arXiv:2301.05788v1 [quant-ph] 13 Jan 2023

矩阵代数之间初等正映射的暴露性

SEUNG-HYEOK KYE

Abstract. 正线性映射 Ad_s 将矩阵 x 映射到 s^*xs，在量子信息论和矩阵理论中都发挥着重要作用。Marciniak[在《Linear Multilinear Alg.》61 (2013), 970–975]中证明，映射 Ad_s 生成了所有正线性映射所构成的凸锥的一条暴露射线。本文分别利用 Choi矩阵和 Woronowicz方法给出两种替代证明。

1. Introduction

对于给定的一个含有复数元素的 $m \times n$ 矩阵 s，线性映射 $\mathrm{Ad}_s : M_m \to M_n$从 $m \times m$ 矩阵代数 M_m 到 M_n 定义为

$$\mathrm{Ad}_s(x) = s^*xs, \qquad x \in M_m.$$

这类映射通常出现在矩阵理论中与序相关的保持问题 [11, 13, 14] 中，同时也包括与转置映射 t 的复合 $\mathrm{Ad}_s \circ \mathrm{t}$。它们在当代量子信息论中也发挥着核心作用；$\mathrm{Ad}_s$的凸组合是完全正映射，而当它们保持迹时，就是量子信道。特别是，Ad_s 与秩一矩阵 s 的凸组合是纠缠破坏量子信道 [8], ，通过 Jamiołkowski–Choi 同构 [2, 9]可由此得到双体可分态。纠缠破坏映射也称为超正映射 [1, 16]。

在已知 [19] 当 s 具有最小秩或最大秩时，映射 Ad_s 和 $\mathrm{Ad}_s \circ \mathrm{t}$ 生成正映射凸锥的暴露射线之后，Marciniak[12] 证明了任意矩阵 s的情形也成立。他的证明依赖于对秩一非增正映射 [11]的刻画。本文旨在分别借助 Choi矩阵 [2] 和 Woronowicz方法 [17, 18],给出两种替代证明。

本文中，当正线性映射 $\phi : M_m \to M_n$ 生成从 M_m 到 M_n的所有正线性映射所构成的凸锥 $\mathbb{P}_1[M_m, M_n]$ 中的暴露射线时，我们称其为 $exposed$ 。下一节将汇集一些预备知识，并说明恒等映射的暴露性足以确认，对于每个 s，映射 Ad_s 和 $\mathrm{Ad}_s \circ \mathrm{t}$ 都是暴露的。恒等映射的暴露性将在第3节中证明

2020年数学主题分类. 15A30, 81P15, 46L05, 46L07. 关键词与短语. 暴露的正线性映射、矩阵代数、Choi矩阵、对偶性、双对偶面、恒等映射、超正映射、纠缠破坏映射、可分态、块正矩阵. 本研究部分受韩国 NRF-2020R1A2C1A01004587 资助。1

并给出相应的 Choi矩阵。我们还将在第4节中使用 Woronowicz方法证明这一点。

作者感谢 Marcin Marciniak 和 Dariusz Chru´sci´nski 对稿件提出的宝贵意见。

2. Preliminaries

在本文中，我们将使用双线性配对

$$\langle a, b\rangle := \mathrm{Tr}(ab^{\mathbf{t}}) \tag{1}$$

对于 $m \times n$ 矩阵 a 和 b，其中 Tr 表示迹。对于线性映射 $\phi\colon M_m \to M_n$，Choi矩阵 C_ϕ 定义为 [2]

$$\mathrm{C}_\phi = \sum_{i,j=1}^{m} |i\rangle\langle j| \otimes \phi(|i\rangle\langle j|) \in M_m \otimes M_n.$$

于是我们有恒等式

$$\langle a \otimes b, \mathrm{C}_\phi\rangle = \langle b, \phi(a)\rangle, \qquad a \in M_m,\ b \in M_n,\ \phi \in L(M_m, M_n), \tag{2}$$

其中，等式左侧和右侧的双线性配对分别由矩阵代数 $M_m \otimes M_n$ 和 M_n上的式（1）定义。恒等式（2）表明，当我们将 $M_m \otimes M_n$ 与 $M_m(M_n)$等同起来时，$\mathrm{C}_\phi \in M_m(M_n)$ 的 (i, j) 块的 (k, ℓ) 项由 $\langle |k\rangle\langle \ell|, \phi(|i\rangle\langle j|)\rangle$ 给出。

For 线性映射 $\phi\colon M_m \to M_n$，其伴随映射 $\phi^*\colon M_n \to M_m$ 定义为

$$\langle a, \phi^*(b)\rangle = \langle \phi(a), b\rangle, \qquad a \in M_m, b \in M_n.$$

那么，伴随映射 ϕ^* 的 Choi矩阵 $\mathrm{C}_{\phi^*} \in M_n \otimes M_m$ 是 Choi矩阵 $\mathrm{C}_\phi \in M_m \otimes M_n$的翻转。

如果矩阵 $\varrho \in M_m \otimes M_n$ 是 ϱ 中乘积向量上的秩一投影的非负和，则称其为可分矩阵。事实证明，ϱ 是可分矩阵，当且仅当它是凸锥中某个映射的 Choi矩阵

$$\mathbb{SP}_1 = \mathrm{conv}\,\{\mathrm{Ad}_s :\ \text{rank of } s = 1\},$$

其中，$\mathrm{conv}\, S$ 表示 S的凸包。$\mathbb{SP}_1$ 中的映射称为超正映射，也称为纠缠破坏映射。还要指出，矩阵 ϱ 属于 $M_m \otimes M_n$，当且仅当对每个乘积向量 $|\zeta\rangle \in \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ [9]都有 $\langle\zeta|\varrho|\zeta\rangle \geqslant 0$ 时，它是某个正映射的 Choi矩阵。这样的矩阵 $\varrho \in M_m \otimes M_n$ 称为块正矩阵。

考虑到空间张量积上的线性泛函与空间之间线性映射的对应关系，自然可以定义张量积 $M_m \otimes M_n$ 与映射空间 $L(M_m$之间的双线性配对 [4] $M_n)$ 如下：

$$\langle a \otimes b, \phi\rangle_1 = \langle b, \phi(a)\rangle, \qquad a \otimes b \in M_m \otimes M_n,\ \phi \in L(M_m, M_n). \tag{3}$$

由恒等式 (2)，我们有 $\langle \varrho, \phi\rangle_1 = \langle \varrho, \mathrm{C}_\phi\rangle$。由于每个 $\varrho \in M_m \otimes M_n$ 都可唯一表示为 $\varrho = \mathrm{C}_\psi$，其中 $\psi \in L(M_m, M_n)$，因此自然也可以将映射空间之间的双线性配对 [15, 16, 5]定义为

$$\langle \psi, \phi\rangle_2 = \langle \mathrm{C}_\psi, \mathrm{C}_\phi\rangle, \qquad \phi, \psi \in L(M_m, M_n). \tag{4}$$

由于 $\varrho = \mathsf{C}\psi$ 蕴含 $\langle \varrho, \phi\rangle_1 = \langle \varrho, \mathsf{C}_\phi\rangle = \langle \mathsf{C}\psi, \mathsf{C}_\phi\rangle = \langle \psi, \phi\rangle_2$，我们不区分双线性配对 $\langle \cdot, \cdot\rangle, \langle \cdot, \cdot\rangle_1$ 与 $\langle \cdot, \cdot\rangle_2$，并用记号 $\langle \cdot, \cdot\rangle$ 表示它们。

在此双线性配对下，凸锥 $\mathbb{P}_1$ 与凸锥 $\mathbb{SP}_1$互为对偶。也就是说，当且仅当 $\phi \in \mathbb{P}_1$ 对每个 $\psi \in \mathbb{SP}_1$都成立时，$\langle \phi, \psi\rangle \geqslant 0$；并且，当且仅当 $\psi \in \mathbb{SP}_1$ 对每个 $\phi \in \mathbb{P}_1$都成立时，$\langle \phi, \psi\rangle \geqslant 0$。等价地，当且仅当 $\phi \in \mathbb{P}_1$ 对每个可分的 $\varrho \in M_m \otimes M_n$都成立时，$\langle \varrho, \phi\rangle \geqslant 0$；并且，当且仅当 ϱ 对每个 $\phi \in \mathbb{P}_1$都成立时，$\langle \varrho, \phi\rangle \geqslant 0$。更多详情请参阅半综述性论文 [10] 。

对于任意 $\phi \in \mathbb{P}_1$，集合 $\phi' = \{\psi \in \mathbb{SP}_1 : \langle \phi, \psi\rangle = 0\}$ 是凸锥 $\mathbb{SP}_1$的一个暴露面。双对偶面

$$\phi'' = \{\psi \in \mathbb{P}_1 : \langle \varrho, \psi\rangle = 0 \text{ for every } \varrho \in \phi'\}$$

结果表明，它是包含 ϕ的最小暴露面，因此我们看到，ϕ 生成 $\mathbb{P}_1$ 的一个暴露射线，当且仅当 ϕ'' 由 ϕ的非负标量倍数构成。我们注意到，对偶对象ϕ' 可以取自 $M_m \otimes M_n$ 或 $L(M_m, M_n)$，具体取决于所用的双线性配对。若使用双线性配对（4），则 $\psi \in \phi''$ 当且仅当满足以下条件

$$s \in M_{m\times n},\ \operatorname{rank} s = 1,\ \langle \mathrm{Ad}_s, \phi\rangle = 0 \implies \langle \mathrm{Ad}_s, \psi\rangle = 0 \tag{5}$$

成立。另一方面，$\psi \in \phi''$ 等价于

$$a \in M_m^+,\ |\eta\rangle \in \mathbb{C}^n,\ \langle a \otimes |\eta\rangle\langle\eta|, \phi\rangle = 0 \implies \langle a \otimes |\eta\rangle\langle\eta|, \psi\rangle = 0, \tag{6}$$

当我们使用双线性配对 (3) 时。

由奇异值分解可知，每个 $m \times n$矩阵都具有形式$u\sigma v^*$，其中 $u \in M_m$ 和 $v \in M_n$ 均为非奇异矩阵，而 σ 由下式给出

$$\sigma = \sum_{i=1}^{r} |i\rangle\langle i| \in M_{m\times n}.$$

由于 $\mathsf{Ad}_{u\sigma v^*} = \mathsf{Ad}_{v^*} \circ \mathsf{Ad}_\sigma \circ \mathsf{Ad}_u$，并且映射 $\phi \mapsto \mathsf{Ad}_{v^*} \circ \phi \circ \mathsf{Ad}_u$ 是实向量空间 $H(M_m, M_n)$ 中所有保厄米性的线性映射之间的仿射同构，我们可知，映射 $\mathsf{Ad}_{u\sigma v^*}$ 在 $\mathbb{P}_1[M_m, M_n]$ 中是暴露的，当且仅当 Ad_σ 在 $\mathbb{P}_1[M_m, M_n]$中是暴露的。

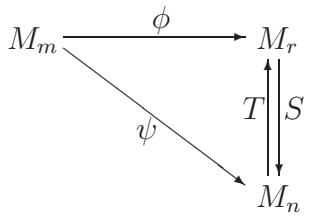
我们假设 $r \leqslant n$，并考虑以下两个映射 $S:\ M_r \to M_n$ 和$T:\ M_n \to M_r$，其定义如下

$$S : a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n, \qquad T : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a \in M_r. \tag{7}$$

命题 n 2.1. 如果 $\phi:\ M_m \to M_r$ 是暴露的，那么 $S \circ \phi:\ M_m \to M_n$ 也同样是暴露的。

证明。假设 $\psi:\ M_m \to M_n$ 属于 $(S \circ \phi)''$。那么对于每个 $a \in M_m^+$和 $k = r+1, \ldots, n$，我们有 $\langle a \otimes |k\rangle\langle k|, S \circ \phi\rangle = \langle |k\rangle\langle k|, S \circ \phi(a)\rangle = 0$，这意味着$\langle |k\rangle\langle k|, \psi(a)\rangle = 0$。因此，我们有 $S\circ T\circ\psi(a) = \psi(a)$。为了证明 $T\circ\psi \in \phi''$，假设 $a \in M_m$, $|\zeta\rangle \in \mathbb{C}^r$ 和 $\langle a \otimes |\zeta\rangle\langle\zeta|, \phi\rangle = 0$。那么我们有 $\langle |\zeta\rangle\langle\zeta|, \phi(a)\rangle = 0$。令 $|\zeta^\star\rangle = |\zeta\rangle \oplus 0 \in \mathbb{C}^n$，我们有 $\langle |\zeta^\star\rangle\langle\zeta^\star|, S \circ \phi(a)\rangle = 0$。由于 $\psi \in (S \circ \phi)''$，我们有$\langle |\zeta^\star\rangle\langle\zeta^\star|, \psi(a)\rangle = 0$，这意味着 $\langle |\zeta\rangle\langle\zeta|, T \circ \phi(a)\rangle = 0$。因此，我们有 $T \circ \psi \in \phi''$

并且 $T \circ \psi = \lambda\phi$，因为 ϕ 是暴露的。这意味着 $\psi = S \circ T \circ \psi = \lambda(S \circ \phi)$，正如所要求的。 □



假设恒等映射 $\mathrm{id}_r : M_r \to M_r$ 已被证明是暴露的。那么根据命题 2.1，有$S = S \circ \mathrm{id}_r$ 是暴露的。由于 $\phi \mapsto \phi^*$ 是$H(M_r, M_n)$ 与 $H(M_n, M_r)$之间的仿射同构，因此我们可知 $T = S^*$ 也暴露。现在，我们考虑具有与式 (7) 相同定义的暴露映射 $T : M_m \to M_r$。于是再次根据命题 2.1，可以得出 $\mathrm{Ad}_\sigma = S \circ T$ 是暴露的。在接下来的两节中，我们证明恒等映射 id_r 是暴露的。我们还注意到，$\phi \mapsto \phi \circ \mathrm{t}$ 导出了 $H(M_m, M_n)$之间的仿射同构，因此 $\phi : M_m \to M_m$ 的暴露性意味着$\phi \circ \mathrm{t} : M_m \to M_n$的暴露性。

3. A proof with Choi matrices

本节中，我们证明恒等映射 id_r 是暴露的。为此，假设 $\psi \in \mathbb{P}_1[M_r, M_r]$ 属于 id_r''。于是我们有

$$s \in M_r,\ \operatorname{rank} s = 1,\ \langle \mathrm{id}_r, \mathrm{Ad}_s \rangle = 0 \implies \langle \psi, \mathrm{Ad}_s \rangle = 0$$

由（5）可知。我们将证明 ψ 是 id_r 的非负标量倍数。

我们将 $M_r \otimes M_r$ 与 $M_r(M_r) = M_{r^2}$等同，并将 $\mathrm{C}_\psi \in M_{r^2}$ 的各项记为 $c_{(i,\ k),\ (j,\ \ell)}$，其中 i、j、k、$\ell = 1$、.....、r；$(i$、$k)$以及 $(j$、$\ell)$均按字典序排列。因此，

$$c_{(i,k),(j,\ell)} = \langle |ik\rangle\langle j\ell|, \mathrm{C}_\psi \rangle = \langle |i\rangle\langle j| \otimes |k\rangle\langle \ell|, \mathrm{C}_\psi \rangle = \langle |k\rangle\langle \ell|, \psi(|i\rangle\langle j|) \rangle$$

是 $\mathrm{C}_\psi \in M_r(M_r)$的 $(i$、$j)$ 块中的 $(k$、$\ell)$ 项。当 J是 $\{1$、2、.....、$r\} \times \{1$、2、.....、$r\}$的子集时，我们将取 $(i$、$k)$ 行以及 $(i$、$k) \in J$列，所得的 $\varrho \in M_r(M_r)$ 主子矩阵记为 ϱ_J。

我们从 2×2 矩阵之间的恒等映射 id_2 开始。注意，id_2 的 Choi矩阵为

$$\mathrm{C}_{\mathrm{id}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

我们首先考虑 $M_2 \otimes M_2$ 其对角线含有零项的块正矩阵。设 $(1$、$2)$阶和 $(2$、$1)$阶的对角线 $\varrho \in M_2 \otimes M_2$ 均为零。根据块正性的定义，2×2 主子矩阵$\varrho_{\{(1,\ 1),\ (1,\ 2)\}}$、$\varrho_{\{(2,\ 1),\ (2,\ 2)\}}$、

$\varrho_{\{(1,\,1),\,(2,\,1)\}}$ 和 $\varrho_{\{(1,\,2),\,(2,\,2)\}}$ 均为正，因此 ϱ 必可写成如下形式

$$\varrho_{a,b,\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \bar{\beta} & 0 & 0 \\ \bar{\alpha} & 0 & 0 & b \end{pmatrix}. \tag{9}$$

以下是多量子比特情形定理 5. [7, 的一个特例，5], 但为方便读者，我们仍给出一个简单的证明。

引理 3.1. 假设 $a, b \geqslant 0$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$。那么 $\varrho_{a,b,\alpha,\beta} \in M_2(M_2)$ 是块正的，当且仅当 $|\alpha| + |\beta| \leqslant \sqrt{ab}$。

证明。假设$\varrho_{a,b,\alpha,\beta}$ 是块正的，并取一个乘积向量

$$|\xi\rangle = (p, pe^{\mathrm{i}\tau}, qe^{\mathrm{i}(\theta-\tau)}, qe^{\mathrm{i}\theta})^{\mathbf{t}} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$$

其中实数为 p, q。于是我们有

$$0 \leqslant \langle\xi|\varrho_{a,b,\alpha,\beta}|\xi\rangle = p^2 a + q^2 b + 2pq\mathrm{Re}\left[e^{\mathrm{i}\theta}(\alpha + \beta e^{-2\mathrm{i}\tau})\right]$$

对于任意 $p, q \in \mathbb{R}$均成立，因此对于任意 θ和 τ，都有 $\left|\mathrm{Re}\left[e^{\mathrm{i}\theta}(\alpha + \beta e^{-2\mathrm{i}\tau})\right]\right|^2 \leqslant ab$。因此，我们得到了所需的条件。在该条件下，很容易看出$\varrho_{a,b,\alpha,\beta}$ 是一个正可分解映射的Choi矩阵。 □

推论 3.2。假设一个块正 $\varrho \in M_2 \otimes M_2$ 至多只有一个非零对角元素。那么 ϱ 的所有其他元素都为零。

命题 3 .3。在 M_2 上的恒等映射 id_2 在 $\mathbb{P}_1[M_2, M_2]$中生成一条暴露射线。

证明。假设 $\psi \in \mathsf{id}_2''$。取 (5) 中满足 $i \neq j$ 的 $s = |i\rangle\langle j| \in M_{2\times 2}$，我们可知 C_ψ必为如下形式：$\varrho_{a,\ b,\ \alpha,\ \beta}$。我们还取 (5) 中的 $s = \begin{pmatrix} 1 & e^{\mathrm{i}\theta} \\ -e^{-\mathrm{i}\theta} & -1 \end{pmatrix}$，可知

$$0 = \langle \mathrm{C}_{\mathrm{Ad}_s}, \varrho_{a,b,\alpha,\beta}\rangle = a + b - 2\mathrm{Re}\,(\alpha + \beta e^{-2\mathrm{i}\theta}),$$

对于每个 θ都成立。因此，我们有 $\beta = 0$，并且还有

$$0 = a + b - 2\mathrm{Re}\,\alpha \geqslant a + b - 2|\alpha| \geqslant 2\sqrt{ab} - 2|\alpha| \geqslant 0,$$

根据引理 3.1。只有当 $a = b = \alpha$时才会出现这种情况。 □

为了证明 id_r 在 $\mathbb{P}_1[M_r, M_r]$ 中是暴露的，我们假设 $\psi \in \mathsf{id}_r''$。考虑式 (5) 中的 $r \times r$ 矩阵 $s = |i\rangle\langle k|$，可知 C_ψ 的对角元为

$$c_{(i,k),(i,k)} = 0, \qquad i \neq k,\ i, k = 1, 2, \ldots, r. \tag{10}$$

为了确定 C_ψ 的非对角元 $c_{(i,\ k),\ (j,\ \ell)}$（其中 $(i,k) \neq (j,\ell)$），我们考虑 C_ψ 中 $\mathsf{C}_\psi]_J$ 的主子矩阵，其

$$J = \{(i,k), (i,\ell), (j,k), (j,\ell)\} \subset \{1, \ldots, r\} \times \{1, \ldots, r\}. \tag{11}$$

若 $i = j$或 $k = \ell$，则 $[\mathsf{C}_\psi]_J$是一个正矩阵，因此由 (10) 中的对角元可知，$c_{(i,\ k),\ (j,\ \ell)} = 0$。否则，$[\mathsf{C}_\psi]_J$是 $M_2 \otimes M_2 = M_2(M_2)$ 中的一个分块矩阵。我们将证明它是块正的。

为此，我们考虑线性映射 $\lambda_{i,\ j}:\ M_2 \to M_r$，其定义如下:

$$\lambda_{i,j}:\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mapsto a_{11}|i\rangle\langle i| + a_{12}|i\rangle\langle j| + a_{21}|j\rangle\langle i| + a_{22}|j\rangle\langle j| \in M_m,$$

对于 $i,j = 1,\ldots,r$，其中 $i \neq j$。则伴随映射 $(\lambda_{k,\ \ell})^*$: $M_m \to M_2$ 由下式给出

$$(\lambda_{k,\ell})^*:\sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}|i\rangle\langle j| \mapsto \begin{pmatrix} a_{kk} & a_{k\ell} \\ a_{\ell k} & a_{\ell\ell} \end{pmatrix} \in M_2.$$

复合映射 $(\lambda_{k,\ \ell})^* \circ \psi \circ \lambda_{i,\ j}$ 是从 M_2 到 M_2的正映射，其 Choi矩阵由 $[\mathsf{C}_\psi]_J$ 给出，其中 J 见式 (11)。因此，$[\mathsf{C}_\psi]_J$ 是块正的。

由推论 3.2可知，$c_{(i,\ k),\ (j,\ \ell)} \neq 0$ 仅当式 (11) 中的 J 包含 $[\mathsf{C}_\psi]_J$ 至少两个非零对角元时才成立。根据式 (10) 中给出的对角元，这仅在 $c_{(i,\ i),\ (j,\ j)}$ 以及 $c_{(i,\ j),\ (j,\ i)}$ 的情况下发生，其中 $i,j = 1,2,\ldots,r$ 和 $i \neq j$。在这种情况下，J由下式给出

$$J = \{(i,i),(i,j),(j,i),(j,j)\}, \tag{12}$$

而相应的 $\mathsf{C}_{\mathrm{id}_r}$ 的主子矩阵由 (8) 中的 $\mathsf{C}_{\mathrm{id}_2}$ 给出，它是映射 $(\lambda_{i,j})^* \circ \mathrm{id}_r \circ \lambda_{i,j}$ 的 Choi矩阵。另一方面，$[\mathsf{C}_\psi]_J$ 具有 (9) 中的形式$\varrho_{a,b,\alpha,\beta}$，它是 $(\lambda_{i,j})^* \circ \psi \circ \lambda_{i,j}$ 的 Choi矩阵。

现在，我们证明 $(\lambda_{k,\ell})^* \circ \psi \circ \lambda_{i,j}$ 属于 $((\lambda_{k,\ell})^* \circ \mathrm{id}_r \circ \lambda_{i,j})''$。为此，取一个满足关系 $\langle (\lambda_{k,\ell})^* \circ \mathrm{id}_r \circ \lambda_{i,j},\ \mathrm{Ad}_s\rangle = 0$ 的秩一矩阵 $s \in M_{2\times 2}$。于是有 $\langle \mathrm{id}_r, \lambda_{k,\ell} \circ \mathrm{Ad}_s \circ (\lambda_{i,j})^* \rangle = 0$。此外，我们看到 $\lambda_{k,\ell} \circ \mathrm{Ad}_s \circ (\lambda_{i,j})^*$ 属于 $\mathbb{SP}_1$，因为 $\lambda_{k,\ell} \circ \mathrm{Ad}_s \circ (\lambda_{i,j})^* = \mathrm{Ad}_{\hat{s}}$，并且

$$\hat{s} = s_{11}|i\rangle\langle k| + s_{12}|i\rangle\langle \ell| + s_{21}|j\rangle\langle k| + s_{22}|j\rangle\langle \ell| \in M_{m\times n}$$

是秩一的。由 $0 = \langle \lambda_{k,\ \ell} \circ \mathrm{Ad}_s \circ (\lambda_{i,\ j})^*,\ \psi\rangle = \langle \mathrm{Ad}_s,\ (\lambda_{k,\ \ell})^* \circ \psi \circ \lambda_{i,\ j}\rangle$，我们看到 $(\lambda_{k,\ \ell})^* \circ \psi \circ \lambda_{i,\ j}$ 属于 $((\lambda_{k,\ \ell})^* \circ \mathrm{id}_r \circ \lambda_{i,\ j})''$ 中的 $\mathbb{P}_1[M_2,\ M_2]$。

命题 3.3 告诉我们，$(\lambda_{i,\ j})^* \circ \psi \circ \lambda_{i,\ j}$ 的 Choi矩阵 $[\mathsf{C}_\psi]_J$（其中 J 满足（12））必须是 $\mathsf{C}_{\mathrm{id}_2}$ 的非负标量倍数。由于 C_ψ 的每个对角元素都出现在 C [和 C [中，其中 J 和 K 不同，我们看到整个矩阵 C_ψ 是 $\mathsf{C}_{\mathrm{id}_r}$ 的非负标量倍数。这就完成了恒等映射 id_r 是暴露的这一证明。因此，我们得到以下结论:

定理 3.4。（Marciniak [12]）对于每个 $s \in M_{m\times n}$，映射 $\mathrm{Ad}_s: M_m \to M_n$ 和 $\mathrm{Ad}_s \circ \mathsf{t}: M_m \to M_n$ 生成凸锥 $\mathbb{P}_1[M_m, M_n]$ 的暴露射线。

4. A proof with Woronowicz's method

假设 ϕ: $M_m \to M_n$ 是一个正线性映射。Woronowicz ˆ[18] 证明 ϕ 是暴露的，其主要思路是定义线性映射 $\hat{\phi}: M_m \otimes \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$，如下:

$$\hat{\phi}(a \otimes |\eta\rangle) = \phi(a)|\eta\rangle, \qquad a \in M_m,\ \eta \in \mathbb{C}^n,$$

并通过以下方式定义 $M_m \otimes \mathbb{C}^n$ 中的子空间 N_ϕ

$$N_\phi = \mathrm{span}\,\{a \otimes |\eta\rangle \in M_m^+ \otimes \mathbb{C}^n : \phi(a)|\eta\rangle = 0\}.$$

ˆ 另请参见 [17]。一般而言，我们有 $N_\phi \subset \ker \phi$。根据恒等式

$$\langle \eta|\phi(a)|\eta\rangle = \langle |\bar{\eta}\rangle\langle \bar{\eta}|, \phi(a)\rangle = \langle a \otimes |\bar{\eta}\rangle\langle \bar{\eta}|, \phi\rangle,$$

我们可以看出

$$a \otimes |\bar{\eta}\rangle\langle\bar{\eta}| \in \phi' \iff a \otimes |\eta\rangle \in N_\phi$$

对 $a \in M_m^+$ 和 $|\eta\rangle \in \mathbb{C}^n$成立。因此，我们看到，$\psi \in \phi''$ 当且仅当（6）成立，当且仅当 $N_\phi \subset N_\psi$。如果 ϕ 满足条件

$$\ker \hat{\phi} = N_\phi, \tag{13}$$

ˆ ˆ 那么我们有 $\ker \phi = N_\phi \subset N_\psi \subset \ker \psi$。因此，我们得出结论：存在一个线性 ˆ ˆ 映射 $X: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$，使得 $\psi = X \circ \phi$；或者等价地，存在 $X \in M_n$ 使得

$$\psi(a)|\eta\rangle = X\phi(a)|\eta\rangle, \qquad a \in M_n,\ |\eta\rangle \in \mathbb{C}^m.$$

我们回顾一下，若正映射 ϕ 的值域具有平凡交换子，则称其为不可约。假设 ϕ 是幺正且不可约的。那么，对每个 $a \in M_m$，我们都有$X\phi(a) = \psi(a) = \psi(a)^* = \phi(a)X^*$。取 $a = I$，可得 $X = X^*$，且 X 属于该值域的交换子。因此，我们有如下结论：

定理 4.1.（Woronowicz [18]）设含幺不可约正线性映射$\phi : M_m \to M_n$ 满足（13）。则 ϕ 是暴露的。

我们将证明恒等映射 id_r： $M_r \to M_r$ 满足条件（13）。为此，我们令

$$|\xi\rangle = (1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_r)^{\mathbf{t}} \in \mathbb{C}^r. \tag{14}$$

我们暂且固定 $i = 2$、3、.....、r，并且令

$$|\eta_i\rangle = (\bar{\alpha}_i, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)^{\mathbf{t}} \in \mathbb{C}^r, \tag{15}$$

其中 -1 位于第 i个位置。于是我们有 $|\xi\rangle\langle\xi| \otimes |\eta_i\rangle \in N_{\mathrm{id}_r}$。我们将

$$|\xi\rangle\langle\xi| \otimes |\eta\rangle \ \leftrightarrow\ |\xi\rangle \otimes |\bar{\xi}\rangle \otimes |\eta\rangle \tag{16}$$

在 $M_r^+ \otimes \mathbb{C}^r$ 与 $\mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^r$ 之间作对应以计算维数。对于每个 $i = 2$、.....、r，我们将子空间 $V_i \subset \mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^r$ 定义为

$$V_i = \mathrm{span}\,\{|\xi\rangle \otimes |\bar{\xi}\rangle \otimes |\eta_i\rangle : \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}\}.$$

由于含有变量 1、α_i 和 $\bar{\alpha}_i$ 的单项式线性无关，[6], 子空间 V_i的维数¯等于出现在 $|\xi\rangle \otimes |\xi\rangle \otimes |\eta_i\rangle$各项中的单项式数量。¯ $|\xi\rangle \otimes |\eta_i\rangle$ 的各项由以下 $2r-1$ 个单项式给出

$$\begin{array}{cccccccc} \bar{\alpha}_i, & \bar{\alpha}_i\bar{\alpha}_2, & \ldots, & \bar{\alpha}_i^2, & \ldots, & \bar{\alpha}_i\bar{\alpha}_r, \\ -1, & -\bar{\alpha}_2, & \ldots, & -\bar{\alpha}_i, & \ldots, & -\bar{\alpha}_r. \end{array} \tag{17}$$

因此，我们可以看到

$$\dim V_i = r(2r-1), \qquad i = 2, \ldots, r.$$

根据 $|\bar{\xi}\rangle \otimes |\eta_i\rangle$ 的条目 (17)，可知正交补 $V_i^\perp$由正交向量张成

$$\begin{array}{ll} |j11\rangle + |jii\rangle, & j = 1, 2, \ldots, r, \\ |xyz\rangle, & x, y = 1, 2, \ldots, r, \quad z = 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, r, \end{array} \tag{18}$$

其基数为 $r + r^2(r-2) = r^3 - r(2r-1)$。如果 $r = 2$，则有 $\dim N_{\mathrm{id}_2} = 6$。 7

当 $r \geqslant 3$ 时，值得将 $V_i^{\perp}$ 的生成元写成如下形式：

$$V_2^{\perp}: \ |111\rangle + |122\rangle, |211\rangle + |222\rangle, \ldots, |r11\rangle + |r22\rangle, \quad |xy3\rangle, |xy4\rangle, \cdots, |xyr\rangle,$$
$$V_3^{\perp}: \ |111\rangle + |133\rangle, |211\rangle + |233\rangle, \ldots, |r11\rangle + |r33\rangle, \quad |xy2\rangle, |xy4\rangle, \cdots, |xyr\rangle,$$
$$\cdots$$
$$V_r^{\perp}: \ |111\rangle + |1rr\rangle, |211\rangle + |2rr\rangle, \ldots, |r11\rangle + |rrr\rangle, \quad |xy2\rangle, |xy3\rangle, \cdots, |xy(r-1)\rangle,$$

可见 $V_j^{\perp} \cap V_k^{\perp} = V_2^{\perp} \cap V_3^{\perp} \cap \cdots \cap V_r^{\perp}$由以下 r 个向量张成

$$\begin{aligned}
|\zeta_1\rangle :=& |111\rangle + |122\rangle + |133\rangle + \cdots + |1rr\rangle, \\
|\zeta_2\rangle :=& |211\rangle + |222\rangle + |233\rangle + \cdots + |2rr\rangle, \\
& \cdots \\
|\zeta_r\rangle :=& |r11\rangle + |r22\rangle + |r33\rangle + \cdots + |rrr\rangle,
\end{aligned}$$

对于 $j, k = 2, 3, \ldots, r$。到目前为止，我们已经看到 $N_{\mathrm{id}_r} =$张成了 $\{V_2, V_3, \ldots, V_r\}$，并且

$$N_{\mathrm{id}_r}^{\perp} = V_2^{\perp} \cap V_2^{\perp} \cap \cdots \cap V_r^{\perp} = \mathrm{span}\,\{|\zeta_1\rangle, \ldots, |\zeta_r\rangle\}.$$

因此，我们有 $\dim N_{\mathrm{id}_r} = r^3 - r$，这与 $\ker \mathrm{id}_r$ 的维数相同。由定理 4.1，我们得出恒等映射是暴露的。

结果表明，除非 $m = n = r$，否则在（7）中定义的映射 $S: M_r \to M_n$ 和 $T: M_m \to M_r$ 不满足定理 4.1 的条件。在本短文的其余部分，我们将说明，即使不借助命题 2.1，Woronowicz 的论证仍可用于证明映射S 和 T是暴露的。另见 [3]。

通过对上述论证作一些修改，可以证明映射 S 也满足条件 (13)。我们将 (15) 中的 $|\eta_i\rangle$ 和 (16) 中的 V_i 修改为

$$\begin{aligned}
|\eta_i\rangle &= (\bar{\alpha}_i, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n, \\
V_i &= \mathrm{span}\,\{|\xi\rangle \otimes |\bar{\xi}\rangle \otimes |\eta_i\rangle : \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_n\} \subset \mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^n.
\end{aligned}$$

于是，$V_i = r[(2+n-r)r-1]$和 $V_i^{\perp}$的维数由 $\mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^n$中的向量 (18) 张成。我们还有 $\dim N_S^{\perp} = r$，因此 $\dim N_S = r^2 n - r$。这与 $\ker S$的维数ˆ相同，因此映射 S 满足 (13)。由此可知，存在 $X \in M_n$，使得对于任意 $\psi \in S''$，都有 $\psi(a) = XS(a)$。尽管 S 不可约，且 X 本身不一定是数量矩阵，但由恒等式$\psi(a) = XS(a)$可知，ψ 是 S 的数量倍。

需要注意的是，映射 $T: M_m \to M_r$ 不满足条件 (13)，尽管 T是暴露的。在这种情况下，(14) 中的 $|\xi\rangle$ 是 $\mathbb{C}^m$中的一个向量，且 $V_i \subset \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^r$满足 $\dim V_i = m(2m-1)$。正交补 $V_i^{\perp}$由以下向量张成

$$\begin{aligned}
&|j11\rangle + |jii\rangle, \qquad j = 1, 2, \ldots, m, \\
&|xyz\rangle, \qquad x, y = 1, 2, \ldots, m, \ z = 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, r
\end{aligned}$$

其基数为 $m + m^2(r-2) = m^2 r - m(2m-1)$。主要区别在于空间 $V_2^{\perp} \cap V_3^{\perp} \cap \cdots \cap V_r^{\perp}$，该空间由以下向量张成：

$$|\zeta_k\rangle := |k11\rangle + |k22\rangle + |k33\rangle + \cdots + |krr\rangle, \qquad k = 1, 2, \ldots m.$$

因此，我们有

$$\dim N_T = m^2 r - m, \qquad \dim \ker \hat{T} = m^2 r - r.$$

ˆ注意，对于 $k = r+1, r+2, \ldots, m$， $|\zeta_k\rangle$属于 ker $T \ominus N_T$。当 $\psi \in T''$ 时，可以证明，对于 $k = r+1, r+2, \ldots, m$， $|\zeta_k\rangle \in$ ˆ ker ψ。于是有 ker $T \subset$ ker ψ，并且存在 $X \in M_r$，使得对任意 $\psi \in T''$， $\psi(a) = XT(a)$。由于 T 是含幺不可约的，我们得出 ψ 是映射 T 的标量倍数。

References

[1] T. Ando, 《矩阵空间张量积中的锥与范数》, 《线性代数及其应用》379 (2004), 3–41。[2] M.-D. Choi, 《复矩阵上的完全正线性映射》, 《线性代数及其应用》10 (1975), 285–290。[3] D. Chru´sci´nski 和 G. Sarbicki, 《暴露正映射：一个充分条件》, 《物理学杂志 A：数学与理论》45 (2012), 115304。[4] M.-H. Eom 和 S.-H. Kye, 《矩阵代数中正线性映射的对偶性》, 《斯堪的纳维亚数学学报》86 (2000), 130–142。[5] M. Girard、S.-H. Kye 和 E. Størmer, 《矩阵代数间映射空间中的凸锥》, 《线性代数及其应用》608 (2021), 248–269。[6] K.-C. Ha 和 S.-H. Kye, 《矩阵代数间暴露不可分解正线性映射的构造》, Linear Multilinear Alg. 64 (2016), 2188–2198。[7] K. H. Han 和 S.-H. Kye, 《多量子比特最优真纠缠见证的构造》, 《物理学杂志 A：数学与理论》49 (2016), 175303。[8] M. Horodecki、P. W. Shor 和 M. B. Ruskai, 《纠缠制动信道》, 《数学物理评论》15 (2003), 629–641。[9] A. Jamio lkowski, 《保持迹和半正定算子的线性变换》, 《数学物理报告》3 (1972), 275–278。[10] S.-H. Kye, 《矩阵代数间线性映射的复合与张量积》, 《线性代数及其应用》658 (2023), 283–309。[11] M. Marciniak, 《作用于 I 型因子上的极端正映射》, 《巴拿赫中心出版物》89 (2010), pp. 201–221。[12] M. Marciniak, 《暴露正映射的秩性质》, Linear Multilinear Alg. 61 (2013), 970–975。[13] L. Moln´ar, 《有界可观测量集合的序自同构》, 《数学物理杂志》42 (2001), 5904。[14] R. ˇSemrl 和 R. Sourour, 《厄米矩阵上的保序映射》, 《澳大利亚数学学会杂志》95 (2013), 129–132。[15] ´L. Skowronek, 《有限维情形中具有映射锥对称性的锥》, Linear Algebra Appl. 435 (2011), 361–370。[16] ´L. Skowronek、E. Størmer 和 K. Zyczkowski, 《正映射锥及其对偶关系》, 《数学物理杂志》50, (2009), 062106。[17] S. L. Woronowicz, 《不可扩张正映射》, 《数学物理通讯》51 (1976), 243–282。[18] S. L. Woronowicz, 《暴露正映射》, 私人通信, 2011年7月29日。[19] D. A. Yopp 和 R. D. Hill, 《正映射锥的极端元与暴露面》, Linear Multilinear Alg. 53 (2005), 167–174。

Department of Mathematics and Institute of Mathematics,
Seoul National Univer-sity, Seoul 151-742, Korea电子邮箱地址：kye at snu.ac.kr