arXiv:2301.05825v1 [math.AG] 14 Jan 2023

可积系统的傅里叶–穆凯变换与分解定理

Davesh Maulik、Junliang Shen 和 Qizheng Yin

摘要。我们研究可积系统 $\pi\colon M \to B$ 中傅里叶–穆凯变换与分解定理之间的相互作用。我们的主要猜想是，对结构层截面的傅里叶–穆凯变换限制到零截面的形式邻域后，可由 π 的分解定理中出现的霍奇模量子化。对于可积系统，我们的表述统一了 Arinkin–Fedorov 对结构层的傅里叶–穆凯计算、Matsushita 关于高阶直像的定理，以及第二、第三作者提出的“perverse $=$ Hodge”恒等式。

作为证据，我们证明，这些傅里叶–穆凯像是相对 Picard 空间上的科恩–麦考利层，具有中间维支撑，其支撑由可积系统的高阶判别式控制。我们还证明了光滑可积系统以及某些具有结点奇异纤维的二维族的猜想。最后，我们概述尖点纤维出现时的证明。

目录

0. 引言 1 1. 可积系统的对称性 8 2. 奇异支撑 12 3. 傅里叶–穆凯 I：周 perversity–霍奇对称性 15 4. 傅里叶–穆凯 II：拉格朗日 Cohen–Macaulay 层 21 5. 光滑纤维化 24 6. 二维情形 32 参考文献 44

0. 引言

0.1. 傅里叶–穆凯/分解对应。 本文旨在阐述并探讨与可积系统相关联的两种几何结构——傅里叶–穆凯变换 [26] 和分解定理 [7]——之间的对应关系。

粗略地说，一个（代数完全）可积系统的几何模型是一个拉格朗日纤维化 $\pi_M\colon M \to B$，其中 M 是一个辛簇。受镜像

日期：2023年1月18日。

对称和几何朗兰兹对应的启发，在许多有趣的情形中，猜想纤维化 $\check{}M \to B$ 存在一个“对偶”拉格朗日纤维化 $M \to B$，它扩展了与 π_M 的非奇异纤维相关联的对偶阿贝尔概形。此外，预期两个环境空间 $\check{}\, M$ 和 M 通过傅里叶–穆凯变换共享同一个凝聚层导出范畴

$$\phi_{\mathrm{FM}} : D\mathrm{Coh}(M) \to D\mathrm{Coh}(\check{M}) \tag{1}$$

推广对偶阿贝尔概形的经典傅里叶–穆凯变换 [26]。我们关注 K¨ahler 微分形式 Ω_M^k 的局部自由层在傅里叶–穆凯变换下的像 M:

$$\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^k) \in D^b\mathrm{Coh}(\check{M}); \tag{2}$$

当 M 是超 K¨ahler 时，Ω_M^k 是自然的 超全纯丛，而 (2) 则是它们的同调镜像。[1] 我们的设想是，对象 (2) 与原可积系统 π_M 的分解定理 [7] 密切相关： $M \to B$:

$$R\pi_{M*}\mathbb{Q}_M[\dim M/2] \simeq \bigoplus_{i=0}^{\dim M} P_k[-k], \quad P_k = {}^{\mathfrak{p}}\mathcal{H}^k(R\pi_*\mathbb{Q}_M[\dim M/2]).$$

Here P_k 既可以看作偏 pervers 层，也可以看作 B上的全纯 D_B-模 .

傅里叶–穆凯/分解对应的粗略版本如下:

$$\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^k) \text{ “}\simeq\text{” } P_k, \quad \text{for all } k \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

显然，若以天真的方式理解，(3) 并无意义；左边是辛簇 M 上的相干对象，而右边则属于 D_B-模的阿贝尔范畴。最终，我们能够修改 (3) 的两边，得到一个数学上精确的表述；具体陈述见猜想 0.1。

在深入探讨更多技术细节之前，我们先简要概述一些主要构成要素和思想。根据 Saito 混合霍奇模理论， [29, 30], 全纯 D_B-模 P_k具有自然的良滤过。取其伴随分次对象，我们得到辛簇 T^*B 上的相干层 $\mathrm{gr}(P_k)$，可将其视为 P_k 的“经典极限”$\check{}$。另一方面，当 $M \to B$ 具有截面时，$\check{}$ 该截面的法丛可通过 M 的辛形式与余切丛同一化。于是，(3) 的修正版是在两个辛簇 M 和 T^*B 中共同的形式邻域 $\hat{}_{B^{\check{}}}\ B$ 上成立的一个同构，它连接两个相干对象:

$$\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^k)|_{\hat{B}} \quad \text{and} \quad \mathrm{gr}(P_k)|_{\hat{B}}.$$

In 换言之，霍奇模 P_k “量子化”了 $\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^k)$ 在.....上的限制 $\hat{B}$.

[1]关于这一方面的进一步讨论，请参见第0.5.3节。

0.2. 傅里叶–穆凯。 全文中，我们都在复数 $\mathbb{C}$域上工作。修改 [4], 的定义 2.6 后，我们称

$$\pi_M : (M, \sigma) \to B, \quad \dim M = 2n$$

若 $(M,\ \sigma)$ 是一个带有拉格朗日纤维化的光滑全纯辛簇，则称其为可积系统

$$\pi_M : M \to B$$

使得 π_M 是射影的，底空间 B 是光滑的，并且还满足：

(i) π_M 的每个几何纤维都是整的；(ii) 纤维化

π_M 存在一个截面 $s_B\colon B \to M$.[2]

Hitchin 系统和博维尔–穆凯系统（例 1.1）提供了丰富的可积系统实例。根据 [4, 推论 2.7], , 相对 Picard 空间的单位连通分支是一个光滑的群（代数）空间 $\pi_P\colon P(:= \mathrm{Pic}^0(M/B)) \to B$, 它定义在底空间 B 上，并且存在一个万有线丛

$$\mathcal{L} \to M \times_B P.$$

我们可以假设 L 在零截面 $0_B\colon B \hookrightarrow P$ 和 $s_B\colon B \hookrightarrow M$ 上是平凡化的。

我们的主要研究对象是 Arinkin–Fedorov 的（部分）傅里叶–穆凯变换 [4]:

$$\phi_{\mathrm{FM}} : D^b\mathrm{Coh}(M) \to D^b\mathrm{Coh}(P), \quad \mathcal{E} \mapsto Rq_{P*}(q_M^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^\vee) \otimes \pi_P^*\omega_B^\vee[n] \tag{4}$$

其中，$q_{(-)}$ 是从 $M \times_B P$出发的自然投影。一般而言，对偶拉格朗日纤维化 $\check{}M \to B$ 的存在以及傅里叶–穆凯等价（1）仍属猜想，在大多数情形下也远未解决。如果它们存在， M 预期是 $P \to B$ 的全纯辛部分紧化，并且（1）应当扩展（4）。尽管如此，由于我们只关注截面附近的傅里叶–穆凯像

$$B \subset P\,(\subset \check{M})$$

正如我们在第 0.1 节末尾所解释的，严格定义的部分变换（4）已足以满足我们的目的。

关于分解这一方面，回顾一下，根据 [29, 30], , 层 P_k 自然地是 B上的霍奇模，其伴随分次对象诱导出凝聚层

$$\mathrm{gr}(P_k) \in \mathrm{Coh}(T^*B).$$

正如我们将在命题 1.4 中看到的，选择 π_M 上的一个 M 相对丰沛线丛 Θ , 会导出 P 中 B 的形式邻域与 T^*B 中 B 的形式邻域之间的一个识别 $\widehat{\kappa}_\Theta$, 我们分别将它们记作 B:

$$\hat{B} \subset P, \quad \hat{B} \subset T^*B.$$

[2]在 Arinkin–Fedorov 的设定中，可积系统不要求具有截面。这里我们施加一个更强的假设。

利用这一识别，我们将傅里叶–穆凯/分解对应表述如下；更精确的表述见猜想 1.5。

猜想 0.1 （傅里叶–穆凯/分解对应）。 对于一个可积系统$\pi_M : (M, \sigma) \to B$，我们有

$$\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^k)|_{\hat{B}} \simeq \mathrm{gr}(P_k)|_{\hat{B}} \in D^b\mathrm{Coh}(\hat{B}). \tag{5}$$

因此，猜想 0.1 是一个关于可积系统π_M： $M \to B$的相干–可构造对应，它将 M 上的相干对象 Ω_M^k 与 B上的可构造对象 P_k联系起来。

0.3. **拉格朗日 Cohen–Macaulay 层**。 我们的首个结果是对猜想 0.1 的一致性检验：我们检验两侧是否都由科恩–麦考利层给出，并且在 (7) 下是否与约化的（拉格朗日）支撑相匹配。

对于霍奇模 P_k，以下结论已为人所知。
我们记

$$\mathrm{supp}^{\mathrm{red}}(\mathrm{gr}(P_k)) \subset T^*B,$$

赋予约化概形结构的 gr(P_k) 的支撑；它是一个锥形拉格朗日子簇，仅取决于底层偏 pervers 层 P_k。更确切地说，它是偏 pervers 层 P_k 的奇异支撑 SS(P_k)，并由态射 π_M： $M \to B$ [25] 的高阶判别式 描述。对于任意 $i \geq 0$，Migliorini–Shende 引入了一个高阶判别式 $\Delta^i(\pi_M) \subset B$，它由 π_M： $M \to B$ 的拓扑决定，并满足

$$\mathrm{codim}_B \Delta^i(\pi_M) \geq i.$$

他们进一步证明，对于任意 k，都有

$$\mathrm{SS}(P_k) \subset \Lambda := \bigcup_i \bigcup_{Z_i} \overline{T^*_{Z_i} B}. \tag{6}$$

这里， Z_i遍历 $\Delta^i(\pi_M)$ 的纯 i 余维不可约分支，而 $\overline{T^*_{Z_i} B}$ 表示 Z_i 的光滑轨迹的余法丛的闭包。显然，锥形拉格朗日子簇 $\Lambda \subset T^*B$ 仅取决于 π_M： $M \to B$ 的拓扑。

定理 0.2 (Saito, Migliorini–Shende)。 对于任意 k，相干层 $\mathrm{gr}(P_k)$ 都是维数为 n的 ***Cohen–Macaulay*** 层，其

$$\mathrm{supp}^{\mathrm{red}}(\mathrm{gr}(P_k)) \subset \Lambda.$$

定理的第二部分由上文讨论的 [25] 得出；第一部分则是光滑簇 [29] 上任意混合霍奇模的性质。

我们首先在傅里叶–穆凯一侧确立定理 0.2 的对应结果。在第 2.4 节中，我们利用高阶判别式 $\Delta^i(\pi_M)$ 定义一个闭子集 $\Lambda' \subset P$，与 $\Lambda \subset T^*B$ 相对应；

根据构造，将 Λ' 限制到 B 的形式邻域上，便可由推论 2.5 得到锥形拉格朗日子簇 $\Lambda \subset T^*B$：

$$\Lambda'|_{\hat{B}} \simeq \Lambda|_{\hat{B}} \subset \hat{B}. \tag{7}$$

定理 0.3。该对象

$$\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^k) \in D^b\mathrm{Coh}(P)$$

是一个维数为 n 的 ***Cohen–Macaulay*层，集中在 *0* 次，且**

$$\mathrm{supp}^{\mathrm{red}}(\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^k))|_{\hat{B}} \subset \Lambda'|_{\hat{B}}.$$

一般而言，相干层的傅里叶–穆凯像是一个集中在 $[-n, 0]$ 次的复形。因此，定理 0.3 的证明依赖于层 Ω_M^k 的性质。作为定理 0.3 的推论，猜想 0.1 化归为 B 上两个 Cohen–Macaulay层的同构。

0.4. **光滑纤维化与椭圆纤维化**。 作为支持猜想 0.1 的进一步证据，我们在以下情形中证明该猜想。

首先，我们验证猜想对光滑拉格朗日纤维化成立。

定理 0.4。 若 π_M 光滑，则猜想 *0.1* 成立。

接下来，我们证明当 M 是定义在非真曲线 B上的椭圆曲面，且其纤维至多为结点纤维时，猜想成立。这是出现奇异纤维的首个非平凡情形。

定理 0.5。 若 M 是定义在非真曲线 B上的椭圆曲面，且具有结点奇异纤维，则猜想 *0.1* 成立。

证明策略是将这两个层都视为某些层的迭代扩张，然后匹配各项及其扩张。此匹配需要运用 Deligne 典范延拓进行精细论证。在第 6.7 节中，我们还概述了当出现尖点纤维时，如何证明非真二维 M 上的猜想 0.1。此情形下的论证沿用定理 0.5 的策略，但由于尖点纤维而更加复杂，因此我们将细节留给有兴趣的读者。

0.5. **与其他工作的关系及研究方向**。

0.5.1. 周 *perversity*–霍奇对称性。 猜想 0.1 的动机在于尝试理解并范畴化拉格朗日纤维化 [31]的周 perversity–霍奇对称性；另见[11, 10, 16, 32]。

对于拉格朗日纤维化 $\pi_M\colon\ M \to B$，其中 M 是一个 $2n$维非奇异紧致不可约辛簇，在 [31]中发现了周 perversity–霍奇对称性：

$$\dim H^{i-n}(B, P_k) = \dim H^{k,i}(M), \tag{8}$$

其证明在很大程度上依赖紧致全纯辛／超-K¨ahler 流形的整体几何。

近期，有人利用将每个 P_k 自然提升为 B上的霍奇模，在 [32] 中提出了对 (8) 的范畴化。通过取 P_k的德拉姆复形的分次部分，我们得到一个有界的凝聚层复形：

$$\mathrm{gr}_i\mathrm{DR}(P_k) \in D^b\mathrm{Coh}(B).$$

[32] 的主要猜想是：

$$\mathrm{gr}_{-i}\mathrm{DR}(P_k)[n-k] \simeq \mathrm{gr}_{-k}\mathrm{DR}(P_i)[n-i] \in D^b\mathrm{Coh}(B). \tag{9}$$

(9) 的一个神秘特征是，与 (8) 不同，它不需要 M的紧致性假设。当 M 确实是紧致的时，[32, 第 4] 节解释了 (9) 如何恢复 (8)。

我们在此尝试回到 (8) 的原始形式，将右侧视为向量丛 Ω_M^k的上同调。这表明，可能存在一种相干–构造对应，将 Ω_M^k 与 P_k 直接联系起来；理想情况下，该对应应当适用于不一定紧致、 M 且带有拉格朗日纤维化的情形。我们的猜想利用傅里叶–穆凯变换，为第 0.2 节所定义的可积系统实现了这一点。

下面的命题证明了猜想 0.1、perverse–Hodge 对称性 (8) 及其在底空间 B上的范畴化 (9) 之间的相容性；这为猜想 0.1提供了进一步的证据。

命题 0.6. 设 $\pi_M : M \to B$ 是一个满足 *(9)* 的可积系统。则有

$$L0_B^*\,\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^k) = L0_B^*\,\mathrm{gr}(P_k) \in D^b\mathrm{Coh}(B), \tag{10}$$

其中 0_B 表示 P 和 T^*B 中零截面的闭嵌入。特别地，若 B 是射影的，则有

$$H^i(B, L0_B^*\,\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^k)) = H^i(B, L0_B^*\,\mathrm{gr}(P_k)). \tag{11}$$

事实上，正如我们将在证明中看到的，(11) 等价于 (8)。因此，猜想 0.1 可视为将周 perversity–霍奇对称性从零截面 B 延伸到其邻域 B。值得注意的是，即使在 $\pi_M\colon M \to B$ 光滑的情形下，层 $\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^k)$ 和 $\mathrm{gr}(P_k)$ 通常也不是概形论意义下支撑在零截面上。当可积系统存在奇异纤维时，形式邻域 B 所包含的几何比零截面 B 丰富得多。与 (9) 和 (10) 相比，猜想 0.1 的一个优点是它涉及匹配科恩–麦考利层，而非匹配导出范畴中的复形。若能找到猜想 0.1 的某种增强形式，从而推出 (9) 的完整陈述，将会很有意思。

0.5.2. 几何朗兰兹对应。 研究 Kähler 微分层的傅里叶–穆凯变换，另一个更具推测性的方向是借助几何朗兰兹对应。

对于一条非奇异曲线 C 和一个约化群 G，几何朗兰兹对应预言了如下范畴等价

$$\mathrm{GLC} : \text{“}D\mathrm{QCoh}\text{”}(\mathcal{M}_{\mathrm{dR},G}) \xrightarrow{\simeq} D(\mathrm{Bun}_{{}^L G}, \mathcal{D}) \tag{12}$$

保留各种额外结构。此处，$\mathbf{M}_{\mathrm{dR},\ G}$ 表示参数化 C上 G-局部系统的德拉姆模空间栈，$\mathbf{Bun}^{{}^L G}$ 表示 C上主 ${}^L G$-丛的模空间栈，$D(-,\ \mathrm{D})$是 D-模的导出范畴，而引号则表示“拟凝聚层范畴”需要作相应修改；精确表述请参见 [5] 。

“ (12)的“经典极限”预计由一个傅里叶–穆凯变换诱导

$$\phi_{\mathrm{FM}} : D\mathrm{QCoh}(\mathcal{M}_{\mathrm{Higgs},G}) \xrightarrow{\simeq} D\mathrm{QCoh}(\mathcal{M}_{\mathrm{Higgs},{}^L G})$$

该变换对应于由与 G 及其朗兰兹对偶 ${}^L G$相关联的希钦系统给出的对偶拉格朗日纤维化。[3]

在我们的设定中，若考虑（导出的）外幂

$$\Omega^k := \wedge^k \mathbb{L}$$

余切复形 $\mathbb{L}$ 在 $\mathbf{M}_{\mathrm{Higgs}上,\ G}$这个对象可以提升到 (12) 的左侧。因此，我们或许可以期待找到一个对象 Q_k ，它属于 $D(\mathbf{Bun}^{{}^L G},\mathrm{D})$，并且将 $\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega^k)$量子化。

Ques问题 0.7。我们能否描述量子化 $\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega^k)$的对象$\mathcal{Q}_k \in D(\mathrm{Bun}^{{}^L G},\mathcal{D})$?

我们的方案为这个问题提供了一个奇特而不完整的答案。为避免堆论问题，我们聚焦于 Hitchin 底空间的开子集 $A^\circ \subset A$ ，在该子集上，两个 Hitchin 纤维化

$$h_G : \mathcal{M}_{\mathrm{Higgs},G} \to A, \quad h_{{}^L G} : \mathcal{M}_{\mathrm{Higgs},{}^L G} \to A$$

都是带有整纤维的适当映射。我们的主要猜想预言，对象 $\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega^k)$可由一个单独的（移位） D-模 P_k 量子化，该模由相关的分解定理得到

$$h_{{}^L G}|_{A^\circ} : \mathcal{M}_{\mathrm{Higgs},{}^L G}|_{A^\circ} \to A^\circ$$

如果我们将范围限制在科斯坦特截面的形式邻域内。[4] 特别是，这表明 Q_k 是一个（移位的）全纯 D-模。

[3]这里的傅里叶–穆凯 ϕ_{FM} 应当与本文所用的傅里叶–穆凯相差一个移位，因为我们预期点层会被映到一个由全纯 D-模量子化的海克特本征层。不过，为了记号方便，我们在此处的讨论中忽略这个移位。[4]根据 Ngô 支撑定理 [27], , 与 Hitchin 系统 h_G 相关的分解定理与$h_{{}^L G}$相关的分解定理一致，因为二者都由光滑纤维所给出的局部系统的中间延拓所控制。

0.5.3. 超-*K¨ahler* 镜像对称。变换 $\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^k)$ 也可以从超-K¨ahler 镜像对称和 S-对偶 [18] 的角度进行研究。

当 M 是超凯勒的时，同调镜像对称预期会交换 M 和其镜像 $M^\vee$ 上的两类膜；它预言， M上的“BBB”膜通过傅里叶–穆凯变换映射为 $M^\vee$ 上的“BAA”膜。粗略地说，“A”代表拉格朗日条件，“B”代表全纯条件；“BBB”和“BAA”表示相对于三个复结构的相应条件。特别是，这意味着

$$\phi_{\mathrm{FM}}(\text{超全纯丛})$$

应当是支撑在复拉格朗日子流形上的层。本文的主题涉及一类特殊的超全纯丛 Ω_M^k。我们提出的主要观点是，利用分解定理和霍奇模，对 Ω_M^k 的镜像作局部描述。

我们注意到，对于希钦系统，Hausel 和 Hitchin 最近 [13, 12] 研究了另一类有趣的超全纯丛，它由 Higgs 丛的万有族给出，其镜像支撑在某些非常稳定的Higgs丛的上升流上。

0.6. **致谢**。 我们感谢 Conan Naichung Leung、Ivan Losev、Tony Pantev 和 Christian Schnell 对本文的关注以及非常有益的讨论。J.S. 获得了美国国家科学基金会资助 DMS-2134315 的支持。Q.Y. 获得了国家自然科学基金委员会资助 11831013 和 11890661 的支持。

1. 可积系统的对称性

1.1. **概述**。 本节介绍与可积系统 $\pi_M : M \to B$ 相关的两个群 A 和 P，它们刻画了该系统的对称性。群概形 A 直接作用于 M，而群空间 P 则诱导傅里叶–穆凯变换。二者通过相对极化 (14) 联系起来，后者进一步将零截面$B \subset P$和 $B \subset T^*B$的形式邻域对应起来。

1.2. **可积系统**。 我们回顾第 0.2 节中的定义：可积系统 π_M： $M \to B$是与光滑全纯辛簇 (M, σ) 相关联的拉格朗日纤维化，满足底空间 B 光滑、映射 π_M 为射影且满射、几何纤维不可约，并且 π_M 存在一个截面 s_B： $B \to M$。

例 1.1. 与全纯辛曲面中的不可约曲线相关联的紧化雅可比纤维化，提供了大量有趣的可积系统示例。

若将 (S, L) 取为极化阿贝尔曲面或 $K3$ 曲面，我们考虑线性系的开子集$U \subset |L|$，它参数化满足 $\mathsf{C} \to U$ 的不可约曲线，其中 $\mathsf{C} \to U$ 为万有族。于是紧化雅可比纤维化

$$\pi_J : \overline{J}_{\mathcal{C}} \to U \tag{13}$$

参数化几何纤维 C_u 上秩一无挠层 W，其中 $\mathsf{C} \to U$ 的欧拉示性数为

$$\chi(\mathcal{C}_u, \mathcal{W}) = \chi(\mathcal{C}_u, \mathcal{O}_{\mathcal{C}_u}), \quad u \in U$$

给出一个 可积系统。截面 $s_B\colon\ U \to \overline{J}_{\mathcal{C}}$ 由平凡线丛给出 :

$$u \in U \mapsto [\mathcal{O}_{\mathcal{C}_u}] \in \overline{J}_{\mathcal{C}}.$$

$\overline{J}_{\mathcal{C}}$ 的辛形式是 S 上以 L为支撑的半稳定一维相干层模空间的正则轨迹上的辛形式的限制。这种构造被称为博维尔–穆凯系统 [6]。

将 S 替换为由亏格为 ≥ 2 的曲线 C 的全余切丛给出的非紧致辛曲面 T^*C，同样的构造便得到希钦系统的实例。□

设 $M^{\mathrm{sm}} \subset M$ 为 π_M 的光滑轨迹，即， M中使 π_M 的限制为光滑的最大开子概形。则截面

$$s_B(B) \simeq B \subset M$$

属于 M^{sm}。

当可积系统由例 1.1 中的紧化雅可比纤维化 (13) 给出时，光滑轨迹 $\overline{J}_C^{\mathrm{sm}}$ 恰好是相对零次皮卡概形

$$\mathrm{Pic}^0(\mathcal{C}/B) \to B$$

它参数化几何纤维上的零次线丛；它是 B 上的群概形，并自然作用于 $\overline{J}_C$。

Arinkin–Fedorov [4]将此结果推广到了任意可积系统。

命题 1.2 ([4,命题 8。7])。 可积系统的光滑轨迹是一个群概形 $A\colon = M^{\mathrm{sm}}$ 在 B之上。它在 M上有一个自然作用

$$\mu : A \times_B M \to M$$

保持光滑轨迹不变。

证明。 对于一个可积系统 $\pi_M\colon M \to B$，Arinkin 和 Fedorov 在 [4, 节 8] 中由自同构群概形 $\mathrm{Aut}_B(X)$ 构造了一个 B-群概形 A，使得:

(i) A 自然作用于 M，并保持光滑轨迹；(ii) M^{sm} 是一个 A-主齐性空间。

特别地，当 π_M 存在一个截面 s_B时， A-主齐性空间 M^{sm} 可通过以下方式与 A典范地等同:

$$\mu \circ (\mathrm{id}_A \times s_B) : A \to A \times_B M \to M, \quad \mathrm{Im}(\mu \circ (\mathrm{id}_A \times s_B)) = M^{\mathrm{sm}} \subset M;$$

参见 [4, 命题 8.7] 的证明。 □

我们以回顾 Ngˆo 的 δ-不等式 [27, 4]作为本节的结束。对于每个闭点$b \in B$，群 A_b 具有切瓦莱分解

$$1 \to R_b \to A_b \to H_b \to 1$$

其中 $R_b \subset A_b$ 为极大仿射子群， H_b 为阿贝尔簇。这定义了一个半连续函数

$$\delta : B \to \mathbb{N}, \quad \delta(b) := \dim R_b$$

用于计算仿射部分的维数。

以下命题是存在辛形式的推论 .

命题 1.3 (Ngˆo；参见 [4, 命题 8。9])。 对于可积系统 π_M ： $M \to B$，其相关群概形如命题 *1.2* 所述，我们有

$$\operatorname{codim}_B\{b \in B \,|\, \delta(A_b) \geq i\} \geq i.$$

1.3. **Picard**。 这里我们引入另一个与 A密切相关、定义在 B 上的群——Picard空间，它将在傅里叶–穆凯变换中出现。

（相对）Picard叠表示函子

$$\mathcal{P}ic(M/B) : B\text{-schemes} \to \text{groupoids}$$

它将 B-概形 S 映到 $M \times_B S$上的线丛所构成的群胚。截面 s_B : $B \to M$将 $\mathbb{G}_m$-gerbe平凡化：

$$\mathcal{P}ic(M/B) = \operatorname{Pic}(M/B) \times B\mathbb{G}_m.$$

这里，Pic(M/B) 是一个 B-群代数空间，其在几何点 $b \in B$上的限制恢复为 Picard概形 Pic(M_s)。特别地，代数空间 Pic(M/B) 带有一个万有线丛

$$\mathcal{L} \to M \times_B \operatorname{Pic}(M/B). \tag{14}$$

单位连通分支 $P \subset$ Pic(M/B) 也是 B上的群空间，并且通过将 (14) 限制，我们得到一个万有线丛 L $\to M \times_B P$，它满足

$$\mathcal{L}|_{M \times_B 0_B(B)} \simeq \mathcal{O}_M.$$

根据分裂的选取， $M \times_B P$ 上的万有线丛 L 经过归一化，满足条件

$$\mathcal{L}|_{s_B(B) \times_B P} \simeq \mathcal{O}_P.$$

我们将始终使用这个归一化泛族 L。

B 上的两个群 A 和 P 密切相关。如果我们选取一个 π_M-相对丰沛线丛

$$\Theta \in \operatorname{Pic}(M), \tag{15}$$

我们得到一个庞加莱线丛

$$\mathcal{P}_\Theta := \mu^*\Theta \otimes \mathrm{pr}_M^*\Theta$$

在 $A \times_B M$ 上，进而诱导出一个态射

$$\kappa_\Theta : A \to \mathrm{Pic}(M/B).$$

根据 [4, 推论 7.7], ，态射 κ_Θ 是 ´étale 的。由于 $A = M^{\mathrm{sm}} \subset M$ 不可约， κ_Θ 的像必定位于单位连通分支 $P \subset \mathrm{Pic}(M/B)$ 中。因此我们得到 B 群之间的 ´étale 同态

$$\kappa_\Theta : A \to P.$$

以下命题为猜想 0.1 奠定基础；该猜想刻画了 B 在 P 和 T^*B 内的形式邻域。

命题 1.4 节。式 *(15)* 中的 π_M-相对丰沛线丛 Θ 诱导出一个同构

$$\hat{\kappa}_\Theta : \hat{B}_P \xrightarrow{\simeq} \hat{B}_{T^*B}.$$

这里，$\hat{}\ B_{(-)}$ 表示$\hat{}\ B_{(-)}$ 在$(-)$中的形式邻域。

证明。 由于交换群概形中零截面的形式邻域是分裂的，即，它通过对数映射同构于其法丛中零截面的形式完备化，因此我们有

$$\hat{B}_P = \hat{B}_{N_{B/P}}.$$

因此，只需证明 κ_Θ （连同 σ）将法丛 $N_{B/P}$ 与 B上的余切丛 T^*B 相识别。这分两步完成。首先， ´étale B-态射 κ_Θ诱导出一个同构 $N_{B/P} \simeq N_{B/A}$。接着，将 B 上的辛形式 σ 限制到

$$A = M^{\mathrm{sm}} \subset M$$

由此诱导出一个同构 $N_{B/A} \simeq T^*B$。这两个同构的复合即为所需的同构。□

现在，我们可以借助命题 1.4 精确地陈述主要猜想。

猜想 1.5。 对于可积系统 $\pi_M\colon (M, \sigma) \to B$，设 Θ 是任意一个 π_M-相对丰沛线丛 *(15)*。在 P 中 B与 T^*B的形式邻域之间的同构 $\hat{}\kappa_\Theta$ 下，存在一个同构

$$\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^k)|_{\hat{B}_P} \simeq \mathrm{gr}(P_k)|_{\hat{B}_{T^*B}} \in \mathrm{Coh}(\hat{B}).$$

注记 1.6。 猜想 1.5 的陈述是成对出现的。一方面，辛形式 σ 诱导出一个同构 $\Omega_M^k \simeq \Omega_M^{2n-k}$，其中 $2n =$ 维 M。另一方面，根据相对硬 Lefschetz 定理，我们有 $\mathrm{gr}(P_k) \simeq \mathrm{gr}(P_{2n-k})$。

2. 奇异支撑

2.1. 概述。 本节回顾 $\pi_M : M \to B$ 的分解定理，并描述约化支撑

$$\mathrm{supp}^{\mathrm{red}}(\mathrm{gr}(P_k)) \subset T^*B$$

沿用 Migliorini–Shende [25] 使用群概形 A。由于这与底层偏 pervers 层的奇异支撑一致，本节中我们可以仅将 P_k 视为偏 pervers 层；特别是，Saito 理论提供的滤过 $F_\bullet P_k$ 不起作用。

我们在本节最后引入 $\Lambda' \subset P$，它在傅里叶–穆凯一侧对应于与分解定理相关的奇异支撑。由推论 2.5 可得 Λ与 Λ' 之间的比较。

2.2. 分解定理。 和之前一样，我们假设

$$\dim M = 2 \dim B = 2n.$$

由于拉格朗日纤维化具有维数为 n [23]的等维纤维，分解定理 [7]给出

$$R\pi_{M*}\mathbb{Q}_M[n] \simeq \bigoplus_{i=0}^{2n} P_k[-k], \quad P_k = {}^{\mathfrak{p}}\mathcal{H}^k(R\pi_*\mathbb{Q}_M[n]).$$

这里每个偏 pervers 层 P_k 都是半单的。

我们注意到，在例 1.1 的情形下，Ngô 的支撑定理 [27] 表明所有P_k 都具有满支撑。特别地，每个 P_k 都由从可积系统 π_M 的光滑轨迹上得到的局部系统的中间延拓给出：$M \to B$。关于 π_M 拓扑的更精细信息编码在奇异支撑中；这些奇异支撑是 T^*B中的某些锥形拉格朗日子簇。我们将在下一节中对可积系统中的这些对象进行描述。

2.3. 奇异支撑。对于任意真态射 f： $X \to Y$（其中两者均为光滑簇），Migliorini 和 Shende [25] 利用高阶判别式对与分解定理相关的奇异支撑作出了具体描述

$$\mathrm{SS}(Rf_*\mathbb{Q}_X) \subset T^*Y$$

这些奇异支撑与 f 的分解定理相关，并利用高阶判别式进行描述。

回忆一下，对于每个 $i \geq 0$，高阶判别式 $\Delta^i(f)$ 由满足以下条件的点 $y \in Y$ 构成：在 y 处的切空间 T_yY中，不存在任何（$i-1$）维子空间与 f横截。我们得到一个分层

$$Y = \Delta^0(f) \supset \Delta^1(f) \supset \Delta^2(f) \supset \dots,$$

其中每个 $\Delta^i(f) \subset Y$都是闭的，并且

$$\mathrm{codim}_Y(\Delta^i(f)) \geq i. \tag{16}$$

闭子集 $\Delta^i(f)$ 是判别式 $\Delta^1(f)$ 的推广——即纤维奇异的轨迹。

[25]的主要结果如下。

定理 2.1 (Migliorini–Shende)。 $Rf_*\mathbb{Q}_X$ 的奇异支撑包含于 $\Delta^i(f)$ 的余维为 i的分支簇的余法丛簇之并中，对所有 i均成立。

对于可积系统 $\pi_M\colon M \to B$，高阶判别式 $\Delta^i(\pi_M)$更具体地由群概形 A [25, 所对应的 δ-分层给出，命题 4.3]。

命题 2.2。 设 A 是与可积系统 $\pi_M\colon M \to B$相关联的 B-群概形。我们有

$$\Delta^i(\pi_M) = \{b \in B \mid \delta(b) \geq i\}.$$

Usin由命题 2.2，我们可以重新表述命题 1.3 中 Ngˆo 的 δ-正则性 as

$$\operatorname{codim}_B \Delta^i(\pi_M) \geq i,$$

这是 (16) 的直接推论。

2.4. 子簇 $\Lambda \subset T^*B$和 $\Lambda' \subset P$。 回顾 (6) 中的锥形拉格朗日子簇$\Lambda \subset T^*B$；定理 0.2 的“支撑部分”由定理 2.1 得出：

$$\operatorname{supp}^{\mathrm{red}}(\operatorname{gr}(P_k)) = \operatorname{SS}(P_k) \subset \operatorname{SS}(R\pi_{M*}\mathbb{Q}_M) \subset \Lambda.$$

此外，鉴于命题 2.2，高阶判别式 $\Delta^i(\pi_M)$ 和锥形拉格朗日子簇 $\Lambda \subset T^*B$ 受底空间 B 上的 δ-分层所支配。下文中，我们还利用 $\Delta^i(\pi_M)$ 构造一个闭子簇 $\Lambda' \subset P$，它在傅里叶–穆凯一侧充当$\Lambda \subset T^*B$ 的对应物。

为方便记号，我们将定义在 B 上的交换群空间记为 G，其中 B 要么是 A，要么是 P。由于 κ_Θ 保持仿射部分不变，因此计算 A 和 P 的极大仿射子群维数的 δ-函数相同。

Let

$$1 \to R_b \to G_b \to H_b \to 1$$

是闭点 $b \in B$ 上群空间 G 的切瓦莱分解。我们将代数闭子集 $\Delta_G^{\mathrm{aff}} \subset G$ 定义为轨迹 $g \in G$，使得 g 属于 $\pi_M(g)$ 上的仿射部分 $R_{\pi_M(g)} \in B$。

下面的引理由命题 1.3 推出。

引理 2.3。 Δ_G^{aff} 的任一不可约分支维数均为 $\leq n$。

我们记

$$\Lambda'_G \subset \Delta_G^{\mathrm{aff}}$$

所有 n 维不可约分支的并集。

现在，我们给出 Λ'_G 关于 $\Delta^i(\pi_M)$ 的一个更具体的描述，与（6）中 Λ 的描述平行。对于局部闭子集 $Z \subset B$，存在一个开稠密的 $V \subset Z$，使得在 V 上的切瓦莱分解具有如下形式

$$1 \to R_V \to G|_V \to H_V \to 1$$

其中 R_V 为仿射且 H_V 为阿贝尔；参见 [8, 第 2 节之前的段落3]。我们用 $\overline{R_Z}$ 表示对于上述任意选取的 V，R_V 在 G 中的扎里斯基闭包。

下面的命题可与 $\Lambda \subset T^*B$ 的定义 (6) 对照。

命题 2.4。我们有

$$\Lambda'_G = \bigcup_i \bigcup_{Z_i} \overline{R_{Z_i}} \subset G.$$

这里，Z_i 遍历 $\Delta^i(\pi_M)$ 的纯 i-余维不可约分支。

证明。由于特殊化保持群的仿射部分，我们有

$$\Lambda'_G \supseteq \bigcup_i \bigcup_{Z_i} \overline{R_{Z_i}}.$$

为证明另一个包含关系，取 W 为 Λ'_G的一个不可约分支；根据定义，它是纯 n维的。我们考察 $Z = \pi_M(W) \subset B$。设一般点 $b \in Z$满足 $\delta(b) = i$。因此，$W \to Z$ 的一般纤维维数为 i。这意味着 Z 的余维为 i，因为

$$\dim W = n.$$

另一方面，我们有 $Z \subset \Delta^i(\pi_M)$，其中后者的余维至少为 i，由式 (16) 可知。因此，Z 是 $\Delta^i(\pi_M)$的一个 i维不可约分支，而不可约分支 W 具有 $\overline{R_Z}$的形式。这就证明了 $W \subset \Lambda'_G$。
□

在下面的推论中，我们将 $\Lambda \subset T^*B$ 与

$$\Lambda'_A \subset A, \quad \Lambda'_P \subset P.$$

推论 2.5。(i) 对于由辛形式 σ诱导的形式邻域的识别 $\hat{} B_A = \hat{} B_{T^*B}$，我们有

$$\Lambda'_A|_{\hat{B}_A} = \Lambda|_{\hat{B}_{T^*B}}.$$

（ii）对于 *(15)* 中将 $\hat{} B_P$ 和 $\hat{} B_{T^*B}$ 按照命题 *1.4* 进行对应的任意 Θ 选择，我们有

$$\Lambda'_P|_{\hat{B}_P} = \Lambda|_{\hat{B}_{T^*B}}.$$

证明。第一部分由命题 2.4 以及 [25, 命题 4.3], 的证明可得

$$\overline{R_{Z_i}}|_{\hat{B}_A} = \overline{T^*_{Z_i}B}|_{\hat{B}_{T^*B}}.$$

第二部分源于以下事实：群之间的 ´étale 映射

$$\kappa_\Theta : A \to P$$

保持仿射部分。 □

从现在起，我们设

$$\Lambda' := \Lambda'_P \subset P.$$

3. 傅里叶–穆凯 I：周 perversity–霍奇对称性

3.1. 概述。 我们回顾 Arinkin–Fedorov 的傅里叶–穆凯变换，并推导出它的一些基本性质。这得到了猜想 1.5 的边界情形 $k = 0,\ 2n$ 参见推论 3.2。随后，我们从傅里叶–穆凯的视角讨论 Matsushita 定理 [24] 关于 O_M 的高阶直像的重新表述，以及它的推广——周 perversity–霍奇对称性（猜想 3.6） [31, 32]。本节最后，我们证明命题 0.6。

3.2. 傅里叶–穆凯函子。 我们简要回顾经典傅里叶–穆凯变换 [26]。

设 A 是一个 n维阿贝尔簇，其对偶为 $P = \mathrm{Pic}^0(A)$。于是，一个万有族诱导出 ´上的规范化（标准化）Poincar´e 线丛 P；它进一步为凝聚层的有界导出范畴诱导出两个函子：

$$\Phi_{\mathrm{FM}} : D^b\mathrm{Coh}(P) \to D^b\mathrm{Coh}(A), \quad \mathcal{E} \mapsto Rq_{A*}(q_P^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{P})$$

and

$$\phi_{\mathrm{FM}} : D^b\mathrm{Coh}(A) \to D^b\mathrm{Coh}(P), \quad \mathcal{E} \mapsto Rq_{P*}(q_A^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{P}^\vee)[n].$$

这里， q_A 和 q_P 是从 $A \times P$ 到相应因子的自然投影。两个函子 Φ_{FM} 和 ϕ_{FM} 都是范畴等价，并且互为逆函子：

$$\phi_{\mathrm{FM}} \circ \Phi_{\mathrm{FM}} \simeq \mathrm{id}_{D^b\mathrm{Coh}(P)}, \quad \Phi_{\mathrm{FM}} \circ \phi_{\mathrm{FM}} \simeq \mathrm{id}_{D^b\mathrm{Coh}(A)}.$$

Arinkin–Fedorov [4] 推广了上述情形，他们的构造适用于一大类退化阿贝尔概形，包括可积系统；关于紧化雅可比簇的情形，另见 [1, 2] 。这里我们关注可积系统 π_M 的情形：$M \to B$，其中

$$\dim M = 2\dim B = 2n.$$

回顾相对 Picard 空间 P，它在 B上是光滑的，以及 $M \times_B P$上的标准化万有线丛 L。类似地，我们有两个函子

$$\Phi_{\mathrm{FM}} : D\mathrm{QCoh}(P) \to D\mathrm{QCoh}(M), \quad \mathcal{E} \mapsto Rq_{M*}(q_P^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{L})$$

and

$$\phi_{\mathrm{FM}} : D\mathrm{QCoh}(M) \to D\mathrm{QCoh}(P), \quad \mathcal{E} \mapsto Rq_{P*}(q_M^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^\vee) \otimes \pi_P^*\omega_B^\vee[n].$$

当 π_M 存在奇异纤维时，上述两个函子不再是等价。不过，根据 [4] ，我们仍有

$$\phi_{\mathrm{FM}} \circ \Phi_{\mathrm{FM}} \simeq \mathrm{id}_{D\mathrm{QCoh}(P)} : D\mathrm{QCoh}(P) \to D\mathrm{QCoh}(P), \tag{17}$$

特别是， Φ_{FM} 是全忠实的。注意，由于 $q_M : M \times_B P \to P$ 是适当的，函子 ϕ_{FM} 保持有界相干复形。

命题 3.1。对于 $\mathcal{K} \in D^b$相干层范畴(B)，我们有

$$\Phi_{\mathrm{FM}}(0_{B*}\mathcal{K}) \simeq \pi_M^*\mathcal{K}, \quad \phi_{\mathrm{FM}}(\pi_M^*\mathcal{K}) \simeq 0_{B*}\mathcal{K}.$$

证明。 由 **(17)**，只需证明第一个结论。由于 L 在零截面 $0_B : B \to P$ 上是平凡化的，我们有

$$0_B^*\mathcal{L} \simeq 0_B^*\mathcal{L}^\vee \simeq \mathcal{O}_M. \tag{18}$$

我们使用 $0_M : M \to M \times_B P$ 表示零截面 $0_B : B \to P$ 的基变换。我们有 e

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{FM}}(0_{B*}\mathcal{K}) &\simeq Rq_{M*}(q_P^*0_{B*}\mathcal{K} \otimes \mathcal{L}) \\ &\simeq Rq_{M*}(0_{M*}\pi_M^*\mathcal{K} \otimes \mathcal{L}) \\ &\simeq Rq_{M*}0_{M*}(\pi_M^*\mathcal{K} \otimes 0_M^*\mathcal{L}) \\ &\simeq \pi_M^*\mathcal{K}.\end{aligned}$$

这里第二个同构是基变换 $q_P^*0_{B*} \simeq 0_{M*}\pi_M^*$，第三个同构是投影公式，第四个同构由 $q_M \circ 0_M = \mathrm{id}_M$ 和 **(18)** 得出。□

将命题 3.1 应用于 K $=\mathsf{O}_B$，我们可以验证猜想 1.5 的边界情形。

推论 3.2. 猜想 *1.5* 对于 $k = 0, 2n$ 成立。

证明。我们有

$$\phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{O}_M) \simeq 0_{B*}\mathcal{O}_B \in \mathrm{Coh}(P), \quad \mathrm{gr}(P_0) \simeq 0_{B*}\mathcal{O}_B \in \mathrm{Coh}(T^*B).$$

二者都是零截面的结构层；特别是，它们在 B 的形式邻域中同构。□

与阿贝尔簇的情形一样， P 上存在一个（导出）庞特里亚金乘积。考虑加法映射

$$m_P : P \times_B P \to P.$$

我们定义

$$\star^R : D\mathrm{QCoh}(P) \times D\mathrm{QCoh}(P) \to D\mathrm{QCoh}(P), \quad (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \mapsto Rm_{P*}(q_1^*\mathcal{E}_1 \otimes^L q_2^*\mathcal{E}_2)$$

其中， q_1 和 q_2 是从 $P \times_B P$得到的两个投影。

命题3.3。对于$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in D\mathrm{QCoh}(P)$，以及$\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \in D^b\mathrm{Coh}(M)$，我们有 e

$$\Phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{E}_1 \star^R \mathcal{E}_2) \simeq \Phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{E}_1) \otimes^L \Phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{E}_2), \quad \phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{K}_1 \otimes^L \mathcal{K}_2) \simeq \phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{K}_1) \star^R \phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{K}_2).$$

证明。这两个陈述相似；我们只证明第一个。由立方定理应用于 $M \times_B P \times_B P$，可得

$$(\mathrm{id} \times m_P)^* \mathcal{L} \simeq q_{12}^* \mathcal{L} \otimes q_{13}^* \mathcal{L} \tag{19}$$

其中，q_{ij} 是从 $M \times_B P \times_B P$ 到各相应因子的自然投影。于是

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{E}_1 \star^R \mathcal{E}_2) &\simeq Rq_{M*}(q_P^* R m_{P*}(q_1^* \mathcal{E}_1 \otimes^L q_2^* \mathcal{E}_2) \otimes \mathcal{L}) \\
&\simeq Rq_{M*}(R(\mathrm{id} \times m_P)_* q_{23}^*(q_1^* \mathcal{E}_1 \otimes^L q_2^* \mathcal{E}_2) \otimes \mathcal{L}) \\
&\simeq Rq_{M*} R(\mathrm{id} \times m_P)_*(q_{12}^* q_P^* \mathcal{E}_1 \otimes^L q_{13}^* q_P^* \mathcal{E}_2 \otimes (\mathrm{id} \times m_P)^* \mathcal{L}) \\
&\simeq Rq_{M*} Rq_{13*}(q_{12}^* q_P^* \mathcal{E}_1 \otimes^L q_{13}^* q_P^* \mathcal{E}_2 \otimes q_{12}^* \mathcal{L} \otimes q_{13}^* \mathcal{L}) \\
&\simeq Rq_{M*}(Rq_{13*} q_{12}^*(q_P^* \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{L}) \otimes^L (q_P^* \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{L})) \\
&\simeq Rq_{M*}(q_M^* Rq_{M*}(q_P^* \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{L}) \otimes^L (q_P^* \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{L})) \\
&\simeq \Phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{E}_1) \otimes^L \Phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{E}_2).
\end{aligned}$$

这里，第二个同构是基变换 $q_P^* R m_{P*} \simeq R(\mathrm{id} \times m_P)_* q_{23}^*$，第三个同构是投影公式，第四个同构由 $q_M \circ (\mathrm{id} \times m_P) = q_M \circ q_{13}$和（19）得到，第五个同构再次由投影公式得到，第六个同构是基变换 $Rq_{13*} q_{12}^* \simeq q_M^* Rq_{M*}$，最后一个同构则由投影公式以及 Φ_{FM}的定义得到。□

3.3. **推前与傅里叶–穆凯变换**。傅里叶–穆凯函子 Φ_{FM} 和 ϕ_{FM} 也与推前相容

$$R\pi_{P*} : D\mathrm{QCoh}(P) \to D\mathrm{QCoh}(B), \quad R\pi_{M*} : D^b\mathrm{Coh}(M) \to D^b\mathrm{Coh}(B).$$

命题 3.4. 对于 $\mathcal{E} \in D\mathrm{QCoh}(P)$ 和 $\mathcal{K} \in D^b\mathrm{Coh}(M)$，有

$$Ls_B^* \Phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{E}) \simeq R\pi_{P*}\mathcal{E}, \quad L0_B^* \phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{K}) \simeq R\pi_{M*}\mathcal{K} \otimes \omega_B^\vee[n].$$

证明。 这两个陈述类似；我们只证明第二个。我们有

$$\begin{aligned}
L0_B^* \phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{K}) &\simeq L0_B^* Rq_{P*}(q_M^* \mathcal{K} \otimes \mathcal{L}^\vee) \otimes \omega_B^\vee[n] \\
&\simeq R\pi_{M*} L0_M^*(q_M^* \mathcal{K} \otimes \mathcal{L}^\vee) \otimes \omega_B^\vee[n] \\
&\simeq R\pi_{M*}(\mathcal{K} \otimes 0_M^* \mathcal{L}^\vee) \otimes \omega_B^\vee[n] \\
&\simeq R\pi_{M*}\mathcal{K} \otimes \omega_B^\vee[n].
\end{aligned}$$

这里，第二个同构是基变换 $L0_B^* Rq_{P*} \simeq R\pi_{M*} L0_M^*$，第三个同构由 $q_M \circ 0_M = \mathrm{id}_M$ 给出，第四个同构则由 (18) 推出。□

下面的例子阐释了傅里叶–穆凯变换与 Matsushita 的一个定理之间的联系 [24]。可以将其视为分解定理与傅里叶–穆凯变换相关联的第一个例子。

例 **3.5.** 将命题 3.4 应用于 $\mathsf{K} = \mathsf{O}_M$，由命题 3.1 可得 t

$$R\pi_{M*}\mathcal{O}_M \simeq L0_B^*\mathcal{O}_B \otimes \omega_B[-n].$$

对象 $L0_B^*\mathsf{O}_B$ 是零截面的结构层 O_B 的导出自张量积 $B \subset P$。利用 Koszul 分解或导出自交公式 [3], , 可得

$$L0_B^*\mathcal{O}_B \simeq \bigoplus_{k=0}^{n} \wedge^k N_{B/P}^\vee[k] \simeq \bigoplus_{k=0}^{n} T_B^k[k]. \tag{20}$$

因此

$$R\pi_{M*}\mathcal{O}_M \simeq \bigoplus_{k=0}^{n} T_B^k \otimes \omega_B[k-n] \simeq \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega_B^k[-k]. \tag{21}$$

方程 (21) 同时意味着

(i) 导出直像可分裂为若干层

$$R\pi_{M*}\mathcal{O}_M \simeq \bigoplus_{k=0}^{n} R^k\pi_{M*}\mathcal{O}_M[-k], \tag{22}$$

and

(ii) 每个高阶直像由下式给出

$$R^k\pi_{M*}\mathcal{O}_M \simeq \Omega_B^k.$$

事实上，对于任意拉格朗日纤维化 π_M ，这两个结论都已知成立 $M \to B$，并不局限于我们在此讨论的可积系统。结论 (i) 是通过取分次部分，从 Saito 对分解定理的强化版本推导得出的。结论 (ii) 是 Matsushita 的一个定理 [24] ，该定理适用于任意拉格朗日纤维化；Matsushita 的论证既依赖分解定理 (i)，也依赖霍奇理论和双有理几何方法。

对于一个可积系统 $\pi_M\colon M \to B$，傅里叶–穆凯变换提供了另一种论证，通过一次计算即可同时得到 (i) 和 (ii)

$$Rq_{P*}\mathcal{L} \simeq 0_{B*}\omega_B[-n],$$

该计算基本上是由 Ngˆo 的 δ-不等式（ [4] 中的命题 1.3）证明的 [4] 。特别是，傅里叶–穆凯方法表明，(i) 和 (ii) 都由可积系统的拓扑决定。□

3.4. 周 perversity–霍奇对称性。如上例所示，对象$R\pi_{M*}\mathsf{O}_M \in D^b\mathrm{Coh}(B)$ 受傅里叶–穆凯恒等式支配

$$\phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{O}_M) \simeq 0_{B*}\mathcal{O}_B. \tag{23}$$

本节讨论例 3.5 的一个推广（下文的猜想 3.6），涉及以下对象

$$R\pi_{M*}\Omega_M^k \in D^b\mathrm{Coh}(B), \quad k = 0, 1, \cdots, 2n,$$

其中猜想 1.5 起到了式 (23) 的作用。这是关于层论的周 perversity–霍奇对称性的提案 [32] 的一个版本，它同时推广了 Matsushita 定理 (21)，并将上同调的“周 perversity = 霍奇”恒等式 (8) 范畴化。

在此处，为了我们的目的，我们将分解定理的 P_k 视为底空间 B上的一个霍奇模；特别地，我们考虑其分次对象

$$\mathrm{gr}(P_k) \in \mathrm{Coh}(T^*B).$$

猜想 3.6 (范畴化周 perversity–霍奇对称性)。 我们有

$$R\pi_{M*}\Omega_M^k \simeq (L0_B^* \,\mathrm{gr}(P_k))^\vee \in D^b\mathrm{Coh}(B).$$

备注 3.7。 (i) 预期猜想 3.6 不仅适用于可积系统，也适用于任意满足 M 且 B 非奇异的拉格朗日纤维化 $\pi_M\colon M \to B$。正如我们在下文命题 0.6 的证明中所示，猜想 3.6 可由猜想 9 推出。特别地，根据 [32, 定理 0.4] ，我们已验证了由具有椭圆纤维化的曲面上的点的希尔伯特概形所诱导的拉格朗日纤维化满足猜想 3.6。

(ii) 对于可积系统，猜想 3.6 可改写为

$$L0_B^*\,\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_B^k) \simeq L0_B^*\,\mathrm{gr}(P_k)$$

这里我们应用了命题 3.4 以及向量丛Ω_M^k 是自对偶这一事实。因此，猜想 1.5 蕴含猜想 3.6。

(iii) 当 B 是射影的时，取上同调 $H^i(B,\ -)$，即可由猜想 3.6 得到恒等式 (8)。这是将劳蒙公式 (参见 [28, 定理 2.4]) 应用于射影映射 $B \to$pt 的结果。

下图展示了傅里叶–穆凯变换的作用：

$$\begin{array}{ccc} \text{Conj. 1.5: FM/Decomp.} & \xrightarrow{L0_B^*(-)} & \text{Conj. 3.6: Categorified Perv.} = \text{Hodge} \\ \big\downarrow \text{Specialize: } k{=}0 & & \big\downarrow \text{Specialize: } k{=}0 \\ \text{FM (23) for } \mathcal{O}_M & \xrightarrow{L0_B^*(-)} & \text{Matsushita: } R^i\pi_{M*}\mathcal{O}_M \simeq \Omega_B^i. \end{array}$$

接下来，我们完成命题 0.6 的证明。

命题 *0.6* 的证明。我们将猜想 3.6 两边都与以下 perverse–Hodge 复形联系起来

$$\mathcal{G}_{k,i} := \mathrm{gr}_{-i}\mathrm{DR}(P_k)[n-k] \in D^b\mathrm{Coh}(B)$$

[32] 并将猜想 3.6 化简为对称性 (9)：

$$\mathcal{G}_{k,i} \simeq \mathcal{G}_{i,k}.$$

回想一下，如果我们将 P_k 视为 B上的霍奇模，它具有作为 D_B-模的结构，并带有良滤过 $F_\bullet P_k$。第 i个分次部分给出一个 O_B-模层 $\mathsf{gr}_i P_k$。

我们考虑德拉姆复形

$$\mathrm{DR}(P_k) = [P_k \to P_k \otimes \Omega_B^1 \to \cdots \to P_k \otimes \Omega_B^n][n];$$

配备诱导滤过

$$F_i\mathrm{DR}(P_k) = [F_iP_k \to F_{i+1}P_k \otimes \Omega_B^1 \to \cdots \to F_{i+n}P_k \otimes \Omega_B^n][n].$$

德拉姆复形的伴随分次对象诱导出一些对象

$$\mathrm{gr}_i\mathrm{DR}(P_k) = [\mathrm{gr}_iP_k \to \mathrm{gr}_{i+1}P_k \otimes \Omega_B^1 \to \cdots \to \mathrm{gr}_{i+n}P_k \otimes \Omega_B^n][n] \tag{24}$$

其取值于 B 上凝聚层的有界导出范畴。特别地，余正合–霍奇复形 $\mathsf{G}_{k,\ i}$ 编码了偏 pervers 滤过和霍奇滤过的第 k个与第 i个分次部分的信息，因此 (9) 是一种余正合–霍奇对称性。

为将余正合–霍奇复形与猜想 3.6 左边更经典的对象联系起来，我们在此援引 Saito 的公式 [29, 2.3.7]（另见 [32, 第 2.2] 节）：

$$R\pi_{M*}\mathrm{gr}_{-k}\mathrm{DR}(\mathbb{Q}_M[2n]) \simeq \mathrm{gr}_{-k}\mathrm{DR}(R\pi_{M*}\mathbb{Q}_M[2n]) \simeq \bigoplus_i \mathrm{gr}_{-k}\mathrm{DR}(P_i)[n-i].$$

这里，$\mathbb{Q}_M[2n]$ 是与偏 pervers 层 $\mathbb{Q}_M[2n]$ 相对应的霍奇模，该层由平凡局部系统给出，其德拉姆复形的分次部分为

$$\mathrm{gr}_{-k}^F\mathrm{DR}(\mathbb{Q}_M[2n]) = \Omega_M^k[2n-k].$$

因此，我们得到

$$R\pi_{M*}\Omega_M^k \simeq \bigoplus_i \mathcal{G}_{i,k}[k-2n];$$

特别地，由 Grothendieck–Verdier对偶，

$$(R\pi_{M*}\Omega_M^k)^\vee \simeq \left(\bigoplus_i \mathcal{G}_{i,k}\right) \otimes \pi_M^*\omega_B^\vee[k-n]. \tag{25}$$

另一方面，我们有

$$L0_B^*\,\mathrm{gr}(P_k) \simeq Rp_*(\mathrm{gr}(P_k) \otimes^L_{\mathcal{O}_{T^*B}} \mathcal{O}_B) \tag{26}$$

其中 $p:\ T^*B \to B$ 自然投影。通过对零截面 $B \subset T^*B$的结构层 O_B 取 Koszul 分解，由表达式 (24) 可知，(26) 的右端为

$$Rp_*(\mathrm{gr}(P_k) \otimes^L_{\mathcal{O}_{T^*B}} \mathcal{O}_B) \simeq \left(\bigoplus_i \mathcal{G}_{k,i}\right) \otimes \pi_M^*\omega_B^\vee[k-n];$$

它通过周 perversity–霍奇对称性 $\mathsf{G}_{k,\ i} \simeq \mathsf{G}_{i,\ k}$与 (25) 相匹配。

至此，我们已证明 (9) 蕴含猜想 3.6。于是，命题 0.6 的第一部分由注 3.7 (ii) 得出，第二部分由注 3.7 (iii) 得出。□

4. 傅里叶–穆凯 II：拉格朗日 Cohen–Macaulay 层

4.1. 概述。 本节中，我们证明定理 0.3，它表明该对象

$$\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^k)|_{\hat{B}_P}$$

是支撑在锥形拉格朗日子簇 $\Lambda'|_{\hat{B}_P}$ 上的科恩–麦考利层。根据定理 0.2 和推论 2.5，这与 P_k 的奇异支撑相吻合。

我们的方法建立在 Arinkin [1] 和 Arinkin–Fedorov [4] 的思想之上。

4.2. 科恩–麦考利层。 设 F 是 P 上的一个相干层。若对任意闭点 $x \in P$，都有下式成立，则称 F 为科恩–麦考利：

$$\operatorname{depth}_{\mathcal{O}_{P,x}}(\mathcal{F}_x) = \dim \operatorname{supp}(\mathcal{F}_x).$$

特别地 特别地，F 是纯维数为 d 的 Cohen–Macaulay 层，当且仅当其 Verdier 对偶

$$R\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{F}, \omega_P) \in D^b\mathrm{Coh}(P)$$

集中在 d 次。

下面的定理给出了局部自由层的傅里叶–穆凯变换的 Cohen–Macaulay 判据。

定理 4.1。 设 $\mathcal{K}$ 是 M 上的一个局部自由层。设 $Z \subset P$ 是一个闭子集，其每个不可约分支的维数均为 $\leq n$。若

$$\operatorname{supp}^{\mathrm{red}}(\phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{K})) \subset Z,$$

则 $\phi_{\mathrm{F\ M}}(\mathcal{K})$ 是一个纯维数为 n 、集中在 *0* 次的 ***Cohen–Macaulay*** 层。

证明。 根据定义，对象

$$\phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{K}) = Rq_{P*}(q_M^*\mathcal{K} \otimes \mathcal{L}^\vee) \otimes \pi_P^*\omega_B^\vee[n] \in D^b\mathrm{Coh}(P)$$

集中在次数 $[-n, 0]$。关于其 Verdier 对偶，我们有

$$\begin{aligned} R\mathcal{H}\mathrm{om}(\phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{K}), \omega_P) &\simeq R\mathcal{H}\mathrm{om}(Rq_{P*}(q_M^*\mathcal{K} \otimes \mathcal{L}^\vee) \otimes \pi_P^*\omega_B^\vee[n], \omega_P) \\ &\simeq Rq_{P*}R\mathcal{H}\mathrm{om}(q_M^*\mathcal{K} \otimes \mathcal{L}^\vee, \omega_{q_P}) \\ &\simeq Rq_{P*}(q_M^*\mathcal{K}^\vee \otimes \mathcal{L} \otimes \omega_{q_P}). \end{aligned}$$

这里第二个同构由 Grothendieck–Verdier对偶得到。由于 K 在 M 上局部自由，我们有 q_M^* K$^\vee \otimes$ L $\otimes\, \omega_{q_P}$ 是 $M \times_B P$ 上的一个（局部自由）层。因此，对象

$$R\mathcal{H}\mathrm{om}(\phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{K}), \omega_P) \in D^b\mathrm{Coh}(P)$$

集中在次数 $[0, n]$。

总之，我们知道：

(i) ϕ_{FM}(K) 集中于 $[-n, 0]$，(ii) 其 Verdier 对偶 RHom(ϕ_{FM}(K), ω_P) 集中于 $[0, n]$，并且

(iii) 两个对象的支撑维数均为 $\leq n$。

这种情况发生的唯一可能是，ϕ_{FM}(K) 是一个集中于 0 次、纯维数为 n 的层，且其 Verdier 对偶集中于 n 次（见 [2, 引理 7.7]）；换言之，ϕ_{FM}(K) 是一个纯维数为 n 的 Cohen–Macaulay层（集中于 0 次）。□

4.3. **定理 0.3 的证明**。

命题 4.2. 假设 $\mathcal{K} \in D^b$相干层范畴(M) 是 M 上一个 A-等变有界复形的底层对象。那么我们有

(i) $\phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{K})$ 的支撑维数为 $\leq n$，且(ii) 其在 $\hat{}$
$B \subset P$ 上的限制包含于 Δ_P^{aff}；即，

$$\mathrm{supp}^{\mathrm{red}}(\phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{K}))|_{\hat{B}} \subset \Delta_P^{\mathrm{aff}}|_{\hat{B}}.$$

证明。 证明基本上依据 [4, 第 4 节和 5]的讨论；为方便读者，我们在此给出证明。

设 $l \in P$ 是 M 上的一个线丛，满足

$$l \in \mathrm{supp}^{\mathrm{red}}(\phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{K})) \subset P.$$

记 $b := \pi_P(l) \in B$，并分别用 A_b、M_b、P_b 表示 A、M、P在闭点 b 处的限制。 M 上的 A-等变对象 K 的（导出）限制给出一个A_b-等变对象 $\mathrm{K}_b \in D^b\mathrm{Coh}(M_b)$。

步骤 1. 由基变换可知

$$H^j(M_b, \mathcal{K}_b \otimes l_b^\vee) \neq 0 \tag{27}$$

对某个 $j \in \mathbb{Z}$成立。线丛 $l_b^\vee$在 $A_b \subset M_b$ 上的限制对应于 A_b上的一个 $\mathbb{C}^*$-主丛~。根据 [4, 命题 5.6] ，这个 $\mathbb{C}^*$-主丛记为 A_b，实际上是一个交换群概形，由以下扩张给出

$$1 \to \mathbb{C}^* \to \widetilde{A}_b \to A_b \to 1. \tag{28}$$

~它作用在 $l_b^\vee$ 的全空间上，使得子环面 $\mathbb{C}^* \subset A$ 典范地通过膨胀作用。由于 K_b 是 A_b-等变的，这在向量空间（27）上导出一个自然的 A_b-作用。

St ~第 2 步。由于 A_b 是交换的，我们可以找到一个一维子表示

$$V \subset H^j(M_b, \mathcal{K}_b \otimes l_b^\vee),$$

它诱导出一个特征

$$\chi : \widetilde{A}_b \to \mathbb{C}^*, \quad \chi|_{\mathbb{C}^* \subset \widetilde{A}_b} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}.$$

它分裂了扩张 (28)。特别地，$l_b^\vee$ 到 $A_b \subset M_b$ 的限制是一个平凡线丛；等价地，l_b 到 A_b 的限制是平凡的。

步骤3. 现在我们聚焦于上同调支撑轨迹

$$K_b = \{l \in \mathrm{Pic}^0(M_b) \,|\, l|_{A_b} \simeq \mathcal{O}_{A_b}\} \subset \mathrm{Pic}^0(M_b);$$

根据 [4, 推论 4.6]，它是 [4, 定义 4.11], 意义下的一个拟子群，其单位连通分支 $K_b^0 \subset K_b$是仿射的。特别地，我们有

$$\dim K_b \leq \delta(b).$$

由步骤 1 和 2，我们知道

$$\mathrm{supp}^{\mathrm{red}}(\phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{K})) \subset \bigcup_{b\in B} K_b$$

其中，后者 $K := \bigcup_{b\in B} K_b$ 是满足以下条件的可构造集的可数并

$$\dim K \leq \dim \Delta_P^{\mathrm{aff}} \leq n, \quad K|_{\hat{B}} \subset \Delta_P^{\mathrm{aff}}|_{\hat{B}}.$$

命题得证。 □

下面我们完成定理 0.3 的证明。请注意，一般而言，局部自由层 Ω_M^k 并非 A-等变，如下例所示。

例4.3。 设 $\pi : M \to B$ 是一个带有截面的光滑椭圆纤维化，且设 $E \subset M$是一个纤维。在此情形下，群概形 A 与其自身 M 相同。若切丛 tangent bundle T_M 是 A-等变的，则它是由底空间 B上的一个向量丛拉回得到的；特别地，短正合列

$$0 \to T_E \to T_M|_E \to N_{M/S} \to 0$$

是分裂的。这意味着长正合列的边界映射

$$H^0(E, N_{E/M}) \to H^1(E, T_E)$$

为零。另一方面，这恰好就是 Kodaira–Spencer映射；当纤维化不是等变形时，该映射非平凡。

因此，我们不能直接将命题 4.2 应用于局部自由层 $\mathrm{K} = \Omega_M^k$。为了解决这个问题，我们需要以下引理。

引理 4.4。 设

$$0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_3 \to 0$$

是 相干层范畴(M)中的一个短正合列。与导出外幂 $\wedge^k\mathcal{E}_2 \in D^b$相干层范畴$(M)$相关联，我们有有限多个对象属于 D^b相干层范畴(M)

$$\mathcal{G}_0, \cdots, \mathcal{G}_i, \mathcal{G}_{i+1}, \cdots, \mathcal{G}_k = \wedge^k\mathcal{E}_2$$

带有态射 $\mathcal{G}_{i-1} \to \mathcal{G}_i$ ，并构成正合三角

$$\mathcal{G}_{i-1} \to \mathcal{G}_i \to \wedge^{k-i}\mathcal{E}_1 \otimes^L \wedge^i\mathcal{E}_3 \xrightarrow{+1} \mathcal{G}_{i-1}[1].$$

证明。 这可由 [22, 推论 2.2] 的证明得出：对短正合列 $0 \to \mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_2 \to \mathrm{E}_3 \to 0$ 取相容的局部自由分解。□

定理 *0.3* 的证明。我们首先指出，只需证明

$$\mathrm{supp}^{\mathrm{red}}(\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^k)) \subset K \tag{29}$$

其中 $K = \bigcup_{b\in B} K_p \subset P$ 已在命题 4.2 的证明中给出。事实上，(29) 表明

$$\dim \mathrm{supp}^{\mathrm{red}}(\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^k)) \leq n.$$

因此，由定理 4.1 可知，对象 $\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^k)$ 是一个维数为 n、集中在 0 次的 Cohen–Macaulay层。此外，由于

$$\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^k)|_{\hat{B}} \subset K|_{\hat{B}} \subset \Delta_P^{\mathrm{aff}}|_{\hat{B}},$$

Cohen–Macaulay性质保证支撑由 $\Delta^i(\pi_M)$ 的纯余维 i 不可约分支贡献（见命题 2.4），即，

$$\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^k)|_{\hat{B}} \subset \Lambda'|_{\hat{B}}.$$

现在只需证明 (29)。我们考虑短正合列

$$0 \to \pi_M^*\Omega_B^1 \to \Omega_M^1 \to \Omega_{M/B}^1 \to 0.$$

这里，第一项和第三项都是 A-等变凝聚层。根据引理 4.4，向量丛 $\Omega_M^k = \wedge^k\Omega_M^1$ 可通过形如以下对象的正合三角中的迭代扩张来表示

$$\pi_M^*\Omega_B^{k-i} \otimes \wedge^i\Omega_{M/B}^1 \in D^b\mathrm{Coh}(M), \tag{30}$$

其中，$\wedge^i(-)$表示引理 4.4 中的导出外幂。由于每一项 (30) 都是 A-等变的，根据命题 4.2，其傅里叶–穆凯变换的约化支撑包含于 K。因此，Ω_M^k 的傅里叶–穆凯变换的约化支撑也包含于 K。证明完毕。□

5. 光滑纤维化

5.1. 概述。 本节验证光滑拉格朗日纤维化的猜想 1.5，从而证明定理 0.4。设 (M, σ) 是一个带有截面 $s_B\colon B \to M$ 的光滑全纯辛簇，其上有一个光滑 拉格朗日纤维化 $\pi_M\colon M \to B$。设 $\pi_P\colon P \to B$ 为相对皮卡方案。与前文一样，我们假设

$$\dim M = 2\dim B = 2n.$$

5.2. **The $k=1$ 情形。** 我们先处理 $k=1$ 情形；我们的策略如下：

(i) 我们将 $\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega^1_M)$ 和 $\mathrm{gr}(P_1)$ 都表示为层的扩张，这些层（作为概形）支撑在 P 和 T^*B的零截面上。各项通过辛形式 σ 和 π_M-相对丰沛线丛 Θ两两对应。(ii) 我们借助高斯–马宁联络使这些扩张相匹配。光滑拉格朗日纤维化的一项重要性质——Donagi–Markman 三次条件（见引理 5.3）——对于这种匹配至关重要。

考虑光滑态射 $\pi_M\colon M\to B$的（余）切序列。我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & T_{M/B} & \longrightarrow & T_M & \longrightarrow & \pi_M^*T_B & \longrightarrow & 0 \\ & & \simeq\downarrow\sigma & & \simeq\downarrow\sigma & & \simeq\downarrow\sigma & & \\ 0 & \longrightarrow & \pi_M^*\Omega^1_B & \longrightarrow & \Omega^1_M & \longrightarrow & \Omega^1_{M/B} & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{31}$$

其中竖直箭头是由辛形式 σ诱导的同构。由于 $\Omega^1_{M/B}$ 是从 B拉回的，自然态射

$$\pi_M^*\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}\to\Omega^1_{M/B}$$

是一个同构。于是，在（31）中将 $\Omega^1_{M/B}$ 替换为 $\pi_M^*\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}$，并按照命题 3.1 应用傅里叶–穆凯函子 ϕ_{FM}，我们得到一个短正合列

$$0\to 0_{B*}\Omega^1_B\to\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega^1_M)\to 0_{B*}\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}\to 0 \tag{32}$$

在相干层范畴 $\mathrm{Coh}(P)$ 中。

另一方面，霍奇模 P_1 对应于 $R^1\pi_{M*}\mathbb{Q}_M$上的霍奇结构变分。我们令 $\mathsf{V}_1 = R^1\pi_{M*}\mathbb{Q}_M\otimes_{\mathbb{Q}}\mathsf{O}_B$，其分级部分为 $\mathsf{V}^{i,\,1-i}=\mathrm{gr}^i\mathsf{V}_1$。伴随分次 $\mathrm{gr}(P_1)$既可视为 T^*B 上的相干层，其约化支撑为零截面；也可视为 B上的 Higgs 丛。该 Higgs 丛是 $\mathsf{V}^{1,\,0}\simeq\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}$ 被 $\mathsf{V}^{0,\,1}\simeq R^1\pi_{M*}\mathsf{O}_M$ 扩张而成的（两者均带有平凡希格斯场）；用相干层来表述，这给出一个短正合列

$$0\to 0_{B*}R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M\to\mathrm{gr}(P_1)\to 0_{B*}\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}\to 0 \tag{33}$$

在 $\mathrm{Coh}(T^*B)$ 中。

在依赖于相对丰沛线丛 π_M 的情况下，$R^1\pi_{M*}\mathsf{O}_M$ 与 $\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}$ 之间存在对偶。再加上由 σ 诱导的同构 $T_B\simeq\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}$，可得一个同构

$$R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M\simeq\Omega^1_B. \tag{34}$$

比较序列 (32) 和 (33)，我们发现左侧项（分别是右侧项）都概形论意义下支撑在零截面上，并且彼此对应。接下来只需对应这些扩张，这正是证明 $k=1$ 情形的关键。

5.3. 扩张的识别。由于 (32) 和 (33) 两侧的项分别支撑在 P和 T^*B的零截面上，它们的扩张只涉及 P中 B 以及 T^*B中的形式邻域。特别地，命题 1.4 的同构 $\hat{}\kappa_\Theta$ 与 (34) 一起诱导出扩张群之间的一个同构

$$\mathrm{Hom}_P(0_{B*}\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, 0_{B*}\Omega^1_B[1]) \simeq \mathrm{Hom}_{T^*B}(0_{B*}\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, 0_{B*}R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M[1]) \tag{35}$$

同一化 (35) 可以用具体形式表示。事实上，由伴随性可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_P(0_{B*}\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, 0_{B*}\Omega^1_B[1])\\
\simeq\ &\mathrm{Hom}_B(L0^*_B 0_{B*}\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, \Omega^1_B[1])\\
\simeq\ &\mathrm{Hom}_B\left(\bigoplus_{i=0}^n \wedge^i N^\vee_{B/P}\otimes \pi_{M*}\Omega^1_{M/B}[i], \Omega^1_B[1]\right)\\
\simeq\ &\mathrm{Hom}_B(\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, \Omega^1_B[1]) \oplus \mathrm{Hom}_B(N^\vee_{B/P}[1]\otimes \pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, \Omega^1_B[1])\\
\simeq\ &\mathrm{Hom}_B(\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, \Omega^1_B[1]) \oplus \mathrm{Hom}_B(\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, N_{B/P}\otimes \Omega^1_B) \qquad (36)
\end{aligned}$$

以及分别

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{T^*B}(0_{B*}\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, 0_{B*}R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M[1])\\
\simeq\ &\mathrm{Hom}_B(L0^*_B 0_{B*}\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M[1])\\
\simeq\ &\mathrm{Hom}_B\left(\bigoplus_{i=0}^n \wedge^i T_B\otimes \pi_{M*}\Omega^1_{M/B}[i], R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M[1]\right)\\
\simeq\ &\mathrm{Hom}_B(\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M[1]) \oplus \mathrm{Hom}_B(T_B\otimes \pi_{M*}\Omega^1_{M/B}[1], R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M[1])\\
\simeq\ &\mathrm{Hom}_B(\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M[1]) \oplus \mathrm{Hom}_B(\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, \Omega^1_B\otimes R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M). \qquad (37)
\end{aligned}$$

这里，我们对 $B\hookrightarrow P$ 使用了导出自交 (20)，对 $B\hookrightarrow T^*B$ 使用了 Koszul 分解。辛形式 σ 和 π_M-相对丰沛线丛 Θ 诱导出法丛之间的一个同构

$$N_{B/P}\simeq \Omega^1_B.$$

这一点, 与同构 (34) 一起，确定了 (36) 和 (37) 的直和项。

分解 (36) 和 (37) 先验而言并非典范。然而，通过 $\tau_{\geq j}$ 对 $L0^*_B\mathrm{O}_B$的自然截断，我们得到典范短正合列

$$\begin{aligned}
0\to \mathrm{Hom}_B(\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, \Omega^1_B[1]) \to \mathrm{Hom}_P(0_{B*}\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, 0_{B*}\Omega^1_B[1])\\
\to \mathrm{Hom}_B(\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, N_{B/P}\otimes\Omega^1_B)\to 0
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
0\to \mathrm{Hom}_B(\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M[1]) \to \mathrm{Hom}_{T^*B}(0_{B*}\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, 0_{B*}R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M[1])\\
\to \mathrm{Hom}_B(\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, \Omega^1_B\otimes R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M)\to 0.
\end{aligned}$$

此外，通过沿 $\pi_P\colon\ P\to B$和 $p\colon\ T^*B\to B$进行推前，这两个序列都存在典范分裂，即，

$$R\pi_{P*}:\mathrm{Hom}_P(0_{B*}\pi_{M*}\Omega^1_{M/B},0_{B*}\Omega^1_B[1])\to\mathrm{Hom}_B(\pi_{M*}\Omega^1_{M/B},\Omega^1_B[1]),$$

and

$$Rp_*:\mathrm{Hom}_{T^*B}(0_{B*}\pi_{M*}\Omega^1_{M/B},0_{B*}R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M[1])\to\mathrm{Hom}_B(\pi_{M*}\Omega^1_{M/B},R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M[1]).$$

由此得出，(36) 和 (37) 是典范分解，其中各直和项可以逐一识别，并且与 (35) 相容。

令 $\epsilon_{\Omega^1_M}$ 和 ϵ_{P_1} 分别表示 (32) 和 (33) 的扩张类。

引理 5.1. 我们有 $R\pi_{P*}\epsilon_{\Omega^1_M}=0$ 和 $Rp_*\epsilon_{P_1}=0$。

证明. $Rp_*\epsilon_{P_1}$ 的消失是显然的：这相当于忘掉 Higgs 丛的希格斯场，从而它变成 $\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}$ 被 $R^1\pi_{M*}\mathsf{O}_M$ 扩张的平凡扩张。对于 $R\pi_{P*}\epsilon_{\Omega^1_M}$，我们考虑短正合列

$$0\to\Omega^1_B\to\pi_{P*}\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega^1_M)\to\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}\to 0 \tag{38}$$

这是将 $R\pi_{P*}$ 应用于 (32) 后得到的。根据命题 3.1 和 3.4，序列 (38) 同构于

$$0\to\Omega^1_B\to s_B^*\Omega^1_M\to\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}\to 0 \tag{39}$$

通过将Ls_B^* 应用于余切正合列 (31) 得到。正合列 (39) 分裂，因为对于阿贝尔簇 A，余切空间 $\Omega^1_{A,\ 0}$ 自然地与 $H^0(A,\ \Omega^1_A)$ 同构。□

鉴于 (36) 和 (37)，扩张类 $\epsilon_{\Omega^1_M}$ 由一个态射唯一确定

$$\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}\to N_{B/P}\otimes\Omega^1_B \tag{40}$$

而 ϵ_{P_1} 由一个态射确定

$$\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}\to\Omega^1_B\otimes R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M. \tag{41}$$

命题 5.2. 在以下同构下

$$N_{B/P}\simeq\Omega^1_B,\quad R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M\simeq\Omega^1_B$$

由辛形式 σ 和 π_M-相对丰沛线丛 Θ诱导的两个态射(40) 和(41) 重合。特别地，对于 $k=1$, 猜想 *1.5* 对 $\pi_M\colon\ M\to B$ 成立。

证明。 根据 Spencer/Koszul 分解的构造，态射 (41) 恰好是高斯–马宁联络的伴随分次

$$\overline{\nabla}:\mathcal{V}^{1,0}\to\Omega^1_B\otimes\mathcal{V}^{0,1}. \tag{42}$$

为了看出 (40) 与高斯–马宁联络之间的关系，我们考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_M(\pi_M^*\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, \pi_M^*\Omega^1_B[1]) & \xrightarrow[\simeq]{\phi_{\mathrm{FM}}} & \mathrm{Hom}_P(0_{B*}\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, 0_{B*}\Omega^1_B[1]) \\ \downarrow{\scriptstyle R\pi_{M*}} & & \downarrow{\scriptstyle L0_B^*} \\ \mathrm{Hom}_B(R\pi_{M*}\pi_M^*\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, R\pi_{M*}\pi_M^*\Omega^1_B[1]) & \xrightarrow[\simeq]{\otimes\omega_B^\vee[n]} & \mathrm{Hom}_B(L0_B^*0_{B*}\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, L0_B^*0_{B*}\Omega^1_B[1]). \end{array}$$

此处图表由命题 3.4 保持交换，且顶行是同构，因为 ϕ_{FM} 是全忠实的（事实上，是一个等价）。将分解 (22) 和导出自交 (20) 应用于底部各项，我们得到

$$\begin{aligned} (43)\quad & \mathrm{Hom}_B(R\pi_{M*}\pi_M^*\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, R\pi_{M*}\pi_M^*\Omega^1_B[1]) \\ & \simeq \mathrm{Hom}_B\left(\bigoplus_{i=0}^n R^i\pi_{M*}\mathcal{O}_M \otimes \pi_{M*}\Omega^1_{M/B}[-i], \bigoplus_{i=0}^n R^i\pi_{M*}\mathcal{O}_M \otimes \Omega^1_B[-i+1]\right) \end{aligned}$$

以及分别

$$\begin{aligned} (44)\quad & \mathrm{Hom}_B(L0_B^*0_{B*}\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}, L0_B^*0_{B*}\Omega^1_B[1]) \\ & \simeq \mathrm{Hom}_B\left(\bigoplus_{i=0}^n \wedge^i N^\vee_{B/P} \otimes \pi_{M*}\Omega^1_{M/B}[i], \bigoplus_{i=0}^n \wedge^i N^\vee_{B/P} \otimes \Omega^1_B[i+1]\right). \end{aligned}$$

与分解型定理中的通常情形一样，分解 (43) 和 (44) 本身并非典范的。然而，可以通过 $\mathrm{Hom}(-,-)$ 的各参数的自然截断 $\tau_{\geq j}$，$\tau_{\leq j}$ 关联出典范滤过。特别地，(43) 的左侧有一个典范商

$$(45)\qquad \mathrm{Hom}_B(R^{n-1}\pi_{M*}\mathcal{O}_M \otimes \pi_{M*}\Omega^1_{M/B}[-n+1], R^n\pi_{M*}\mathcal{O}_M \otimes \Omega^1_B[-n+1]).$$

类似地，(44) 的左侧有一个典范商

$$(46)\qquad \mathrm{Hom}_B(N^\vee_{B/P} \otimes \pi_{M*}\Omega^1_{M/B}[1], \Omega^1_B[1]).$$

根据定义，态射 (40) 是将 $L0_B^*$ 作用于扩张类 $\epsilon_{\Omega^1_M}$，然后投影到商空间 (46) 得到的。反过来，这对应于（通过 $\otimes\omega_B^\vee[n]$）将 $R\pi_{M*}$ 作用于余切正合列 (31) 的扩张类，然后投影到商空间 (45) 所得到的态射。换言之，我们有一个交换

图

$$
\begin{array}{ccc}
\pi_{M*}\Omega^1_{M/B} & \longrightarrow & N_{B/P}\otimes\Omega^1_B \\
\downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\
\pi_{M*}\Omega^1_{M/B} & \longrightarrow & (R^{n-1}\pi_{M*}\mathcal{O}_M)^\vee\otimes R^n\pi_{M*}\mathcal{O}_M\otimes\Omega^1_B \\
\downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\
\pi_{M*}\Omega^1_{M/B} & \longrightarrow & R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M\otimes\Omega^1_B.
\end{array}
\tag{47}
$$

这里第一行是态射（40），第二行由（45）中的元素得到，第三行使用了（逐纤维的）完美配对

$$R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M\otimes R^{n-1}\pi_{M*}\mathcal{O}_M\to R^n\pi_{M*}\mathcal{O}_M$$

对于光滑阿贝尔纤维化 $\pi_M\colon\ M\to B$。

我们令 $\mathrm{V}_k=R^k\pi_{M*}\mathbb{Q}_M\otimes_{\mathbb{Q}}\mathsf{O}_B$ 具有分次部分 $\mathrm{V}^{i,\ k-i}=\mathrm{gr}^i\mathrm{V}_k$。高斯–马宁联络的伴随分次呈现为

$$\overline{\nabla}:\mathcal{V}^{i,k-i}\to\mathcal{V}^{i-1,k-i+1}\otimes\Omega^1_B$$

并且由于格里菲斯横截性，它相对于 $\mathrm{V}^{0,\ k-i}$-因子在线性空间 $\mathrm{V}^{i,\ k-i}\simeq\mathrm{V}^{0,\ k-i}\otimes\mathrm{V}^{i,\ 0}$ 中是线性的。最后，根据高斯–马宁联络的卡茨–小田描述 [20], ，余切正合列（31）的扩张类投影到（45）后即为伴随分次

$$\overline{\nabla}:\mathcal{V}^{1,n-1}\to\mathcal{V}^{0,n}\otimes\Omega^1_B. \tag{48}$$

由于（48）相对于 $\mathrm{V}^{0,\ n-1}$-因子在线性空间 $\mathrm{V}^{1,\ n-1}\simeq\mathrm{V}^{0,\ n-1}\otimes\mathrm{V}^{1,0}$, 中是线性的，我们发现（47）的底行恰好是伴随分次

$$\overline{\nabla}:\mathcal{V}^{1,0}\to\mathcal{V}^{0,1}\otimes\Omega^1_B.$$

注意，这次因子 Ω^1_B 被置于右侧，而不是像式 (42) 那样。还要注意，我们尚未使用辛形式 σ 和 π_M-相对丰沛线丛 Θ。为处理侧的变换，我们引用 Donagi–Markman [9]的以下结果；另见 [33,定理 4.4] 和 [32, 引理 1.2]。□

引理 5.3（Donagi–Markman 三次条件）。 在以下同构

$$T_B\simeq\pi_{M*}\Omega^1_{M/B},\quad R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M\simeq\Omega^1_B$$

由辛形式 σ 连同 π_M-相对丰沛线丛 Θ所诱导，高斯–马宁联络的伴随分次

$$\overline{\nabla}:\pi_{M*}\Omega^1_{M/B}\to R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M\otimes\Omega^1_B$$

来自一个三次型 $H^0(B,$对称幂$^3\Omega^1_B)$。

5.4. 一般情形。 我们进一步讨论更高的 k。我们通过利用光滑阿贝尔纤维化的函子性质，证明更高的 k 情形可由 $k=1$推出。

我们首先将第 3.2 节中的庞特里亚金乘积推广到更一般的（形式）群空间 $\hat{}\pi_G\colon G\to B$。之后我们将主要考虑 $G=P$、T^*B、B。令

$$m_G : G\times_B G\to G$$

为（形式）加法映射。我们定义

$$\star^R : D\mathrm{QCoh}(G)\times D\mathrm{QCoh}(G)\to D\mathrm{QCoh}(G),\quad (\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)\mapsto Rm_{G*}(q_1^*\mathcal{E}_1\otimes^L q_2^*\mathcal{E}_2)$$

其中 q_1 和 q_2 是来自 $G\times_B G$ 的两个投影。相应地定义非导出版本 $\star$。

引理 5.4。 设 $\mathcal{E}=\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^1)\in\mathrm{Coh}(P)$（相应地，$\mathcal{E}=\mathrm{gr}(P_1)\in\mathrm{Coh}(T^*B)$）。对于 $k\geq 1$，有

$$\mathcal{E}^{\star^R k}\simeq\mathcal{E}^{\star k}\in\mathrm{Coh}(P)\quad \textit{(resp.}\in\mathrm{Coh}(T^*B)\textit{)}$$

and

$$(\mathcal{E}^{\star k})|_{\hat{B}}\simeq(\mathcal{E}|_{\hat{B}})^{\star k}\in\mathrm{Coh}(\hat{B}).$$

证明。 取$\mathcal{E}_{\quad 1},\mathrm{E}_2\in$相干层范畴$(P)$，使得支撑$^{\mathrm{red}}(\mathrm{E}_i)\subset B$，$i=1$，2. 由于约化支撑 f

$$q_1^*\mathcal{E}_1\otimes^L q_2^*\mathcal{E}_2\simeq q_1^*\mathcal{E}_1\otimes q_2^*\mathcal{E}_2\in\mathrm{Coh}(P\times_B P)$$

包含于零截面 $B\subset P\times_B P$ 中，我们有

$$\mathcal{E}_1\star^R\mathcal{E}_2\simeq Rm_{P*}(q_1^*\mathcal{E}_1\otimes q_2^*\mathcal{E}_2)\simeq m_{P*}(q_1^*\mathcal{E}_1\otimes q_2^*\mathcal{E}_2)\simeq\mathcal{E}_1\star\mathcal{E}_2\in\mathrm{Coh}(P)$$

且支撑$^{\mathrm{red}}(\mathrm{E}_1\star\mathrm{E}_2)\subset B$。我们还有

$$\begin{aligned}(\mathcal{E}_1\star\mathcal{E}_2)|_{\hat{B}}&\simeq(m_{P*}(q_1^*\mathcal{E}_1\otimes q_2^*\mathcal{E}_2))|_{\hat{P}}\\&\simeq m_{\hat{B}*}((q_1^*\mathcal{E}_1\otimes q_2^*\mathcal{E}_2)|_{\hat{B}})\\&\simeq m_{\hat{B}*}(q_1^*(\mathcal{E}_1|_{\hat{B}})\otimes q_2^*(\mathcal{E}_2|_{\hat{B}}))\\&\simeq\mathcal{E}_1|_{\hat{B}}\star\mathcal{E}_2|_{\hat{B}}\in\mathrm{Coh}(\hat{B}).\end{aligned}$$

这里第二个同构使用了关于 m_P 的基变换：支撑$(q_1^*\mathrm{E}_1\otimes q_2^*\mathrm{E}_2)\to P$，而第三个同构使用了$|_{\hat{}B}$的平坦性。对于 $\mathrm{E}=\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^1)$ 的结论通过对 k 归纳法得到，而对于 $\mathrm{E}=\mathrm{gr}(P_1)$ 的证明完全相同。□

引理 5.4 与命题 3.3 和 5.2 一起推出

$$\phi_{\mathrm{FM}}((\Omega_M^1)^{\otimes k})|_{\hat{B}}\simeq(\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^1)^{\star k})|_{\hat{B}}\simeq(\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^1)|_{\hat{B}})^{\star k}\simeq(\mathrm{gr}(P_1)|_{\hat{B}})^{\star k}\simeq(\mathrm{gr}(P_1)^{\star k})|_{\hat{B}}.\tag{49}$$

为了理解 $\mathrm{gr}(P_1)^{\star k}$，我们回顾 $\mathrm{gr}(P_1)$ 的 Higgs 解释。令 $p\colon T^*B\to B$ 为自然投影。推前 $p_*\mathrm{gr}(P_1)$ 是一个 $p_*\mathcal{O}_{T^*B}\simeq\mathrm{Sym}(T_B)$-模，它恰好由向量丛给出

$$\mathrm{gr}(\mathcal{V}_1):=\mathcal{V}^{0,1}\oplus\mathcal{V}^{1,0}$$

以及希格斯场

$$\overline{\nabla}|_{\mathcal{V}^{0,1}} = 0, \quad \overline{\nabla}|_{\mathcal{V}^{1,0}} : \mathcal{V}^{1,0} \to \Omega^1_B \otimes \mathcal{V}^{0,1}.$$

反过来，从 Higgs 丛 $(\mathrm{gr}(\mathsf{V}_1)\overline{\nabla})$ 也可以恢复 O_{T^*B}-模

$$\mathrm{gr}(P_1) \simeq p^{-1}\mathrm{gr}(\mathcal{V}_1) \otimes_{p^{-1}p_*\mathcal{O}_{T^*B}} \mathcal{O}_{T^*B}.$$

引理 5.5. 对于 $k \geq 1$，我们有

$$p_*(\mathrm{gr}(P_1)^{\star k}) \simeq (\mathrm{gr}(\mathcal{V}_1)^{\otimes k}, \overline{\nabla}^{\otimes k}) \in \mathrm{Coh}(p_*\mathcal{O}_{T^*B}).$$

这里，$\mathrm{gr}(\mathcal{V}_1)^{\otimes k}$ 上的希格斯场 $\overline{\nabla}^{\otimes k}$ 由莱布尼茨法则定义。

证明。该 a ddition 映射 m_{T^*B}: $T^*B \times_B T^*B \to T^*B$对应于层的态射 s

$$p_*\mathcal{O}_{T^*B} \to p_*\mathcal{O}_{T^*B} \otimes_{\mathcal{O}_B} p_*\mathcal{O}_{T^*B}. \tag{50}$$

在 $U \subset B$ 上的局部坐标 $\mathsf{O}_U[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ 中，映射 (50) 将 ξ_j 映射为 $\xi_j \otimes 1 + 1 \otimes \xi_j$。

取 $\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2 \in \mathsf{Coh}(T^*B)$，使得 $p_*\mathsf{F}_i \simeq (\mathsf{E}_i, \theta_i) \in \mathsf{Coh}(p_*\mathsf{O}_{T^*B})$，$i = 1, 2$。则 $p_*\mathsf{O}_{T^*B}$-模 $p_*(\mathsf{F}_1 \star \mathsf{F}_2)$ 由张量积 $\mathsf{E}_1 \otimes \mathsf{E}_2$ 给出，其 $p_*\mathsf{O}_{T^*B}$-模结构通过与 (50) 复合得到，因此希格斯场 θ_1 和 θ_2 满足莱布尼茨法则。该引理的结论由对 k 使用归纳法得出。□

我们现在可以为光滑拉格朗日纤维化 $\pi_M : M \to B$ 证明猜想 1.5。

定理 *0.4* 的证明。 与命题 5.2 的证明中一样，我们令 $\mathsf{V}_k = R^k\pi_{M*}\mathbb{Q}_M \otimes_{\mathbb{Q}} \mathsf{O}_B$，其分次部分为 $\mathsf{V}^{i,\ k-i} = \mathsf{gr}^i\mathsf{V}_k$。伴随分次 $\mathsf{gr}(P_k) \in \mathsf{Coh}(T^*B)$ 经由 p_* 对应于 Higgs 丛

$$\left(\mathrm{gr}(\mathcal{V}_k) := \bigoplus_{i=0}^{k} \mathcal{V}^{i,k-i}, \overline{\nabla}\right) \in \mathrm{Coh}(p_*\mathcal{O}_{T^*B})$$

其中

$$\overline{\nabla}|_{\mathcal{V}^{i,k-i}} : \mathcal{V}^{i,k-i} \to \Omega^1_B \otimes \mathcal{V}^{i-1,k-i+1}$$

是高斯–马宁联络的伴随分次。现在，由于 $\pi_M : M \to B$ 是光滑阿贝尔纤维化，我们有典范同构

$$\mathcal{V}_k \simeq \wedge^k\mathcal{V}_1, \quad \mathcal{V}^{i,k-i} \simeq \mathcal{V}^{0,k-i} \otimes \mathcal{V}^{i,0} \simeq \wedge^{k-i}\mathcal{V}^{0,1} \otimes \wedge^i\mathcal{V}^{1,0},$$

and

$$(\mathrm{gr}(\mathcal{V}_k), \overline{\nabla}) \simeq (\wedge^k\mathrm{gr}(\mathcal{V}_1), \wedge^k\overline{\nabla}) \tag{51}$$

对所有 $k \geq 1$ 均成立。这里， $\wedge^k\mathsf{gr}(\mathsf{V}_1)$ 上的希格斯场 $\wedge^k\overline{\nabla}$ 由莱布尼茨法则定义。

根据 (49)， $\phi_{\mathrm{FM}}((\Omega^1_M)^{\otimes k})$ 和 $\mathsf{gr}(P_1)^{\star k}$ 在形式邻域 $\hat{}_B$ 上的限制是同构的。此外，根据引理 5.5，$\mathsf{gr}(P_1)^{\star k}$ 通过 p_* 对应于 Higgs 丛 $(\mathsf{gr}(\mathsf{V}_1)^{\otimes k}, \overline{\nabla}^{\otimes k})$。显然，引理 5.4 和引理 5.5 都是 $\mathfrak{S}_n$- 等变的。取反对称张量，并结合 (51)，我们得出

$$\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega^k_M)|_{\hat{B}} \simeq \mathrm{gr}(P_k)|_{\hat{B}}.$$

□

6. 二维情形

6.1. 概述 。在本节中，我们证明定理 0.5。根据我们的假设，态射 m

$$\pi_M : M \to B$$

是一个定义在非真曲线 B 上的椭圆纤维化，具有整纤维和一个截面 s_B： $B \to M$。此外，π_M 的闭纤维要么是非奇异椭圆曲线，要么是有节点有理曲线。假设 $p_1, \cdots p_m$ 是 B 上的闭点，使得纤维 $F_i = \pi_M^{-1}(p_i)$ 是奇异的，并且限制

$$\pi^\circ := \pi_{M^\circ} : M^\circ \to B^\circ := B \setminus \{p_1, \ldots, p_m\}, \quad M^\circ := \pi^{-1}(B^\circ)$$

是一个光滑椭圆纤维化。记 $j : B^\circ \hookrightarrow B$ 为自然开嵌入，并记 V 为第 5 节中由 $R^1\pi_*^\circ \mathbb{Q}_M$ 在 B° 上给出的霍奇结构变分。于是直接计算（例如 证明 [34, 命题 4.17]）可得

$$P_1 = j_{!*}\mathcal{V},$$

其中我们使用相同的记号 V 表示由平坦丛 (V ∇) 给出的（纯）霍奇模。

鉴于推论 3.2，定理 0.5 可归结为以下定理。

定理 6.1. 在命题 *1.4* 的同构 $\hat{}\kappa_\Theta$ 下，该同构将 P 中 B 的形式邻域与 T^*B 中 B 的形式邻域对应起来，我们有

$$\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega^1_M)|_{\hat{B}} \simeq \mathrm{gr}(j_{!*}\mathcal{V})|_{\hat{B}} \in \mathrm{Coh}(\hat{B}).$$

6.2. 带极点的 Gauss–Manin。 我们如第 5.2 节所述，选取 M 上的辛形式 σ 以及一个 π_M-相对充足线丛 Θ。它们诱导出同构

$$R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M \simeq \Omega^1_B, \quad N_{B/P} \simeq \Omega^1_B \tag{52}$$

其中第一个同构由 [24] 给出。我们将有效除子 $\sum_{i=1}^m p_i \subset B$ 记作 D。该除子

$$F := \sum_{i=1}^m F_i \subset M$$

由 D 的拉回给出的除子在 M 上是正规交叉的。辛形式 σ 也诱导出一个同构

$$\Omega^1_{M/B}(\log F) \simeq \Omega^{1\vee}_B. \tag{53}$$

根据第 5.3 节的讨论，如果将范围限制在 B° 上，固定同构 (52) 和 (53) 以及 Donagi–Markman 三次型会诱导出一个同构

$$\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega^1_M)|_{\hat{B}^\circ} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{gr}(\mathcal{V})|_{\hat{B}^\circ}.$$

注意，在这种情况下，Donagi–Markman 三次形式的对称性是自动成立的，因为底空间 B 是一维的。

现在，为了将上述同构延拓到 D上，我们首先需要延拓高斯–马宁联络的伴随分次以及 Donagi–Markman 三次形式。我们考虑 M上的对数余切正合列：

$$0 \to \pi_M^*\Omega_B^1(D) \to \Omega_M^1(\log F) \to \Omega_{M/B}^1(\log F) \to 0. \tag{54}$$

将其推前到 B 后，我们得到连接映射

$$\pi_{M*}\Omega_{M/B}^1(\log F) \to R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M \otimes \Omega_B^1(D).$$

我们简要回顾一下通过 Deligne 对 V 的典范延拓对这一映射所作的霍奇理论解释；参见 [21, 第 2] 节。回想一下，典范延拓取决于一个实区间$[a, a+1)$ 或 $(a,\ a+1]$ 留数端态射的特征值应位于该区间内。在我们的情形中，绕过 D 中每个点的单值化都是幺幂的（在局部坐标下由矩阵 $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ 给出），因此特征值必为整数。令 V 为关于 $[0,1)$ 或 $(-1,\ 0]$ 的 V 的典范延拓；它在 B 上是秩为 2 的局部自由层。Schmid 定理指出，$F_\bullet\mathsf{V} := j_*F_\bullet\mathsf{V} \cap \mathsf{V}$ 是由局部自由子层构成的滤过；这里我们将霍奇滤过写作递增滤过 $F_i\mathsf{V} := F^i\mathsf{V}$，以便与霍奇模的约定相一致，

$$(\overline{\mathcal{V}}, F^\bullet, \nabla), \quad \nabla : \overline{\mathcal{V}} \to \overline{\mathcal{V}} \otimes \Omega_B^1(D), \quad F_{-1}\overline{\mathcal{V}} \subset F_0\overline{\mathcal{V}} = \overline{\mathcal{V}}.$$

那么，根据 Katz–Oda 定理的对数版本，[19], 与 (54) 相关联的上述连接映射恢复了亚纯高斯–马宁联络$\overline{\nabla}$ 的伴随分次：$\mathrm{gr}_{-1}\mathsf{V} \to \mathrm{gr}_0\mathsf{V} \otimes \Omega_B^1(D)$：

$$\overline{\nabla} : \pi_{M*}\Omega_{M/B}^1(\log F) \to R^1\pi_{M*}\mathcal{O}_M \otimes \Omega_B^1(D). \tag{55}$$

进一步利用同构 (52) 和 (53)，我们得到 (55) 来源于一个截面

$$[\overline{\nabla}] \in H^0(B, (\Omega_B^1)^{\otimes 3}(D)). \tag{56}$$

这确实是　　引理 5 中 Donagi–Markman 三次形式的亚纯扩张。　3.

6.3. 容许层。 我们的策略与定理 0.4 的证明类似。我们将两个层

$$\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^1)|_{\hat{B}} \quad \text{and} \quad \mathrm{gr}(j_{!*}\mathcal{V})|_{\hat{B}}$$

表示为某些“构件”的形式，这些构件在概形论意义下支撑于零截面$B \subset \hat{}B$ 或某个闭纤维 $\hat{}\ F_i := F_i|_{\hat{B}}$，然后匹配它们的扩张类。由于奇异纤维 F_i 的存在使扩张问题更加复杂，我们引入容许层 这一概念来处理这种复杂性。

为方便记号，对于$\pi_M :\ M \to B$ 或投影 $T^*B \to B$，我们都统一用 F_i 表示 p_i 上的纤维。因此，F_i 要么是有节点有理曲线，要么是仿射直线 $\mathbb{C}$。

我们称一个对象

$$\mathcal{A} \in \mathrm{Coh}(T^*B) \quad (\text{resp. } \mathcal{A} \in \mathrm{Coh}(\hat{B}))$$

i是一个可容许层，如果 A 存在一个相干子层的递增滤过 es

$$\mathcal{W}_{-1}^{\mathcal{A}} \subset \mathcal{W}_{0}^{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$$

满足该条件在线a

(a) $\mathsf{W}_{-1}^{\mathcal{A}} \simeq \oplus_{i=1}^{m} \mathsf{O}_{F_i}$ （分别为 $\mathsf{W}_{-1}^{\mathcal{A}} \simeq \oplus_{i=1}^{m}$ $\mathsf{O}_{\hat{F}_i}$）、(b) $\mathsf{W}_{0}^{\mathcal{A}}/\mathsf{W}_{-1}^{\mathcal{A}} \simeq 0_{B*}\Omega_B^1(D)$，以及
(c) $\mathsf{A}/\mathsf{W}_{0}^{\mathcal{A}} \simeq 0_{B*}\Omega_B^{1\vee}$。
由 (a, b)，子层 $\mathsf{W}_{0}^{\mathcal{A}}$适合于一个短正合列[5]

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{F_i} \to \mathcal{W}_{0}^{\mathcal{A}} \to 0_{B*}\Omega_B^1(D) \to 0, \tag{57}$$

其扩张类诱导出

$$[\mathcal{W}_{0}^{\mathcal{A}}] \in \mathrm{Ext}^1_{T^*B}\left(0_{B*}\Omega_B^1(D), \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{F_i}\right) = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ext}^1_{T^*B}(0_{B*}\Omega_B^1(D), \mathcal{O}_{F_i}). \tag{58}$$

由伴随性，(58) 右侧的每个扩张群 $\mathrm{Ext}^1_{T^*B}(0_{B*}\Omega_B^1(D), \mathsf{O}_{F_i})$ 都是一维的：

$$\mathrm{Ext}^1_{T^*B}(0_{B*}\Omega_B^1(D), \mathcal{O}_{F_i}) = \mathrm{Ext}^1_{F_i}(\mathbb{C}_{p_i}, \mathcal{O}_{F_i}) \simeq \mathbb{C}.$$

这里， p_i 被视为位于与零截面 $B \subset T^*B$的交处的 F_i 上的一个点。我们称可容许层 A 是良好的，如果扩张类 $[\mathsf{W}_{0}^{\mathcal{A}}]$在 $\mathrm{Ext}^1_{T^*B}(0_{B*}\Omega_B^1(D), \mathsf{O}_{F_i})$ 中的每个直和项都非零。在这种情况下，经过缩放 O_{F_i}后，我们可以将 $\mathsf{W}_{0}^{\mathcal{A}}$表示为一个扩张 (57)，其扩张类 (58) 具有如下形式

$$(1, 1, \ldots, 1) \in \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ext}^1_{T^*B}(0_{B*}\Omega_B^1(D), \mathcal{O}_{F_i}).$$

现在假设 A 是一个良好可容许层。条件 (c) 进一步意味着 A 属于一个扩张

$$0 \to \mathcal{W}_{0}^{\mathcal{A}} \to \mathcal{A} \to 0_{B*}\Omega_B^{1\vee} \to 0$$

由此得到一个类

$$[\mathcal{A}] \in \mathrm{Ext}^1_{T^*B}(0_{B*}\Omega_B^{1\vee}, \mathcal{W}_{0}^{\mathcal{A}}) \xrightarrow{\rho_{\mathcal{A}}} \mathrm{Ext}^1_{T^*B}(0_{B*}\Omega_B^{1\vee}, 0_{B*}\Omega_B^1(D)).$$

这里，映射 $\rho_{\mathcal{A}}$ 由 (57) 诱导。

下述命题给出了两个良好可容许层同构的判据。这也是唯一需要假设 B 不是非真的地方。

[5]为方便记号起见，我们这里只描述 $\mathsf{A} \in \mathsf{Coh}(T^*B)$ 的情形；$\hat{}B$ 的情形完全类似。

命题 6.2. 假设 B 非真。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 是两个良好可容许层，且类 $\rho_{\mathcal{A}}([\mathcal{A}])$ 与 $\rho_{\mathcal{A}'}([\mathcal{A}'])$ 相同：

$$\rho_{\mathcal{A}}([\mathcal{A}]) = \rho_{\mathcal{A}'}([\mathcal{A}']) \in \mathrm{Ext}^1_{T^*B}(0_{B*}\Omega_B^{1\vee}, 0_{B*}\Omega_B^1(D)).$$

于是我们有

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}'.$$

证明。 将 $\mathrm{Hom}_{T^*B}(0_{B*}\Omega_B^{1\vee}, -)$ 应用于 (57)，得到长正合列：

$$\cdots \to \mathrm{Hom}_{T^*B}(0_{B*}\Omega_B^{1\vee}, 0_{B*}\Omega_B^1(D)) \xrightarrow{\text{(i)}} \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ext}^1_{T^*B}(0_{B*}\Omega_B^{1\vee}, \mathcal{O}_{F_i})$$
$$\xrightarrow{\text{(ii)}} \mathrm{Ext}^1_{T^*B}(0_{B*}\Omega_B^{1\vee}, \mathcal{W}_0^{\mathcal{A}}) \xrightarrow{\rho_{\mathcal{A}}} \mathrm{Ext}^1_{T^*B}(0_{B*}\Omega_B^{1\vee}, 0_{B*}\Omega_B^1(D)).$$

下面我们将证明，对于一个良好可容许层 A，上述链中的映射 (i) 是满射，因此 (ii) 为 0。特别地，扩张类 [A] 完全由其像 $\rho_{\mathcal{A}}$([A]) 确定，命题得证。

为证明 (i) 的满射性，我们考虑留数正合列

$$0 \to \Omega_B^1 \to \Omega_B^1(D) \xrightarrow{\text{res}} \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{C}_{p_i} \to 0.$$

将 $\mathrm{Hom}_B(\Omega_B^{1\vee}, -)$ 应用于此式，得到长正合列

$$\cdots \to \mathrm{Hom}_B(\Omega_B^{1\vee}, \Omega_B^1(D)) \xrightarrow{\text{(i)'}} \mathbb{C}^{\oplus m} \to \mathrm{Ext}^1_B(\Omega_B^{1\vee}, \Omega_B^1) \to \cdots$$

利用 B 不是适当映射这一事实，我们得到

$$\mathrm{Ext}^1_B(\Omega_B^{1\vee}, \Omega_B^1) = 0.$$

因此，上面的映射 (i)' 是满射。另一方面，映射 (i)' 恢复了 (i)：

$$\mathrm{Hom}_{T^*B}(0_{B*}\Omega_B^{1\vee}, 0_{B*}\Omega_B^1(D)) = \mathrm{Hom}_B(\Omega_B^{1\vee}, \Omega_B^1(D)) \xrightarrow{\text{(i)=(i)'}} \mathbb{C}^{\oplus m} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ext}^1_{T^*B}(0_{B*}\Omega_B^{1\vee}, \mathcal{O}_{F_i}).$$

因此 w 我们得出 (i) 的满射性，从而完成了该命题的证明 . □

在接下来的三节中，我们通过证明分别由傅里叶–穆凯和霍奇模理论得到的两个层都是良好可容许层，且它们在群中的类

$$\mathrm{Ext}^1_{\hat{B}}(0_{B*}\Omega_B^{1\vee}, 0_{B*}\Omega_B^1(D))$$

两者本质上都由三次型（56）所支配。

6.4. 霍奇模。 我们首先讨论霍奇模这一侧。空间 B 上的霍奇模 $j_{!*}\mathbb{V}$ 可借助典范延拓 $(\mathcal{V}, F^\bullet, \nabla)$ 具体描述。更准确地说，根据 [30,3.10]，我们有

$$j_{!*}\mathcal{V} = \mathcal{D}_B \cdot \overline{\mathcal{V}} \subset \overline{\mathcal{V}}(*D)$$

其中，D_B-作用由 Deligne 在 $\mathcal{V}(*D)$ 上的亚纯联络诱导，且

$$F_k j_{!*}\mathcal{V} = \sum_{i\geq 0} F_i\mathcal{D}_B \cdot F_{k-i}\overline{\mathcal{V}}. \tag{59}$$

每个伴随分次对象 $\mathrm{gr}_i(j_{!*}\mathbb{V}) = F_i j_{!*}\mathbb{V}/F_{i-1}j_{!*}\mathbb{V}$ 都是 B 上的相干层。该相干层

$$\mathrm{gr}(j_{!*}\mathcal{V}) \in \mathrm{Coh}(T^*B)$$

所得 自霍奇模 $j_{!*}\mathbb{V}$ 得到的对象，完全由准相干层 f

$$\bigoplus_{k\geq -1} \mathrm{gr}_k(j_{!*}\mathcal{V}) \in \mathrm{QCoh}(B)$$

以及希格斯场

$$\overline{\nabla} : \mathrm{gr}_k(j_{!*}\mathcal{V}) \to \mathrm{gr}_{k+1}(j_{!*}\mathcal{V}) \otimes \Omega_B^1 \tag{60}$$

其中，根据格里菲斯横截性，所有非平凡的希格斯场都只使指标增加 1。按照 [32, 第 2 节 4], 中的做法，直接使用上述公式计算可得

$$\mathrm{gr}_{-1}(j_{!*}\mathcal{V}) \simeq \Omega_B^{1\vee}, \quad \mathrm{gr}_0(j_{!*}\mathcal{V}) \simeq \Omega_B^1(D), \quad \mathrm{gr}_k(j_{!*}\mathcal{V}) \simeq \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}_{p_i}, \quad k>0.$$

此外，对于 $k=-1$，非平凡的希格斯场 (60) 由 (56) 给出；非平凡的留数映射

$$\Omega_B^1(D) \xrightarrow{\mathrm{res}} \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}_{p_i}$$

对于 $k=0$，以及恒等映射

$$\mathrm{id} : \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}_{p_i} \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{C}_{p_i}.$$

对于所有 $k>0$。这使我们能够将对象

$$\mathrm{gr}(j_{!*}\mathcal{V}) \in \mathrm{Coh}(T^*B)$$

表示为一个良好可容许层

$$\mathcal{W}_{-1}^{\mathrm{HM}} \subset \mathcal{W}_0^{\mathrm{HM}} \subset \mathrm{gr}(j_{!*}\mathcal{V}).$$

此处，子层 $\mathbb{W}_i^{\mathrm{HM}} \in \mathrm{Coh}(T^*B)$ 由下式给出

$$\bigoplus_{k\geq -i} \mathrm{gr}_k(j_{!*}\mathcal{V})$$

并赋予受限的希格斯场

$$\overline{\nabla}:\bigoplus_{k\geq -i}\mathrm{gr}_k(j_{!*}\mathcal{V})\to\left(\bigoplus_{k\geq -i+1}\mathrm{gr}_k(j_{!*}\mathcal{V})\right)\otimes\Omega_B^1.$$

最后，第 5.3 节中的相同论证得出一个分裂

$$\mathrm{Hom}_{T^*B}(0_{B*}\Omega_B^{1\vee},0_{B*}\Omega_B^1(D)[1])=\mathrm{Hom}_B(\Omega_B^{1\vee},\Omega_B^1(D)[1])\oplus H^0(B,(\Omega_B^1)^{\otimes 3}(D)). \tag{61}$$

类

$$\rho_{\mathrm{HM}}([\mathrm{gr}(j_{!*}\mathcal{V})])\in\mathrm{Hom}_{T^*B}(0_{B*}\Omega_B^{1\vee},0_{B*}\Omega_B^1(D)[1])$$

于是通过分裂（61）为 $(0,[\overline{\nabla}])$，其中 $[\overline{\nabla}]$ 由（56）给出。

6.5. 傅里叶–穆凯。 对于我们的椭圆纤维化 $\pi_M:M\to B$，其截面为 $s_B:B\to M$，部分傅里叶–穆凯变换

$$\phi_{\mathrm{FM}}:D^b\mathrm{Coh}(M)\to D^b\mathrm{Coh}(P)$$

实际上可以升级为完整的傅里叶–穆凯变换

$$\widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}:D^b\mathrm{Coh}(M)\to D^b\mathrm{Coh}(M)$$

正如我们将在下文回顾的那样。

我们将由 $M^\vee\to B$ 表示相对紧化雅可比纤维化，它参数化了 π 的纤维上无挠、秩 1、0 次的层：$M\to B$。由于 $M^\vee$ 是带有零截面 0_B：$B\to M^\vee$ 的细模空间，因此 $M\times_B M^\vee$ 上存在一个普适庞加莱层。我们选取普适庞加莱层 P，使得诱导的傅里叶 – 穆凯变换

$$\widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}:D^b\mathrm{Coh}(M)\xrightarrow{\simeq}D^b\mathrm{Coh}(M^\vee)$$

~ 满足 $\phi_{\mathrm{FM}}(\mathsf{O}_M)\simeq 0_{B*}\mathsf{O}_B$。我们有 $M^\vee$ 通过下式自然同构于 M

$$M\xrightarrow{\simeq}M^\vee,\quad x\mapsto\iota_{s*}(\mathfrak{m}_x^\vee\otimes\mathcal{O}_{M_s}(-s))$$

其中，M_s 是包含 x, $\iota_s:M_s\hookrightarrow M$ 的闭纤维；$\mathfrak{m}_x$ 是闭嵌入，x 在 M_s 中的理想层，而 s 被视为 M_s 上的一个点，且位于与截面 $B\subset M$ 的交中。从现在起，我们将 $M^\vee$ 与 M 等同。群概形 $P\to B$ 因而是从开曲面 $P\subset M$ 中去掉奇异纤维的节点后得到的。部分 ~ 傅里叶–穆凯变换 ϕ_{FM} 是完整傅里叶–穆凯 ϕ_{FM} 与由 $P\subset M$所关联的限制映射的复合。

~**引理 6.3。** 傅里叶–穆凯变换 ϕ_{FM} 满足以下性质。

(i) 对于 $\mathcal{K}\in D^b$相干层范畴(B)，有

$$\widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\pi_M^*\mathcal{K})\simeq 0_{B*}\mathcal{K}.$$

(ii) 对于闭纤维 $\iota_s:M_s\hookrightarrow M$中的点 $x\in M_s$，我们有

$$\widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\mathbb{C}_x)\simeq\iota_{s*}(\mathfrak{m}_x\otimes\mathcal{O}_{M_s}(s))[1].$$

~(iii) 设 F_i 为 $\pi\colon M \to B$ 在 p_i 上的结点纤维，且 $x_i \in F_i$ 为其节点。设 $\nu_i : F_i \to F_i$ 为其正规化。那么我们有

$$\widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\nu_{i*}\mathcal{O}_{\widetilde{F}_i}) \simeq \iota_{p_i*}\mathfrak{m}_{x_i}[1].$$

证明。 (i, ii) 是根据定义即可得出的简单练习。现在我们证明 (iii)。考虑短正合列

$$0 \to \mathcal{O}_{F_i} \to \nu_{i*}\mathcal{O}_{\widetilde{F}_i} \to \mathbb{C}_{x_i} \to 0. \tag{62}$$

~应用函子 ϕ_{FM}，由 (i, ii) 可得正合三角

$$\mathbb{C}_{p_i} \to \widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\nu_{i*}\mathcal{O}_{\widetilde{F}_i}) \to \iota_{p_i*}(\mathfrak{m}_{x_i} \otimes \mathcal{O}_{F_i}(p_i))[1] \xrightarrow{+1}. \tag{63}$$

相应的长正合列如下：

$$0 \to \mathcal{H}^{-1}\left(\widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\nu_{i*}\mathcal{O}_{\widetilde{F}_i})\right) \to \iota_{p_i*}(\mathfrak{m}_{x_i} \otimes \mathcal{O}_{F_i}(p_i)) \to \mathbb{C}_{p_i} \xrightarrow{(*)} \mathcal{H}^0\left(\widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\nu_{i*}\mathcal{O}_{\widetilde{F}_i})\right) \to 0.$$

只需证明上述序列中的映射 $(*)$ 是平凡的。假设它不是平凡的。那么箭头 $\iota_{p_i*}(\mathfrak{m}_{x_i} \otimes \mathcal{O}_{F_i}(p_i)) \to \mathbb{C}_{p_i}$ 必须是平凡的，这迫使 (63) 分裂；等价地说，(62) 分裂，这与假设矛盾。至此，(iii) 的证明完成。
□

现在我们证明，将 $\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega^1_M)$ 限制到零截面 $B \subset M$ 的形式邻域后，它是一个良好可容许层。我们改为研究对象

$$\widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\Omega^1_M) \in D^b\mathrm{Coh}(M).$$

我们考虑以下态射三角

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1_M & \longrightarrow & \Omega^1_M(\log F) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \Omega^1_{M/B}(\log F) & \end{array} \tag{64}$$

其中，$\Omega^1_M \to \Omega^1_M(\log F)$ 和 $\Omega^1_M(\log F) \to \Omega^1_{M/B}(\log F)$ 是自然映射，第三个箭头是这两个映射的复合。根据三角范畴的八面体公理，(64) 中三个映射对应的锥构成一个正合三角

$$\bigoplus_{i=1}^m \nu_{i*}\mathcal{O}_{\widetilde{F}_i}[-1] \to \mathcal{K}_0 \to \pi_M^*\Omega^1_B(D) \xrightarrow{+1}.$$

这里 $\mathrm{K}_0 :=$ 锥 $\left(\Omega^1_M \to \Omega^1_{M/B}(\log F)\right)[-1]$。将函子 $\widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}$ 应用于这个正合三角，~由引理 6.3 可知，对象 $\phi_{\mathrm{FM}}(\mathrm{K}_0)$ 是一个集中在 0 次的层，并且适合正合列

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^m \iota_{p_i*}\mathfrak{m}_{x_i} \to \widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\mathcal{K}_0) \to 0_{B*}\Omega^1_B(D) \to 0. \tag{65}$$

我们设

$$\widetilde{\mathcal{W}}_{-1}^{\mathrm{FM}} := \bigoplus_{i=1}^{m} \iota_{p_i *}\mathfrak{m}_{x_i}, \quad \widetilde{\mathcal{W}}_{0}^{\mathrm{FM}} := \widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\mathcal{K}_0).$$

命题 6.4。 对象 $\widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^1)$ 是 M 上的一个相干层，具有如下子层递增滤过：

$$\widetilde{\mathcal{W}}_{-1}^{\mathrm{FM}} \subset \widetilde{\mathcal{W}}_{0}^{\mathrm{FM}} \subset \widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^1)$$

它满足

(a) $\widetilde{\mathrm{W}}_{-1}^{\mathrm{FM}} = \bigoplus_{i=1}^{m} \iota_{p_i *}\mathfrak{m}_{x_i}$,(b) $\widetilde{\mathrm{W}}_{0}^{\mathrm{FM}}/\widetilde{\mathrm{W}}_{-1}^{\mathrm{FM}} \simeq 0_{B*}\Omega_B^1(D)$，并且

(c) $\widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^1)/\widetilde{\mathrm{W}}_{0}^{\mathrm{FM}} \simeq 0_{B*}\Omega_B^{1\vee}$。

证明。 根据 K_0, 的定义、同构 (53) 以及引理 6.3 (i)，我们得到一个正合三角

$$\widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^1) \to 0_{B*}\Omega_B^{1\vee} \to \widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\mathcal{K}_0)[1] \xrightarrow{+1}.$$

由于 $\widetilde{\mathrm{W}}_{0}^{\mathrm{FM}} = \widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\mathrm{K}_0)$ 是一个集中在 0 次的层，上述正合三角给出一个短正合列

$$0 \to \widetilde{\mathcal{W}}_{0}^{\mathrm{FM}} \to \widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\Omega_M^1) \to 0_{B*}\Omega_B^{1\vee} \to 0.$$

这就证明了 (c)。对于其余部分，我们注意到，(a) 由 $\widetilde{\mathrm{W}}_{-1}^{\mathrm{FM}}$ 的定义给出，而 (b) 则由短正合列 (65) 得出。□

与 (57) 类似，对 $\widetilde{\mathrm{W}}_{0}^{\mathrm{FM}}$ 的描述给出了一个扩张 (65)，它导出一个类

$$[\widetilde{\mathcal{W}}_{0}^{\mathrm{FM}}] \in \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ext}_M^1(0_{B*}\Omega_B^1(D), \iota_{p_i *}\mathfrak{m}_{x_i}).$$

右侧的每个扩张群都是一维的。

命题 6.5. 扩张类 $[\widetilde{\mathcal{W}}_{0}^{\mathrm{FM}}]$ 中的每个直和项

$$\mathrm{Ext}_M^1(0_{B*}\Omega_B^1(D), \iota_{p_i *}\mathfrak{m}_{x_i})$$

都非零。

证明。 由于这是一个局部问题，我们可以假设 $\pi\colon M \to B$ 仅有一个奇异结点纤维 $F \subset M$，位于 $p \in B$ 上，且 $x \in F$ 是该纤维的节点。我们需要证明该扩张

$$0 \to \iota_{p*}\mathfrak{m}_x \to \widetilde{\mathcal{W}}_{0}^{\mathrm{FM}} \to 0_{B*}\Omega_B^1(P) \to 0, \quad \widetilde{\mathcal{W}}_{0}^{\mathrm{FM}} = \widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\mathcal{K}_0)$$

非平凡。假设它是平凡的。然后对这个正合列应用逆傅里叶–穆凯 $\widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}^{-1}$ 变换，可得 K_0 在 0 次和 1 次上同调中均非平凡，且

$$\mathcal{H}^1(\mathcal{K}_0) \simeq \nu_* \mathcal{O}_{\widetilde{F}}. \tag{66}$$

这里 $\nu\colon F \to F$ 是正规化。

为导出矛盾，我们现在用另一个态射三角来描述 K_0

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1_M & \longrightarrow & \Omega^1_{M/B} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \Omega^1_{M/B}(\log\ F). & \end{array} \tag{67}$$

这里，$\Omega^1_M \to \Omega^1_{M/B}$ 和 $\Omega^1_{M/B} \to \Omega^1_{M/B}(\log\ F)$ 是自然映射，它们的复合还原了 (64) 中的映射 $\Omega^1_M \to \Omega^1_{M/B}(\log\ F)$。八面体公理推出，与 (67) 中三个映射相关联的锥构成一个正合三角

$$\pi_M^*\Omega^1_B \to \mathcal{K}_0 \to \mathbb{C}_x[-1] \xrightarrow{+1}$$

其中 $\mathbb{C}_x \simeq$ 锥 $\left(\Omega^1_{M/B} \to \Omega^1_{M/B}(\log\ F)\right)$。因此，我们有

$$\mathcal{H}^1(\mathcal{K}_0) \simeq \mathbb{C}_x$$

这与 (66) 矛盾。 □

扩张类

$$[\widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\Omega^1_M)] \in \mathrm{Ext}^1_M(0_{B*}\Omega_B^{1\vee}, \widetilde{\mathcal{W}}_0^{\mathrm{FM}})$$

自然地映至一个类

$$\widetilde{\rho}([\widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\Omega^1_M)]) \in \mathrm{Ext}^1_M(0_{B*}\Omega_B^{1\vee}, 0_{B*}\Omega^1_B(D)) \tag{68}$$

通过命题 6.4 所诱导的自然态射：

$$\widetilde{\rho} : \mathrm{Ext}^1_M(0_{B*}\Omega_B^{1\vee}, \widetilde{\mathcal{W}}_0^{\mathrm{FM}}) \to \mathrm{Ext}^1_M(0_{B*}\Omega_B^{1\vee}, 0_{B*}\Omega^1_B(D)).$$

$\widetilde{}$将函子 ϕ_{FM} 作用于三角形 (64)，可见类 (68) 表示扩张

$$\widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\pi_M^*\Omega^1_B(D)) \to \widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\Omega^1_M(\log F)) \to \widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\Omega^1_{M/B}(\log F)) \xrightarrow{+1},$$

$\widetilde{}$它是将 ϕ_{FM} 作用于正合列 (54) 后得到的正合三角。

注意到两个层 $0_{B*}\Omega_B^{1\vee}$ 和 $0_{B*}\Omega^1_B(D)$ 的支撑都在零截面上。因此，我们有一个自然同构

$$\mathrm{Ext}^1_M(0_{B*}\Omega_B^{1\vee}, 0_{B*}\Omega^1_B(D)) = \mathrm{Ext}^1_{\hat{B}}(0_{B*}\Omega_B^{1\vee}, 0_{B*}\Omega^1_B(D)).$$

与第 5.3 节中相同的论证可得一个分裂

$$\mathrm{Ext}^1_{\hat{B}}(0_{B*}\Omega_B^{1\vee}, 0_{B*}\Omega^1_B(D)) = \mathrm{Ext}^1_B(\Omega_B^{1\vee}, 0_{B*}\Omega_B(D)) \oplus H^0(B, (\Omega^1_B)^{\otimes 3}(D));$$

这是傅里叶–穆凯一侧与 (61) 对应的结果。此外，类 (68) 是 $(0, [\overline{\nabla}])$，其中 $[\overline{\nabla}]$ 由 (56) 给出。

6.6. **定理 6.1 的证明**。我们利用命题 1.4，分别固定 T^*B 和 M 中ˆ零截面的形式邻域之间的一个识别；统一记作 B。

在霍奇模一侧，由第 6.4 节可知，gr($j_{!*}$V) 是 T^*B 上的良好可容许层。因此，其限制

$$\mathrm{gr}(j_{!*}\mathcal{V})|_{\hat{B}}$$

ˆ是 B 上的良好可容许层。

在傅里叶–穆凯一侧，命题 6.4 和 6.5 表明

$$\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega^1_M)|_{\hat{B}} = \widetilde{\phi}_{\mathrm{FM}}(\Omega^1_M)|_{\hat{B}}$$

ˆ是 B 上的良好可容许层。

此外 此外，根据第 6.4 节和第 6.5 节末尾的讨论，我们分别有

$$\rho_{\mathrm{HM}}([\mathrm{gr}(j_{!*}\mathcal{V})|_{\hat{B}}]) = \rho_{\mathrm{FM}}([\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega^1_M)|_{\hat{B}}]) = (0, [\overline{\nabla}]) \in \mathrm{Ext}^1_{\hat{B}}(0_{B*}\Omega^{1\vee}_B, 0_{B*}\Omega^1_B(D)).$$

最后，我们应用命题 6.2，得出由霍奇模和傅里叶–穆凯变换得到的两个良好可容许层同构。证明至此完成。□

6.7. **关于尖点情形的备注**。事实上，同样的策略也适用于尖点纤维。[6] 这里我们简要概述关键步骤，详细内容留给有兴趣的读者。

从现在起，我们允许椭圆纤维化 $\pi_M\colon M \to B$ 在 $p_1, \dots, p_m \in B$ 上有结点纤维 $F_1, \dots, F_m$，并在 $q_1, \dots, q_l \in B$ 上有尖点纤维 $G_1, \dots, G_l$。关于 π_M 的其余假设与第 6.1 节相同，包括 B 非真。我们令

$$D := \sum_{i=1}^m p_i \subset B, \quad C := \sum_{i=1}^l q_i \subset B, \quad F := \sum_{i=1}^m F_i \subset M, \quad G := \sum_{i=1}^l G_i \subset M.$$

在存在尖点的情况下，$\in \mathrm{Coh}(T^*B)$ 中可容许层 A 的概念应改为四步滤过

$$\mathcal{W}^{\mathcal{A},\mathrm{red}}_{-1} \subset \mathcal{W}^{\mathcal{A}}_{-1} \subset \mathcal{W}^{\mathcal{A}}_0 \subset \mathcal{A}$$

其满足

(a) $\mathsf{W}^{\mathcal{A}\,\mathrm{red}}_{-1} \simeq \oplus^m_{i=1,}\ \mathsf{O}_{F_i} \oplus \oplus^l_{i=1}\mathsf{O}_{G_i}$,

(b) $\mathsf{W}^{\mathcal{A}}_{-1}/\mathsf{W}^{\mathcal{A}\,\mathrm{red}}_{-1} \simeq \oplus^l_{i=1,}\ \mathsf{O}_{G_i}$, (c)

$\mathsf{W}^{\mathcal{A}}_0/\mathsf{W}^{\mathcal{A}}_{-1} \simeq 0_{B*}\Omega^1_B(D + 2C)$，以及

(d) $\mathsf{A}/\mathsf{W}^{\mathcal{A}}_0 \simeq 0_{B*}\Omega^{1\vee}_B$。

若满足以下条件，则可容许层 A 是良好的 。

(i) 扩张类

$$[\mathcal{W}^{\mathcal{A}}_{-1}] \in \mathrm{Ext}^1_{T^*B}\left(\bigoplus_{i=1}^l \mathcal{O}_{G_i}, \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{F_i} \oplus \bigoplus_{i=1}^l \mathcal{O}_{G_i}\right) = \bigoplus_{i=1}^l \mathrm{Ext}^1_{T^*B}(\mathcal{O}_{G_i}, \mathcal{O}_{G_i})$$

[6]由于我们在工作 对于具有整纤维的椭圆纤维化，可能出现的奇点只有节点和尖点 .

在每个 $\mathrm{Ext}^1_{T^*B}(\mathcal{O}_{G_i},\ \mathcal{O}_{G_i})\ \simeq \mathbb{C}$ 中都有一个非零直和项。除去缩放 $\mathcal{O}_{G_i}$，我们可以假设每个直和项均为 1。特别地，层 $\mathcal{W}^{\mathcal{A}}_{-1}$ 具有如下形式

$$\mathcal{W}^{\mathcal{A}}_{-1} \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{F_i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{l} \mathcal{O}_{\mathbf{G}_i}$$

其中 $\mathbf{G}_i \subset T^*B$ 是 G_i的加厚。

(ii) 扩张类

$$[\mathcal{W}^{\mathcal{A}}_0] \in \mathrm{Ext}^1_{T^*B}(0_{B*}\Omega^1_B(D+2C), \mathcal{W}^{\mathcal{A}}_{-1})$$
$$= \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ext}^1_{T^*B}(0_{B*}\Omega^1_B(D+2C), \mathcal{O}_{F_i}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{l} \mathrm{Ext}^1_{T^*B}(0_{B*}\Omega^1_B(D+2C), \mathcal{O}_{\mathbf{G}_i})$$

在每个 Ext群$^1_{T^*B}(0_{B*}\Omega^1_B(D+2C),\ \mathcal{O}_{F_i})\ \simeq \mathbb{C}$以及每个 Ext群$^1_{T^*B}(0_{B*}\Omega^1_B(D+2C),\ \mathcal{O}_{\mathbf{G}_i})\ \simeq \mathbb{C}^2$中都有非零直和项。除去 $\mathcal{O}_{F_i}$和 $\mathcal{O}_{\mathbf{G}_i}$的自同构，我们可以假设这些直和项为 1 或 $(1,\ 0)$。

此外，短正合列

$$0 \to \mathcal{W}^{\mathcal{A}}_{-1} \to \mathcal{W}^{\mathcal{A}}_0 \to 0_{B*}\Omega^1_B(D+2C) \to 0$$

诱导出一个自然态射

$$\rho_{\mathcal{A}} : \mathrm{Ext}^1_{T^*B}(0_{B*}\Omega^{1\vee}_B, \mathcal{W}^{\mathcal{A}}_0) \to \mathrm{Ext}^1_{T^*B}(0_{B*}\Omega^{1\vee}_B, 0_{B*}\Omega^1_B(D+2C)),$$

将扩张类 $[\mathsf{A}] \in \mathrm{Ext}^1_{T^*B}(0_{B*}\Omega^{1\vee}_B,\ \mathcal{W}^{\mathcal{A}}_0)$ 发送到 $\rho_{\mathcal{A}}([\mathsf{A}])$。

命题 6.2 的一个版本指出，在非真曲线 B 上，两个良好可容许层 $\mathsf{A},\ \mathsf{A}' \in \mathrm{Coh}(T^*B)$ 同构，当且仅当类 $\rho_{\mathcal{A}}([\mathsf{A}])$ 和 $\rho_{\mathcal{A}'}([\mathsf{A}'])$ 相同：

$$\rho_{\mathcal{A}}([\mathcal{A}]) = \rho_{\mathcal{A}'}([\mathcal{A}']) \in \mathrm{Ext}^1_{T^*B}(0_{B*}\Omega^{1\vee}_B, 0_{B*}\Omega^1_B(D+2C)).$$

在霍奇模一侧，我们有第 6.1 节中的 $P_1 = j_{!*}\mathsf{V}$。通过对围绕每个尖点纤维 G_i 的相应 $q_i \in B$ 局部单值化（$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$）进行显式计算，可以再次证明 $\mathrm{gr}(j_{!*}\mathsf{V})$ 是 T^*B 上的良好可容许层。但要注意，这一次应区分相对于 $[0,1)$ 和 $(-1,\ 0]$ 的两个典范延拓（它们相差一个由 $\mathcal{O}_B(C)$ 给出的扭），并在式 (59) 中对 V 使用后者。由 [21, 定理 2.6] 和 [24], 中的公式推导出的最终结果为

$$\mathrm{gr}_{-1}(j_{!*}\mathcal{V}) \simeq \Omega^{1\vee}_B, \quad \mathrm{gr}_0(j_{!*}\mathcal{V}) \simeq \Omega^1_B(D+2C),$$
$$\mathrm{gr}_k(j_{!*}\mathcal{V}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{C}_{p_i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{l} \mathcal{O}_{\mathbf{q}_i}, \quad k>0,$$

其中 $\mathbf{q}_i$ 是支撑在 q_i 上的长度为 2 的胖点。非平凡的希格斯场 (60) 由一个三次型给出

$$[\overline{\nabla}] \in H^0(B, (\Omega^1_B)^{\otimes 3}(D+2C)) \tag{69}$$

对于 $k=-1$，$k=0$ 的留数映射，以及所有 $k>0$ 的恒等映射。与节点情形一样，我们将 $\mathsf{W}_i^{\mathrm{HM}} \in \mathsf{Coh}(T^*B)$ 定义为

$$\bigoplus_{k\geq -i} \mathrm{gr}_k(j_{!*}\mathcal{V})$$

赋予受限的希格斯场，而 $\mathsf{W}_{-1}^{\mathrm{HM\,red}}$，是 $\mathsf{W}_{-1}^{\mathrm{HM}}$ 的显然子层。容易验证，$\mathsf{gr}(j_{!*}\mathsf{V})$ 是 T^*B 上的良好可容许层。

$\widetilde{\ }$傅里叶–穆凯一侧借助对数解消来处理。令 $f\colon M\to M$ 为通过对每个尖点 $y_i\in G_i$ 进行三次爆破得到的$\widetilde{\ }$解消。记 $\pi_{\widetilde{M}}\colon M\to B$ 为$\widetilde{\ }$复合映射 $\pi_M\circ f$。令 $E_{1,\,i}$，$E_{2,\,i}$，$E_{3,\,i}\subset M$为与 y_i相关的三个（严格变换后的）例外除子。对于 $k=1$，2，3，令 $E_k\colon =\sum_{i=1}^{l} E_{k,\,i}\subset \widetilde{M}$。我们还令

$$\mathbf{E}=E_1+2E_2+5E_3\subset \widetilde{M}.$$

我们考虑如下态射三角

(70)

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1_M & \longrightarrow & Rf_*\left(\Omega^1_{\widetilde{M}}(\log f^{-1}(F+G))\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\mathbf{E})\right) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & Rf_*\left(\Omega^1_{\widetilde{M}/B}(\log f^{-1}(F+G))\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\mathbf{E})\right). & \end{array}$$

我们定义

$$\mathcal{K}_{-1}^{\mathrm{red}}:=\mathrm{cone}\left(\Omega^1_M\to Rf_*\left(\Omega^1_{\widetilde{M}}(\log f^{-1}(F+G))\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\mathbf{E})\right)\right)[-1],$$

$$\mathcal{K}_{0}:=\mathrm{cone}\left(\Omega^1_M\to Rf_*\left(\Omega^1_{\widetilde{M}/B}(\log f^{-1}(F+G))\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\mathbf{E})\right)\right)[-1].$$

根据八面体公理，与（70）中的三个映射相关联的锥构成一个正合三角

$$\mathcal{K}_{-1}^{\mathrm{red}}\to\mathcal{K}_0\to\pi_M^*\Omega^1_B(D+C)\otimes Rf_*\mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\mathbf{E})\xrightarrow{+1}. \tag{71}$$

此外，自然包含 $\mathbf{E}\subset\pi_{\widetilde{M}}^{-1}(C)$ 诱导出一个态射

$$\pi_M^*\Omega^1_B(D+C)\otimes Rf_*\mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\mathbf{E})\to\pi_M^*\Omega^1_B(D+2C). \tag{72}$$

我们定义

$$\mathcal{K}_{-1}:=\mathrm{cone}\left(\mathcal{K}_0\to\pi_M^*\Omega^1_B(D+2C)\right)[-1]$$

其中箭头通过复合（71）和（72）得到。最后，我们令

$$\mathcal{W}_{-1}^{\mathrm{FM,red}}:=\phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{K}_{-1}^{\mathrm{red}}),\quad \mathcal{W}_{-1}^{\mathrm{FM}}:=\phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{K}_{-1}),\quad \mathcal{W}_{0}^{\mathrm{FM}}:=\phi_{\mathrm{FM}}(\mathcal{K}_{0}).$$

还需验证，上述三个项都是集中于 0 次的层，并且构成一个滤过

$$\mathcal{W}_{-1}^{\mathrm{FM,red}}\subset\mathcal{W}_{-1}^{\mathrm{FM}}\subset\mathcal{W}_{0}^{\mathrm{FM}}\subset\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega^1_M),$$

并且 $\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega^1_M)|_{\hat{B}}$ 确实是 $\hat{B}$上的良好可容许层。例如，由 [21, 2.10] 可得

$$\Omega^1_{\widetilde{M}/B}(\log f^{-1}(F+G)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\mathbf{E}) \simeq \omega_{\widetilde{M}/B}$$

因此，在 M 的辛形式 σ 下，存在一个同构

$$Rf_*\left(\Omega^1_{\widetilde{M}/B}(\log f^{-1}(F+G)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\mathbf{E})\right) \simeq \pi_B^*\Omega_B^{1\vee}.$$

与 K_0，的定义比较后，我们得到一个正合三角

$$\mathcal{K}_0 \to \Omega^1_M \to \pi_B^*\Omega_B^{1\vee} \xrightarrow{+1}$$

其傅里叶–穆凯像是预期的短正合列

$$0 \to \mathcal{W}_0^{\mathrm{FM}} \to \phi_{\mathrm{FM}}(\Omega^1_M) \to 0_{B*}\Omega_B^{1\vee} \to 0.$$

此外，还用到正合三角

$$\pi_M^*\Omega^1_B(D+C) \otimes Rf_*\mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\mathbf{E}) \to Rf_*\left(\Omega^1_{\widetilde{M}}(\log f^{-1}(F+G)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\mathbf{E})\right)$$
$$\to Rf_*\left(\Omega^1_{\widetilde{M}/B}(\log f^{-1}(F+G)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\mathbf{E})\right) \xrightarrow{+1}$$

以及对数 Katz–Oda 定理 [19]，以将扩张类 $\rho_{\mathrm{FM}}([\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega^1_M)|_{\hat{B}}])$ 与 (69) 中相同的三次型 $[\overline{\nabla}]$ 联系起来，并得出

$$\rho_{\mathrm{HM}}([\mathrm{gr}(j_{!*}\mathcal{V})|_{\hat{B}}]) = \rho_{\mathrm{FM}}([\phi_{\mathrm{FM}}(\Omega^1_M)|_{\hat{B}}])$$

与节点情形一样。

参考文献

[1] D. Arinkin，紧化雅可比簇上线丛的上同调，Math. Res. Lett. 18 (2011), no. 6, 1215–1226.[2] D. Arinkin，平面奇点曲线的紧化雅可比簇的自对偶性，《代数几何杂志》22 (2013), no. 2, 363–388.[3] D. Arinkin and A. Caldararu，子簇的自交何时构成纤维化？Adv. Math. 231 (2012), no. 2, 815–842.[4] D. Arinkin and R. Fedorov，可积系统的部分傅里叶–穆凯变换及其在 *Hitchin* 纤维化中的应用，Duke Math. J. 165, no. 15 (2016), 2991–3042.[5] D. Arinkin and D. Gaitsgory，凝聚层的奇异支撑与几何朗兰兹猜想，《精选数学》(N.S.) 21 (2015), no. 1, 1–199.[6] A. Beauville，完全可积哈密顿系统˙与曲面˙相关´的´系统 $K3$，《曲面理论及其分类问题》（科尔托纳，1988），25–31，Sympos. Math., XXXII，学术出版社，伦敦，1991.[7] A. A. Be˘ılinson, J. Bernstein, and P. Deligne，余正合层，《奇异空间上的分析与拓扑》I（吕米尼，1981），5–171，Ast´erisque, 100，法国数学会，巴黎，1982.[8] M. A. de Cataldo, A. Rapagnetta, and G. Sacc`a，通过 *Ngˆo* 弦得到 *O'Grady 10* 的霍奇数，《纯粹与应用数学杂志》(9) 156 (2021), 125–178。

[9] R. Donagi and E. Markman，谱覆盖、代数完全可积哈密顿系统与丛模空间，载于《可积系统与量子群》（蒙特卡蒂尼泰尔梅，1993），1–119，Lecture Notes in Math., 1620，Springer，柏林，1996。[10] C. Felisetti, J. Shen, and Q. Yin，关于不可约辛簇的交叉上同调与拉格朗日纤维化，Trans. Amer. Math. Soc. 375 (2022), no. 4, 2987–3001。[11] A. Harder, Z. Li, J. Shen, and Q. Yin，拉格朗日纤维化的 P = W 以及超凯勒流形的退化¨，Forum Math. Sigma 9 (2021), Paper No. e50, 6 pp.[12] T. Hausel，朗兰兹对偶镜像对称的增强，arXiv:2112.09455。[13] T. Hausel andN. Hitchin，非常稳定的Higgs丛、等变重数与镜像对称，Invent. Math. 228 (2022), no. 2, 893–989。[14] N. J. Hitchin，黎曼曲面上的自对偶方程，伦敦数学会会刊 (3) 55 (1987), no. 1, 59–126。[15] N. J. Hitchin，稳定丛与可积系统，Duke Math. J. 54 (1987), no. 1, 91–114。[16] D. Huybrechts and M. Mauri，拉格朗日纤维化，Milan J. Math.，即将出版。[17] J.-M. Hwang，射影不可约辛流形纤维化的基流形，Invent. Math. 174 (2008), no. 3, 625–644。[18] A. Kapustin and E. Witten，电磁对偶与几何朗兰兹纲领，Commun. Number Theory Phys. 1 (2007), no. 1, 1–236。[19] N. Katz，代数几何中的正则性定理，国际数学家大会论文集（尼斯，1970），第1卷，第437–443页。Gauthier-Villars，巴黎，1971。[20] N. Katz and T. Oda，关于相对于参数对德拉姆上同调类求导，J. Math. Kyoto Univ. 8 (1968), 199–213。[21] J. Koll´ar，对偶化层的高阶直接像 II，Ann. of Math. (2) 124 (1986), no. 1, 171–202。[22] S. Lichtenbaum，函数方程中的常数与导出外幂，arXiv:1810.08644。[23] D. Matsushita，全纯辛流形上拉格朗日纤维化的等维性，Math. Res. Lett. 7 (2000), no. 4, 389–391。[24] D. Matsushita，拉格朗日纤维化的对偶化层的高阶直接像，Amer. J. Math. 127 (2005), no. 2, 243–259。[25] L. Migliorini and V. Shende，高阶判别式与代数映射的拓扑，Algebr. Geom. 5 (2018), no. 1, 114–130。[26] S. Mukai， $D(X)$ 与 $D(\hat{X})$ 之间的对偶及其在皮卡层中的应用，Nagoya Math. J. 81 (1981), 153–175。[27] B. C. Ngˆo，李代数的基本引理，Publ. Math. Inst. Hautes ´Etudes Sci. No. 111 (2010), 1–169。[28] M. Popa and Ch. Schnell，通过混合霍奇模的一般消失理论，Forum Math. Sigma 1 (2013), Paper No. e1, 60 pp.[29] M. Saito，可极化霍奇模，Publ. Res. Inst. Math. Sci. 24 (1988), no. 6, 849–995 (1989).[30] M. Saito，混合霍奇模，Publ. Res. Inst. Math. Sci. 26 (1990), no. 2, 221–333。[31] J. Shen and Q. Yin，拉格朗日纤维化的拓扑与超凯勒流形的霍奇理论，附录B由 Claire Voisin 撰写，Duke Math. J. 171 (2022), no. 1, 209–241。[32] J. Shen and Q. Yin，拉格朗日纤维化的余正合–霍奇复形，arXiv:2201.11283。[33] C. Voisin，拉格朗日环面纤维化截面的扭点与超凯勒流形的周环，《模空间几何》，295–326，Abel Symp., 14，Springer，沙姆，2018。[34] Z. Zhang，纤维化曲面希尔伯特概形的余正合滤过的乘法性，Adv. Math. 312 (2017), 636–679。

麻省理工学院电子邮箱地址： maulik@mit.edu

耶鲁大学电子邮箱地址：
junliang.shen@yale.edu

北京大学电子邮箱地址：
qizheng@math.pku.edu.cn