arXiv:2301.05828v1 [math.FA] 14 Jan 2023

分数阶有序欧拉-里斯差分序列空间

$DiptimayeeJena^{1}$, $SalilaDutta^{2,*}$乌特卡尔大学
数学系，印度 1 电子邮件：
jena.deeptimayee@gmail.com 2 电子邮件：
saliladutta516@gmail.com。* - 通讯作者

摘要： </style}本文的主要目的是引入分数阶欧拉-里斯差分序列空间 τ 及无限矩阵。本文探讨了这些空间的一些拓扑性质，以及它们的Schauder基、 $\alpha-$、 $\beta-$ 和 $\gamma-$对偶空间。

关键词：欧拉-里斯差分序列空间、差分算子（Δ^{τ}）、Schauder基、无限矩阵以及 $\alpha-$、 $\beta-$ 和 $\gamma-$对偶空间。

2010年学科分类：40A05，46A45，46B45，46A35。

1 引言

对于所有实数 τ，伽马函数 $\Gamma(\tau)$ 表示为

$$\Gamma(\tau) = \int_0^{\infty} e^{-t}\ t^{\tau-1}\, dt \tag{1}$$

，这是一个反常积分，并满足以下性质：

1. $\Gamma(n+1) = n!$， $n \in N$2. 对每个实数 $n \notin \{0, -1, -2, -3, ...\}$，
$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$。

根据关于序列空间的已有知识，显然，所有实值序列组成的空间记作 ω。空间 c_0、c 和 l_{∞} 分别表示所有零序列、收敛序列和有界序列组成的空间。

Maddox [22, 23, 24] 引入了 $c_0(p)$、 $c(p)$ 和 $l_\infty(p)$，其中 $p=(p_k)$ 是一个由严格正实数组成的有界序列，定义如下:

$$c_0(p)=\left\{\zeta=(\zeta_k)\in\omega:\lim_{k\to\infty}|\zeta_k|^{p_k}=0\right\},$$
$$c(p)=\left\{\zeta=(\zeta_k)\in\omega:\lim_{k\to\infty}|\zeta_k-l|^{p_k}=0\ for some\ l\in R\right\},$$
$$l_\infty(p)=\left\{\zeta=(\zeta_k)\in\omega:\sup_{k\in N}|\zeta_k|^{p_k}<\infty\right\}$$

这些是完备赋半范数序列空间，其拟范数为 $g(x)=\sup|x_k|^{p_k/M}{}_{k\in N}$，其中 $M=max\{1,\sup p_k\}$。差分序列空间 $X(\Delta)=\{x=(x_k):\Delta(x_k)\in X\}_k$（其中 $X=\{c_0,c,l_\infty\}$）由 K1zmaz 于 1981年 [21] 年提出。此后，差分序列空间在不同方向上引起了多位作者的关注 [18, ?、27] 。对于一个真分数 τ，Baliarsingh 和 Dutta（[7, 8, 6, 9, 15, 14]）提出了差分算子 $\Delta^{(\tau)}$，其定义如下:

$$\Delta^{(\tau)}x_k=\sum_i(-1)^i\frac{\Gamma(\tau+1)}{i!\Gamma(\tau-i+1)}x_{k-i}\tag{2}$$

$$\Delta^{-(\tau)}x_k=\sum_i(-1)^i\frac{\Gamma(-\tau+1)}{i!\Gamma(-\tau-i+1)}x_{k-i}\tag{3}$$

本文假设分数阶差分算子级数均收敛。差分算子及其逆也可表示如下:

$$\left(\Delta^{(\tau)}\right)_{nk}=\begin{cases}(-1)^{n-k}\frac{\Gamma(\tau+1)}{(n-k)!\Gamma(\tau-n+k+1)} & if\ 0\le k\le n\\ 0 & if\ k>n\end{cases}$$

$$\left(\Delta^{(-\tau)}\right)_{nk}=\begin{cases}(-1)^{n-k}\frac{\Gamma(-\tau+1)}{(n-k)!\Gamma(-\tau-n+k+1)} & if\ 0\le k\le n\\ 0 & if\ k>n\end{cases}$$

Basar 和 Braha [10] 引入了零序列、收敛序列和有界序列的欧拉-切萨罗差分序列空间 $\check{c}$、$\check{c}_0$、$\check{l}_\infty$，随后 Ellidokuzoglu 和 Demiriz [16] 引入了欧拉-里斯差分序列空间 $[c_0]_{e,\ r}$、 $[c]_{e,\ r}$、 $[l_\infty]_{e,\ r}$。

Baliarsingh 和 Dutta [7] 引入了分数阶差分算子。现在，我们有兴趣引入分数阶的 Euler-Riesz 差分序列空间。现在，我们利用欧拉均值 E_1 与 Riesz 均值 R_q 和分数阶算子$\Delta^{(\tau)}$ 的乘积，引入空间$\left[c_0, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$、 $\left[c, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$和$\left[l_\infty, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$。我们证明了这些空间的若干拓扑性质，以及 $\alpha-$、$\beta-$、$\gamma-$对偶。

2 主要结果

这里我们通过 Euler-Riesz 矩阵$\tilde{B}$ [16] 与分数阶序差分算子 $\Delta^{(\tau)}$ [7]的乘积引入矩阵 $\tilde{B}\left(\Delta^{(\tau)}\right) = \tilde{B}^{(\tau)}$，并求得其逆，其中

$$\left(\tilde{B}^{(\tau)}\right)_{nk} = \begin{cases} \sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\binom{n}{i}\frac{\Gamma(\tau+1)}{(i-k)!\Gamma(\tau-i+k+1)}\frac{q_i}{2^n Q_n}, & if\ 0 \le k \le n \\ 0, & if\ k > n \end{cases} \tag{4}$$

等价地，我们可以写成

$$\left(\tilde{B}^{(\tau)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \left(\frac{2q_1-\tau q_2}{2^2 Q_2}\right) & \left(\frac{q_2}{2^2 Q_2}\right) & 0 & 0 & \dots \\ \left(\frac{3q_1-3\tau q_2+\frac{\tau(\tau-1)}{2!}q_3}{2^3 Q_3}\right) & \left(\frac{3q_2-\tau q_3}{2^3 Q_3}\right) & \left(\frac{q_3}{2^3 Q_3}\right) & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{5}$$

通过简单计算，可得到矩阵 $\Delta^{(\tau)}$、$\tilde{B}$ 和 $\tilde{B}^{(\tau)}$ 的逆，如下述引理所示。

引理 **1** *[9]* 分数阶差分算子 $\Delta^{(\tau)}$ 的逆为

$$\left(\Delta^{-(\tau)}\right)_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k}\frac{\Gamma(-\tau+1)}{(n-k)!\Gamma(-\tau-n+k+1)} & if\ 0 \le k \le n \\ 0 & if\ k > n \end{cases}$$

˜引理 **2** *[16]* Euler-Riesz 矩阵的逆 B 表示为

$$\left(\tilde{B}\right)^{-1}_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{Q_k 2^k}{q_n}, & if\ 0 \le k \le n \\ 0, & if\ k > n \end{cases}$$

定理1 分数阶 Euler-Riesz 矩阵的逆 $\left(\tilde{B}^{(\tau)}\right)_{nk}$ 写作 $\left(\tilde{B}^{(\tau)}\right)_{nk}^{-1}$，并表示为

$$\left(\tilde{B}^{(\tau)}\right)_{nk}^{-1}=\begin{cases}\sum_{j=k}^{n}(-1)^{n-k}\binom{j}{k}\frac{\Gamma(-\tau+1)}{(n-j)!\Gamma(-\tau-n+j+1)}\frac{2^kQ_k}{q_j}, & if\ 0\le k\le n\\ 0, & if\ k>n\end{cases}$$

Pr图1 该定理可由引理1和引理2证明，故略去证明。

对于正实数 τ，现在我们定义分数阶有序欧拉-黎斯差分序列空间的类$\left[c_0,\Delta^{(\tau)},p\right]_{er}$、$\left[c,\Delta^{(\tau)},p\right]_{er}$和 $\left[l_\infty,\Delta^{(\tau)},p\right]_{er}$如下:

$$\left[c_0,\Delta^{(\tau)},p\right]_{er}=\left\{x=(x_k)\in w:\lim_{m\to\infty}\left|\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=j}^{m}(-1)^{i-j}\binom{m}{i}\frac{\Gamma(\tau+1)}{(i-j)!\Gamma(\tau-i+j+1)}\frac{q_ix_j}{2^mQ_m}\right|^{p_k}=0\right\}$$

$$\left[c,\Delta^{(\tau)},p\right]_{er}=\left\{x=(x_k)\in w:\lim_{m\to\infty}\left|\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=j}^{m}(-1)^{i-j}\binom{m}{i}\frac{\Gamma(\tau+1)}{(i-j)!\Gamma(\tau-i+j+1)}\frac{q_ix_j}{2^mQ_m}\right|^{p_k}exists\right\}$$

$$\left[l_\infty,\Delta^{(\tau)},p\right]_{er}=\left\{x=(x_k)\in w:\sup_{m}\left|\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=j}^{m}(-1)^{i-j}\binom{m}{i}\frac{\Gamma(\tau+1)}{(i-j)!\Gamma(\tau-i+j+1)}\frac{q_ix_j}{2^mQ_m}\right|^{p_k}<\infty\right\}$$

上述空间可写为:
$\left[c_0,\Delta^{(\tau)},p\right]_{er}=(c_0(p))(\tilde{B}^{(\tau)})$ $\left[c,\ \Delta^{(\tau)},p\right]_{er}=(c(p))(\tilde{B}^{(\tau)})$ $\left[l_\infty,\ \Delta^{(\tau)},p\right]_{er}=(l_\infty(p))(\tilde{B}^{(\tau)})$.上述序列空间将许多已知序列空间推广为特例，具体如下:

(i)。对于 $\tau=0$ 和 $p=(p_k)=e$，上述类可化为由 Ellidokuzoglu 和 Demiriz 引入的$[c_0]_{e,r}$, $[c]_{e,r}$, $[l_\infty]_{e,r}$。[16]

(ii)。对于 $\tau=0$ 和 $p=(p_k)=e,q=(q_k)=e$，上述类可化为 Basar 和 Braha [10]研究的序列空间 $\breve{c}$, $\breve{c}_0$, $\breve{l}_\infty$。

现在，利用 $x=(x_k)$ 的 $\tilde{B}^{(\tau)}$ - 变换，我们定义序列 $y=(y_k)$ 如下:

$$y_k=\left(\tilde{B}^{(\tau)}x\right)_k=\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=j}^{k}(-1)^{i-j}\binom{k}{i}\frac{\Gamma(\tau+1)}{(i-j)!\Gamma(\tau-i+j+1)}\frac{q_ix_j}{2^kQ_k}\ , \qquad (6)$$

通过直接计算可得式（6）:

$$x_k=\left(\tilde{B}^{(-\tau)}y\right)_k=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=i}^{k}(-1)^{k-i}\binom{j}{i}\frac{\Gamma(-\tau+1)}{(k-j)!\Gamma(-\tau-k+j+1)}\frac{2^iQ_iy_i}{q_j}\ , \qquad (7)$$

引理 3 算子 $\tilde{B}^{(\tau)}: w \to w$ 是线性的。

证明 2 证明从略，因为可以很容易地得出。

注： $\tilde{B}^{(\tau)}.\tilde{B}^{(-\tau)} \cong \tilde{B}^{(-\tau)}.\tilde{B}^{(\tau)} \cong I$，其中 I 是一个单位矩阵。

3 拓扑结构

本节讨论空间 $\left[c_0, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$、$\left[c, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$ 和 $\left[l_\infty, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$ 的一些有趣的拓扑结果。

定理 **2** $\left[c_0, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$ 是一个拟赋范空间，其拟范数为

$$g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(x) = \sup_{k \in N} \left| \left(\left(\tilde{B}^{(\tau)} \right) x \right)_k \right|^{\frac{p_k}{M}}$$

$$= \sup_n \left| \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=j}^{k} (-1)^{i-j} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \frac{\Gamma(\tau+1)}{(i-j)!\Gamma(\tau-i+j+1)} \frac{q_i}{2^k Q_k} x_j \right|^{\frac{p_k}{M}}, \qquad (8)$$

其中 $0 < p_k \le H < \infty$、$H = \sup_k p_k$、$M = max(1, H)$ $h = \inf_k p_k$.

证明 3 该定理仅对 $\left[c_0, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$ 进行证明。假设 $h > 0$，则 $g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(\theta) = 0$ 且 $g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(-x) = g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(x)$。为证明 $g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(x)$ 的线性性，我们考虑两个序列 $x = (x_k)$ $y = (y_k) \in \left[c_0, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$以及任意两个标量 $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$。由于 $\tilde{B}^{(\tau)}$ 是线性的，我们得到，$g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(\beta_1 x + \beta_2 y) = \sup_n \left| \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=j}^{k} (-1)^{i-j} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix}_{i-j} \Gamma(\tau+1)\,(\,)!\Gamma(\tau-i+j+1)\, \frac{q_i}{2^k Q_k} (\beta_1 x_j + \beta_2 y_j) \right|^{\frac{p_k}{M}} \le max\{1, |\beta_1|\} \sup_{k \in N} \left| \left(\left(\tilde{B}^{(\tau)} \right) x \right)_k \right|^{\frac{p_k}{M}} + max\{1, |\beta_2|\} \sup_{k \in N} \left| \left(\left(\tilde{B}^{(\tau)} \right) y \right)_k \right|^{\frac{p_k}{M}} = max\{1, |\beta_1|\}\ g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(x) + max\{1, |\beta_2|\}\ g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(y)$ 因此 $g_{\tilde{B}^{(\tau)}}$ 具有次可加性。即对所有 $x, y \in \left[c_0, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$，$g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(x+y) \le g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(x) + g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(y)$。现在考虑 $\{u^n\}$ 是 $\left[c_0, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$ 中的一个点序列，则 $g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(u^n - u) \to 0$，且 (λ_n) 是一个标量序列，使得当 $n \to \infty$ 时 $\lambda_n \to \lambda$。利用 $g_{\tilde{B}^{(\tau)}}$ 的次可加性，我们得到 $g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(u^n) \le g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(u) + g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(u^n - u)$。由于 $\{g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(u^n)\}$ 有界，我们有

$g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(\lambda_n u^n - \lambda u) = \sup_k \left| \sum_{j=0}^{k} \left[\sum_{i=j}^{k} (-1)^{i-j} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \frac{\Gamma(\tau+1)}{(i-j)!\Gamma(\tau-i+j+1)} \frac{q_i}{2^k Q_k} \right] (\lambda_n u_j{}^n + \lambda u_j) \right|^{\frac{p_k}{M}}$
$\leq |\lambda_n - \lambda|^{\frac{p_k}{M}} \ g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(u^n) + |\lambda|^{\frac{p_k}{M}} \ g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(u^n - u) \to 0 \ as \ n \to \infty.$
因此，这表明 $g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(x)$ 的数乘是连续的，且 $g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(x)$ 是空间 $\left[c_0, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$ 上的拟范数；其他空间的证明也可采用类似的方法完成。

定理 3 序列空间 $\left[c_0, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$ 是由 $g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(x)$ 拟范数化的完备线性空间。

证明 4 证明过程属于常规验证，故略去。

定理 4 $\left[c_0, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$、$\left[c, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$ 和 $\left[l_\infty, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$ 分别与 $c_0(p)$ $c(p)$ $l_\infty(p)$ 线性同构，其中 $0 < p_k \leq H < \infty$。

证明 5 现在定义映射 $F: \left[l_\infty, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er} \to l_\infty(p)$，使其满足 $x \to y = Fx$。显然，F 是线性变换。若 $Fx = \theta \ then \ x = \theta$，则 F 是单射。令 $y \in l_\infty(p)$，定义 (6) 中的序列 $x = (x_k)$ 如下

$$x_k = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=i}^{k} (-1)^{k-i} \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \frac{\Gamma(-\tau+1)}{(k-j)!\Gamma(-\tau-k+j+1)} \frac{2^i Q_i}{q_j} y_i$$

Then

$$g_{\tilde{B}^{(\tau)}}(x) = \sup_n \left| \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=j}^{k} (-1)^{i-j} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \frac{\Gamma(\tau+1)}{(i-j)!\Gamma(\tau-i+j+1)} \frac{q_i}{2^k Q_k} x_j \right|^{\frac{p_k}{M}}$$

$$= \sup_{k \in N} \left| \sum_{j=0}^{k} \delta_{kj} \ y_j \right|^{\frac{p_k}{M}} = \sup_{k \in N} |y_k|^{\frac{p_k}{M}} < \infty$$

$$where \ \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & if \ k = j \\ 0, & if \ k \neq j \end{cases}$$

因此，$x \in \left[l_\infty, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$ 和 F 是线性双射且保持拟范数。因此，空间 $\left[l_\infty, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$ 和 $l_\infty(p)$ 线性同构，即 $\left[l_\infty, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er} \cong l_\infty(p)$。其他空间的证明可以用类似的方法得到。

4 空间的基

本节将构造 $\left[c_0, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$, $\left[c, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$ 的Schauder基 [24]。

定理5 对于 $0 < p_k \le H < \infty$，设 $\mu_k(q) = \left(\left(\tilde{B}^{(\tau)}\right)x\right)_k$。对于 $k \in N_0$，定义 $b^{(k)}(q) = \left\{{b_n}^{(k)}(q)\right\}_{n\in N_0}$ 为

$$\left\{{b_n}^{(k)}(q)\right\} = \begin{cases} \sum_{j=k}^{n}(-1)^{n-k}\begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix}\frac{\Gamma(-\tau+1)}{(n-j)!\Gamma(-\tau-n+j+1)}\ \frac{2^k Q_k}{q_j}, & if\ 0 \le k \le n \\ \frac{2^n Q_n}{q_n}, & if\ k = n \\ 0, & if\ k > n \end{cases} \tag{9}$$

(i) $\left\{{b_n}^{(k)}(q)\right\}$ 是 $\left[c_0, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$ 的基，且每个 $x \in \left[c_0, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$ 和 x 都有唯一表示

$$x = \sum_k \mu_k(q){b_n}^{(k)}(q)$$

. (ii) $\left\{\left(\tilde{B}^{(-\tau)}\right)e, {b_n}^{(k)}(q)\right\}$ 是 $\left[c, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$ 的基，且每个 $x \in \left[c, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$ 和 x 都有唯一表示

$$x = le + \sum_k \left(\mu_k - l\right) b^{(k)}, \quad l = \lim_{k\to\infty}\mu_k\ .$$

证明6 (i) 根据 $\left(\tilde{B}^{(\tau)}\right)$ 和 ${b_n}^{(k)}(q)$ 的定义,

$$\tilde{B}^{(\tau)}{b_n}^{(k)}(q) = e^{(k)} \in c_0,$$

令 $x \in \left[c_0, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{e,r}$，则对某个整数 $s \ge 0$，$x^{[s]} = \sum_{k=0}^{s}\mu_k(q)b^{(k)}(q)$。

应用 $\tilde{B}^{(\tau)}$，我们得到 $\tilde{B}^{(\tau)}x^{[s]} = \sum_{k=0}^{s}\mu_k(q)\ \tilde{B}^{(\tau)}b^{(k)}(q)$

$$= \sum_{k=0}^{s}\mu_k(q)e^{(k)} = \left(\left(\tilde{B}^{(\tau)}\right)x\right)_k e^{(k)}$$

and

$$\tilde{B}^{(\tau)}\left(x - x^{[s]}\right)_r = \begin{cases} 0, & if\ 0 \le r \le s \\ \left(\left(\tilde{B}^{(\tau)}\right)x\right)_k, & if\ r > s \end{cases} ;for\ \ r, s \in N_0 \tag{10}$$

对于 $\epsilon > 0$，存在一个整数 m_o，使得

$$\sup_{r \geq s} \left| \left(\left(\tilde{B}^{(\tau)} \right) x \right)_r \right|^{\frac{p_k}{M}} < \frac{\epsilon}{2} \; for \; all \; s \geq m_0.$$

因此

$$g_{\tilde{B}} \left(x - x^{[s]} \right) = \sup_{r \geq s} \left| \left(\left(\tilde{B}^{(\tau)} \right) x \right)_r \right|^{\frac{p_k}{M}} < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \; , for \; all \; s \geq m_0.$$

假设 $x = \sum_k \eta_k(q) b^{(k)}(q)$。由于线性映射 F从 $\left[c_0, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$到 $c_0(p)$ 是连续的，因此我们有，

$$\left(\left(\tilde{B}^{(\tau)} \right) x \right)_k = \sum_k \eta_k(q) \left(\left(\tilde{B}^{(\tau)} \right) b^{(k)}(q) \right)_n$$

$$= \sum_k \eta_k(q) e^{(k)} = \eta_n(q) \; .$$

这与我们的假设矛盾，即对每个 $k \in N_0$，$\left(\left(\tilde{B}^{(\tau)} \right) x \right)_k = \mu_k(q)$。因此，该表示是唯一的。$(ii)$ 证明与前一个证明类似。

5 $\alpha-$、$\beta-$ 和 $\gamma-$ 对偶

这里我们确定 $\left[c_0, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$、$\left[c, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$和$\left[l_\infty, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$的 $\alpha-$、$\beta-$ 和 $\gamma-$ 对偶。我们定义

$$S(X,Y) = \{u = (u)_k \in \omega : ux = (u_k x_k) \in Y, whenever \, x = (x_k) \in X\}$$

对于任意两个序列空间 X 和 Y，将其定义为乘子序列空间。分别用 $X^\alpha = S(X, l_1)$、$X^\beta = S(X, cs)$、$X^\gamma = S(X, bs)$ 表示 $\alpha-$、$\beta-$和 $\gamma-$对偶。

在全文中，$\mathbb{N}$ 的所有有限子集的集合记为 κ。我们考虑$K \in \kappa$。

引理 **4** *[19]* 设 $A = (a_{n,k})$ 是一个无限矩阵。则，

1. $A \in (l_\infty(p)\ l(q))$ 当且仅当

$$\sup_{k\in\kappa}\sum_n\left|\sum_{k\in K}a_{nk}B^{\frac{1}{p_k}}\right|^{q_n}<\infty,\qquad for\,all\,integers\,B>1 and\,q_n\geq 1 for\,all\,n; \tag{11}$$

2. $A \in (l_\infty(p)\ l_\infty(q))$ 当且仅当

$$\sup_{n\in N}\left(\sum_k|a_{nk}|\,B^{\frac{1}{p_k}}\right)^{q_n}<\infty,\qquad ; \tag{12}$$

3. $A \in (l_\infty(p)\ c(q))$ 且 $q=(q_n)$ 是严格正实数构成的有界序列，当且仅当

$$\sup_{n\in N}\sum_k|a_{nk}|\,B^{\frac{1}{p_k}}<\infty,\qquad for\,all\,B>1, \tag{13}$$

存在 $(\tau_k)\subset R$，使得 $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_k|a_{nk}-\tau_k|\,B^{\frac{1}{p_k}}\right)^{q_n}=0, for\,all\,B>1;$

4. $A \in (l_\infty(p)\ c_0(q))$ 当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_k|a_{nk}|\,B^{\frac{1}{p_k}}\right)^{q_n}=0,\qquad for\,all\,B>1,$$

.

引理 **5** *[19]* 设 $A=(a_{nk})$ 是一个无限矩阵。那么，

1. $A \in (c_0(p)\ l_\infty(q))$ 当且仅当

$$\sup_{n\in N}\left(\sum_k|a_{nk}|\,B^{\frac{-1}{p_k}}\right)^{q_n}<\infty,\qquad for\,all\,B>1; \tag{14}$$

2. $A \in (c_0(p)\ c(q))$ 当且仅当

$$\sup_{n\in N}\sum_k|a_{nk}|\,B^{\frac{-1}{p_k}}<\infty,\qquad for\,all\,B>1, \tag{15}$$

$$exists\,(\tau_k)\subset R\,such\,that\sup_{n\in N}\sum_k|a_{nk}-\tau_k|\,M^{\frac{-1}{p_k}}B^{\frac{-1}{p_k}}<\infty, \tag{16}$$

对于所有整数 $M,B>1$;

$$exists\,(\tau_k)\subset R\,such\,that\lim_{n\to\infty}\sum_k|a_{nk}-\tau_k|^{q_n}=0, for\,all\,k\in N; \tag{17}$$

3. 当且仅当 $A \in (c_0(p)\ c_0(q))$】【。

$$exists\,(\tau_k) \subset R\,such\,that \sup_{n\in N} \sum_k |a_{nk}|\, M^{\frac{-1}{p_k}} B^{\frac{-1}{p_k}} < \infty, \tag{18}$$

对所有整数 M、$B > 1$;

$$exists\,(\tau_k) \subset R\,such\,that \lim_{n\to\infty} \sum_k |a_{nk}|^{q_n} = 0, for\,all\,k \in N. \tag{19}$$

引理 **6** *[19]* 设 $A = (a_{nk})$ 是一个无限矩阵。那么,

1. $A \in (c(p)\ l_\infty(q))$ 当且仅当 (16) 成立, 且

$$\sup_{n\in N} \left| \sum_k a_{nk} \right|^{q_n} < \infty; \tag{20}$$

2. $A \in (c(p)\ c(q))$ 当且仅当 (17)、(18)、(19) 成立:

$$exists\,(\tau) \subset R\,such\,that \lim_{n\to\infty} \left| \sum_k a_{nk} - \tau \right|^{q_n} = 0; \tag{21}$$

3. $A \in (c(p)\ c_0(q))$ 当且仅当 (20)、(21) 成立, 且

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sum_k a_{nk} \right|^{q_n} = 0. \tag{22}$$

定理 6 设 $0 < p_k \leq H < \infty \left[c_0, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$、$\left[c, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$ 和 $\left[l_\infty, \Delta^{(\tau)}, p\right]_{er}$ 的 $\alpha-$、$\beta-$ 和 $\gamma-$ 对偶空间分别为以下集合

$$D_1^{(\tau)}(p) = \bigcap_{M>1} \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_{k\in\tau} \sum_n \left| \sum_{k\in K} \left[\sum_{j=k}^{n-1} (-1)^{n-k} \binom{j}{k} \frac{\Gamma(-\tau+1)}{(n-j)!\Gamma(-\tau-n+j+1)} \frac{2^k Q_k}{q_j} a_k \right] \right| M^{\frac{1}{p_k}} < \infty \right\},$$

$$D_2^{(\tau)}(p) = \bigcap_{M>1} \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sum_k \left| \tilde{B}^{(\tau)}\left(\frac{a_k}{q_k}\right) Q_k \right| M^{\frac{1}{p_k}} < \infty and \left(\frac{a_k}{q_k} Q_k M^{\frac{1}{p_k}} \right) \in c_0 \right\},$$

$$D_3^{(\tau)}(p) = \bigcap_{M>1} \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sum_k \left| \tilde{B}^{(\tau)}\left(\frac{a_k}{q_k}\right) Q_k \right| M^{\frac{1}{p_k}} < \infty and \left\{ \tilde{B}^{(\tau)}\left(\frac{a_k}{q_k}\right) Q_k \right\} \in l_\infty \right\},$$

$$D_4^{(\tau)}(p) = \bigcup_{M>1} \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_{k\in\tau} \sum_n \left| \sum_{k\in K} \left[\sum_{j=k}^{n-1} (-1)^{n-k} \binom{j}{k} \frac{\Gamma(-\tau+1)}{(n-j)!\Gamma(-\tau-n+j+1)} \frac{2^k Q_k}{q_j} a_k \right] \right| M^{\frac{-1}{p_k}} < \infty \right\},$$

$$D_5^{(\tau)}(p)=\bigcup_{M>1}\left\{a=(a_k)\in\omega:\sum_n\left|\sum_k\left[\sum_{j=k}^{n-1}(-1)^{n-k}\binom{j}{k}\frac{\Gamma(-\tau+1)}{(n-j)!\Gamma(-\tau-n+j+1)}\frac{2^kQ_k}{q_j}a_k\right]\right|<\infty\right\},$$

$$D_6^{(\tau)}(p)=\bigcap_{M>1}\left\{a=(a_k)\in\omega:\sum_k\left|\tilde{B}^{(\tau)}\left(\frac{a_k}{q_k}\right)Q_k\right|M^{\frac{-1}{p_k}}<\infty\right\},$$

其中

$$\tilde{B}^{(\tau)}\left(\frac{a_k}{q_k}\right)=\frac{2^ka_k}{q_k}+\sum_{i=k+1}^{n}(-1)^{n-k}a_i\sum_{j=k}^{i}\binom{i}{j}\frac{\Gamma(-\tau+1)}{(j-i)!\Gamma(-\tau-j+i+1)}\frac{2^i}{q_j}\quad(23)$$

证明 7 我们对 $\left[l_\infty,\Delta^{(\tau)},p\right]_{er}$ 进行证明。考虑 7 中的 $x=(x_k)$，令 $a=(a_k)\in\omega$ 定义

$$\begin{aligned}a_nx_n&=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=i}^{k}(-1)^{k-i}\binom{j}{i}\frac{\Gamma(-\tau+1)}{(k-j)!\Gamma(-\tau-k+j+1)}\frac{2^iQ_i}{q_j}a_ny_i\\&=(Uy)_n,\qquad\text{for}\,n\in N\end{aligned},$$

其中矩阵 $U=(u_{nk})$ 定义为

$$u_{nk}=\begin{cases}\sum_{j=k}^{n}(-1)^{n-k}\binom{j}{k}\frac{\Gamma(-\tau+1)}{(n-j)!\Gamma(-\tau-n+j+1)}\frac{2^kQ_k}{q_ja_n}, & if\,0\le k\le n\\ \frac{2^nQ_n}{q_n}, & if\,k=n\\ 0, & if\,k>n\end{cases}\quad(24)$$

因此我们得出，当 $x=(x_k)\in\left[l_\infty,\Delta^{(\tau)},p\right]_{er}$ iff$Uy\in l_1$ 时，$ax=(d_nx_n)\in l_1$，因为 $y=(y_k)\in l_\infty(p)$。

由引理（4）可得 $\left\{\left[l_\infty,\Delta^{(\tau)},p\right]_{er}\right\}^\alpha=D_1^{(\tau)}(p)$。现在，

$$\sum_{i=0}^{n}a_kx_k=\sum_{k=0}^{n}a_k\left[\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=i}^{k}(-1)^{k-i}\binom{j}{i}\frac{\Gamma(-\tau+1)}{(k-j)!\Gamma(-\tau-k+j+1)}\frac{2^iQ_i}{q_j}y_i\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}y_kQ_k\left[\frac{2^ka_k}{q_k}+\sum_{i=k+1}^{n}(-1)^{n-k}a_i\sum_{j=k}^{i}\binom{i}{j}\frac{\Gamma(-\tau+1)}{(j-i)!\Gamma(-\tau-j+i+1)}\frac{2^i}{q_j}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}y_kQ_k\tilde{B}^{(\tau)}\left(\frac{a_k}{q_k}\right)=(Vy)_n,$$

其中，矩阵 $V=(v_{nk})$ 定义为

$$v_{nk}=\begin{cases}\tilde{B}^{(\tau)}\left(\frac{a_k}{q_k}\right)Q_k, & if\,0\le k\le n\\ \frac{2^nQ_n}{q_n}, & if\,k=n\\ 0, & if\,k>n\end{cases}\quad(25)$$

因此我们推得，当 $x=(x_k)\in\left[l_\infty,\Delta^{(\tau)},p\right]_{er}$时， $ax=(d_nx_n)\in cs$当且仅当 $Vy\in c$，因为 $y=(y_k)\in l_\infty(p)$。利用引理（4）及 $q=q_n=1$，我们得出 $\left\{\left[l_\infty,\Delta^{(\tau)},p\right]_{er}\right\}^\beta=D_2^{(\tau)}(p)$。类似地，利用引理（4）及 $q=q_n=1$ 对所有 n，我们得出 $\left\{\left[l_\infty,\Delta^{(\tau)},p\right]_{er}\right\}^\gamma=D_3^{(\tau)}(p)$。因此定理得证，其他空间的对偶空间也可采用类似方法，利用引理（5）和引理（6）得到。

参考文献

[1] B. Altay 和 F. Ba¸sar，《关于一些非绝对型欧拉序列空间》，《乌克兰数学杂志》57，1–17，2005年。

[2] B. Altay、F. Ba¸sar 和 M. Mursaleen，《关于包含空间 lp 和 l_∞ 的欧拉序列空间 I》，《信息科学》176，1450–1462，2006年。

[3] B. Altay 和 F. Ba¸sar，《关于非绝对型赋予拟范数的黎斯序列空间》，《东南亚数学通报》26，701–715页，2002年。

[4]B. Altay 和 F. Ba¸sar，《一些非绝对型赋予拟范数的黎斯序列空间》，《东南亚数学通报》30，591–608，2006年。

[5] B.Altay 和 H. Polat，“关于一些新的欧拉差分序列空间”，《东南亚数学公报》30，209-220，2006。

[6] P. Baliarsingh，“一些新的分数阶差分序列空间及其对偶空间”，《应用数学与计算》219，9737-9742，2013。

[7] P. Baliarsingh 和 S. Dutta，“差分算子及其应用的统一方法”，《巴拉那州数学学会公报》33，49-57，2015。

[8] P. Baliarsingh 和 S. Dutta，《关于分数阶差分序列空间类及其矩阵变换》，《应用数学与计算》250，665-674，2015。

[9] P. Baliarsingh 和 S. Dutta，《关于三角矩阵逆的显式公式》，埃及数学学会期刊 23，297-302，2015。[10] F. Ba¸sar 和 N.L. Braha，《有界、收敛和零序列的欧拉-切萨罗差分空间》，淡江数学期刊 47，4，405–420，2016。[11] M. Ba¸sarir，《关于广义黎斯 B-差分序列空间》，Filomat 24，4，35–52，2010。.[12] M.Ba¸sarir 和 M. Ozt¨urk，《关于黎斯差分序列空间》，巴勒莫数学与物理学研讨会报告，2，57，377–389，2008。.[13] M. Ba¸sarir 和 M. Ozt¨urk，《关于一些广义 Bm-差分黎斯序列空间及一致 opial 性质。¨》，不等式及其应用期刊，文章编号 485730，共17页，2011。[14] S. Dutta 和 P. Baliarsingh，《关于分数阶副范数差分序列空间及其矩阵变换的简注》，埃及数学学会期刊 22，249-253，2014。[15] S. Dutta 和 P. Baliarsingh，《关于一些托普利茨矩阵及其求逆》，埃及数学学会期刊 22，420-423，2014。[16] H.B. Ellidokuzoglu 和 S. Demiriz，《Euler-Riesz 差分序列空间》，土耳其数学与计算机科学期刊，7，63–72，2017。[17] M. Et 和 R. C¸olak，《关于广义差分序列空间》，东吴数学期刊，21，377-386，1995。[18] M. Et 和 M. Basarir，《关于一些新广义差分序列空间》，匈牙利数学期刊 35：169–175，1997。[19]K.G. Grosse-Erdmann，1993。《马多克斯序列空间之间的矩阵变换》，数学分析与应用期刊，180，223–238，1993。

[20] U. Kadak 和 P. Baliarsingh，《关于某些分数阶欧拉差分序列空间及其相关对偶性质》，《非线性科学与应用杂志》8：997–1004，2015年。[21] H. Kizmaz，《关于某些序列空间》，《加拿大数学通报》24：169–176，1981年。[22]I.J. Maddox，《强可和序列空间》，《季刊数学杂志》18：345–355，1967年。[23] I.J. Maddox，《由无限矩阵生成的拟范数序列空间》，《剑桥哲学学会数学会刊》64：335–340，1968年。[24] I.J. Maddox，《泛函分析基础》，第2版，剑桥大学出版社，剑桥，1988年。[25] M. Mursaleen 和 K. Noman，《与空间 l_p 和 l_∞ 相关的若干新型非绝对型序列空间——I》，Filomat，25：33–51，第2期，2011年。[26] M. Mursaleen 和 K. Noman，《与空间 l_p 和 l_∞ 相关的若干新型非绝对型序列空间——II》，《数学通讯》16：383–398，2011年。[27] M. Mursaleen，《广义差分序列空间》，《数学分析与应用期刊》203：738–745，1996年。[28] H. Polat 和 F. Ba̧sar，《m 阶差分序列的某些欧拉空间》，数学科学学报，27：254–266，2007年。[29] S. Singh 和 S. Dutta，《关于某些广义 m 阶几何差分序列空间》，FJMS，116，1：83–100，2019年。[30] S. Singh、S. Dutta、D. Dash 和 R. Sharma，《由 Orlicz 函数定义的强可和斐波那契差分几何序列》，GANITA，71，2：99–109，2021年。

[31] A. S¨onmez 和 F. Ba¸sar, 《收敛序列与零序列的非绝对型广义差分空间》, 《抽象与应用分析》, 文章编号 435076, 共20页, 2012年。

[32] T. Yaying, ”分数阶拟赋范黎斯差分序列空间”, 《克拉古耶瓦茨数学杂志》, 46, 175-191, 2022年.