $\mathscr{F}$ 接受任意一个图中边的枚举作为输入，其中该图 H与 $\mathscr{H}$像中的任意图同构。利用这个枚举，$\mathscr{F}$ 最终会识别出每个与长度为 3 的环相邻的节点 c，并在 H 中创建一个节点 x_c 在$\mathscr{F}(H)$。给定任意 x_c 和 $x_{c'}$，它随后会找到 H 中唯一一个同时与 c相邻的节点 d

和 c'，等待直到它看到一个长度为 5 或 7 的环出现在 H 中，且与这个 d 相邻，然后相应地输出（在 $\mathscr{F}(H)$ 的原子图中） x_c 和 $x_{c'}$ 之间是否有边。

这两个过程显然都是有效的。此外，给定一个同构 $g : G \to \widetilde{G}$, $\mathscr{F}$ 可以计算出显然的同构 $\mathscr{F}(g)$，它将 $\mathscr{F}(G)$ 映到 $\mathscr{F}(\widetilde{G})$；而 $\mathscr{H}$也可以对从 H到 $\widetilde{H}$的同构进行同样的处理。 $\mathscr{F} \circ \mathscr{H}$和 $\mathscr{H} \circ \mathscr{F}$实际上并不是恒等函子，但它们与恒等函子有效同构。由于 $\mathscr{H}$和 $\mathscr{F}$ 本质上只是将 Marker $\exists$-扩张的概念形式化，我们觉得没有必要在此进一步详述。下文的命题 3.5 将补充一些具体细节。

现在我们可以介绍我们所采用的过程版本，该过程见于 [21], ，它是归约 $\mathscr{D}$ 从图到 DCFC 时所用的对象映射。给定一个图 G，该过程首先将 $\mathscr{H}$应用于 $D(G)$, 以生成 $H = \mathscr{H}(G)$的一个枚举。接下来，取一个固定的可计算微分基域，我们称之为 K_0；它与微分子域 $\mathbb{Q}A$的代数闭包同构。该微分子域由在 $\widehat{\mathbb{Q}}$（的一个可计算呈现）内部生成的子集所定义，这个子集满足 Rosenlicht 方程:

$$A = \{y \in \widehat{\mathbb{Q}} : y \neq 0 \ \& \ y \neq 1 \ \& \ y' = y^3 - y^2\},$$

众所周知，这是 $\widehat{\mathbb{Q}}$ 中由不可分辨元素构成的强极小集。（可计算呈现 $\widehat{\mathbb{Q}}$ 由 [10] 中的 Harrington 定理给出。 K_0 是 $\mathbb{Q}$ 的一个可计算可枚举子域（实际上，根据命题 2.3，它是一个微分子域），因此本身也是可计算可呈现的。）记作 $A = \{a_0 < a_1 < \ldots\}$，我们的过程将每个 a_n 视为节点 $n \in H$ 的代表。如果 H 中的边枚举表明节点 m 和 n 之间存在一条边（其中 $m < n$），我们的过程就会向微分域中添加一对新元素（u_{mn}, v_{mn}）。每个坐标单独来看都在 $\mathbb{Q}A$ 上超越，但两者共同满足对应于（m, n）的椭圆曲线方程：我们令

$$v_{mn}^2 = u_{mn}(u_{mn} - 1)(u_{mn} - a_m - a_n).$$

众所周知，方程 $y^2 = x(x-1)(x-a_m-a_n)$ 的解构成一个阿贝尔群。 K_0 已经包含许多满足该方程的元素对——事实上，对每个 $j > 0$， K_0 在该群中恰好包含 j^2 个阶为 j 的元素——但 K_0 中的所有解，其坐标都是 $\mathbb{Q}A$ 上的代数元素。相比之下，新添加的元素对将具有无限阶，且其每个坐标在 $\mathbb{Q}A$ 上都是超越的。这个具有超越坐标的元素对将节点 m 和 n 之间存在边这一事实编码到我们正在构造的微分域中。

（明确地说： u_{mn} 和 v_{mn} 各自关于 $\mathbb{Q}A$的最小微分多项式的阶为 1。这些元素是微分代数的，但关于 $\mathbb{Q}A$是超越的。它们合在一起关于 $\mathbb{Q}A$代数相关，因为$v_{mn}^2 = u_{mn}(u_{mn}-1)(u_{mn}-a_m-a_n)$。如果群元素（$u_{mn}, v_{mn}$）具有有限阶，那么它就会满足另一个代数方程，

即其阶为 j；这样一来，每个坐标都会关于 $\mathbb{Q}A$成为代数的。相反，新点中的每个坐标都实现了 DCF_0 中关于 $\mathbb{Q}A$的一个非主类型，因此该类型在 $\widehat{\mathbb{Q}}$中并未实现。）

$\mathscr{D}$ 由此构造出 $\mathbb{Q}A$的一个微分域扩张：

$$K_H = K_0\langle u_{mn}, v_{mn} \,:\, m < n \;\&\; (m,n) \in H\rangle.$$

引理 3.1. $\mathscr{D}$ 可以计算出 K_H的一个呈现，并且具有分裂算法；这一过程对图枚举 $H = \mathscr{H}(G)$是一致的。此外，子域 $\mathbb{Q}$、$\mathbb{Q}A$和 K_0 都将在 K_H中可判定，且这一结论对 H的枚举是一致的；它们各自也都有分裂算法。

证明。计算 K_H 的原子图，只需从 K_0 的一个可计算副本开始；此后，每当 H中出现一条新边(m,n)，便将新的 u_{mn} 和 v_{mn} 加入这个微分域。所有这些 u_{mn} 具有相同的最小微分多项式，只是每个多项式中使用各自的 a_m 和 a_n。（u_{mn} 即使在由前面的 $u_{m'n'}$ 和 $v_{m'n'}$ 生成的域上也具有相同的最小微分多项式，这一事实源于各对(u_{mn}, v_{mn})的类型之间的正交性，与原始的 Hrushovski-Sokolović 构造中的情形相同。）注意，u_{mn} 在 K_0 上的最小微分多项式（等价地，在将其他 $u_{m'n'}$加入 K_0 后所得扩张上的最小微分多项式）给出了 K_0u_{mn}的一个超越基，即$\{u_{mn}, u'_{mn}, \ldots, u^{(r-1)}_{mn}\}$，其中 r 是该多项式的阶。此外，该多项式本身是 $u^{(r)}_{mn}$ 在 $K_0(u_{mn}, \ldots, u^{(r-1)}_{mn})$上的最小多项式，而$\{u_{mn}, \ldots, u^{(r)}_{mn}\}$则作为域上的生成元，将 K_0u_{mn}生成为 K_0上的域。最后，椭圆曲线方程给出了 v_{mn} 在 K_0u_{mn}上的最小多项式，同样不受此前加入的其他解的影响。

由于上述过程是统一的，且所有最小多项式均已知，因此可以根据 K_0 的一个分裂算法，统一地计算出 K_H 的分裂算法。由于 K_0 是 $\mathbb{Q}A$ 的代数闭包，这只需要知道域 $\mathbb{Q}A$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的一个超越基，而 A 本身就是这样的超越基（因为 A 的每个元素在 $\mathbb{Q}$ 上的阶都是 1），并且它是可判定的，因为它由 Rosenlicht 方程定义。作为一个域，$\mathbb{Q}A$ 由 $A \cup \{a' : a \in A\}$ 生成，而每个 a' 在纯超越扩张 $\mathbb{Q}(A)$ 上的最小多项式都是 Rosenlicht 多项式，因此，$\mathbb{Q}$ 存在分裂算法（这是 Kronecker 最初证明的事实），便可推出 $\mathbb{Q}A$ 也存在分裂算法。

借助这些分裂算法和基，我们获得了引理中所承诺的可判定性。对于任意 $y \in K_H$，求出其在子域$K_0(u_{mn} : (m,n) \in H)$上的最小（代数）多项式，并将其表示为 $p \in K_0[u_{m_0n_0}, \ldots, u_{m_kn_k}, X]$，其中 u_{mn}是某个有限的基元素集合。这将确定 $x \in K_0$ 是否成立。如果$x \in K_0$，我们还可以进一步求出其在 $\mathbb{Q}A$ 上的最小多项式（这将确定它是否属于 $\mathbb{Q}A$），以及在 $\mathbb{Q}(A)$ 上的最小多项式（这将确定它是否属于 $\mathbb{Q}$）。□

这个扩张 K_H 不是微分闭的，但 $\mathscr{D}$ 会应用推论 2.2，在扩张过程中逐步构造其微分闭包 $\widehat{K_H} = \mathscr{D}(G)$，从而使 $\mathscr{D}(G)$ 确实成为 DCF_0 的一个模型。Hrushovski 和 Sokolovi´c 在 [14] 中证明，对于满足以下条件的 (m,n)：m 与 n 之间的边从未出现在 H 中，$\widehat{K_H}$ 将不包含任何一对 (x,y)，使得这两个点在 $\mathbb{Q}A$ 上超越，并且满足 a_m 和a_n的椭圆曲线方程。（这一结果也见于 [18, 第 5] 节和 [28, 第 4] 节。）此外，无论是在 H 中加入表示边的超越点，还是$\widehat{\ }$随后扩张到微分闭包 K_H，都不会增加任何满足$\widehat{\ }$所定义的集合 A之定义的新元素，因此，在 K_H 内如此定义的集合与集合 A 相同。于是，将 H 编码到 $\mathscr{D}(G)$ 中是成功的——相应地，对 G 的编码也成功了。

备注 3.2（勘误）。在 [21], 中，一种更复杂的构造成功地仅凭对 G 的原子图的近似，就计算出 $\mathscr{D}(G)$ 的一个副本。包括本文作者在内的那些作者利用了这样一个事实：看起来在 $\mathbb{Q}A$ 上超越的元素，之后可以根据近似结果的指示变成代数的（并成为相关阿贝尔簇上的挠点）。在此过程中，他们对情况的一个方面表述有误：他们声称，椭圆曲线方程的所有解 (x,y)，只要 x 和 y 在 $\mathbb{Q}A$ 上代数，就都是这个阿贝尔簇上的挠点。对于某些其他椭圆曲线，这一结论成立（例如，对于 $y^2 = x(x-1)(x-a)$ 且 $a \in A$ 的情形，因为每个 $a \in A$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的阶都是 1）。然而，$(a_m + a_n)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的阶为 2，而这一结论是否适用于椭圆曲线 $y^2 = x(x-1)(x-a_m-a_n)$，仍是一个未决问题。尽管如此，无论该情形下这一结论是否成立，[21] 中的结果确实成立：作者谈到 $y^2 = x(x-1)(x-a_m-a_n)$ 上的非挠点时，只需假定他们所指的是坐标在 $\mathbb{Q}A$ 上超越的非挠点。（由于不存在坐标为超越数的挠点，等价地，只需说“解 (x,y)，其中 x 和 y 各自在 $\mathbb{Q}A$ 上超越”。）非挠性和坐标为超越数这两种性质，都可以由 $L_{\omega_1\omega}$ 上可计算的Π_1 公式定义，因此，[21] 中的论证很容易适用于这一略有不同的刻画，其中的结果仍然成立。

这里我们不尝试对 [21] 进行更复杂的构造：我们以 K_0 作为基域，其中已经包含所有挠点（可能还包含一些坐标在 $\mathbb{Q}A$ 上代数的非挠点，因为 $\widehat{\mathbb{Q}}$ 中是否存在这样的点仍是一个开放问题）。相反，我们需要判定谓词 C，它定义了在 $\mathbb{Q}A$ 上的代数性，因为 $\mathscr{D}$ 要归约到 DCFC，而不仅仅是归约到 $\mathrm{DCFields}_0$。借助可用的 $D(G)$（从而也可用 H 的枚举），$\mathscr{D}$ 可以使用下文描述的预言机集合 T 来完成这一点。下文的推论 3.8 表明，T_{K_H} 可以从 $T \oplus D(G)$ 一致地计算出来。知道了 T_{K_H} 后，我们现在可以取任意 $y \in \widehat{K_H} = \mathscr{D}(G)$，并找到唯一的 $(p,q) \in T_{K_H}$，使得 $p(y) = 0 \neq q(y)$。如果 $p(Y)$ 具有正阶，那么当然 y 不在 $\mathbb{Q}A$ 上代数。如果 $p(Y)$ 是一个代数多项式（即阶为 0），那么当且仅当 p 的所有系数都属于 $\mathbb{Q}A$ 时，y 才在 $\mathbb{Q}A$ 上代数：确实

$p \in K_H[Y]$，且域扩张 K_H/K_0 是纯超越的。因此，除去推论 3.8 的证明这一环节，$\mathscr{D}$ 确实产生了 $\mathscr{D}(G)$ 在 DCFC 语言中的原子图，正如所要求的那样。这就是第 2.2 小节中的过程。注意，如果无法访问 H 的枚举，就不可能判定 C：对 G 的近似（从而对 H 中各边的 Σ_2 呈现）会少一个跳跃。

为了证明 $\mathscr{D}$ 是范畴约化，我们还必须在 $g : G_0 \to G_1$ 是图同构时计算 $\mathscr{D}(g)$。下文将完成这项工作。首先，在说明了 $\mathscr{D}(G)$ 的构造之后，我们描述逆函子 $\mathscr{G}$：它以 DCFC 中一个元素 K 的原子图为输入，该元素与 $\mathscr{D}$ 像中的某个微分域同构。因此，已知 K 的基本结构后，它首先遍历 K 中的元素，并找出用于编码该图的元素 $a_0 < a_1 < \cdots$；这些元素恰好是满足定义 A 的公式 $y \neq 0$ & $y \neq 1$ & $y' = y^3 - y^2$ 的元素 y。对于每个 a_n，$\mathscr{G}$ 都会在图 $H = \mathscr{G}(K)$ 中创建一个对应的节点 x_n。接下来，对于每个 $m < n$，它会监测 K 中是否出现一对 (u, v)，使其满足 $v^2 = u(u-1)(u - a_m - a_n)$ & $\neg C(u)$。这里谓词 C 至关重要，因为许多在 $\mathbb{Q}A$ 上代数的元素对也满足这个方程。如果某一对这样的超越元 (u, v) 出现，那么 $\mathscr{G}$ 就会在 H 中枚举一条连接 x_m 和 x_n 的边。最后，$\mathscr{G}$ 使用上文的函子 $\mathscr{F}$，将 H 中边的这一枚举转换为对图 $\mathscr{F}(H)$ 的原子图进行计算，后者就是最终输出 $\mathscr{G}(K)$。

再一次，这一计算与 [21] 中的计算相差一个跳跃。这里我们有 C，因此 $\mathscr{G}$ 能够立即识别出任何编码了 H 中存在一条边的数对。在 [21], 中，必须猜测这样的数对是否为超越的（等价地说，它在阿贝尔簇中是否具有无限阶），因此该构造给出的边关系是 H 中的一个 Σ_2 集，从而只能得到 $\mathscr{D}(K)$ 的原子图的一个近似。

由 $\mathscr{G}$ 计算同构十分直接，而且不需要预言机。~给定一个同构 $f : K \to K$（以及 K 和~ ~ ~K 的原子图）作为输入后，$\mathscr{G}$很容易识别出 K 中 A 的元素 $a_0 < a_1 < \cdots$，以及 K 中 A 的元素 $\tilde{a}_0 < \tilde{a}_1 < \cdots$。$K$ 和 K 中的这两个集合都由同一个公式定义，因此 f 必须将 A~ 双射到 A。如果 $f(a_m) = \tilde{a}_n$，那么在该过程第一部分所枚举的图 H 和~H 中，$\mathscr{D}(g)$ 必须将 x_m 映射到 $\tilde{x}_n$。显然，这是从~H 到 H 的一个同构，因为 K 含有方程 $y^2 = x(x-1)(x - a_m - a_n)$ 的一个超越解，当且仅当 $\widehat{K}$ 含有方程 $y^2 = x(x-1)(x - f(a_m) - f(a_n))$ 的一个超越解。最后，$\mathscr{G}$利用 $\mathscr{F}$ 构造从图 $G = \mathscr{F}(H) = \mathscr{G}(K)$ 到~ ~ ~$G = \mathscr{F}(H) = \mathscr{G}(K)$ 的同构，这就是输出 $\mathscr{G}(f)$。显然，这一结果具有函子性：$\mathscr{G}(f_0 \bigcirc f_1) = \mathscr{G}(f_0) \bigcirc \mathscr{G}(f_1)$，并且将 $\mathscr{G}$ 应用于任意 K 上的恒等映射，将得到 $\mathscr{G}(K)$ 上的恒等映射。

剩下的一步也是最有趣的一步：说明 $\mathscr{D}$ 如何接受图的同构

~ ~$g : G \to G$，并计算同构 $f = \mathscr{D}(g) : \mathscr{D}(G) \to \mathscr{D}(G)$。

直观上，这个过程应该如何进行是显而易见的。首先，它应当计算 $\widetilde{\quad\quad\quad

为归约 $\mathscr{D}$ 提供的预言机 T_∞ 计算出该预言机集合。我们不会在此解决有关可计算范畴性的任何重大问题，但将足以利用该预言机计算从 K 到 K 的同构$\sim f = \mathscr{D}(g)$。

这一过程所需的关键工具，是 Ovchinnikov、Trushin 和本文作者在 [23] 中提出的一个定理。

定理 3.3（ [23] 中的定理 8.6）。设 L 是任意具有一个非平凡导子的可计算微分域， K 是它在任意一个将 L 嵌入任意 K 的微分 Rabin 嵌入 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$下的像。那么对于每个 $z \in K$，约束集 $T_{K\langle z\rangle}$ 都能通过关于 T_K 的预言机可计算，且该计算关于 z 和 T_K 是一致的。

（这些作者还证明了，作为 [23], 中的定理 9.6，当 z 在 K 上是微分超越的时， $T_{K\langle z\rangle}$ 也有相同结论。他们留下了一个类似问题未解：对于实现 K 上任何其他非主类型的 z，结论是否仍然成立？据我们所知，直到本文写作之时，该问题仍未解决。）

实际上，我们需要对这一结果作适度推广：它不仅适用于可计算微分域 L 和 K，也适用于任意可数微分域，前提是我们将原子图 $D(L)$ 和 $D(K)$ 作为预言机提供。此外，一致性也同样成立：定理 3.3 中 $T_{K\langle z\rangle}$ 的计算可~~以由单~~个图灵泛函完成，并且关于 z 以及预言机 T_K 和$D(K)$ 是一致的（而后者又能由 T_L 和 $D(L)$ 一致地计算得到）。考察原定理的证明便会发现，这一版本确实成立，只需将原证明中的同一过程相对化并一致化即可。

我们将 $f \restriction K_H$ 扩张到其微分闭包 $K = \mathscr{D}(G)$，首先利用推论 3.8，借助其对所讨论之图的枚举 $H = \mathscr{H}(G)$，计算出 T_{K_H}。特别地，它会找到一个受约束对 $(p, q) \in T_{K_H}$，使得第一个元素 y_0（在 K 的定义域 ω 中，此处记作 $\{y_0, y_1, \ldots\}$）满足 $p(y_0) = 0 \neq q(y_0)$。这样的对必定存在；找到后，我们将 $f(y_0)$ 定义为定义域 $\{\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \ldots\}$ 中使 $\tilde{p}(\tilde{y}_i) = 0 \neq \tilde{q}(\tilde{y}_i)$ 成立的最小$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$元素 $\tilde{y}_i$，其中该定义域属于 $K = \mathscr{D}(G)$。（注意，既然 $f \restriction K_H$ 已定义，我们就可以在微分多项式及其像之间有效转换：例如，将 $K_H\{Y\}$ 中的 p 映射到 $K_{\tilde{H}}\{Y\}$ 中的对应元素，记作 $\tilde{p}$，方法是将 p 的系数映射为它们在 $K_{\tilde{H}}$ 中的 f-像。）由于 $K_H \cong K_{\tilde{H}}$，必定存在这样的某个 $\tilde{y}_i$，而我们找到的第一个就成为 $f(y_0)$。

$\widetilde{\ }$现在，我们继续扩展 f，使其通过在二者之间来回进行，将 K 映射到 K 上。每一步中，f 已在 $K_H \cup$ 上定义，其中包含 K 的有限多个额外元素 $K_H \cup \{y_{i_1}, \ldots, y_{i_m}\}$；我们将定理 3.3 m 应用若干次，以从 T_{K_H} 计算出 $T_{K_H\langle y_{i_1},\ldots,y_{i_m}\rangle}{}^{\widetilde{\ }}$；对 K 也同样如此。继续这一来回构造，我们显然$\widetilde{\ }$能够构造出所需的同构 $f = \mathscr{D}(g)$，将 $K = \mathscr{D}(G)$ 映射到 $K =$

$\widetilde{\ }$ $\sim\mathscr{D}(G)$ 上；并且，该构造关于 g、 $D(G)$ 和 $D(G)$ 是一致有效的。

至此，我们完成了归约 $\mathscr{D}$ 和函子 $\mathscr{G}$的计算：使用预言机集合 T_∞ 计算 $\mathscr{D}$，但没有用于 $\mathscr{G}$ 的预言机。接下来，我们希望证明它们的

复合 $\mathscr{D}\bigcirc\mathscr{G}$和 $\mathscr{G}\bigcirc\ \mathscr{D}$在本质上分别是其定义域上的恒等映射。首先，对于 $\mathscr{G}\bigcirc\ \mathscr{D}$，实际上我们得到的就是恒等映射。

命题 3.4. 对于每个可数图 G, $\mathscr{G}(\mathscr{D}(G)) = G$。（也就是说，这些不只是同构图；它们具有完全相同的呈现。）

证明。这里的关键很简单：函子会按照定义域 ω 中元素的正确顺序，将所有元素视为数字。图 $H = \mathscr{H}(G)$ 使用编码节点 $c_0 < c_1 < c_2 < \cdots$ 对 G 的节点 0、1、2、.....进行编码，然后在它们周围填入其他节点以构造 H。接着，微分域 $K = \mathscr{D}(G)$ 使无量词可定义集 A 中的元素 $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ 与 H 的节点 0、1、2、.....相对应，从而迫使 $a_{c_0} < a_{c_1} < a_{c_2} < \cdots$。反过来，$\mathscr{G}$ 可以根据原子图 $D(K)$ 判定 A 中的成员资格，并确保将其生成的图的节点编号顺序与它们在 A 中出现的顺序相同：因此，我们恢复了与之前相同的 H 。

最后一步需要稍加思考。H 的节点分为五类：$\{c_n\}$、$\{d_{mn}\}$，以及包含在长度为 3、5 或 7 的环中的节点。这些类别互不重叠，而且每一类都是可计算可枚举的。因此，对于每个被枚举进第一类的节点 $p \in \omega = \mathrm{dom}(H)$（这是因为我们发现了一个连接到 p的长度为 3 的环），函子 $\mathscr{F}$ 确保 $\mathscr{F}(H)$ 中对应的节点编号为 m，其中 $m = |\{c_n : c_n < p\}|$。（前面我们没有详细说明 $\mathscr{F}$，但现在这点很重要。）因此，尽管我们只有图 H的一个枚举，仍能让节点 $m \in \mathscr{F}(H)$ 与 H中的正确编码节点 c_m 对应。由此可见，$\mathscr{G}(\mathscr{D}(G))$ 就是 G本身。□

反过来，我们无法得到恒等映射。现在必须更加谨慎地表述我们的命题，并且必须使用预言机集合 T_∞。

命题 3.5. 存在一个图灵泛函 Λ，使得对于每个对象$K \in \mathrm{DCFC}$，函数 $\Lambda^{T_\infty \oplus K}$ 是从 K 到 $\mathscr{D}(\mathscr{G}(K))$ 的同构。

对于范畴归约而言，这样的泛函类似于函子之间的有效自然同构（参见 [11, 定义 1.6]）。然而，在这里它仅是 T_∞-可计算的，而不是有效的（除非 T_∞ 是可判定的）。

证明。与命题 3.4 相同的论证似乎也适用于此处，而且确实可以证明，对于给定 K 的子集 A 中的每个 a_n，在 $\mathscr{D}\bigcirc\mathscr{G}$ 的编码下，a_n 的“像”确实就是 a_n 本身。然而，K 的其他元素无法用这种方式保持不变。相反，我们先知道映射 $\lambda = \Lambda^{T_\infty \oplus D(K)}$ 必须将每个 a_n 映射到其自身，然后以完全相同的方式，将 λ 扩展为从 K 到 $\mathscr{D}(\mathscr{G}(K))$ 的一个满同构：$\mathscr{D}$ 本身正是先建立一个双射 $\mathscr{D}(g)\restriction A$，将 A（作为 $\mathscr{D}(G)$ 的子集）映到其自身（作为 $\sim$ $\sim\mathscr{D}(G)$ 的子集，其中 $g : G \to G$），再将其扩展为从整个 $\mathscr{D}(G)$ 到

$\sim\mathscr{D}(G)$。这一过程完全相同：先扩展到 K_0，再扩展到 K_H，最后扩展到整个 K，使用定理 3.3。□

3.1. 预言机集合 T_∞。这里我们给出本节构造中所用预言机集合 T_∞ 的技术细节。为此，令 G_∞ 为定义域 ω 上的完全图，H_∞ 为其边的一个枚举（即所有满足 $m \neq n$ 的配对 (m,n)）。我们用 $K_\infty = K_{H_\infty}$ 表示前述构造在 H_∞ 上建立的微分域，其微分闭包为 $\mathscr{D}(G_\infty)$。（注意，严格来说 $G_\infty \notin$图，因为完全图在自同构意义下是平凡的。不过，仍然可以在 G_∞ 上运行前述构造 $\mathscr{D}$。）现在我们可以定义 $T_\infty = T_{K_\infty}$，将其作为微分域 K_∞ 的约束集。这就是上文使用的预言机集合。如前所述，该集合 T_∞ 是可计算可枚举的，但它是否可判定仍是一个未决问题，我们在此不讨论这个问题。

对我们而言，T_∞ 的相关性质是：当 H 遍历定义域为 ω 的所有图时，T_∞ 在约束集 K_H 中具有普适性，而且这种普适性是统一的。下面的推论 3.8 将对此作出形式化表述；在此之前，我们先证明两个必要的命题。

命题 3.6. 设 H 是定义域为 ω 的图（其边的一个枚举），K_H 是先前由该 H 构造的微分域。假设 $(p,q) \in T_{K_H}$。设 F 是 ω 上的图（其边的一个枚举），且 H 的每条边都是 F 的一条边。定义微分域嵌入 $d : K_H \hookrightarrow K_F$，使得 $a_n \mapsto a_n$（因此 $f\restriction\mathbb{Q}A$ 是恒等映射），并且对所有边 $(i,j) \in H$，$d(u_{ij}) = u_{ij}$ 且 $d(v_{ij}) = v_{ij}$。记 p^d 为在 p 的系数上作用映射 d 后，p 在 $K_F\{Z\}$ 中的像；q^d 也类似定义。则 (p^d, q^d) 属于 T_{K_F}。

严格来说，映射 d 不一定是定义域 ω 上的恒等映射，因为 H 的一条边 (i,j) 可能在不同阶段被枚举进 F，从而使 u_{ij} 成为 ω 中的另一个元素。为简单起见，我们在此将 K_H 视为通过 d 嵌入 K_F 的微分子域，因此 p 和 p^d 表示同一个微分多项式，q 也同理。因此，该命题声称，只要 (p,q) 属于 T_{K_H}，它就属于 T_{K_F}。

证明。固定如上所述的 F, H 和 $p,q \in K_H\{Z\}$，并令 $f \in K_H\{Z\}$。如果 $\mathrm{DCF}_0 \cup D(K_H) \vdash \forall Z[p(Z) = 0 \neq q(Z) \to f(Z) = 0]$，那么推导中只会用到 $D(K_H)$ 的某个初始片段 σ。但是，存在一种对 F 中边的枚举 E，它对 H 之外所有边的枚举都足够晚，使得 $D(K_E)$ 以同一个初始片段 σ 开始。因此，$\mathrm{DCF}_0 \cup D(K_E) \vdash \forall Z[p(Z) = 0 \neq q(Z) \to f(Z) = 0]$；又由于 $K_E \cong K_F$，$f(Z) = 0$ 也属于 K_F 上由 $p = 0 \neq q$ 生成的类型。

如果 $\mathrm{DCF}_0 \cup D(K_H) \vdash \forall Z[p(Z) = 0 \neq q(Z) \to f(Z) \neq 0]$，同样的论证依然成立。因此，对于所有 $f \in K_H\{Z\}$，$p = 0 \neq q$ 都决定了 $f = 0$ 的真值，因为 $(p,q) \in T_{K_H}$。剩下需要考虑的是那些系数并非全都属于 K_H 的 $f \in K_F\{Z\}$。（事实上，针对这些 f 的论证涵盖了上述各种情况。）

我们可以将任意一个 $f \in K_F\{Z\}$视为 K_H上的微分多项式 :

$$f(Z) = g(\vec{u}, \vec{v}, Z), \text{ with } g(\vec{U}, \vec{V}, Z) \in K_H\{\vec{U}, \vec{V}, Z\}$$

对于椭圆曲线上一组有限的超越点 $\{(u_i, v_i) : i \leq j\}$，它们对应于 F 中但不在 H 中的边 (m_i, n_i)。以这种方式表示 f，并令系数 $\widehat{\ }$ 取自 K_H，我们断言，不存在 z_0、$z_1 \in K_F$ 同时实现 (p, q)，使得 $g(\vec{u}, \vec{v}, z_0) = 0 \neq g(\vec{u}, \vec{v}, z_1)$。事实上，在 $\widehat{K_H}$ 中，以下结论成立：

$$(\forall Z_0, Z_1)\ (\forall \text{ distinct } A_0, \ldots, A_n \in A)(\forall U_0, V_0, \ldots, U_j, V_j)$$
$$\left[\begin{array}{c} p(Z_0) = p(Z_1) = 0 \neq q(Z_0)q(Z_1) \implies \\ \left[\begin{array}{c} [(\forall i \leq j)\ V_i^2 = U_i(U_i - 1)(U_i - A_{m_i} - A_{n_i})] \to \\ (g(\vec{U}, \vec{V}, Z_0) = 0 \leftrightarrow g(\vec{U}, \vec{V}, Z_1) = 0) \end{array} \right] \end{array} \right]$$

（此句使用了无限不可区分集 A 的定义。）请注意，此命题在 $\widehat{K_H}$ 中成立并非空泛：确实存在满足椭圆曲线方程的对 $(u_i', v_i') \in (\widehat{K_H})^2$，但它们都在 $\mathbb{Q}A$ 上代数，因为 $\widehat{K_H}$ 不含这些曲线上的超越点。（相应的边位于 F 中，但不在 H 中。）因此，所有这类坐标 u_i' 和 v_i' 都属于 $\widehat{K_H}$，进而属于 K_0，所以 $f(\vec{u'}, \vec{v'}, Z) \in K_H\{Z\}$。结合 $(p, q) \in T_{K_H}$，该命题 $\widehat{\ }$ 在 K_H 中成立，现即得证。

由于这句话（以及它在微分闭域理论$_0$下的无量词等价式）在 $\widehat{K_H}$中成立，因此它必定是由微分闭域理论$_0 \cup \sigma$证明的，其中 σ 是 $D(K_H)$的某个有限初始片段。现在我们选取一个与 K_F 同构的副本 J，使得 $\sigma \subset D(J)$成立；这是可行的，因为 K_H嵌入到 K_F中（因为 H 中的所有边都位于 F中）。于是，微分闭域理论$_0 \cup D(J)$也证明了上述句子，因此该句子必定在 J的微分闭包中成立，进而$\widehat{\ }$也在 K_F中成立。因此，我们可以对每个 U_i 和$\widehat{\ }V_i$，分别代入 K_F 中的元素 u_i 和 v_i，并对每个 A_m代入相应的 a_m，从而得到 K_F中的结论：

$$(\forall Z_0, Z_1)\ [p(Z_0) = p(Z_1) = 0 \neq q(Z_0)q(Z_1) \implies (f(Z_0) = 0 \leftrightarrow f(Z_1) = 0)].$$

由此可见，即使对于那些位于 $K_H\{Z\}$之外的 $f \in K_F\{Z\}$，公式 $p(Z) = 0 \neq q(Z)$也确实能确定 $f(Z)$是否在 $\widehat{K_F}$中成立，因此确有$(p, q) \in T_{K_F}$。 □

我们还有命题 3.6 的逆命题。

命题 3.7. 与命题 3.6 一样，设 F 和 H 是定义域为 ω的两个图的边的枚举，且 H 中的每条边也都在 F中。任取$p, q \in K_H\{Y\}$。如果 $(p, q) \in T_{K_F}$，那么 $(p^d, q^d) \in T_{K_H}$也成立。

证明。再次通过嵌入 d，我们将 K_H 视为 K_F 的子域。对于这个命题，有一种快速但危险的论证：在 K_F 中实现$p(Z) = 0 \neq q(Z)$ 的任意 z_0 和 z_1，都是 $K_F\{Y\}$ 中完全相同的多项式的零点，因此也是 $K_H\{Y\}$ 中完全相同的多项式的零点。这一点确实成立，但若要据此推出命题 3.7，就需要知道每个 $z_0 \in K_H$ 都属于 K_F。对于微分

一般的域，这并不成立（例如，参见 [19, §6]），因此有必要针对这个 K_H 和 K_F的具体情形证明这一点。

然而，还有一种合理且更快捷的证明： T_{K_F} 是（$K_F^{<\omega}$）的一个 Π_1 子集（尽管它只能由一个 $L_{\omega_1\omega}$ Π_1 公式定义），而且 K_H 是 K_F的子结构，因此$T_{K_F} \cap (K_H^{<\omega})^2 \subseteq \overline{T_{K_H}}$。□

推论 3.8。设 $T_\infty = T_{K_{H_\infty}}$ 为由完全图 G_∞构造的可计算微分域 $K_\infty = K_{H_\infty}$ 的约束集，其中包含每条边（m， n）$\in \omega^2$，且满足 $m \neq n$。存在一个图灵泛函 Θ，使得对于定义域为 ω上的任意可数对称无自反图的每个枚举 H，

$$T_{K_H} = \Theta^{H \oplus T_\infty}.$$

因此， T_∞ 可视为微分域K_H的约束集中的普适者。（这不仅涵盖图中的图，还包括所有自同构平凡图，其中包括 G_∞ 本身。）

证明。由命题 3.6 和 3.7 可直接得出这一点。具体而言（如命题 3.6 的陈述所示），H_∞ 扮演 F的角色，我们可以利用枚举 H计算出嵌入 $f : K_H \hookrightarrow K_\infty$： 对于 K_H中的每个 x_{mn} 或 y_{mn}，只需等待边（m， n）出现在 H_∞中，此时相应的 x_{mn} 和y_{mn} 将在 K_D 中定义。利用我们的预言机，可以判定（$f\bigcirc\ p$， $f\bigcirc\ q$）是否 $\in T_\infty$，从而判定（p， q）是否$\in T_{K_H}$。□

事实上，这里对预言机 T_∞ 的使用相当有限。我们实际得到的是从每个T_{K_H} 到 T_∞的m归约，并且可关于 H一致地计算。也就是说，我们有一个泛函 Λ，使得对于每个 H， Λ^H 都是一个全函数，其定义域为（$K_H\{Z\}$）^{2}，且（p， q）$\in T_{K_H}$ 当且仅当 Λ^H（p， q）$\in T_\infty$。如有需要，可以轻易地使这个函数对每个单独的 H都成为单射，从而得到一个一致的一对一归约。

4. The algebraic dependence relation

在范畴 DCFC 中选用谓词 C 可能显得不太自然，因为在微分代数中，人们并不常考察微分子域 $\mathbb{Q}A$ 上的代数性。不过，这样做能使本文中的构造更加清晰，因此我们将在后续各节继续采用这一谓词。不过在此，我们将证明它可以由二元代数相关谓词 $B(x, y)$ 取代。对于微分域 K 中的两个元素 x 和 y，当且仅当 K 的子域 $\mathbb{Q}(x, y)$ 的超越次数为 < 2 时，该谓词成立，且是在 $\mathbb{Q}$ 上计算的。（需要明确的是： $\mathbb{Q}(x, y)$ 是一个子域，但不一定是微分子域；我们讨论的是域的语言中的超越次数，而非微分超越次数。）因此， B 与 C 一样，都是由 $L_{\omega_1\omega}$ 的一个可计算公式定义的。主要结果如下。

命题 4.1。存在图灵泛函 Φ 和 Ψ，使得：

- 对于每个 $K \in$ DCFC 同构于形如 $\mathscr{D}(G)$ 的结构的情形， $\Phi^{T_\infty \oplus K}$计算 K 上的二元依赖关系 B^K；并且

- 对于每个 $K \in \mathrm{DCFields}_0$ 同构于形如 $\mathscr{D}(G)$ 的结构（的约化结构）的情形，$\Psi^{T_\infty \oplus K \oplus B^K}$ 计算 K 上的一元关系 C^K。

证明。首先，我们描述 Ψ。对于输入 $z \in K$，Ψ 会搜索 $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_{2n}}) \in A^{<\omega}$、来自 K 的数对 $(x_1, y_1) \ldots, (x_n, y_n)$，以及多项式 $p, q \in \mathbb{Q}A\{X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n, Z\}$，使得：

- $(\forall j \leq n)\ y_j^2 = x_j(x_j - 1)(x_j - a_{i_{2j-1}} - a_{i_{2j}})$；并且
- 对于每个 $j \leq n$，数对 $(x_j, a_{i_{2j-1}} + a_{i_{2j}})$ 不属于 B^K；并且
- $(p(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, Z)\ q(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, Z)) \notin T_{K_H}$；并且
- $p(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, z) = 0 \neq q(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, z)$.

这个 z 必须实现一个关于微分子域 K_H 的主类型（该子域由 $\mathbb{Q}A$的代数闭包，以及 A中元素之和（$a_l + a_m$）上的椭圆曲线方程的所有超越解生成），因为它属于该 K_H的微分闭包K。上述过程只是找出一个生成 z 在该子域上类型的受约束对：利用 B^K 识别椭圆曲线上的超越解，并利用 T_∞ 按照推论 3.8计算集合T_{K_H}。H 中的边被枚举为满足以下条件的数对（l, m）：椭圆曲线在（$a_l + a_m$）上的一个超越解出现在 K中。最终，这一搜索将找到生成 z 在 K 中关于此 K_H所实现类型的完全公式。如果 $n = 0$（因此无需超越解），且它找到的 p 作为关于 Z的微分多项式，其阶为 0，那么 z 在 $\mathbb{Q}A$上代数（因为 $p(z) = 0$，且 p 是一个代数多项式），所以 $C^K(z)$在 K中成立。如果 p 的阶为 0，但 $n > 0$，那么 z必定超越于 $\mathbb{Q}A$，因为$\{x_n, \ldots, x_n\}$在$\mathbb{Q}A$上代数独立（且每个 y_j都与 x_j互代数），因此 $C^K(z)$在 K中不成立。最后，如果 p具有正阶，那么 z必定独立于 $\mathbb{Q}A(x_1, \ldots, y_n)$，因此显然$C^K(z)$在 K中不成立。

接下来我们转向 Φ，它可以访问 T_∞ 以及作为 DCFC 中一个结构的 K 的原子图，这意味着它知道 C^K。因此，它可以枚举 A中元素对之和上的椭圆曲线方程的超越解（这与 Ψ 能够做到的差不多，但此处使用的是 C^K，而不是 B^K），进而可以枚举图 H 以及相应的微分子域 K_H，而 K 是该域的微分闭包。给定 K中的任意 $x \neq y$，Φ 首先希望找到由 x 在 K中实现的受约束对 $(p(X)\ q(X)) \in T_{K_H}$。它借助推论 3.8 来做到这一点。如果 p 属于$\mathbb{Q}[X]$，那么它便立即知道 $(x,\ y) \in B^K$。（这里 $\mathbb{Q}$在 K_H 中可判定这一点很重要，而这正是引理 3.1 的内容。）

如果 $p \notin \mathbb{Q}[X]$，那么 x 在 $\mathbb{Q}$ 上是超越的。接下来，我们通过寻找一个满足 y 的、位于 $K_H x$ 上的受约束对来继续：这一过程与 x 的情况相同，只是还需要用到定理 3.3。再次，如果我们发现 y 满足一个关于 $K_H(x)$ 的代数多项式，那么就可以得出结论：$(x, y) \in B^K$。不过现在，如果我们找到的多项式次数为 > 1 或正阶，我们便得出了相反的结论：$(x, y) \notin B^K$。□

由此得到的推论证明了我们的主张：在整个构造过程中，以及在第 5 节中，我们都可以用谓词 B 代替 C 。

推论 4.2。在范畴之间存在双向的 T_∞-可计算函子，且二者互为逆函子，

$$\{K \in \mathbf{DCFC} : (\exists G \in \mathbf{Graphs})\ K \cong \mathscr{D}(G)\}$$

以及另一个范畴；后者包含所有相同的可数微分闭域（定义域为 ω），其语言为不含 C 但添加了二元依赖谓词 B 并按上述方式定义的微分域的语言。（在每个范畴中，态射都是对象之间的微分域同构。）

证明。这两个函子只是将一个范畴中的每个结构映射到另一个范畴中的同一结构，并将每个同构映射到其自身。要使函子可计算，只需根据 C^K 计算出 B^K，反之亦然；这正是命题 4.1 的内容。□

5. Consequences

这里我们将说明第 3 节中的构造对可计算结构理论的影响。我们需要“在一个锥上”工作，即将所有内容相对化到集合 T_∞。

5.1. 谱。第一个结果是对 [21], 中上述定理 1.1 所述主定理的一个改进。

定理5.1。在 T_∞之上的锥上，DCFC 中结构的谱恰好是 Graphs 中图的谱。对于每个 $G \in$ Graphs，$\mathscr{D}(G)$ 满足 $\mathrm{Spec}_{T_\infty}(G) = \mathrm{Spec}_{T_\infty}(\mathscr{D}(G))$，即

$$\{deg(T_\infty \oplus D(\widetilde{G})) : \widetilde{G} \cong G\} = \{deg(T_\infty \oplus D(\widetilde{K})) : \widetilde{K} \cong \mathscr{D}(G)\}.$$

因此，在 T_∞之上的锥上，可计算语言中每个自同构非平凡结构的谱，都可以实现为 DCFC 中某个结构的谱。

证明。众所周知，DCFC 中每个结构的谱都可以实现为某个图的谱； [13]对此有详细说明。（显然，DCF_0的所有模型都是自同构非平凡的，而 $L_{\omega_1\omega}$-可定义谓词 C 不会改变这一点。）

反过来，我们声称，对于每个 $G \in$ 图，结构 $K = \mathscr{D}(G)\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$在 T_∞以上的锥上与 G 具有相同的谱。事实上，对于每个 $K \cong K$，$\mathscr{G}(K)\widetilde{\ }$是一个可从 K 计算得到的图，并且与 $\mathscr{G}(K) = \mathscr{G}(\mathscr{D}(G))$ 同构，而根据命题 3.4，后者又$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$与 G 同构。反过来，对于每个 $G \cong G$，$\mathscr{D}(G)$ 是 $\sim$ $\sim\mathscr{D}(G)$ 的一个副本，不过现在我们只能断言 $\mathscr{D}(G)$ 可从 $T_\infty \oplus G$计算得到，因为$\mathscr{D}$ 是 T_∞-可计算的。

由于 G 和 K 都自同构非平凡，它们的 T_∞-谱在图灵可约性下都是向上封闭的（如在此处将 [16], 相对化为 T_∞时所见），因此这些谱必然相等。□

5.2. 可计算范畴性。我们考虑的其余性质都涉及 Graphs 中图与图之间，或 DCFC 中结构与结构之间的同构。请回想，尽管 $\mathscr{G}$ 是一个可计算函子， $\mathscr{D}$ 只是一个 T_∞-可计算的范畴约化，而集合 T_∞ 是否可判定仍是一个悬而未决的问题。因此，我们通常在 T_∞之上的锥上工作，将所有陈述相对化，使其适用于给定了 T_∞ 的判定程序的世界。第一个引理是我们几乎所有范畴性结果的关键。

引理 5.2。设 $G, G \in$ Graphs，且 $\boldsymbol{d} \geq \deg(T_\infty)$。那么， G 与 G 之间存在一个 $\boldsymbol{d}$-可计算的同构，当且仅当 $\mathscr{D}(G)$与 $\mathscr{D}(G)$之间存在一个 $\boldsymbol{d}$-可计算同构。

反过来，设 $K, K \in$ DCFC 与 $\mathscr{D}(G)$ 同构（对于上面的 G），且仍有 $\boldsymbol{d} \geq \deg(T_\infty)$。那么， K 与 K 之间存在一个 $\boldsymbol{d}$-可计算同构，当且仅当 $\mathscr{G}(K)$与 $\mathscr{G}(K)$之间存在一个 $\boldsymbol{d}$-可计算同构。

证明。如果同构 $g : G \to G$ 是 $\boldsymbol{d}$-可计算的，那么 $\mathscr{D}(g)$ 是从 $\mathscr{D}(G)$ 到 $\mathscr{D}(G)$ 的 $\boldsymbol{d}$-可计算同构，因为 $\boldsymbol{d} \geq \deg(T_\infty)$。反过来，对于每个 $\boldsymbol{d}$-可计算同构 $f : \mathscr{D}(G) \to \mathscr{D}(G)$, $\mathscr{G}(f)$ 可由 f计算（因此也可由 $\boldsymbol{d}$计算），并且根据命题 3.4，它将 G 同构地映到 G。

对于第二部分，根据假设， K 和 K 都属于归约 $\mathscr{G}$ 的定义域。因此，同构 $f : K \to K$ 将计算出同构 $\mathscr{G}(f) : \mathscr{G}(K) \to \mathscr{G}(K)$。反过来，如果 $g : \mathscr{G}(K) \to \mathscr{G}(K)$ 是一个 $\boldsymbol{d}$-可计算同构，那么

$$\left(\Lambda^{T_\infty \oplus \widetilde{K}}\right)^{-1} \circ \mathscr{D}(g) \circ \Lambda^{T_\infty \oplus K}$$

是一个 $\boldsymbol{d}$-可计算同构 $K \to K$，其中 Λ 如命题 3.5 所述 . □

例如， T_∞-可计算结构 S 在 T_∞ 之上的锥上是可计算范畴的，当且仅当对于每个 T_∞-可计算的 S $\cong$ S，都存在一个从 S 到 S 上的 T_∞-可计算同构。下面的定义将推广这一术语。

定义 5.3。设 A 是一个 T_∞-可计算结构，且 $\boldsymbol{d} \geq \deg(T_\infty)$ 是一个图灵度。那么，若对于每个T_∞-可计算的 B $\cong$A，都存在一个从 A 到 B 上的 $\boldsymbol{d}$-可计算同构，则称 A 在 T_∞ 之上的锥上是 $\boldsymbol{d}$-可计算范畴的。

由引理 5.2 可知，首先，在 T_∞之上的锥上， $\boldsymbol{d}$-可计算范畴性在 $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{G}$下保持不变。

推论 5.4. 任取次数 $\boldsymbol{d} \geq \deg(T_\infty)$。那么，一个 T_∞-可计算图 G is$\boldsymbol{d}$ 在 T_∞ 之上的锥上是可计算范畴的，当且仅当 $\mathscr{D}(G)$ 是。类似地，一个

T_∞-可计算的 $K \in$DCFC 在 $\mathscr{D}$ is $\boldsymbol{d}$ 之上的像锥上是可计算范畴的，当且仅当 $\mathscr{G}(K)$ 是。

事实上，当将其中的 T_∞。处全部替换为任意其他预言机集合 $T \geq_T T_\infty$ 时，该陈述仍然成立。□

推论 5.5。对于 DCFC 中的 T_∞-可计算结构，在 T_∞ 之上的锥上具有可计算范畴性的性质是 Π^1_1-完全的。

相比之下，对于 ACF 中的可计算模型，$_{0,}$ 可计算范畴性仅是 Σ^0_3-难的：当且仅当该结构在 $\mathbb{Q}$ 上具有有限超越次数时，它才是可计算范畴的。（对于这些结构，T_∞-可计算范畴性也同样如此：它是 $\Sigma^{T_\infty}_3$-难的。）此外，对于 ACF，$_{0,}$ 不需要任何额外的可定义谓词，例如 C。

证明。由于 T_∞ 是 Σ^0_1，相对于 T_∞ 的类 Π^1_1 就是类 Π^1_1，而在 DCFC 中，针对 T_∞-可计算结构的 T_∞-可计算范畴性的定义显然是 Π^1_1。它是 Π^1_1-困难的这一点，源于 Downey、Kach、Lempp、Lewis-Pye、Montalb´an 和 Turetsky 证明的 $[5,]$ 的定理 1；该定理确立了可计算范畴性是可计算图的一个 Π^1_1-完全性质。将他们的论证相对化到一个固定预言机（例如 T_∞）是直接的。由推论 5.4，针对 T_∞-可计算图的 T_∞-可计算范畴性可 1-归约到 DCFC 中的同一问题。为说明这一点，注意存在一个可计算单射 h——而不仅仅是 T_∞-可计算的——使得每当 $\Phi_e^{T_\infty}$计算出某个图 G的原子图时，$\Phi_{h\,e\,()}^{T_\infty}$ 就会计算出 $\mathscr{D}(G)$ 的原子图。特别地，$\Phi_{h(e)}$ 使用其预言机 T_∞，既计算 G 的原子图（关于指标 e 一致地），也计算 T_∞-可计算函子 $\mathscr{D}$ 在该原子图上的输出。□

5.3. 范畴性谱。引理 5.2 还证明了，$\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{G}$ 在 T_∞上方的锥上保持范畴性谱。相关定义最早见于 $[6]$；其相对于任意预言机集合 T 上方的锥的相对化版本见于 $[4]$。

定义 5.6. 对于预言机集合 T 和一个 T-可计算结构 A，A 在 T 上方的锥上的范畴性谱，是满足以下条件的所有图灵度 $\boldsymbol{d} \geq \deg(T)$组成的集合：按照定义 5.3，A 在 T 上方的锥上是 $\boldsymbol{d}$-可计算范畴的。若该集合包含一个最小次数，则此次数称为 A 在 T 上方的锥上的范畴性度。

命题 5.7. 对每个 T_∞-可计算结构 S，都存在某个 $K \in$DCFC，其在 T_∞ 上方的锥上的范畴性谱与 S 相同。

证明。Hirschfeldt、Khoussainov、Shore 和 Slinko 在 $[13]$ 证明，对于自同构非平凡结构 S，存在一个图 $G \in$ 图，其在该锥上的范畴性谱与 S 相同；根据推论 5.4，$\mathscr{D}(G)$也有同样的结论。

自同构平凡结构 A 的范畴性谱总是包含所有图灵度。取 $K = \mathscr{D}(G_\infty)$（对于完全图 G_∞）会得到相同的

锥上方的范畴性谱，尽管尚不清楚对于此锥之外的次数 $\boldsymbol{d}$， $\mathscr{D}(G_\infty)$ 是否是 $\boldsymbol{d}$-可计算范畴的。□

如果 T_∞ 最终被证明是可计算的，这也意味着 DCFC 中的可计算结构能够实现所有范畴性度（如 [6] 中的定义），就像一般的可计算结构一样。事实上，这显然在 T_∞ 之上的锥上成立。

5.4. 有限可计算维数。

定理 5.8. 对每个有限的 $n \geq 1$，都存在一个 T_∞-可计算的 DCFC 结构，它恰有 n T_∞ 个副本（在 T_∞-可计算同构意义下）。

证明. 任取有限的 $n \geq 1$。根据 Goncharov 在 [8, 9], 中的结果相对于 T_∞ 的相对化，存在一个 T_∞-可计算图 G，它恰有 n T_∞ 个副本（在 T_∞-可计算同构意义下）。令这些副本为 G_1、.....、G_n，并令 $K_i = \mathscr{D}(G_i)$，它也是 T_∞-可计算的。根据引理 5.2，如果 K_i 和 K_j 在 T_∞-可计算意义下同构，那么 $\mathscr{G}(K_i) = G_i$ 和 $\mathscr{G}(K_j) = G_j$ 也会同构，这与 $i \neq j$ 矛盾。因此，K_1 至少有 n 个副本，每个副本都是 T_∞-可计算的，且两两之间不存在 T_∞-可计算同构。

另一方面，如果 K 是 T_∞-可计算的 K_1 副本，那么 $\mathscr{G}(K)$ 是 T_∞-可计算的 G副本，因此同构于某个 G_i，该同构由某个 $g \leq_T T_\infty$ 给出。现在，$\mathscr{D}(g)$将是一个 T_∞-可计算同构，将 $\mathscr{D}(\mathscr{G}(K))$ 映射到 $\mathscr{D}(G_i) = K_i$。根据命题 3.5，$\mathscr{D}(\mathscr{G}(K))$ 与其自身 T_∞-可计算同构，因此 K 属于 K_i的 T_∞-可计算同构类。这表明，K_1 在 T_∞-可计算同构意义下至多有 n 个不同的T_∞-可计算副本，正如所需。□

5.5. 相对可计算范畴性。

定义 5.9. 对于预言机集合 $S \subseteq \omega$，可数结构 A 是相对 S-可计算范畴的，如果对于每一对满足 $\mathsf{B} \cong \mathsf{C} \cong \mathsf{A}$ 的结构，都存在一个同构 $f : \mathsf{B} \to \mathsf{C}$，且该同构可由预言机 $S \oplus \mathsf{B} \oplus \mathsf{C}$ 计算。

更一般地，对于一个 S-可计算序数 α，如果对于每一对满足 $\mathsf{B} \cong \mathsf{C} \cong \mathsf{A}$ 的结构，都存在一个同构 $f : \mathsf{B} \to \mathsf{C}$，且该同构可由预言机 $(S \oplus \mathsf{B} \oplus \mathsf{C})^{(\alpha)}$计算得到，那么 A 在$S$ 以上是相对 Δ^0_α-范畴可分类的；这里该预言机是前述预言机的第 α 次跳跃。

相对 S可计算范畴性等价于：存在一个来自 A $\bar{a}$ 的有限元组 $\bar{a}$，以及一个针对 $(\mathsf{A}\ \bar{a})$ 的、由存在公式构成的斯科特族，该族可 S 可计算可枚举地归约 e 到存在理论 $\mathrm{Th}_\exists(\mathsf{A}\ \bar{a})$。这推广了通常的概念：如果 S 本身可计算，则称这样的 A 为相对可计算范畴的，而该斯科特族可归约 e到 $\mathrm{Th}_\exists(\mathsf{A}\ \bar{a})$；若进一步可以选择一个可计算的 A，则 $\mathrm{Th}_\exists(\mathsf{A}\ \bar{a})$ 是可计算可枚举的，因此斯科特族也是如此。关于精确细节，请参阅 [22] 。Ash、Knight、Manasse 和 Slaman 在 [2], 中开创了这一概念， [26, 27] 也是有用的参考资料。

定理 5.10. 图 G 相对 T_∞可计算范畴，当且仅当$\mathscr{D}(G)$ 也如此。

证明。设 $\mathscr{D}(G)$ 是相对 T_∞-可计算范畴的，并假设 $G_0 \cong G_1 \cong G$。那么存在某个 $\mathscr{D}(G_0) \oplus \mathscr{D}(G_1)$- 可计算同构 $f : \mathscr{D}(G_0) \to \mathscr{D}(G_1)$，且 $\mathscr{G}(f)$ 会将 $G_0 = \mathscr{G}(\mathscr{D}(G_0))$ 映到 $G_1 = \mathscr{G}(\mathscr{D}(G_1))$ 上，并且可由 f 计算，因此也可由 $\mathscr{D}(G_0)\oplus\mathscr{D}(G_1)$ 计算，进而可由 $T_\infty \oplus G_0 \oplus G_1$ 计算。因此 G 本身也是相对 T_∞- 可计算范畴的。反过来（当 G 是相对 T_∞- 可计算范畴的时），还需要用到命题 3.5：若 $K_0 \cong K_1 \cong \mathscr{D}(G)$，那么每个 $g : \mathscr{G}(K_0) \to \mathscr{G}(K_1)$ 都会给出一个同构

$$\left(\Lambda^{T_\infty \oplus K_1}\right)^{-1} \circ \mathscr{D}(g) \circ \Lambda^{T_\infty \oplus K_0}$$

使用 g 和所示的预言机将 K_0 映射到 K_1。 □

推论 5.11. 设 $S \subseteq \omega$ 满足 $T_\infty \leq_T S$，且 α 是一个 S-可计算序数。那么，图 G 在 S 之上相对 Δ^0_α可计算范畴，当且仅当 $\mathscr{D}(G)$ 也是如此。

证明. 严格来说，这并非一个推论：在证明中，只需重复定理 5.10 的证明，并在适当位置取 α 次跳跃。□

5.6. 一致可计算范畴性。

定义 5.12. 对于预言机集合 $S \subseteq \omega$，如果存在一个图灵泛函 Γ，使得对于每一对结构 B ≅ C ≅ A，函数 $\Gamma^{S\oplus\mathcal{B}\oplus\mathcal{C}}$ 都是从 B 到 C 的同构，那么可数结构 A 就是 一致 S-可计算范畴的。

更一般地，对于一个 S-可计算序数 α，如果存在一个图灵泛函 Γ，使得对于每一对结构 B ≅ C ≅ A，函数 $\Gamma^{(S\oplus\mathcal{B}\oplus\mathcal{C})^{(\alpha)}}$ 都是从 B 到 C 的同构，那么 A 在S 之上就是一致 Δ^0_α-范畴的。

这个概念与定义 5.9 密切相关。总体而言，在这些不同类型中，A 的相对 Δ^0_α 范畴性等价于存在 A 中的一个有限元组$\bar{a}$，使得 (A $\bar{a}$) 具有一致的 Δ^0_α范畴性；而 A 的一致 $\Delta^0_{\alpha+1}$范畴性等价于存在一个由 A 的（无穷逻辑） Σ^0_α公式构成的斯科特族（但要谨慎处理“$\alpha + 1$”，区分有限序数与无限序数）。对于这里的命题，关键在于推论 5.11 中使用的过程是有效的。

命题 5.13。任取一个可数序数 α，以及一个能够同时计算α T_∞的 $S \subseteq \omega$。那么，对于每个图 $G \in$ Graphs，G 在 S之上具有一致的 Δ^0_α范畴性，当且仅当 $\mathscr{D}(G)$ 也具有这种性质。

证明。首先假设 $\mathscr{D}(G)$ 在 S 之上是统一 Δ^0_α-范畴的。给定 G 的任意两个副本 G_0 和 G_1，从 $(S \oplus G_0 \oplus G_1)^{(\alpha)}$-预言机计算同构 $G_0 \to G_1$ 的过程，首先生成 $(\mathscr{D}(G_0))^{(\alpha)}$ 和 $(\mathscr{D}(G_1))^{(\alpha)}$；利用 $\mathscr{D}$ 和预言机，这两项都可以从预言机 $G_0^{(\alpha)}$ 和 $G_1^{(\alpha)}$ 一致地完成

T_∞（可从 S 计算得到）。随后对 $\mathscr{D}(G)$ 应用一致范畴性过程——再次使用 S——以计算同构 $f : \mathscr{D}(G_0) \to \mathscr{D}(G_1)$，而 $\mathscr{G}(f)$ 必定是从 $\mathscr{G}(\mathscr{D}(G_0))$ 到 $\mathscr{G}(\mathscr{D}(G_1))$ 的同构。根据命题 3.4，这就是所需的输出。

反向论证完全相同，只需将图与微分域的角色互换；不过现在需要用到命题 3.5，因为$\mathscr{D}(\mathscr{G}(K_i))$并不等同于我们起初所用的副本 K_i $\mathscr{D}(G)$。为解决这一问题，我们只需用 $\Lambda^{T_\infty \oplus K_0}$ 将 K_0 同构地映到 $\mathscr{D}(\mathscr{G}(K_0))$，仿照上文的过程构造一个从 $\mathscr{D}(\mathscr{G}(K_0))$到 $\mathscr{D}(\mathscr{G}(K_1))$的同构，最后再用$(\Lambda^{T_\infty \oplus K_1})^{-1}$收尾；它将 $\mathscr{D}(\mathscr{G}(K_1))$同构地映到 K_1。□

5.7. 斯科特秩与范畴性序数。这里我们不逐一介绍斯科特秩的各种定义，而是请读者参阅 [25, 26]。

斯科特秩在这里引出了一些有趣的问题，因为它既有带参数版本，也有无参数版本。设 S 是某个图的斯科特族，且 S 使用参数 c 来命名图中的一个节点。自然会认为，若 $n = c^G$属于某个特定图呈现 G的定义域 ω，那么 $\mathscr{D}(G)$对应的斯科特族就需要将可定义集 A中、位于 $\mathscr{D}(G)$内的元素 a_n命名为常元，因为在 $\mathscr{D}(G)$对 G 的解释中，a_n “代表” n。反过来，若将可定义集 A 中的某个元素用作某个 $\mathscr{D}$值域中的 DCFC $K \in$ 的斯科特族里的常元 d，且 $a_m = d^K$ 属于 K的某个特定呈现，那么在 $\mathscr{G}(K)$对应的斯科特族中，就应将图 $\mathscr{G}(K)$的节点 m 命名为常元。然而，也有可能将 K 中不属于 A 的某个元素用作 K的斯科特族里的常元，而目前尚不清楚在 $\mathscr{G}(K)$中需要命名哪些常元才能处理这种情况。

我们不在此处处理这些问题，而是借助 [26]中关于斯科特秩的以下结果来避开它们。我们首先介绍的概念有时也称为范畴性度，最初见于 [4]。

定义 5.14。可数结构 A 的范畴性序数是最小的序数 α，使得存在某个 $S \subseteq \omega$，令 A 在 S 以上相对 Δ^0_α 范畴。

“范畴性序数”一词并不常用，因为根据[27], 的推论 VII.24，它恰好就是该结构的参数化斯科特秩。因此，利用我们此前的工作，我们可以迅速证明斯科特秩的保持性。

命题 5.15。对于每个 $G \in$ 图，$\mathscr{D}(G)$ 与 G具有相同的参数化斯科特秩。因此，DCFC 中的结构可以实现所有可能的参数化斯科特秩：每个可数序数都是某个 $K \in$ DCFC 的参数化斯科特秩。

证明。这可由推论 5.11 直接得出。图能够实现所有可能的参数化斯科特秩，这一点早已确立，例如可通过 [13]中的构造得知。□

[27, 推论 VII.24]还表明，可数结构 A 的无参数斯科特秩是满足以下条件的最小序数 α：存在某个 $S \subseteq \omega$（能够计算 α），使得 A 在 S以上是一致 Δ^0_α-范畴的。因此，我们可以完全仿照推论 5.11 应用命题 5.13，以证明 $\mathscr{D}$ 也保持这些斯科特秩。

命题 5.16。对于每个 $G \in$ 图，$\mathscr{D}(G)$ 与 G 具有相同的无参数斯科特秩。因此，DCFC 中的结构实现了所有可能的无参数斯科特秩：每个可数序数都是某个$K \in$ DCFC 的无参数斯科特秩。□

这种方法显然比按照本小节前面所描述（但不建议采用！）的方式直接分析常元的有限元组简单得多。

6. Non-functoriality

第 3 节中构造的归约 $\mathscr{G}$ 是函子的一个自然例子，其定义域是归约 $\mathscr{D}$ 的像。然而，尽管我们在构造 $\mathscr{D}$ 时竭尽全力，它仍不是函子。它缺少一项称为函子性的基本性质：$\mathscr{D}$ 通常不保留同构 $g_0 : G_0 \to G_1$ 和 $g_1 : G_1 \to G_2$ 的复合。映射 $\mathscr{D}(g_1 \bigcirc g_0)$ 确实会是从 $\mathscr{D}(G_0)$ 到 $\mathscr{D}(G_2)$ 的一个同构，但它往往不等于 $\mathscr{D}(g_1) \bigcirc \mathscr{D}(g_0)$。这种失败的原因在于，将 $\mathscr{D}(g_0)$ 从 K_H 扩展到其微分闭包时，反复需要选择一个在前面的元素之上实现特定类型的元素。我们已经通过允许自己使用一个 T_∞-预言机来应对这个问题，只为获知这些类型本身。剩下的问题是，在目前定义的 $\mathscr{D}(g_0)$ 的像之上，许多这类类型都由多个元素实现——事实上，往往由无穷多个不同元素实现——而选择其中哪一个并无自然的方法。我们采用了一个权宜之计：利用定义域 ω 的自然序，选择该序下实现此类型的最小元素。然而，由于这个序与 $\mathscr{D}(G_1)$ 的结构毫无关联，这就破坏了函子性。

~6.1. 自同构群。事实上，寻找一对互为逆的 Borel 函子 $\mathscr{D}$ 和$\sim\mathscr{G}$（在 Borel 自然变换意义下），使其能够将图映射到微分闭域，再映射回来，从一开始就注定要失败。像许多时候一样，这一点从迄今为止的讨论中很难看出来，但只要考察相关结构的自同构，便会突然明了。David Marker 是第一个意识到应该直接忽略微分结构的人。以下论证如今已是域论中的常识，它是在与他、Matthew Harrison-Trainor 和 Tom Scanlon 的讨论中形成的。

引理 6.1. 特征零的微分闭域没有任何有限阶自同构 > 2。因此，$\mathrm{DCFields}_0$ 对自同构群并非普适。

证明。假设 $K \in$DCFields$_0$ 有一个有限阶为 n 的自同构 α。那么 α 也是 K 在域的语言中的约化结构 K_0 的自同构（删去微分算子），且其阶保持不变。我们要应用 Artin 和 Schreier 的定理（[1, Satz 4], ，或参见 [15]）：任何代数闭域都不可能是某个子域的有限次扩张。事实上，若 $F_0 \subset K_0$ 是 α 的不动域，那么对每个 $t \in K_0 \setminus F_0$，都有 $\alpha^m(t) = t$，其中某个（最小的） m 整除 n。现在考虑多项式

$$\prod_{0 \le i < m} (X - \alpha^i(t))$$

其系数是 $\{t, \alpha(t) \ldots, \alpha^{m-1}(t)\}$ 中的初等对称多项式；由于 α 将这个集合映射到自身，它们都属于 F_0。因此，每个 $t \in K_0$ 在 F_0 上的次数都是 $\le n$，所以 K_0/F_0 是一个代数扩张，其次数由本原元定理可知为 $\le n$。根据 Artin-Schreier 定理，这个次数必为 ≤ 2，因此 $\alpha \bigcirc \alpha$ 是恒等映射。□

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$由此可知，不存在如上所述的 Borel 函子 $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{G}$，使它们互为逆函子（差一个 Borel 自然变换）。这里我们采用范畴的语言。“范畴等价”由互为逆函子（差一个 Borel 自然变换）的 Borel 函子构成，正如上文所述。Harrison-Trainor、Montalb´an 和作者的以下结果表明，如果这种等价确实存在，那么 K 和 G 的自同构群将同构，这与引理 6.1 矛盾。

定理 6.2（ [12]中的定理 3.4）。假设函子 $\mathscr{F}$:Iso(B) $\to$Iso(A),η, $\mathscr{G}$:Iso(A) $\to$ Iso(B)，且 ϵ 在 Iso(A) 与 Iso(B) 之间构成 Borel 伴随等价，并且 $\mathscr{F}$(B) =A。那么，将 $\mathscr{F}$ 限制在 Aut(B) 上，就得到 Aut(B) 与 Aut(A) 之间的一个同构。

因此，不仅所需的、介于 Graphs 与 DCFields$_0$ 范畴之间的统一函子不存在，甚至还有一些单独的图，不存在这样的函子。

推论 6.3（Harrison-Trainor、Marker、Miller 和 Scanlon）。Graphs 与 DCFields$_0$ 之间不存在 Borel 伴随范畴等价。事实上，对于某些图 G，Iso(G) 与任何满足 $K \in$DCFields$_0$ 的 Iso(K) 之间都不存在 Borel 伴随范畴等价。

证明。由引理 6.1，取任意具有有限阶自同构 > 2 的图 G。 □

此外，这也意味着， G 上述理论与任何 $K \in$微分闭域理论$_0$, 之间都不可能存在 [12, 博雷尔双解释。6] 定理 2. 还表明，这种双重解释会导出同构的自同构群。（这里使用的解释概念，是对通常基于有限公式的模型论解释概念的实质性推广：在 [12]中，可以使用 $L_{\omega_1\omega}$ 公式，而且解释的定义域可以由任意有限长度的元组构成，

而不是固定长度的元组。）特别是，尽管 Hrushovski-Sokolovi´c 构造给出了 G 与 $\mathscr{D}(G)$ 之间双向的解释，但其中任何一个都不能成为双重解释的一半。

在 Marker 得出上述直接论证之前，他和作者一直在考虑 DCF_0 的模型是否可能是刚性的。确实存在刚性可数图（即没有非平凡自同构的图），而刚性微分闭域的可能性则似乎极不可能。然而，在作者提出这个问题后，Marker 进行了研究，并证明这种看似不可能的情况实际上是可能的。因此，发现上述简单论证的延迟，反而产生了积极作用，促成了以下定理。

定理 6.4（Marker，[20] 中的定理 3.5）。存在一个特征零的刚性可数微分闭域。

构造出此定理所述域的方法具有这样的性质：该域不是自身任何真微分子域的微分闭包；事实上，对于 DCF_0 的可数模型而言，刚性蕴含这一性质。相比之下，每个代数闭域都是某个真子域的代数闭包，事实上还是某个实闭子域的代数闭包。

Marker 指出，他的构造似乎无法推广，从而得到 $\mathrm{DCF}_{0,}$ 的非刚性但近刚性模型，即自同构群有限的非刚性模型。他提出了这样的问题：DCF_0 是否存在可数的非刚性近刚性模型。（根据他的引理 6.1，自同构群必须完全由对合构成，因此是阿贝尔群，形式为 $(\mathbb{Z}/(2))^k$。）

不过，在 Marker 的帮助下，我们可以在此给出另一种证明：对于我们在第 3 节中的$\widetilde{}$特定归约 $\mathscr{D}$，不存在可充当其逆的 $\mathscr{G}$，即使允许相差一个自然变换也不行。这里的证明用到了以下事实。

命题 6.5（Marker，[20]中的命题 1.1）。设 $K \in \mathrm{DCFields}_{0,}$，并假设$\widehat{}$ K 不是微分闭的。那么，它的微分闭包 K 不是刚性的。

Marker 在定理 6.4 中的域通过不成为其自身任何真微分子域的微分闭包，避开了这个问题。我们在第 3 节构造的具体归约 $\mathscr{D}$ 从图 $H = \mathscr{H}(G)$ 的任意枚举构造出一个微分域 K_H，然后应用 Harrington 定理构造出 K_H 的微分闭包 $\mathscr{D}(G)$。由于 K_H 本身显然不是微分闭的，命题 6.5 表明 $\mathscr{D}(G)$ 不是刚性的。因此，对于每个刚性图G，$\mathrm{Aut}(\mathscr{D}(G))$ 都不同构于 $\mathrm{Aut}(G)$，这彻底打消了将 Hrushovski-Sokolovi´c 构造转化为逆函子的希望。

需要指出的是，映射 $G \mapsto K_{\mathscr{H}(G)}$ 确实是从 Graphs 到自身的一个函子，将同构 $G_0 \to G_1$ 按显然的方式映射为同构 $K_{\mathscr{H}(G_0)} \to K_{\mathscr{H}(G_1)}$。此外，它是可计算的（甚至不需要谓词 C 或预言机 T_∞），并且存在一个从其像映回 Graphs 的可计算逆函子。利用这一

函子，可以将关于 Graphs 的普适性结果完整地推广到更大的可数微分域范畴（不一定是微分闭的）上，其中域的特征为 0。不过，众所周知，可数微分域构成一个普适范畴：范畴 Fields_0 已知在所有这些方面都是普适的，这使用了 [24], 中构造的函子；而且，只需赋予每个域平凡导子 0，它就会成为一个微分域。我们指出，[24] 还利用 Fried 和 Koll´ar 在 [7], 中的早期结果，证明了带有 $p > 0$的 Fields_p 的普适性；同样，通过将域变为处处导子为 0 的微分域，可以推出特征为 p 的微分域范畴的普适性。

7. Further questions

上一节提到了 Marker 关于自同构群的一个自然问题，但这并非本文结果引出的唯一问题。本文留下的最显而易见的未解问题，是预言机集合T_∞的可判定性。无论这个问题的答案如何，都将带来重要结果。若 T_∞ 可判定，那么第 5 节将给出关于 DCFC 范畴性的普适性结果，涵盖 [13] 等所有通常意义上的情形，而且无需相对于某个锥进行相对化。这将有力地表明，在符号表中加入无限可定义谓词 C，填补了 DCF_0模型可计算性性质方面的空缺。另一方面，近年来，在图灵度锥上开展研究这一概念已产生了许多重要而有趣的应用，但迄今尚无已知的自然结构类被证明确有必要采用这种方法。若 T_∞ 不可判定，那么本文的结果将使它成为此类结构类的首例。

回忆一下，DCF_0 是普通微分闭域理论，也就是说，其语言中只有一个导子。当然，第 5 节关于 DCFC 类的普适性结果也适用于更大的偏微分闭域类，其中导子的数量可以是任意有限个（通常假设它们彼此可交换）。不过，众所周知，从常微分方程转向偏微分方程后，一般理论研究会显著复杂得多，因此人们自然会问：当语言中加入更多导子时，这种复杂性的增加是否会以某种可计算性理论的方式体现出来。本文的结果在某种程度上削弱了这个问题的重要性，因为本文表明，即便是普通情形，也已接近普适。（此外，由于具有多个导子的微分闭域是代数闭域，第 6 节的论证仍然排除了自同构群的普适性。）不过，似乎有可能在增加导子后，不再需要谓词 C 就能实现普适性。另一种可能是，预言机集合 T_∞ 可能需要替换为另一个预言机，其图灵度也可能不同。这些情况中的任何一种都会凸显普通微分代数与偏微分代数之间的区别；而如果这些可能性都不成立，那么这种区别似乎就没那么显著。

References

[1] E. Artin 与 O. Schreier，《实数域的代数构造》，载于 Artin 论文集，编者 S. Lang 和 J. Tate（纽约：施普林格出版社，1965），258–272。[2] C.J. Ash、J.F. Knight、M.S. Manasse 与 T.A. Slaman；可数结构的通用副本，《纯粹与应用逻辑年刊》42（1989），195–205。[3] L. Blum；《广义代数理论：模型论方法》，博士论文，麻省理工学院，1968。[4] B.F. Csima 与 M. Harrison-Trainor；锥上的范畴性度，通过 η-系统，《符号逻辑杂志》82（2017）1，325–346。[5] R.G. Downey、A.M. Kach、S. Lempp、A.E.M. Lewis-Pye、A. Montalb´án 和 D.D. Turetsky；可计算范畴性的复杂性，《数学进展》268（2015），423–466。[6] E. Fokina、I. Kalimullin 与 R.G. Miller；可计算结构的范畴性度，《数学逻辑档案》49（2010）1，51–67。[7] E. Fried 与 J. Koll´ar；域的自同构群，载于《普适代数》（埃斯泰尔戈姆，1977），《博利亚伊·亚诺什数学学会研讨会论文集》第 29 卷（阿姆斯特丹—纽约：北荷兰出版社，1982），第 293–303 页。[8] S.S. Goncharov；非自同构等价构造化的数量，《代数与逻辑》16（1977），169–185。[9] S.S. Goncharov；非自同构等价构造化数量问题，《代数与逻辑》19（1980），401–414。[10] L. Harrington；递归可呈示素模型，《符号逻辑杂志》39（1974）2，305–309。[11] M. Harrison-Trainor、A. Melnikov、R. Miller 与 A. Montalb´án；可计算函子与有效可解释性，《符号逻辑杂志》82（2017）1，77–97。[12] M. Harrison-Trainor、R. Miller 与 A. Montalb´án；博雷尔函子与无穷语言解释，《符号逻辑杂志》83（2018）4，1434–1456。[13] D.R. Hirschfeldt、B. Khoussainov、R.A. Shore 与 A.M. Slinko；代数结构中的度谱与可计算维数，《纯粹与应用逻辑年刊》115（2002），71–113。[14] E. Hrushovski 与 Z. Sokolovi´c；微分闭域的极小子集，20 世纪 90 年代初的预印本。[15] N. Jacobson；《基础代数 II》（纽约：W.H. Freeman 出版公司，1989）。[16] J.F. Knight；序的跳跃中编码的度，《符号逻辑杂志》51（1986），1034–1042。[17] E. Kolchin；微分域的受约束扩张，《数学进展》（1974）12，141–170。[18] D. Marker，Manin 核，《模型论与代数、解析几何之间的联系》，1–21，数学丛书第 6 卷，那不勒斯第二大学数学系，卡塞塔，2000。[19] D. Marker；微分域的模型论，载于《域的模型论》，编者 D. Marker、M. Messmer 与 A. Pillay，ASL 逻辑学讲义第 5 卷（韦尔斯利，马萨诸塞州：A.K. Peters 出版社，2006），第 41–109 页。[20] D. Marker；即将发表。arXiv # 2201.04463v3。[21] D. Marker 与 R. Miller；微分闭域的图灵度谱，《符号逻辑杂志》82（2017）1，1–25。[22] R. Miller；重新审视一致可计算范畴性：献给 Rod Downey 教授六十岁生日，载于《可计算性与复杂性：为庆祝 Rodney G. Downey 六十岁生日而作的论文集》，编者 A. Day、M. Fellows、N. Greenberg、B. Khoussainov、A. Melnikov 与 F. Rosamond，《计算机科学讲义》10010（柏林：施普林格出版社，2017），254–270。

[23] R. Miller、A. Ovchinnikov 和 D. Trushin；微分域的约束集的计算，《代数学杂志》（2014）407，316–357。[24] R. Miller、B. Poonen、H. Schoutens 和 A. Shlapentokh；从图到域的可计算函子，《符号逻辑杂志》83（2018）1，326–348。[25] A. Montalb´án；一个更稳健的斯科特秩，《美国数学会会刊》143（2015），5427–5436。[26] A. Montalb´án；《可计算结构理论：算术之内》，《逻辑学视角》（剑桥：剑桥大学出版社，2021）。[27] A. Montalb´án；《可计算结构理论：超越算术》，草稿，访问于2022年5月10日。即将收入《逻辑学视角》系列（剑桥：剑桥大学出版社）。[28] A. Pillay，《域的模型论》中〈微分代数群与可数微分闭域的数量〉，D. Marker、M. Messmer 和 A. Pillay 编，第5卷，ASL 逻辑学讲义（马萨诸塞州韦尔斯利：A.K. Peters 出版社，2006），第111–133页。

Dept. of Mathematics, Queens College, 65-30 Kissena Blvd., Queens, NY 11367 & Ph.D. Programs in Mathematics & Computer Science, Graduate Center, City University of New York, 365 FIfth Avenue, New York, NY 10016, USA.电子邮箱地址：Russell.Miller@qc.cuny.edu 网址：http://qcpages.qc.cuny.edu/~rmiller/