arXiv:2301.05839v1 [cs.CV] 14 Jan 2023

NCP：用于有效无监督形状匹配的神经对应先验

Souhaib Attaiki
LIX，巴黎综合理工学院，巴黎理工学院 attaiki@lix.polytechnique.fr

Maks Ovsjanikov
LIX，巴黎综合理工学院，巴黎理工学院 maks@lix.polytechnique.fr

摘要

我们提出神经对应先验（NCP），一种用于计算三维形状之间对应关系的新范式。我们的方法完全无监督，即使在稀疏点云或非等距网格等具有挑战性的情况下，也能获得高质量的对应关系，而现有方法在这些情况下往往会失效。我们的首个关键观察是，与其他领域中观察到的神经先验一致，针对三维数据的最新网络架构即使未经训练，也倾向于生成逐点特征，从而在刚性或非刚性形状之间形成合理的映射。其次，我们表明，给定一份作为输入的噪声映射，以该输入映射作为监督来训练特征提取网络，往往可以去除输入中的伪影，并发挥强大的对应关系去噪作用，无论是针对单独的形状对，还是整个集合。基于这些观察，我们提出一种用于形状匹配的两阶段无监督范式：(i) 通过调整现有方法进行无监督训练，以获得一组初始噪声匹配；(ii) 使用这些匹配以有监督的方式训练网络。我们证明，这种方法能显著提高映射的准确性，尤其是在集合内进行训练时。我们还表明，NCP 具备数据效率高、速度快的优点，并在许多任务上取得最先进的结果。我们的代码可在以下网址获取：
https://github.com/pvnieo/NCP。

1 引言

在三维形状之间建立稠密对应关系，是计算机视觉和计算机图形学中的一项基础问题，因为它能够支持许多下游应用，例如统计形状分析[1, 2], 纹理 [3] 和变形迁移 [4, 5], 以及配准 [6], 等等。

这项任务中一个特别具有挑战性的情形，是计算经历非刚性、非等距变形的三维形状之间的对应关系；这些形状还可能存在部分缺失，例如缺少某些语义部件，并且可以表示为稀疏点云。

标准方法是将形状对应建模为一个监督学习问题，依靠大型形状对数据集中的真实映射。在给定此类真实标注的情况下，可以训练神经网络来生成变形场 [7], 分割映射[8, 9, 10] ，或生成输入形状 [11, 12, 13] 之间的函数映射。然而，所有此类方法都依赖带标签的点对点对应关系，而这类对应关系获取成本高，且仅在少数情况下可用。

与此同时，无监督技术试图通过在映射上施加结构属性来解决匹配问题，这些结构属性位于内在 [14, 15, 16] 或外在域 [17, 18]中。然而，这些方法所采用的先验往往纯粹基于几何（例如，促进近似等距或无散变形场），正如我们将在下文展示的那样，它们并不总是适用，尤其是在具有挑战性的非等距场景中。

第36届神经信息处理系统大会（NeurIPS 2022）。

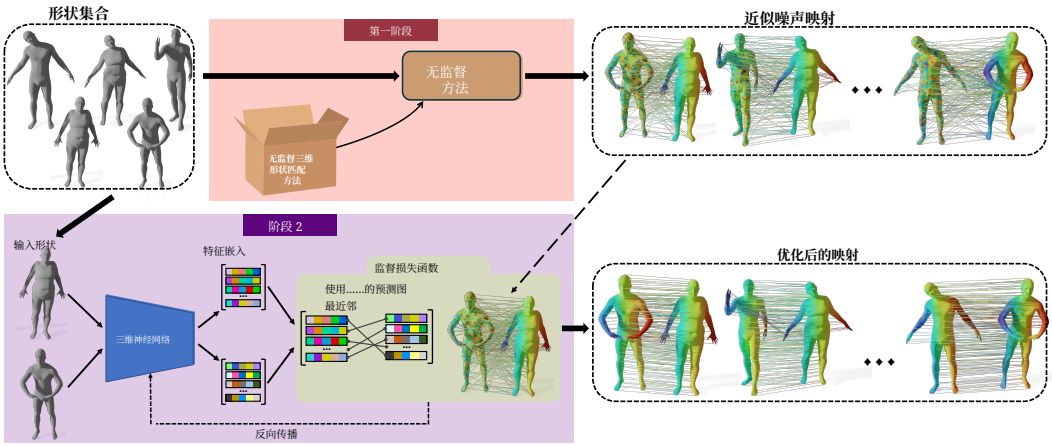

图 1：我们提出了 **NCP-UN**，这是一种无监督形状匹配方法，即使面对具有挑战性的情况，例如非等距非刚性形状或稀疏点云，也适用。我们的方法由两个阶段组成（详见算法 1）。具体而言，给定一组形状，我们使用一种现有的无监督方法来获取一组初始映射，这些映射可能只是近似结果且噪声很大。随后，这些映射被用作 监督信号，用于阶段 2 中基于学习的形状匹配方法。值得注意的是，我们证明了最终得到的映射质量优于训练所用的映射。

在本文中，我们证明了神经网络本身可以作为形状对应问题的强大先验。为此，我们首先观察到，即使不进行训练，用于三维形状分析的最新架构 [19, 20, 21] 也能生成捕捉局部几何的逐点特征，并在形状之间产生结构良好的映射。其次，也许更为重要的是，我们展示了一种称为 神经对应先验的效应。具体而言，给定带噪声的输入映射，我们构造了一个监督学习问题，旨在学习逐点特征，使其在进行比较时能够恢复输入映射。值得注意的是，我们表明，经过训练的网络所计算出的对应关系通常比输入具有更高的质量。我们的结果与其他关于神经先验的研究中观察到的噪声阻抗概念一致，这些研究由 [22], 和神经偏置 [23]开创，并指出神经网络倾向于先优化低频信号，再优化高频信号。我们表明，在形状匹配的背景下，这些效应意味着神经网络可以通过训练，过拟合给定的带噪声或不一致的对应关系，从而学习到强大的特征。

基于这些观察，我们提出了一种用于无监督形状匹配的两阶段算法（见图 1）。在第一阶段，我们采用文献中的标准方法变体，对现有的无监督神经网络进行改进。随后，我们从头开始训练一个新的网络，以噪声映射作为真实标注进行有监督训练。我们证明，第二阶段不仅有助于去除映射中的噪声，还能全面提升匹配效果，并在多项任务上取得最先进的结果。我们还表明，神经对应先验 既适用于形状集合，也适用于单个形状对，可在测试时优化稠密输入映射。由于该方法不对形状的几何作任何假设，因此可用于非等距匹配等复杂情况。

总体而言，我们的贡献可总结如下：

- 我们证明，未经训练的三维形状神经网络能够生成与复杂公理化局部描述符相当的逐点特征。
- 我们表明，使用含伪影映射进行监督训练时，神经网络学习到的特征所产生的对应关系比输入更连贯、质量更高。我们将这一效应称为神经对应先验。
- 基于这些见解，我们提出了一种用于无监督三维非刚性形状匹配的两阶段算法，在非等距匹配和点云匹配等具有挑战性的场景中取得了最先进水平的结果。
- 我们提出了一种基于无监督点对点对应方法的小样本关键点检测方法。

2 相关工作

形状匹配是计算机视觉和图形学中一个研究充分的领域，全面综述超出了本文的讨论范围。我们建议感兴趣的读者参阅近期的综述 [24, 25, 26, 27] ，以深入了解这一领域。下文将回顾与我们工作最相关的方法，重点关注基于学习的技术，包括有监督和无监督方法。

三维非刚性形状对应关于学习非刚性形状对应关系的研究已有大量文献。就有监督方法而言，一个重要方向是将匹配问题视为密集语义分割问题，其中标签是某个模板形状上的顶点 [8, 9, 10], ，或通过模板变形进行映射 [7]。然而，众所周知，这些技术需要大量数据，并且在离散化发生变化时可能失效 [19, 11]。另一种方法是采用函数映射框架，该框架最初在 [28] 中提出，并在许多后续工作中得到扩展，例如 [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37] （综述请参见 [38] ）。函数映射（fmap）框架的核心思想是，在约化基中将映射编码为小型矩阵并进行优化。这种方法已成功应用于有监督场景，以建立完整和部分非刚性形状之间的对应关系 [11, 12, 13]。然而，该方法通常仅适用于较为干净的离散化之间的近等距匹配。fmap 框架也被用于无监督场景，具体做法包括对函数映射施加结构属性 [15, 39], 、强制循环一致性 [40], ，或结合内在属性与外在属性 [17, 18]。另一类工作则提出通过自编码器重建按规范顺序排列的输入形状，以实现无监督形状匹配 [41, 42, 43]。然而，这些方法需要大量形状和较长的训练时间，而且目前仅成功应用于不会发生显著非刚性变形的人造形状。

神经先验最早由 Ulyanov 等人在开创性工作中提出等人 [22],。作者提出了深度图像先验（DIP），并证明随机初始化的卷积神经网络可作为许多二维逆问题（如图像修复和去噪）的良好先验。此后，为了提升 DIP 的性能或使其适用于新任务，人们对其进行了多项修改和改进 [44, 45, 46, 47, 48], 。近期， [49]在二维关键点匹配任务中使用了未训练特征进行匹配。另一项研究 [50, 51] 则从正则化理论的角度或通过其与高斯过程的联系，对 DIP 进行了理论研究。尽管神经先验在二维计算机视觉中取得了成功，但它在三维领域鲜有应用，唯一的应用是形状重建。具体而言，[52, 53] 尝试从点云重建水密网格，方法包括将多个局部块过拟合到点云，或利用神经网络收缩输入网格。我们的工作旨在填补这一空白，并提出一种用于三维匹配的神经先验技术。

无监督关键点检测 与二维情况不同，文献中对无监督三维关键点检测的研究相对较少。近期推出的 KeyPointNet [58]基准测试提供了良好的测试平台。主流的无监督关键点检测方法基于自监督范式，使用编码器-解码器网络，并以重建误差为依据。Skeleton Merger [59] 的编码器预测一组显著关键点，解码器则利用这些关键点生成形状的骨架。UKPGAN [60] 利用生成对抗网络的强大能力来检测关键点，具体做法是强制解码器仅使用编码器生成的关键点集重建输入形状。最后，KeypointDeformer [61] 预测一组关键点，以实现高效的形状操控。具体而言，给定一个源形状和一个目标形状，利用源形状上的关键点通过笼式蒙皮变形器 [62]将其变形为目标形状。

3 动机与方法概述

我们的主要目标是开发一种基于无监督学习的形状对应方法，该方法以形状对 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 作为输入，并生成稠密对应关系，也称为映射，$T\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$。为此，我们探索神经先验这一方向，并展示如何将其用于三维形状匹配。这一方向背后的动机有两点。首先，与二维情况一样，[63, 46],我们希望未经训练的三维神经网络结构能够捕获单个三维形状的低层统计特征，从而支持使用单个形状对进行微调。其次，正如 DIP [22], 所展示的，深度神经网络具有较高的噪声阻抗，使其能够从带噪输入中学习良好的特征。在本例中，当尝试使用带噪的点对点（点对点映射）匹配关系进行监督时，这一特性可用于引导网络趋向良好的局部最小值。

方法	方法类型	FAUST	SCAPE
热核签名 [69] +最近邻	*Axiom*	26.8	28.6
波核签名 [70] + 最近邻	*Axiom*	24.8	26.0
SHOT [71] +最近邻	*Axiom*	37.7	38.4
DiffusionNet [19] +最近邻	*Rand.init*	17.8 ± 0.1	20.3 ± 0.3
BCICP [33]	*Axiom*	15.	16.
FMNet [13]	*Sup*	11.	17.
SURFMNet [15]	无监督	15.	12.
无监督 FMNet [14]	无监督	10.	16.
热核签名 + 函数映射	*Axiom*	20.2	26.9
波核签名 +函数映射	*Axiom*	20.1	27.1
SHOT + 函数映射	*Axiom*	19.8	20.0
DiffusionNet +函数映射	*Rand.init*	$\mathbf{8.9 \pm 0.02}$	$\mathbf{13.9 \pm 0.3}$

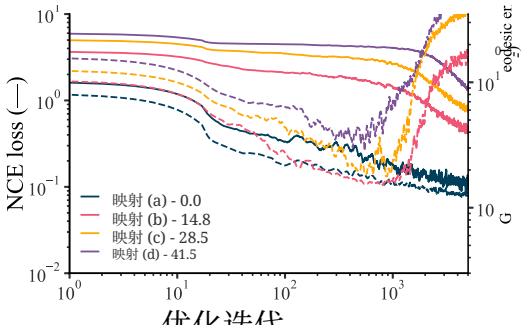

图 2：**NCP效应的动机**。左：在 FAUST 和 SCAPE 测试集上，DiffusionNet使用随机权重（三次随机运行的均值和标准差）的匹配准确率，与基线形状匹配方法进行比较。右：使用真实映射（映射 (a)）以及不同噪声水平的噪声映射（映射 (b)、(c) 和 (d)）作为监督时，训练 NCE 损失和测地误差在优化过程中的变化。图例报告了输入映射的测地误差。注意中间映射的噪声阻抗和测地误差下降。

特征嵌入。 在本文中，我们通过学习逐点特征，为人造形状和有机形状构建形状匹配问题。这些特征可通过最近邻搜索或最少量的后处理来计算对应关系。具体而言，网络 N 以三维形状 $\mathcal{M}$ 作为输入，并为该形状的每个点 $x \in \mathcal{M}$生成一个特征向量 $N(\mathcal{M})_x \in \mathbb{R}^d$作为输出。将整个对象作为一个整体考虑时，我们将所有 $x \in \mathcal{M}$ 的集合$N(\mathcal{M})_x$ 称为形状 $\mathcal{M}$的特征嵌入 。

我们的方法基于两个主要观察：未训练网络的神经偏置，以及一种我们称为神经对应先验的效应。下面我们将分别介绍这两种效应，然后在第4.1节介绍我们的无监督形状匹配方法。

3.1 点级特征的神经偏置

我们的第一个观察是，神经网络生成的特征嵌入具有一种特定结构，可用于计算形状对应任务中的特征。为突出这一点，我们考察了FAUST-Remeshed（SCAPE-Remeshed（ [33], 中介绍并 [11, 17, 39], 在许多近期研究中使用的 [19] 数据集的测试集，并使用权重随机设置的 DiffusionNet 网络提取逐点特征来计算对应关系。我们采用 DiffusionNet 的默认变体，以形状的 XYZ 坐标作为输入，并为每个点生成一个 128 维特征向量。需要强调的是，网络权重是随机设置的，且未经任何训练。随后，我们使用提取的特征，通过在特征空间中进行简单的最近邻（NN）搜索，或借助函数映射框架 [64] （FMAP），生成点对点映射。我们将结果与使用经典公理特征（如 SHOT） [65], 或其他基于公理和训练的非刚性对应方法, 通过相同流程生成的映射进行比较。

如图 2-左所示，令人惊讶的是，未经训练的 DiffusionNet 网络所生成的特征，表现与公理特征相当甚至更优，甚至胜过了有监督的 学习方法 FMNet [66], 。FMNet 通过训练多层感知机来优化预定义的 SHOT 特征。我们认为，随机初始化的 DiffusionNet 表现优于经过训练的 逐点多层感知机，是因为该网络架构具有空间感知能力，它利用扩散模拟内蕴卷积，从而提供了强大的神经先验 [67, 68, 53]。

3.2 NCP：神经对应先验

虽然前述效应与未训练网络的属性有关，但在本文中，我们还观察到另一种互补现象，并将其称为神经对应先验，我们将在下文的方法中加以利用。该效应可以表述如下。假设给定某些形状 $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$之间的固定映射 $T_{\mathcal{MN}}$。我们可以构建一个优化问题，旨在学习 $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$的特征嵌入，使得所诱导的映射（例如，通过特征空间中的最近邻计算得到的映射）：即 $x \to \arg\min_y \|N(\mathcal{M})_x - N(\mathcal{N})_y\|$，尽可能接近 $T_{\mathcal{MN}}$。请注意，与上一节提到的神经偏置不同，这里我们构建了一个优化问题，其中网络 N 的参数经过优化，以拟合给定的输入

映射。我们的关键观察是，当目标映射 $T_{\mathcal{MN}}$ 存在噪声或仅为近似映射时，网络往往会在优化的最后阶段之前生成结构良好的特征嵌入。也就是说，在训练的早期阶段，优化后的特征所计算出的映射往往比用于监督的输入噪声映射具有更高的准确性。

为了定量展示 NCP 的效果，我们在 FAUST 数据集的一对形状之间，对真实映射进行扰动，然后使用梯度下降优化器和标准 NCE 损失训练 Diffu- sionNet 网络 [72]，使其过拟合这些受扰动的映射。具体而言，我们使用以下映射监督训练：（a）形状间的真实标注（GT）映射；（b）其中 25% 的条目被随机顶点替换的 GT 映射；（c）含有 50% 噪声的 GT 映射；（d）含有 75% 噪声的 GT 映射。实验结果如图 2右图所示。我们绘制了正在优化的 NCE 损失，以及中间映射相对于真实映射的 测地误差 。

如图 2右图所示，尽管网络能够轻松适应正确映射，但在噪声映射的情况下却难以最小化损失。此外，或许更值得注意的是，测地误差在优化的前几次迭代中开始下降，低于输入映射的误差，而仅在后期阶段才开始增大，此时网络开始对训练映射中的噪声过拟合。这表明，使用神经网络进行此类优化并采用提前停止，可以作为一种有效的映射去噪机制（第4.2节）。值得一提的是，这种效果与形状对无关；不同形状对的其他示例见第 5.1.2节及补充材料。

我们发现，这种效应在形状对应问题中普遍存在。对于带有噪声输入映射的单个形状对，只要参数化方式和训练迭代次数足够，网络最终可以学会任意映射。然而，网络架构会对映射搜索空间施加强正则化，对“信号”的阻力较低、对“噪声”的阻力较高，因此优化轨迹要么收敛到一个良好的局部极小值，要么经过其附近 [22]。此外，在存在形状集合时，这种效应会更强；正如下文所示，它有助于显著正则化计算出的特征，因此无需提前停止，也无需对结果进行后处理（详见算法1，我们将在第4.1节详细说明）。

除了网络架构本身，我们还将神经对应先验归因于谱偏置原理 [23, 73],，该原理指出，神经网络在训练初期倾向于学习低频成分，而且低频成分对网络参数的随机扰动更具鲁棒性。由于我们将形状匹配表述为计算最优特征的问题，在我们的语境下，谱偏置意味着，即使输入的是含噪声或含伪影的映射，经过优化的神经网络所生成的特征嵌入也倾向于保持平滑，尤其是在优化的早期阶段。换言之，与平滑的特征嵌入相比，网络更难生成含噪声的高频特征嵌入。此外，平滑的特征嵌入往往会产生形状之间平滑的对应关系，正如下述定理所示；我们在此陈述该定理，并在补充材料中给出证明。

定理 *1.* 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是两个紧致光滑曲面（维数为 *2* 的光滑流形）。设 M 和 N 是它们在 $\mathbb{R}^d$ 中的特征嵌入，由某些函数给出：$\psi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^d$ 和 $\phi : \mathcal{N} \to \mathbb{R}^d$，使得 $M = \psi(\mathcal{M})$，且 $N = \phi(\mathcal{N})$。例如，ψ 和 ϕ 可以由某个神经网络给出。假设 ψ 和 ϕ 都是光滑且单射的。那么，在对 ϕ、ψ 进行任意小的扰动后，由 $T_{nn}(x) = \arg\min_{y \in \mathcal{N}} \|\psi(x) - \phi(y)\|$ 给出的映射 $T_{nn} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 必须在 $\mathcal{M}$ 上除去测度为 *0* 的集合后光滑。

这一结果表明，通常情况下，平滑特征嵌入会转化为平滑映射；在大多数典型的对应场景中，这是一种理想的性质。

4 方法描述

基于上述观察，本节将介绍 NCP 可应用的场景，并由此得到两种算法：一种用于无监督形状匹配，另一种用于点对点映射去噪。

4.1 形状集合中的 NCP

给定一组形状 $\{\mathcal{N}_i\}$，我们提出以两种方式利用 NCP。第一种配置假设我们还获得了一组含伪影映射 $\{T_j\}$，这些映射对应于

算法 1： NCP-UN：基于**神**经**对**应**先**验的**无监**督形状匹配

输入： 形状集合 $\{\mathcal{N}_i\}$

输出： 测试集 $\{\mathcal{N}_i\}$中形状之间的点对点映射

阶段 1 { 1：在2 上的点对点映射 $\{\mathcal{N}_i\}$

2 的训练集上训练一种现成无监督匹配方法UM 的变体：使用经过训练的UM预测 $\{T_i\}$ 训练集

5：使用 $\{\mathbf{RN}(\mathcal{N}_i)\}$ 通过最近邻或函数映射

阶段 2 3：使用 $\{T_i\}$ 监督随机初始化的神经网络RN训练，并采用点对点损失 4：使用经过训练的**RN**在 $\{\mathcal{N}_i\}$ 的测试集上预测特征嵌入 $\{\mathbf{RN}(\mathcal{N}_i)\}$

流程建立对应关系。

$\{\mathcal{N}_i\}$ 作为输入。在这种情况下，我们提出训练一个神经网络，为每个形状生成特征嵌入，使得由此得到的映射尽可能接近目标映射 $\{T_j\}$。我们会根据底层形状的性质，在下文第5 节中给出损失函数的具体选择。

在第二种配置中，不将映射作为输入。在这种情况下，我们提出一种两阶段流程：第一阶段，我们调整现有的无监督对应方法，以获得可能近似且噪声很大的初始对应关系。随后，我们构建一个监督学习问题，学习能够将这些计算得到的对应关系作为目标的特征嵌入。网络训练完成后，我们通过在特征空间中进行简单的最近邻搜索来建立最终对应关系。请注意，训练好的网络既可用于建立给定形状集合内形状之间的对应关系，也可用于建立从未见过的新形状对之间的对应关系。在下面的评估中，除非另有说明，我们始终在训练期间从未见过的测试集上进行评估。我们将由此得到的算法命名为**NCP-UN**，并在算法1 和图1中对其进行了概述。这是我们大多数实验中使用的算法。

我们认为，在整个形状集合上同时执行阶段 2，而不是针对每个形状对分别执行，主要有两个优势：首先，这样速度更快，且无需进行测试时优化（见第 4.2 节）；其次，形状集合还提供了额外一层正则化。事实上，由于我们针对每个形状优化特征，因此很难计算出能够过拟合于集合中所有 $O(N^2)$ 个形状的噪声映射 N，因为不同形状对中的伪影通常并不一致。我们发现，对于形状集合，抗噪性更强，生成的映射也优于逐对进行细化的结果。

算法 1 阶段 2 的直觉依据 阶段 2 的直觉依据有三点。首先，受第 3.2 节（NCP 效应）结果的启发，我们证明神经网络往往难以对受损输入过拟合，并倾向于生成平滑输出。因此，在神经网络拟合近似映射的过程中，输出映射的质量往往**更好**。这促使我们将含伪影映射用作网络的监督信号，从而利用 NCP 效应恢复更好的对应关系。其次，如上所述，给定一组近似映射，它们的误差往往彼此不一致；使用这些映射监督网络训练会增加一层正则化，因为网络难以同时适应所有形状对上的各种不一致误差。最后，在阶段 2 的设定中，我们为每个形状学习一个特征嵌入，并通过特征嵌入之间的最近邻搜索计算对应关系。这同样带来了强正则化，因为网络难以学习出一种能够重现所有形状对之间映射误差的特征嵌入。

对于我们的应用（见第5节），我们采用了以下设计选择。对于 **UM** 方法，我们使用了无监督函数映射方法 [15, 39], , 其骨干网络针对三维网格采用 [19] DiffusionNet，针对点云采用 Point-MLP [74]。同一骨干网络也被用作算法**1**第 3 步中的 RN。关于第 3 步中的点对点损失，我们针对三维网格和点云使用了 LIE 损失 [75] 。我们还采用了该方法的一个变体，称为 NCP-UN^{fmap}，它在算法 [11] 1的第 3 步和第 5 步中使用了 FMAP 框架及其损失，尤其适用于有机形状，因为在这类形状上，拉普拉斯基往往具有较高质量。

我们想强调，关于 NCP 的观察结果与损失和网络架构的选择无关。补充材料中展示了 NCP 的普适性，并提供了更多实现细节。在所有情况下，与初始输入映射相比，使用 NCP-UN 流程的第二阶段（监督学习）都能显著改善结果。

最后，我们想强调，阶段 2 可以重复执行多次。我们观察到，在某些情况下结果略有改善，但大多数情况下，在第一次迭代后便趋于停滞。我们对此进行了实验，并选择保留简单的方法，只使用一次迭代，从而避免引入额外的可调超参数。

4.2 测试时去噪

除了前文所述的设置外，我们还发现，给定单个形状对时，NCP 也可用于对对应关系进行去噪。具体而言，给定一个带噪初始映射，我们训练神经网络来生成能够导出给定输入映射的特征嵌入，并将该输入映射用作监督。同样，我们会根据形状的特性选择合适的损失，并在第 5.1.2 节介绍一种方案。

在缺少形状集合时，测试时去噪可能很有优势。同时，如 DIP 原始论文 [22],所述，对于单个形状对，必须使用提前停止，以便在最佳局部极小值处停止训练。对于形状匹配任务，我们使用循环损失作为停止准则。给定一对形状 $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$以及它们之间的两个映射 $\Pi_{\mathcal{MN}}$和 $\Pi_{\mathcal{NM}}$，这两个映射通过优化后的特征之间的最近邻搜索计算得到，并表示为软二值矩阵（计算细节见附录 A），我们计算 $L_{cycle} = \|X_{\mathcal{N}} - \Pi_{\mathcal{NM}}\Pi_{\mathcal{MN}}X_{\mathcal{N}}\|_F^2$，其中 $X_{\mathcal{N}}$是形状 $\mathcal{N}$的 XYZ 坐标矩阵。我们对网络进行若干次迭代的过拟合训练，并在 L_{cycle} 经过预先设定的耐心期后不再改善时停止训练。使用使 L_{cycle} 达到最小值的权重来计算特征嵌入，然后通过最近邻搜索计算点对点映射。

4.3 将对应关系用作下游任务的工具

得到计算出的对应关系后，我们还利用它们来解决多个下游任务。事实上，由于我们提出的算法是无监督的，因此可以使用其输出，即点对点映射，在不同形状之间传递多种属性，例如关键点。为此，我们只需要少量带有待传递属性标注的示例，由此得到一种小样本算法。

接下来，我们介绍一种小样本关键点检测方法，以下简称**FSKD**，该方法基于我们的无监督算法**NCP-UN**得到的点对点映射。在这种设置下，一个特殊的挑战是，某些关键点和部件只出现在部分形状上，而不会出现在其他形状上；因此，为了涵盖这些形状上出现的关键点，必须使用多个已标注源形状。

我们首先通过随机选择能够覆盖最多关键点的 N 个形状来开展**FSKD**。这些N 个形状将进行标注，并将其关键点传递到测试集中的形状上，以便“发现”这些形状的关键点。

给定一个目标形状，**FSKD** 由三个步骤组成：**1.** 通过从带标注形状迁移关键点，检测潜在关键点；**2.** 过滤掉可能不存在于目标形状上的关键点；**3.** 组合：如果目标形状上的多个点被分配到同一个关键点 ID，则合并迁移来的关键点。我们在补充材料中提供了这三个步骤的实现细节（见附录 C）。

5 结果与应用

本节展示了我们的方法在多种具有挑战性的任务中的结果，以说明其对不同类型数据和任务的效率与稳健性。具体而言，我们研究了第5.1.1节中的人造形状之间的形状对应、第5.1.2节中的非刚性形状对应、第5.2节中的部件分割，以及第5.3节中的小样本关键点检测。由于我们的模型不依赖几何先验，因此能够在不同类型的数据上取得良好结果，包括等距和非等距数据、有机形状数据以及人造数据。

数据集 我们在四个不同的数据集上进行了实验。据我们所知，目前没有提供稠密点对点真实对应关系的点云数据集。为此，我们遵循 [41], 的设置，并使用 KeyPointNet 数据集 [58] 进行第 5.1.1 节中的人工形状对应实验。我们还在第 5.3 节的小样本关键点检测实验中使用该数据集。
KEYPOINTNET 由 8K 多个模型和 100K 个由专业人员标注的语义关键点组成。我们采用与原论文相同的训练/验证/测试划分 [58]。在第5.2 节的部件分割实验中，我们使用 PARTNET 数据集 [76],

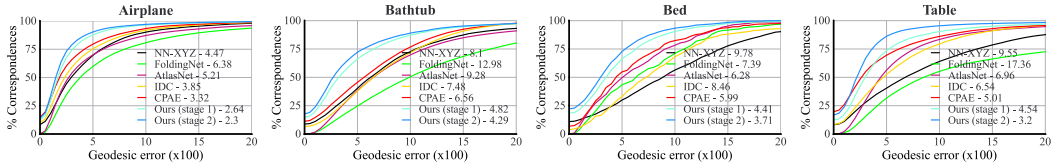

图 3：KEYPOINTNET数据集中 4 个类别的对应关系准确率。

whi该数据集由 16 个类别的 16881 个形状组成，每个类别的数量各不相同 f parts 的取值范围为 2 到 6。

对于三维网格，我们在第 MAL [77, 36] 数据集和 HREC'20 非等距基准测试 [78] 中使用有机形状、非等距非刚性数据进行第 5.1.2 节所述的非刚性对应关系实验，因为这些都是具有挑战性的 非等距 数据集。前一个数据集由 50 个以三维网格表示的动物形状组成，其中 25 个形状用于训练，其余 25 个用于测试。值得注意的是，训练中出现的动物种类和姿态与测试中使用的不同。SHREC'20 基准测试由 14 个不同动物的扫描数据组成，其中一些包含孔洞和拓扑变形。此外，由于真实映射以稀疏标注关键点的形式给出，因此大多数有监督方法都无法应用。

5.1 三维形状对应

5.1.1 点云上的对应关系

我们使用 KEYPOINT-NET 数据集，在稀疏点云上测试 NCP-UN 生成的匹配关系的质量。我们使用无监督函数映射方法训练方法的第一阶段[15, 39], , 采用 PointMLP 作为骨干网络 [79] , 并以 XYZ 坐标作为输入，同时对函数映射施加双射损失。第二阶段使用 LIE 损失进行训练，并通过特征空间中的最近邻提取映射。测试时，我们遵循 [41], 的相同设置，在给定类别的所有点云之间生成形状对，并移除不共享同一组语义关键点的形状对。我们计算转移后的关键点与真实标注关键点之间的 L2 距离。我们将方法与最先进的、基于学习的三维稠密对应预测方法进行比较，包括 AtlasNetV2 [80], FoldingNet [81], IDC [43], CPAE[41],, 此外还与基于点的 XYZ 坐标的最近邻基线进行比较。事实证明，该基线具有竞争力，但以往方法未曾考虑过。

在图 3中，我们报告了 4 个类别中，预测映射与真实映射之间的距离低于给定阈值的测试样本对所占百分比，其余类别的结果则见补充材料。我们的方法在 16 个类别中的 13 个类别上优于所有其他方法。值得注意的是，尽管第一阶段所用的方法并非专为点云设计（拉普拉斯算子的质量不佳，且所用的双射损失较弱），我们的方法仍取得了最先进水平的结果。我们认为，第一阶段若采用更适配的方法，结果还会进一步提升。

5.1.2 非刚性网格之间的对应关系

对于非刚性非等距应用，我们基于 [19] 训练无监督函数映射网络，并在第二阶段使用 LIE 损失（算法 1 中的第 3 步）。通过特征嵌入之间的最近邻获得点对点映射。由于 SHREC'20 数据集规模有限（仅有 14 个形状），我们遵循先前工作 [82] , 在同一数据集上进行训练和测试；而对于 SMAL，训练集与测试集则不同。为进行公平评估，我们将本方法与多种最先进的有监督和无监督方法进行了比较。有监督方法包括 FMNet [13], 、GeomFMaps [11], 、GeomFMaps +、DiffusionNet [19] 和 LIE [75]。无监督方法方面，我们将本方法与 WSupFMNet [39], 、Smooth Shells [18], 、Deep Shells [17],、NeuroMorph [82] 以及 WSupFMNet + 、DiffusionNet [19]进行了比较。

如图所示 4，我们的方法在无监督方法和有监督方法中取得了最先进的结果（我们遵循标准的普林斯顿协议 [83] 进行评估）。大多数无监督方法和有监督方法都因其所采用的近等距假设而失效。由于我们的方法不对形状的拓扑作任何假设，因此在非等距动物等困难场景中也能表现出色。值得注意的是，如果没有我们算法的第二阶段（由 NCP 实现），这些结果便不可能实现。例如，对于

	方法	SMAL
无监督	WSupFMNet [39]	13.3
	Smooth Shells [18]	16.3
	DeepShells [17]	15.2
	NeuroMorph [82]	23.1
	我们的方法（第一阶段）	7.8
Sup	FMNet [13]	47.1
	GeomFMaps [11]	8.8
	GeomFMaps +DiffusionNet [19]	6.6
	LIE [75]	20.0
无监督	我们的方法（第二阶段）	6.0
	我们的方法（阶段2 + 函数映射）	**5.8**
	我们的方法（测试时优化）	6.4

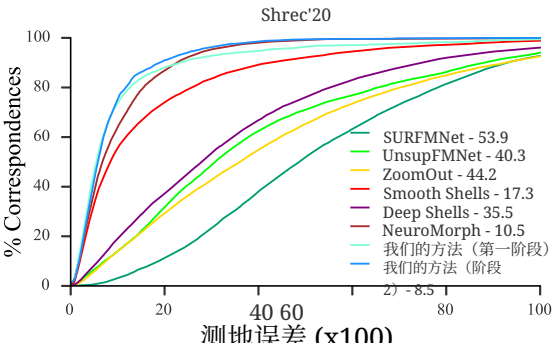

图 4：**非等距匹配结果**。左：SMAL 测试集上的匹配准确率。数值为 ×100 单位面积形状上的平均测地误差。右：SHREC'20 非等距数据集测试集上不同方法的对应关系质量。

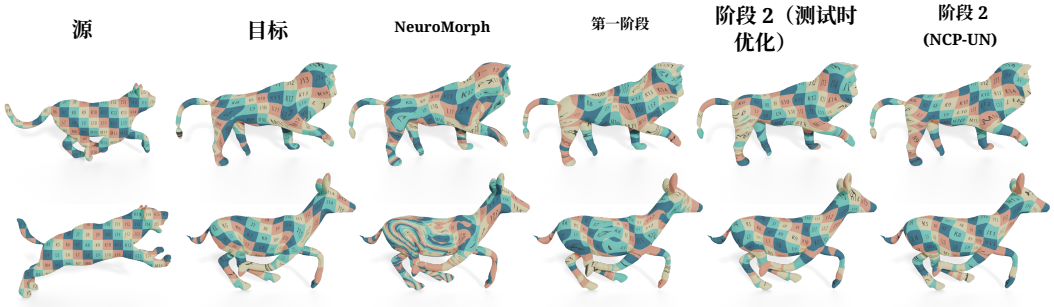

图 5：**SMAL 数据集**上的定性结果，展示了第一阶段生成并由阶段 2 优化的映射，可通过测试时优化（见第 4.2 节）或使用 NCP-UN（见算法 1）

the SMAL 数据集上，第一阶段的结果为**7.8**，第二阶段将结果提升至**5**。 **8**, whi这是提升了**25%** 的表现，达到了最先进的结果。

我们在图5 中展示了一些定性结果，说明了我们的算法在 SMAL 数据集上的表现，并与最先进的 NeuroMorph 方法进行了比较。可以看出，我们的方法生成了视觉上合理的映射，尤其是在应用第二阶段之后。

测试时优化 为了展示测试时优化的作用，以及我们提出的早停准则，我们进行了以下实验。在完成算法第一阶段的训练后，我们使用训练好的模型在 SMAL 数据集的测试集上预测点对点映射。随后构造形状对，并使用我们的测试时优化方法（见第 4.2节）改进第一阶段生成的映射。结果见图4左侧，参见“Ours (Test-Time Optimization)”行。可以看出，与前一种情况类似，在含伪影映射上训练一个随机网络有助于对其进行去噪。我们还在图 5 中展示了一些定性结果，以说明测试时优化的效果，并将其与 NCP-UN 进行比较。

这项实验的结果证实了我们的假设：在整个数据集上而非单独的配对上执行第二阶段，可以提供第二层正则化，因为结果更好，同时也提高了计算效率。事实上，在整个数据集上执行第二阶段大约需要**15 分钟**，而在每一对数据上单独执行则大约需要**160 分钟**，运行时间因此缩短了超过 10×。

5.2 部件分割迁移

我们进一步按照 [41] 的设置，在 PARTNET 数据集上验证了我们的方法在部件标签迁移任务上的效果。结果汇总于表1，其中报告了平均交并比（IOU）。我们的方法在 16 个类别中的 14 个类别上优于基线方法，平均交并比领先超过 3%，达到了最先进的结果。对于灯具这类类别内差异较大的类别，我们的方法平均交并比最高可比基线方法高出 8 个百分点。除了性能出色之外，我们的方法速度也极快。事实上，训练我们方法的两个阶段平均耗时

表1：**部件标签迁移**（平均交并比（%）），涵盖PARTNET数据集中的16个类别。

	pla.	*bag*	*cap*	*car*	*cha.*	*ear.*	*gui.*	*kni.*	*lam.*	*lap.*	*bik.*	*mug.*	*pis.*	*roc.*	*ska.*	*tab.*	*avg.*
IDC [43]	60.1	56.2	59.7	-	72.2	45.3	**81.5**	66.4	42.6	88.5	40.5	87.5	**66.4**	37.2	50.7	70.4	61.7
CPAE [41]	61.3	59.3	61.6	-	72.6	55.5	78.9	71.3	53.2	89.9	55.4	86.5	66.2	40.2	61.8	72.5	65.8
Ours	**63.7**	**66.7**	**68.7**	**57.4**	**80.2**	**59**	78.8	**72.5**	**61.9**	**91.4**	**57.2**	**89.5**	61.4	**44.2**	**63.6**	**79.2**	**69.2**

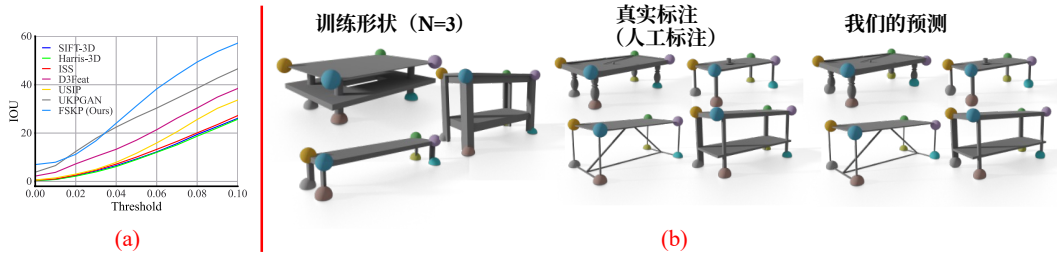

图6：**小样本关键点检测结果**。**(a)** 仅使用 3 个已标注样例时，我们的简单小样本关键点检测算法在 KEYPOINTNET 上的平均交并比结果。我们简单的方法取得了良好结果，表现与近期的关键点检测方法相当或更优。**(b)** 桌子类别的定性结果，展示了用于训练的形状（N=3，左）、测试集上的人工标注（中）以及我们对四个样例的预测结果（右）。

1 ho小时（计算规格见附录B），相比之下效率更高 n
to t这些基线方法中，例如 CPAE 在一个类别上的训练约需 24 小时。

5.3 小样本 3D 关键点检测

我们在 KFSKD 上评估了我们的小样本关键点检测算法EYPOINTNET 数据集，遵循 [60], 中的设置，并且仅使用*3* 个已标注源形状（因此得到的算法是一种三样本关键点检测算法）。此任务的目标是预测与人工标注相关的关键点。性能通过平均交并比（mIoU）进行评估。如果预测关键点与其最近的真实标注关键点之间的测地距离小于某个测地阈值，则计为交集。并集则是检测到的关键点与真实标注关键点的并集。

我们将 **FSKD** 与多种基线方法进行比较，包括 SIFT-3D [84],HARRIS-3D [85], ISS [86],D3Feat [87], USIP [88] 和 UKPGAN [60]。结果汇总于图 6 左图中。可以看出，我们简单的基于对应关系的方法优于专门针对该任务设计的基线方法。特别是，仅使用 三**个**带标注形状时，我们的方法在阈值高于 0.035 的情况下取得了最先进的结果。图 6 右图展示了一些定性结果。

6 结论与局限性

在这项工作中，我们展示了，将噪声映射作为三维形状匹配任务的神经网络训练信号，可以获得质量显著更高的对应关系。我们将这一现象命名为神经对应先验（NCP）。通过大量实验，我们深入揭示了 NCP 的特性，并开发了一种用于无监督三维形状匹配的两阶段算法。我们在一系列形状匹配问题上验证了该算法的有效性和通用性，包括对人造和有机非刚性形状进行无监督形状匹配，并在广泛的基准测试中取得了最先进的结果。

我们方法的一项局限是，假设用于训练算法第二阶段的点对点映射仍具有一定结构。事实上，如果第一阶段使用的无监督方法彻底失效，产生随机映射，我们的方法将无法收敛。采用针对具体应用的优质无监督方法来完成第一阶段，可以缓解这一问题；尤其是近年来人们对无监督三维学习方法的兴趣日益浓厚，相关方法也不断增多。

致谢 作者谨向 Frédéric Chazal 和 Mathijs Wintraecken 致谢，感谢他们围绕定理 1 展开的诸多有益讨论。我们也感谢匿名审稿人提出的宝贵建议。本研究的部分工作由 ERC Starting Grant 第 758800 号（EXPROTEA）和法国国家研究署人工智能讲席 AIGRETTE 资助。

补充材料：NCP：用于有效无监督形状匹配的神经对应先验

Souhaib Attaiki
LIX，巴黎综合理工学院，巴黎理工学院 attaiki@lix.polytechnique.fr

Maks Ovsjanikov
LIX，巴黎综合理工学院（巴黎理工学院），maks@lix.polytechnique.fr

本文档汇集了所有因篇幅限制而未能收录于主文稿中的结果与讨论。

具体而言，我们首先在附录 A 中介绍函数映射的背景知识。接下来，附录B 将介绍实现细节。我们在附录 C 中介绍少样本关键点检测算法的实现细节。在附录 D 中，我们给出主文中第3.2节所述定理的完整表述及证明。在附录 E 中，我们通过实验验证上述定理的条件。我们在附录 F 中对神经对应先验（NCP）的作用进行更深入的分析。附录 G 收录了形状匹配在人造数据任务上的更多定量和定性结果。附录 H 展示了我们的方法在近似等距数据上的表现。最后，我们在附录 I 中讨论本研究的社会影响。

函数映射背景与符号说明

我们的工作采用函数映射框架作为点对点映射的初步估计器，并通过多个点对点（p2p）映射损失来学习鲁棒特征，从而能够利用特征空间中的最近邻提取良好的对应关系。我们将在下一节中简要概述。

函数映射 我们的 NCP-UN 算法第一阶段采用了函数映射（fmap）框架。为此，我们遵循近期基于 fmap 的技术 [11, 12,39, 15, 19], 所采用的通用策略：给定源形状和目标形状 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$，它们表示为三角网格或点云，分别具有 m 和 n 个顶点；我们预先计算其拉普拉斯-贝尔特拉米算子 [89], , 并分别将前 k 个特征函数存储在矩阵 $\Phi_{\mathcal{M}} \in \mathbb{R}^{m\times k}$ 和 $\Phi_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^{n\times k}$ 中。利用孪生网络 $\mathcal{F}_\theta$，我们为每个形状计算一个 d维描述子 $\mathcal{F}_\theta(\mathcal{M}) = \mathrm{F} \in \mathbb{R}^{m\times d}$ 和 $\mathcal{F}_\theta(\mathcal{N}) = \mathrm{G} \in \mathbb{R}^{n\times d}$。随后将这些描述子投影到谱域，得到谱特征 $\mathrm{A} = \Phi_{\mathcal{M}}^{\dagger}\mathrm{F}$ 和 $\mathrm{B} = \Phi_{\mathcal{N}}^{\dagger}\mathrm{G}$（$\bullet^{\dagger}$ 为摩尔-彭若斯伪逆）。然后通过求解以下线性系统来计算函数映射：

$$C_{opt} = \arg\min_{C} \|C\mathbf{A} - \mathbf{B}\| + \lambda\|C\Delta_{\mathcal{M}} - \Delta_{\mathcal{N}}C\|. \tag{1}$$

其中，$\Delta_{\mathcal{M}}$，$\Delta_{\mathcal{N}}$是对应形状的拉普拉斯-贝尔特拉米特征值对角矩阵，λ 是一个标量超参数。

遵循无监督学习文献 [15, 39, 19], ，通过对训练集中的形状对施加函数映射 C 的结构属性（如双射性和正交性），来训练孪生网络 $\mathcal{F}_\theta$。具体而言，给定从 $\mathcal{M}$到 $\mathcal{N}$的函数映射 $C_{\mathcal{MN}}$，以及从 $\mathcal{N}$到 $\mathcal{M}$的函数映射 $C_{\mathcal{NM}}$，双射损失定义为 $\|C_{\mathcal{MN}}C_{\mathcal{NM}} - \mathbb{I}_k\|_2^2$，正交性损失为 $\|C_{\mathcal{MN}}^{\top}C_{\mathcal{MN}} - \mathbb{I}_k\|_2^2$。 $\mathbb{I}_k$表示大小为 k 的单位矩阵，$\bullet^{\top}$ 为矩阵转置算子。

特征学习 特征学习的目标是学习稳健的描述子，从而能够在描述子空间中直接进行最近邻匹配。在本工作中，我们使用两种损失函数：PointInfoNCE 和 LIE 损失。

PointInfoNCE [72] 是一种对比损失，给定一组匹配点 $\mathcal{P}$以及两个维度为 s的特征，其定义如下：

$$\mathcal{L}_{\text{NCE}} = -\sum_{(i,j)\in\mathcal{P}} \log \frac{\exp(d(\mathbf{F}_i, \mathbf{G}_j)/\tau)}{\sum_{(\cdot,k)\in\mathcal{P}} \exp(d(\mathbf{F}_i, \mathbf{G}_k)/\tau)} \tag{2}$$

$$d(\mathbf{F}_i, \mathbf{G}_j) = \|\mathbf{F}_i - \mathbf{G}_j\|_2^2 \tag{3}$$

其中， τ是温度参数， $d(\cdot,\ \cdot)$是两个特征之间的欧几里得距离。在所有实验中，我们取 $\tau = 0.07$。该损失旨在最小化匹配点特征之间的距离，同时最大化未匹配点特征之间的距离。NCE 损失逐点应用，因此无法惩罚匹配关系的整体一致性。

为了解决这一问题，尤其是在形状的顶点数适中时（稀疏点云便属于这种情况），我们采用了 [75]中提出的 LIE 损失。给定提取的特征$\mathbf{F}$ 和$\mathbf{G}$，以及由矩阵$\mathbf{N}\ \in \mathbb{R}^{n\times 3}$表示的形状 $\mathcal{N}$ 的坐标xyz，我们首先计算软对应矩阵 $S_{\mathcal{MN}}$，然后将 LIE 损失定义如下：

$$\mathcal{L}_{\text{LIE}} = \|S_{\mathcal{MN}}\mathbf{N} - \Pi^{gt}_{\mathcal{MN}}\mathbf{N}\|_2^2, \tag{4}$$

$$(S_{\mathcal{MN}})_{ij} = \frac{\exp(-\|\mathbf{F}_i - \mathbf{G}_j\|_2)}{\sum_{k=1}^{n} \exp(-\|\mathbf{F}_i - \mathbf{G}_k\|_2} \tag{5}$$

其中， $\Pi^{gt}_{\mathcal{MN}}$是真实点对点对应矩阵。该损失通过约束软对应矩阵对形状坐标的作用（拉回），使其尽可能接近真实映射，从而将形状几何纳入考量。事实上，与真实标注在几何上接近的错误预测，相较于按照 L2 距离衡量时与其相距较远的预测，受到的惩罚更小。

B 实现细节

在正文第 3.1 节中，我们使用随机初始化的 DiffusionNet [19] 网络，在 FAUST-Remeshed（FAUST）和 SCAPE-Remeshed（SCAPE）数据集的 [33]测试集上预测特征。为此，我们使用了作者发布的公开版 DiffusionNet 实现 [1]。除非另有说明，我们在三维三角网格上的所有实验均使用 4 个宽度为 128 的 DiffusionNet 模块，网络的输入为形状的 XYZ 坐标。对于作为对比的特征，热核特征（HKS） [69] 和波核特征（WKS） [70]均在 100 个能量值 t 处采样，这些值在各自原始论文提出的范围内按对数间隔分布。SHOT 描述子 [65] 为 352 维，我们使用了 PCL 库提供的实现 [90]。对于拉普拉斯-贝尔特拉米算子计算，我们对三维网格和点云均使用了[89] 中提出的离散化方法。
在正文第3.2节中，我们使用 NCE 损失训练 DiffusionNet，使其生成能够诱导出用于监督的映射的特征嵌入。在此实验以及后续所有学习实验中，均使用 ADAM 优化器 [91]，学习率为 0.001。

在正文的第 5.1.1 节和第 5.2 节中，我们将 **NCP-UN** 算法应用于 KEYPOINTNET [58]和 PARTNET [76] 数据集。对于第一阶段，我们采用了 [19] 中的无监督几何函数映射，但使用 PointMLP [74] 作为特征提取器，而不是 DiffusionNet，因为它更适用于点云场景。我们使用了作者提供的默认分割配置 [2]。在式（1）中，我们取 $\lambda = 0$。网络使用附录 A中提出的双射损失，以及我们引入的一种基于倒角距离的新无监督损失进行训练。

[1] https://github.com/nmwsharp/diffusion-net[2] https://github.com/ma-xu/pointMLP-pytorch

具体而言，我们计算源形状的 XYZ 坐标与一个新版本形状之间的倒角距离。该新版本是将源形状的坐标映射到目标形状的谱空间中，再映射回去后得到的。形式上，使用与上文相同的符号说明，可写为：

$$\mathcal{M}_{source} = \Phi_{\mathcal{M}} \Phi_{\mathcal{M}}^{\dagger} \mathbf{M} \tag{6}$$

$$\mathcal{M}_{target} = \Phi_{\mathcal{M}} C_{\mathcal{NM}} C_{\mathcal{MN}} \Phi_{\mathcal{M}}^{\dagger} \mathbf{M} \tag{7}$$

$$L_{\text{chamfer}}(\mathcal{M}_{\text{source}}, \mathcal{M}_{\text{target}}) = \sum_{m \in \mathcal{M}_{\text{source}}} \min_{n \in \mathcal{M}_{\text{target}}} \|m - n\|_2 + \sum_{n \in \mathcal{M}_{\text{target}}} \min_{m \in \mathcal{M}_{\text{source}}} \|m - n\|_2 \tag{8}$$

在第二阶段，我们使用 LIE 损失，并训练了一个随机初始化的 PointMLP。它与第一阶段采用相同的架构，用于生成能够诱导输入映射的特征嵌入。
在正文第 5.1.2 节中，NCP-UN 应用于 SMAL [77, 36] 和 SHREC'20 [78]数据集。第一阶段采用无监督几何函数映射 [19]，以 DiffusionNet 作为骨干网络，同时使用双射性损失和正交性损失，如附录 A 中所述。在公式（1）中，对于 SMAL，我们设定 $\lambda = 10^{-3}$；对于 SHREC'20，则设定 $\lambda = 0$。第二阶段采用 LIE 损失，并使用与第一阶段相同的骨干网络。点对点映射通过特征空间中的最近邻或函数映射流程提取。具体而言，给定两个形状 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$的特征嵌入，我们使用公式（1）计算从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$的函数映射 $C_{\mathcal{MN}}$，然后将其转换为点对点映射 T_{fmap}：$\mathcal{N} \to \mathcal{M}$ （沿用附录 A 中的符号）：

$$T_{fmap}(y) = \arg\min_{x} \|(\Phi_{\mathcal{N}})_y - (\Phi_{\mathcal{M}} C_{\mathcal{MN}}^{\top})_x\| \tag{9}$$

对于正文第 5.1.2 节中的测试时优化实验，在提取第一阶段预测的映射后，我们为测试集中的所有形状构造配对，并针对每一对，使用 NCE 损失和 Adam 优化器训练一个随机初始化的 DiffusionNet 网络，以生成能够导出第一阶段映射的特征嵌入。当循环损失（参见正文第 4.2 节）不再改善时，我们便停止训练，耐心期设为 100 次优化迭代。

除测试时优化外，正文第 5 节的所有实验均使用了数据增强。具体而言，我们在训练过程中动态增强训练数据：随机旋转输入形状，在 [0.9, 1.1]，范围内随机缩放，并通过均值为零、标准差为 0.01 的高斯噪声抖动每个点的位置。

计算规格 我们的所有实验均使用 Pytorch 执行 [92], 所用机器为 64 位，配备 Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2630 v4 @ 2.20GHz 和一块 RTX 2080 Ti 图形卡。对于所有对比方法，我们均使用作者发布的原始代码，并采用相应论文中报告的最佳参数。正如正文中所述，我们将发布完整的实现，以确保所有结果均可完全复现。

C FSKD 实现细节

下面我们将介绍主文稿第5.3节中所述的小样本关键点检测方法（FSKD）的实现细节。如该节所述，**FSKD** 由三个步骤组成：**1.** 通过从带标注形状迁移关键点来检测潜在关键点；**2.**筛除目标形状上可能不存在的关键点；**3.** 合并：如果目标形状上的多个点被分配了相同的关键点 ID，则合并迁移得到的关键点。
步骤 1. 通过使用我们既有的、由**NCP-UN**预测的映射来完成。
对于**步骤 2**。，我们计算转移后的关键点的循环一致性损失，并且只保留低于预定阈值的关键点。也就是说，给定一对形状 $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$，以及通过在其特征嵌入之间进行最近邻匹配计算得到的两个映射 $\Pi_{\mathcal{MN}}$ 和 $\Pi_{\mathcal{NM}}$，并将其表示为二值矩阵，关键点 i 的循环一致性损失计算为 $l_i = \|(X_{\mathcal{N}})_i - (\Pi_{\mathcal{NM}} \Pi_{\mathcal{MN}} X_{\mathcal{N}})_i\|_F^2$，其中 $X_{\mathcal{N}}$是源形状 $\mathcal{N}$的 XYZ 坐标矩阵。如果 l_i 大于预定义阈值 ν，则认为关键点 i 不存在于目标形状上。在我们的实验中，我们取 $\nu = 0.05$。

关于**步骤 3**。，如果过滤后的关键点数量较多，我们会对它们进行空间加权平均。对于每个关键点 i，我们赋予其权重 $w_i = \frac{D_i}{\sum_j D_j}$，其中 $D_i = \exp(-\frac{l_i}{\sigma})$。我们使用 $\sigma = 0.01$。

D 光滑网络产生的映射的平滑性证明

在正文第3.2节中，我们简要提到过一个定理，该定理指出，基于光滑特征之间最近邻的映射是光滑的。本节将正式重述该定理并给出证明。

定理 1. 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是两个紧致光滑曲面（维数为 *2* 的光滑流形）。设 M 和 N 是它们在 $\mathbb{R}^d$ 中的嵌入，由以下函数给出：$\psi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^d$ 和 $\phi : \mathcal{N} \to \mathbb{R}^d$，使得 $M = \psi(\mathcal{M})$ 且 $N = \phi(\mathcal{N})$。假设 ψ 和 ϕ 都是光滑且单射的。那么，对 ϕ、ψ 进行任意小的扰动后，映射 $T_{nn} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$，由 $T_{nn}(x) = arg\,min_{y\in\mathcal{N}} \|\psi(x) - \phi(y)\|$ 给出，必然在 $\mathcal{M}$ 上除去测度为 *0* 的集合外是光滑的。

证明。首先注意，嵌入流形的距离函数几乎处处光滑。事实上，众所周知，如果 N 是嵌入于 $\mathbb{R}^d$ 中的 C^k-连续流形，那么在 N 的中轴的补集上，N 的距离函数至少是 C^k 连续的。也就是说，设 $d_{\mathbf{N}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 由 $d_{\mathbf{N}}(x) = \arg\min_{y\in\mathbf{N}} \|x - y\|$ 给出。令 cut(N) 表示 N 的中轴，它定义为 $\mathbb{R}^d$ 中到 N 存在多个最近邻的点集。即，$\text{cut(N)} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{d}} \mid \exists \mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2 \in \mathrm{N}, \mathrm{y}_1 \neq \mathrm{y}_2, \mathrm{s.t.} \|\mathrm{x} - \mathrm{y}_1\| = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}_2\| = \min_{\mathrm{y}\in\mathbf{N}} \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|\}$。于是，$d_{\mathbf{N}}$ 在 $\mathbb{R}^d \backslash \text{cut(N)}$ 上至少是 C^k 连续的（相关结论见 [93], 中的引理 2.5 以及 [94, 95] ）。

还需证明，在对 ϕ 和 ψ 进行任意小的扰动后，$\mathbf{M}$ 与 cut(N) 之间的交集在 $\mathbf{M}$ 上是零测集。为此，我们首先利用这一事实：紧致亚解析流形的中轴也是亚解析的 [96]。这意味着，中轴可以被分层（分解为有限个维数为 $d-1$ 的子流形，位于 $\mathbb{R}^d$ 中）。由于（根据 Stone-Weierstrass 定理）亚解析流形在光滑流形空间中稠密，因此，在对 ϕ 进行任意小的扰动后，$\mathbf{N}$ 是亚解析的。最后，根据 Thom 横截性定理 [97, 98], ，$\mathbf{M}$（这是一个维数为 2 的嵌入流形）与任意维数为 $d-1$ 的流形之间的交集通常在$\mathbf{M}$ 上是零测集，因而在 $\mathcal{M}$ 上也是零测集。□

E 定理1 的假设验证

定理1 背后的主要动机是强调这样一个事实：给定光滑的特征嵌入，如果加入单射条件，那么使用特征空间中的最近邻提取的映射往往是光滑的。由于平滑性通常是一个理想属性，并且先前工作（例如 [23] ）中展示的频率偏置表明，神经网络倾向于低频（因而光滑的）函数，因此我们将这一结果作为对神经对应先验的部分解释；这一先验是我们在工作中首次观察到的。

关于单射性，尽管这一性质并非显而易见，可能需要专门加以约束（例如使用可逆网络 [99]）。然而，我们观察到，使用对比学习（如 NCE 损失）训练网络时，为了最小化 NCE 损失，后者会迫使网络为每个点生成唯一的嵌入，这可以视为一种单射性。

本节介绍我们为考察随机初始化网络的平滑性和单射性而进行的实验结果。我们首先计算随机初始化的 DiffusionNet 网络在 FAUST [33]数据集的 20 个测试形状上生成的特征嵌入。

为评估嵌入的平滑性，我们使用以下公式计算网络生成的嵌入和形状在 $\mathbb{R}^3$（形状顶点的三维坐标）中的原始嵌入的标准狄利克雷能量：

$$E_{Dirichlet}(G) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{G_i^\top W G_i}{G_i^\top A G_i} \tag{10}$$

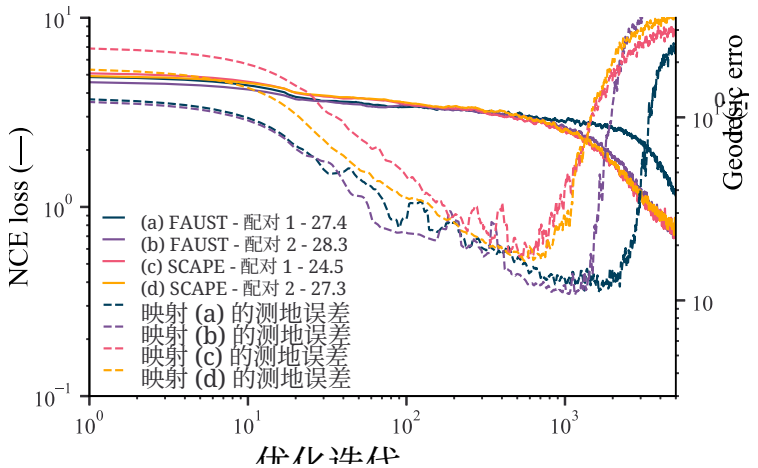

图 7：展示不同 FAUST 和 SCAPE 数据集形状对的 NCE 损失和测地误差的学习曲线。括号中的数字表示输入映射的测地误差。请注意，NCP 的效果不受形状对的影响。

其中，G 是维度为 n 的待考察嵌入，而 W 和 A 分别是使用拉普拉斯-贝尔特拉米算子[100]的经典余切离散方案计算得到的标准刚度矩阵和质量矩阵。我们计算整个测试集上的狄利克雷能量，发现坐标函数（$\mathbb{R}^3$中的原始形状嵌入）的平均值为 **47.2**，而网络生成的嵌入的能量为 **13.1**。这表明，后者比原始空间中的嵌入更平滑。

为检验单射性，我们计算嵌入中每个点到其最近邻的距离，并取一个形状上所有点的最小值。为公平比较原始嵌入和网络生成的嵌入，我们将两者都归一化到单位球面。我们发现，原始 3D 空间中点间的平均最小距离为 **0.0004**，而网络生成的特征嵌入中，该距离为 **0.0015**。这表明网络具有单射性，且点之间的距离大于原始域中的距离。

F 神经对应先验

在正文第3节中，我们使用 DiffusionNet 网络展示了神经对应先验（NCP）在一对形状上的效果。本节旨在说明，NCP 不受形状对、点对点损失、架构以及第一阶段选择的影响。

F.1 不受形状对的影响

为了说明正文图1所展示的 NCP效应不依赖于所选形状，我们使用从 FAUST 和 SCAPE数据集 [33]中随机抽取的新形状对，重复了相同的实验。按照正文第3.2节中的相同设置，给定一对形状，我们向它们之间的真实映射添加50%的噪声，然后训练一个随机初始化的 DiffusionNet，使其生成过拟合噪声映射的特征嵌入。图 7展示了四组不同形状对的示例。我们发现始终存在相同的效果，即网络能够抵抗对噪声映射的过拟合（噪声阻抗较高），且优化过程中的中间映射质量较高，优于用作监督的噪声映射。

F.2 不依赖损失函数和网络架构

为了考察 NCP 是否独立于网络架构以及阶段 2 中 **NCP-UN**所使用的点对点损失，我们在 KEYPOINTNET [58] 数据集的椅子子集上进行了以下实验。由于后者未提供形状之间的稠密真实点对点映射，我们采用算法第一阶段生成的点对点映射（见正文第 5.1.1 节），并向其中加入噪声。这些噪声映射被用作第二阶段的输入

表 2： **损失函数与网络架构的消融研究**。我们展示了**NCP-UN** 在 KeyPointNet 数据集的 [58] 椅子子集上采用不同损失函数和网络架构的结果。结果表明，多种网络架构和损失函数都能改进第一阶段生成的映射，这证明 NCP 并不局限于单一的方法选择。

指标	输入映射	*PointMLP*			*LIE*		
		LIE	***NCE***	***FMAP***	***DGCNN***	***PointNet++***	***ResidualMLP***
测地误差（×100）	9.5	5.1	5.1	5.2	5.0	5.3	8.1
映射平滑度	234.9	10.3	10.1	9.9	11.3	9.7	8.3

表3：**关于第一阶段所用方法的消融研究**。我们展示了在 SMAL 数据集上使用多种第一阶段方法得到的 **NCP-UN** 结果。数值为单位面积形状上的平均测地误差 ×100 。可以看出，尽管第一阶段所选方法不同，NCP效应依然适用。

阶段 / 方法	***NeuroMorph [82]***	***Smooth Shells [18]***	***Deep Shells [17]***	***Unsup GeomFMaps [19]***
第一阶段	23.1	16.3	15.2	7.8
阶段 2	7.2 (+68%)	8.1 (+50%)	7.3 (+52%)	5.8 (+25%)

NCP-UN 算法的输入。与正文第 5.1.1 节中进行的实验不同，在这里，我们为第二阶段的训练选择了不同的网络架构和损失函数。具体而言，我们考虑了来自 [11] 的 NCE 损失、LIE 损失和监督式 FMAP 损失。在网络架构方面，我们考虑了 [13], PointNet++ [21] 中介绍的 ResidualMLP网络，以及 DGCNN [20]。对于这些网络架构，我们使用了作者提供的官方实现。

除了测量第二阶段预测的映射所产生的测地误差外，我们还测量其平滑性。给定两个形状 $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$，以及它们之间一个表示为二值矩阵 $\Pi_{\mathcal{MN}}$ 的映射 $T_{\mathcal{MN}}$，我们根据狄利克雷能量，使用以下公式计算该映射的平滑性（更多详情请参见 [100] ）：

$$E_{smoothness}(T_{\mathcal{MN}}) = \sum_{(u,v)\in\mathcal{E}_{\mathcal{M}}} w_{uv}\|\psi_{\mathcal{MN}}(u) - \psi_{\mathcal{MN}}(v)\|_2^2 \tag{11}$$

$$\psi_{\mathcal{MN}} = \Pi_{\mathcal{MN}} X_{\mathcal{N}} \tag{12}$$

其中， $X_{\mathcal{N}}$ 是形状 $\mathcal{N}$ 的 XYZ 坐标矩阵， $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ 是三角网格中所有边的集合，而 w_{uv} 是形状 $\mathcal{M}$ 的余切拉普拉斯算子 [100] 的刚度权重。

该实验的结果汇总于表2。可以看出，所有损失函数和网络架构都表现良好，并成功改善了含噪输入映射。还可以注意到 NCP 的平滑效果。事实上，网络的第二阶段会生成特征嵌入，由此得到的点对点映射不仅在几何上正确，还能去除输入映射中的噪声和离群点。值得注意的是，尽管 ResidualMLP 架构较弱，因为它是针对每个顶点单独应用的，且缺乏全局形状感知，但我们发现，即使测地误差较大，该网络也倾向于生成平滑的嵌入。

F.3 与第一阶段的独立性

正如我们在主论文中所述，我们的**NCP-UN** 算法与第一阶段无关，即用于提取含伪影的点对点映射的方法并不关键，NCP效应仍然适用。为证明这一点，我们采用与正文第 5.1.2 节相同的设置，并在 SMAL 数据集上进行相同的实验，但为第一阶段使用不同的方法。具体而言，我们将无监督几何函数映射（Unsup GeomFMaps） [19], Smooth Shells [18],Deep Shells [17] 和 NeuroMorph [82]作为第一阶段的方法。结果总结于表3中。可以看出，无论第一步采用何种方法，NCP效应仍然适用，并且结果得到了显著提升，最高提升达 68%。

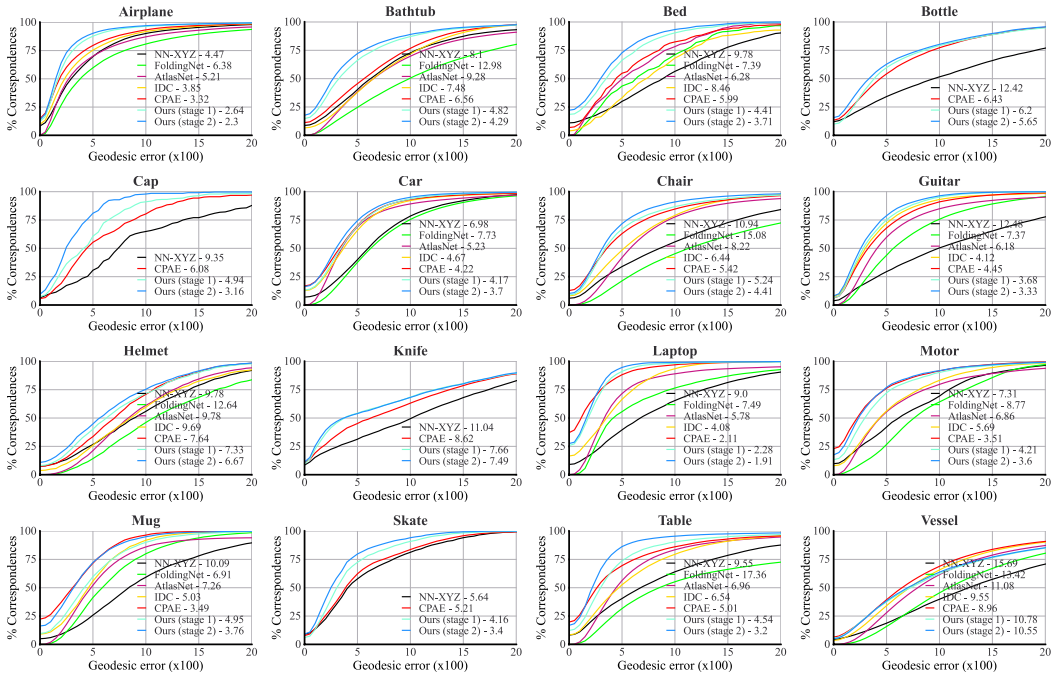

图 8：**在 KeyPointNet 数据集上的对应关系准确率**。可以看出，由于 NCP效应，我们算法的第二阶段总是优于第一阶段。

G 人造数据上的形状匹配

在正文第 5.1.1 节中，我们将**NCP-UN** 算法应用于 KeyPointNet 数据集，但由于篇幅限制，仅提供了 4 个类别的定量结果。在图 8 中，我们提供了全部 16 个类别的定量结果，以及我们算法第一阶段的结果，即附录B中上述无监督方法的结果。对于瓶子、帽子、刀和滑板类别，我们仅将其与表现最佳的基线方法进行比较。可以看出，在该基准测试中，我们的方法在 16 个类别中的 13 个类别上取得了最先进的结果，并且在帽子和桌子等类别上实现了显著提升。我们还发现，**NCP-UN** 的第二阶段始终能够改善第一阶段提供的结果，这再次证明了 NCP效应的作用；如果没有该效应，就无法取得最先进水平的结果，例如笔记本电脑类别。

此外，我们在图9 中提供了一些定性结果，展示了 **NCP-UN** 两个阶段生成的点对点映射，并通过纹理迁移进行可视化，同时展示了如何利用这些映射在形状之间迁移关键点。可以看出，第二阶段映射迁移的关键点更加准确。

H 非刚性近等距数据上的形状匹配

在我们的工作中，我们着重研究难以处理的非刚性非等距数据集，现有方法在这些数据集上往往会失效。这是因为在 Faust 或 Scape [33], 等近等距数据集上，当前的无监督方法可以利用近等距这一假设并取得良好效果。

尽管如此，我们仍在 FAUST 和 SCAPE 数据集上对我们的方法进行了比较，并采用了此前所有工作（例如 [11]）使用的相同训练/测试划分。X on Y 表示该方法在 X 上训练，并在 Y 上测试。

作为阶段 2 的输入，我们使用 WSupFMNet + DiffusionNet [19]（在桌子中称为第一阶段），这与主文稿中使用的方法相同。对于我们的方法（阶段 2），我们采用与 SMAL 数据集相同的实现，该实现详见主文稿第 5.1.2 节。

如表 4所示，即使在近等距数据集上，我们的阶段 2 在所有类别中都优于初始映射，平均提升 **18.4%**。不过，我们指出，在这类设置下，使用专门方法会更

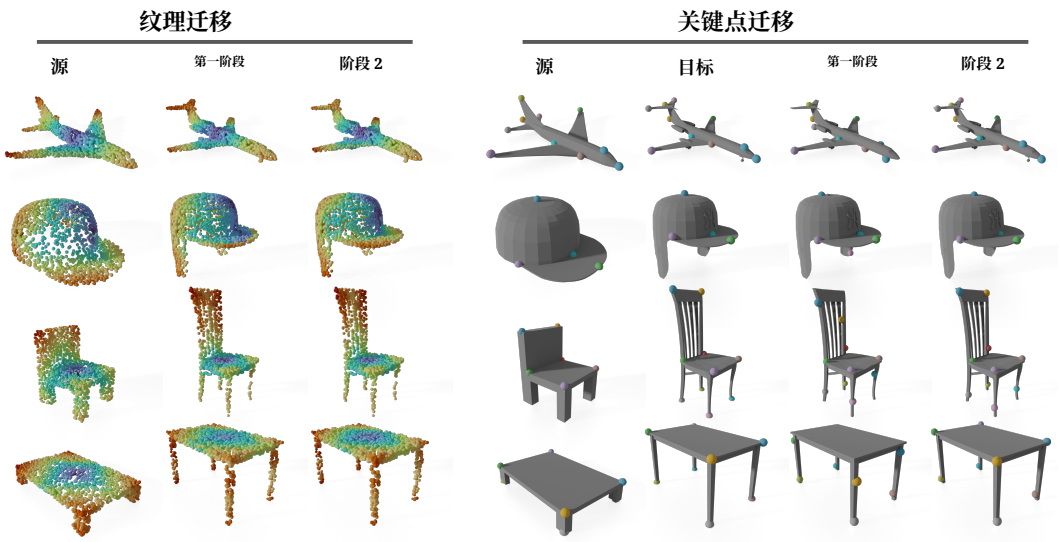

图 9：**在关键点网络数据集**四个类别上的定性结果：飞机、帽子、椅子和桌子。展示了点对点映射以及关键点迁移。每一行包含点对点映射、真实标注关键点，以及由我们算法的第一阶段和第二阶段生成的预测结果。

表 4：**NCP-UN 在近等距数据上的结果**，采用 FAUST（**F**）和 SCAPE（**S**）数据集。数值为单位面积形状上的平均测地误差 ×100 。可以看出，即使对于近等距形状，NCP效应仍然适用。

方法	***F*** 对 ***F***	***S*** 对 ***S***	***F*** 对 ***S***	***S*** 对 ***F***
第一阶段	3.8	4.4	4.8	3.6
阶段 1 +ZoomOut	1.9	2.6	2.7	1.9
NCP（我们的方法 - 阶段 2）	**3.0**	**3.5**	**4.2**	**2.9**
NCP（我们的方法 - 阶段 2） + ZoomOut	1.9	2.4	2.6	1.9

有优势，例如 ZoomOut [101], , 它可以直接利用近等距假设。

I 社会影响

高效的形状匹配与分析方法能够立即对科学和工程的诸多领域产生影响，从医学成像（例如检测异常并开展后续分析），到计算生物学、考古学和古生物学等领域中的形状识别与分类，不一而足。凭借强大的泛化能力和通用的无监督特性，我们的方法可以直接适用于这些多样化的场景，尤其适用于数据易于获取但标注成本极高的领域，例如结构生物学或分子生物学。我们的工作还开辟了重要的未来研究方向：它能够让几何深度学习方法摆脱对大规模数据集标注的依赖，因此有望使小型实验室无需雇用许多标注人员（这是一项成本高昂的工作），也能开展这一领域的研究。最后，我们的方法为获得更准确的结果铺平了道路，有助于加深我们对许多领域的理解；例如，在生物学中，形状匹配技术可用于分析基因表达模式，从而理解多种人类综合征的成因 [102]。由于我们尝试解决的是计算机图形学和计算机视觉中的一个基本问题，因此我们不认为会产生负面结果。不过，需要注意的是，高精度的形状对应方法可能存在潜在的不当用途，例如监控应用，尽管我们反对将本技术用于此类用途。

参考文献

[1] Federica Bogo、Javier Romero、Matthew Loper 和 Michael J. Black。FAUST：用于三维网格配准的数据集与评估。载于2014年IEEE计算机视觉与模式识别会议。IEEE，2014年6月。1[2] Leonid Pishchulin、Stefanie Wuhrer、Thomas Helten、Christian Theobalt 和 Bernt Schiele。构建用于三维人体建模的统计形状空间。《模式识别》，67：276–286，2017年7月。1[3] Huong Quynh Dinh、Anthony Yezzi 和 Greg Turk。形状变换过程中的纹理迁移。ACM图形学汇刊，24(2)：289–310，2005年4月。1[4] Robert W. Sumner 和 Jovan Popovi´c。三角网格的变形迁移。ACM图形学汇刊，23(3)：399–405，2004年8月。1[5] Ilya Baran、Daniel Vlasic、Eitan Grinspun 和 Jovan Popovi´c。语义形变迁移。ACM图形学汇刊，28(3)：1–6，2009年7月。1[6] Qian-Yi Zhou、Jaesik Park 和 Vladlen Koltun。快速全局配准。载于《计算机视觉——ECCV 2016》，页766–782。Springer International Publishing，2016年。1[7] Thibault Groueix、Matthew Fisher、Vladimir G. Kim、Bryan C. Russell 和 Mathieu Aubry。以纸浆塑形方法学习三维表面生成。载于2018年IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议，页230–246。IEEE，2018年6月。1, 3[8] Jonathan Masci、Davide Boscaini、Michael M. Bronstein 和 Pierre Vandergheynst。黎曼流形上的测地卷积神经网络。载于2015年IEEE计算机视觉国际会议研讨会（ICCVW），页37–45。IEEE，2015年12月。1, 3[9] Federico Monti、Davide Boscaini、Jonathan Masci、Emanuele Rodola、Jan Svoboda 和 Michael M. Bronstein。使用混合模型卷积神经网络在图和流形上进行几何深度学习。载于2017年IEEE计算机视觉与模式识别会议（CVPR），页5115–5124。IEEE，2017年7月。1, 3[10] Adrien Poulenard 和 Maks Ovsjanikov。通过等变卷积实现多方向测地神经网络。ACM图形学汇刊，37(6)：1–14，2018年12月。1, 3[11] Nicolas Donati、Abhishek Sharma 和 Maks Ovsjanikov。深度几何函数映射：用于形状对应的鲁棒特征学习。载于2020年IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议（CVPR），页8592–8601。IEEE，2020年6月。1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 16, 17[12] Souhaib Attaiki、Gautam Pai 和 Maks Ovsjanikov。DPFM：深度部分函数映射。载于2021年国际三维视觉会议（3DV）。IEEE，2021年12月。1, 3, 11[13] Or Litany、Tal Remez、Emanuele Rodola、Alex Bronstein 和 Michael Bronstein。深度函数映射：用于稠密形状对应的结构化预测。载于2017年IEEE国际计算机视觉会议（ICCV），页5659–5667。IEEE，2017年10月。1, 3, 4, 8, 9, 16[14] Oshri Halimi、Or Litany、Emanuele Rodola Rodola、Alex M. Bronstein 和 Ron Kimmel。稠密形状对应的无监督学习。载于2019年IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议（CVPR），页4370–4379。IEEE，2019年6月。1, 4[15] Jean-Michel Roufosse、Abhishek Sharma 和 Maks Ovsjanikov。用于结构化形状匹配的无监督深度学习。载于2019年IEEE/CVF国际计算机视觉会议（ICCV），页1617–1627。IEEE，2019年10月。1, 3, 4, 6, 8, 11[16] E. Rodolà、L. Cosmo、M. M. Bronstein、A. Torsello 和 D. Cremers。部分函数对应。计算机图形学论坛，36(1)：222–236，2016年2月。1[17] Marvin Eisenberger、Aysim Toker、Laura Leal-Taixé 和 Daniel Cremers。深壳：基于最优传输的无监督形状对应。载于H. Larochelle、M. Ranzato、R. Hadsell、M. F. Balcan 和 H. Lin（编），《神经信息处理系统进展》，第33卷，页10491–10502。Curran Associates, Inc.，2020年。1, 3, 4, 8, 9, 16[18] Marvin Eisenberger、Zorah Lähner 和 Daniel Cremers。平滑壳：基于函数映射的多尺度形状配准。2020年IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议（CVPR），页12262–12271，2020年。1, 3, 8, 9, 16

[19] Nicholas Sharp、Souhaib Attaiki、Keenan Crane 和 Maks Ovsjanikov。DiffusionNet：在曲面上进行与离散化无关的学习。《ACM图形学汇刊》，41(3):1–16，2022年6月。2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 16, 17[20] Yue Wang、Yongbin Sun、Ziwei Liu、Sanjay E. Sarma、Michael M. Bronstein 和 Justin M. Solomon。用于点云学习的动态图卷积神经网络。《ACM图形学汇刊》，38(5):1–12，2019年10月。2, 16[21] R. Qi Charles、Hao Su、Mo Kaichun 和 Leonidas J. Guibas。PointNet：用于三维分类和分割的点集深度学习。载于2017年IEEE计算机视觉与模式识别会议（CVPR），第5105–5114页。IEEE，2017年7月。2, 16[22] Dmitry Ulyanov、Andrea Vedaldi 和 Victor Lempitsky。深度图像先验。《国际计算机视觉杂志》，128(7):1867–1888，2020年3月。2, 3, 5, 7[23] Nasim Rahaman、Aristide Baratin、Devansh Arpit、Felix Draxler、Min Lin、Fred Hamprecht、Yoshua Bengio 和 Aaron Courville。论神经网络的谱偏置。载于《第36届国际机器学习会议论文集》《机器学习研究论文集》，第5301–5310页。PMLR，2019年。2, 5, 14[24] Yusuf Sahillioˇğlu。形状对应领域的最新进展。《视觉计算机》，36(8):1705–1721，2019年9月。3[25] S. Biasotti、A. Cerri、A. Bronstein 和 M. Bronstein。三维形状相似性评估的近期趋势、应用与展望。《计算机图形学论坛》，35(6):87–119，2015年10月。3[26] Bailin Deng、Yuxin Yao、Roberto M Dyke 和 Juyong Zhang。非刚性三维配准综述。arXiv预印本，arXiv:2203.07858，2022年。3[27] G. K. L. Tam、Zhi-Quan Cheng、Yu-Kun Lai、F. C. Langbein、Yonghuai Liu、D. Marshall、R. R. Martin、Xian-Fang Sun 和 P. L. Rosin。三维点云与网格配准：从刚性到非刚性的综述。《IEEE视觉计算与图形学汇刊》，19(7):1199–1217，2013年7月。3[28] Maks Ovsjanikov、Mirela Ben-Chen、Justin Solomon、Adrian Butscher 和 Leonidas Guibas。函数映射。《ACM图形学汇刊》，31(4):1–11，2012年8月。3[29] Emanuele Rodolà、Luca Cosmo、Michael M Bronstein、Andrea Torsello 和 Daniel Cremers。部分函数对应。载于《计算机图形学论坛》，第36卷，第222–236页。Wiley Online Library，2017年。3[30] Oliver Burghard、Alexander Dieckmann 和 Reinhard Klein。利用格林函数嵌入形状以实现全局形状匹配。《计算机与图形学》，68:1–10，2017年11月。3[31] Davide Eynard、Emanuele Rodola、Klaus Glashoff 和 Michael M. Bronstein。耦合函数映射。载于2016年第四届国际三维视觉会议（3DV），第399–407页。IEEE，IEEE，2016年10月。3[32] Meged Shoham、Amir Vaxman 和 Mirela Ben-Chen。细分曲面之间的分层函数映射。《计算机图形学论坛》，38(5):55–73，2019年8月。3[33] Jing Ren、Adrien Poulenard、Peter Wonka 和 Maks Ovsjanikov。通过函数映射实现连续且保向的对应关系。《ACM图形学汇刊》，37(6):1–16，2018年12月。3, 4, 12, 14, 15, 17[34] Jing Ren、Adrien Poulenard、Peter Wonka 和 Maks Ovsjanikov。通过函数映射实现连续且保向的对应关系。《ACM图形学汇刊》，37(6):1–16，2018年12月。3[35] Dorian Nogneng 和 Maks Ovsjanikov。通过交换性保持信息描述符以进行形状匹配。《计算机图形学论坛》，36(2):259–267，2017年5月。3[36] Riccardo Marin、Souhaib Attaiki、Simone Melzi、Emanuele Rodolà 和 Maks Ovsjanikov。为何应该学习函数基，2021年。3, 8, 13[37] Lei Li、Souhaib Attaiki 和 Maks Ovsjanikov。SRFeat：学习局部精确且全局一致的非刚性形状对应。载于2022年国际三维视觉会议（3DV）。IEEE，2022年9月。3

[38] Maks Ovsjanikov、Etienne Corman、Michael Bronstein、Emanuele Rodolà、Mirela Ben-Chen、Leonidas Guibas、Frederic Chazal 和 Alex Bronstein。利用函数映射计算和处理对应关系。载于ACM SIGGRAPH 2017 课程。ACM，2017年7月。3[39] Abhishek Sharma 和 Maks Ovsjanikov。用于形状匹配的弱监督深度函数映射。载于 H. Larochelle、M. Ranzato、R. Hadsell、M. F. Balcan 和 H. Lin（编），《神经信息处理系统进展》，第33卷，第19264–19275页。Curran Associates, Inc.，2020年。3, 4, 6, 8, 9, 11[40] Dvir Ginzburg 和 Dan Raviv。循环函数映射：非等距可变形形状之间的自监督对应关系。载于《计算机视觉——ECCV 2020》，第36–52页。Springer International Publishing，2020年。3[41] An-Chieh Cheng、Xueting Li、Min Sun、Ming-Hsuan Yang 和 Sifei Liu。通过规范点自编码器学习三维稠密对应关系，2021年。3, 7, 8, 9, 10[42] Zerong Zheng、Tao Yu、Qionghai Dai 和 Yebin Liu。用于三维形状表示的深度隐式模板，2020年。3[43] Feng Liu 和 Xiaoming Liu。学习隐式函数以实现拓扑变化的三维形状稠密对应关系，2020年。3, 8, 10[44] Reinhard Heckel 和 Paul Hand。深度解码器：通过未经训练的非卷积网络实现简洁的图像表示。国际学习表征会议，2019年。3[45] Reinhard Heckel 和 Mahdi Soltanolkotabi。利用未经训练的神经网络进行压缩感知：梯度下降找到最平滑近似。ArXiv，abs/2005.03991，2020年。3[46] Gary Mataev、Michael Elad 和 Peyman Milanfar。DeepRED：由RED驱动的深度图像先验。ArXiv，abs/1903.10176，2019年。3[47] Jiaming Liu、Yu Sun、Xiaojian Xu 和 Ulugbek S. Kamilov。使用全变分正则化深度图像先验进行图像复原。载于ICASSP 2019——IEEE声学、语音与信号处理国际会议（ICASSP）。IEEE，2019年5月。3[48] Daniel Otero Baguer、Johannes Leuschner 和 Maximilian Schmidt。利用深度图像先验和学习式重建方法进行计算机断层成像重建。《逆问题》，36(9):094004，2020年9月。3[49] Sunghwan Hong 和 Seungryong Kim。深度匹配先验：用于稠密对应的测试时优化。载于2021年IEEE/CVF国际计算机视觉会议（ICCV），第9907–9917页。IEEE，2021年10月。3[50] Sören Dittmer、Tobias Kluth、Peter Maass 和 Daniel Otero Baguer。架构正则化：一种用于逆问题的深度先验方法。《数学成像与视觉》，62(3):456–470，2019年10月。3[51] Zezhou Cheng、Matheus Gadelha、Subhransu Maji 和 Daniel Sheldon。关于深度图像先验的贝叶斯视角，2019年。3[52] Francis Williams、Teseo Schneider、Claudio Silva、Denis Zorin、Joan Bruna 和 Daniele Panozzo。用于表面重建的深度几何先验。载于2019年IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议（CVPR）。IEEE，2019年6月。3[53] Rana Hanocka、Gal Metzer、Raja Giryes 和 Daniel Cohen-Or。Point2Mesh。《ACM图形学汇刊》，39(4)，2020年8月。3, 4[54] Tomas Jakab、Ankush Gupta、Hakan Bilen 和 Andrea Vedaldi。通过条件图像生成进行物体地标无监督学习。载于NeurIPS，2018年。3[55] Tomas Jakab、Ankush Gupta、Hakan Bilen 和 Andrea Vedaldi。从未标注视频中自监督学习可解释关键点。载于2020年IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议（CVPR）。IEEE，2020年6月。3[56] James Thewlis、Hakan Bilen 和 Andrea Vedaldi。通过因子化空间嵌入进行物体地标无监督学习。载于2017年IEEE国际计算机视觉会议（ICCV）。IEEE，2017年10月。3

[57] Olivia Wiles、A. Sophia Koepke 和 Andrew Zisserman。视频中的类别嵌入自监督学习。载于《2019年IEEE/CVF国际计算机视觉会议研讨会》（ICCVW）。IEEE，2019年10月。3[58] Yang You、Yujing Lou、Chengkun Li、Zhoujun Cheng、Liangwei Li、Lizhuang Ma、Cewu Lu 和 Weiming Wang。KeypointNet：一个从大量人工标注中汇集而成的大规模三维关键点数据集。2020年IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议（CVPR），2020年6月。3、7、12、15、16[59] Ruoxi Shi、Zhengrong Xue、Yang You 和 Cewu Lu。Skeleton Merger：一种无监督对齐关键点检测器。2021年IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议（CVPR），2021年6月。3[60] Yang You、Wenhai Liu、Yanjie Ze、Yong-Lu Li、Weiming Wang 和 Cewu Lu。UKPGAN：一种通用的自监督关键点检测器，2020年。3、10[61] Tomas Jakab、Richard Tucker、Ameesh Makadia、Jiajun Wu、Noah Snavely 和 Angjoo Kanazawa。KeypointDeformer：用于形状控制的无监督三维关键点发现。2021年IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议（CVPR），2021年6月。3[62] Wang Yifan、Noam Aigerman、Vladimir G. Kim、Siddhartha Chaudhuri 和 Olga Sorkine-Hornung。神经笼：保留细节的三维形变。载于2020年IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议（CVPR），第75–83页。IEEE，2020年6月。3[63] Yeonsik Jo、Se Young Chun 和 Jonghyun Choi。重新思考用于去噪的深度图像先验。载于2021年IEEE/CVF国际计算机视觉会议（ICCV），第5087–5096页。IEEE，2021年10月。3[64] Maks Ovsjanikov、Mirela Ben-Chen、Justin Solomon、Adrian Butscher 和 Leonidas Guibas。函数映射。《ACM图形学汇刊》，31(4):1–11，2012年8月。4[65] Federico Tombari、Samuele Salti 和 Luigi Di Stefano。用于局部表面描述的直方图唯一签名。载于《欧洲计算机视觉会议》，第356–369页。施普林格，2010年。4、12[66] O. Litany、E. Rodolà、A. M. Bronstein 和 M. M. Bronstein。完全谱部分形状匹配。《计算机图形学论坛》，36(2):247–258，2017年5月。4[67] Adam Gaier 和 David Ha。权重无关神经网络。载于 H. Wallach、H. Larochelle、A. Beygelzimer、F. d' Alché-Buc、E. Fox 和 R. Garnett 编，《神经信息处理系统进展》，第32卷。Curran Associates, Inc.，2019年。4[68] Andrew M. Saxe、Pang Wei Koh、Zhenghao Chen、Maneesh Bhand、Bipin Suresh 和 Andrew Y. Ng。关于随机权重与无监督特征学习。载于 ICML，2011年。4[69] Jian Sun、Maks Ovsjanikov 和 Leonidas Guibas。一种基于热扩散的简洁且可证明具有信息性的多尺度签名。载于《计算机图形学论坛》，第1383–1392页。Wiley Online Library，2009年。4、12[70] Mathieu Aubry、Ulrich Schlickewei 和 Daniel Cremers。波核特征：一种形状分析的量子力学方法。载于2011年IEEE国际计算机视觉会议研讨会（ICCV研讨会），第1626–1633页。IEEE，IEEE，2011年11月。4、12[71] Samuele Salti、Federico Tombari 和 Luigi Di Stefano。SHOT：用于表面与纹理描述的直方图唯一签名。《计算机视觉与图像理解》，125:251–264，2014年8月。4[72] Saining Xie、Jiatao Gu、Demi Guo、Charles R Qi、Leonidas Guibas 和 Or Litany。PointContrast：用于三维点云理解的无监督预训练。载于《欧洲计算机视觉会议》，第574–591页。施普林格，2020年。5、12[73] Yuan Cao、Zhiying Fang、Yue Wu、Ding-Xuan Zhou 和 Quanquan Gu。迈向对深度学习谱偏置的理解。载于《第三十届国际人工智能联合会议论文集》。国际人工智能联合会议组织，2021年8月。5[74] Xu Ma、Can Qin、Haoxuan You、Haoxi Ran 和 Yun Fu。重新思考网络设计与局部

g几何 y in p点云：一种相似p残差多层感知机框架，2022年。6，12

[75] Riccardo Marin、Marie-Julie Rakotosaona、Simone Melzi 和 Maks Ovsjanikov。通过线性不变嵌入学习对应关系。ArXiv，abs/2010.13136，2020年。6、8、9、12[76] Li Yi、Vladimir G. Kim、Duygu Ceylan、I-Chao Shen、Mengyan Yan、Hao Su、Cewu Lu、Qixing Huang、Alla Sheffer 和 Leonidas Guibas。用于三维形状集合区域标注的可扩展主动框架。ACM图形学汇刊，35(6)：1–12，2016年11月。7、12[77] Silvia Zuffi、Angjoo Kanazawa、David W. Jacobs 和 Michael J. Black。三维动物园：动物三维形状与姿态建模。载于2017年IEEE计算机视觉与模式识别会议（CVPR）。IEEE，2017年7月。8、13[78] Roberto M. Dyke、Yu-Kun Lai、Paul L. Rosin、Stefano Zappalà、Seana Dykes、Daoliang Guo、Kun Li、Riccardo Marin、Simone Melzi 和 Jingyu Yang。SHREC'20：非等距变形下的形状对应。《计算机与图形学》，92：28–43，2020年11月。8、13[79] Xu Ma、Can Qin、Haoxuan You、Haoxi Ran 和 Yun Fu。重新思考点云中的网络设计与局部几何：一种简单的残差多层感知机框架。载于国际学习表征会议，2022年。8[80] Thibault Groueix、Matthew Fisher、Vladimir G. Kim、Bryan C. Russell 和 Mathieu Aubry。通过纸浆塑形方法学习三维表面生成。载于2018年IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议，第32卷。IEEE，2018年6月。8[81] Yaoqing Yang、Chen Feng、Yiru Shen 和 Dong Tian。FoldingNet：通过深度网格变形实现的点云自编码器。载于2018年IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议。IEEE，2018年6月。8[82] Marvin Eisenberger、David Novotný、Gael Kerchenbaum、Patrick Labatut、Natalia Neverova、Daniel Cremers 和 Andrea Vedaldi。NeuroMorph：一次性实现无监督形状插值与对应。2021年IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议（CVPR），第7469–7479页，2021年。8、9、16[83] Vladimir G. Kim、Yaron Lipman 和 Thomas Funkhouser。融合内在映射。ACM图形学汇刊，30(4)：1–12，2011年7月。8[84] Blaine Rister、Mark A. Horowitz 和 Daniel L. Rubin。基于不变关键点的体积图像配准。IEEE图像处理汇刊，26(10)：4900–4910，2017年10月。10[85] Ivan Sipiran 和 Benjamin Bustos。Harris 3D：一种用于三维网格兴趣点检测的 Harris 算子的稳健扩展。《视觉计算机》，27(11)：963–976，2011年7月。10[86] Yu Zhong。内在形状特征：一种用于三维物体识别的形状描述符。载于2009年IEEE第12届国际计算机视觉会议研讨会，ICCV研讨会。IEEE，2009年9月。10[87] Xuyang Bai、Zixin Luo、Lei Zhou、Hongbo Fu、Long Quan 和 Chiew-Lan Tai。D3Feat：联合学习稠密检测与三维局部特征描述。载于2020年IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议（CVPR），第6359–6367页。IEEE，2020年6月。10[88] Jiaxin Li 和 Gim Hee Lee。USIP：从三维点云中无监督地检测稳定兴趣点。载于2019年IEEE/CVF国际计算机视觉会议（ICCV）。IEEE，2019年10月。10[89] Nicholas Sharp 和 Keenan Crane。适用于非流形三角网格的拉普拉斯算子。载于《计算机图形学论坛》，第39卷，第69–80页。Wiley Online Library，2020年。11、12[90] Radu Bogdan Rusu 和 Steve Cousins。三维时代已来：点云库（PCL）。载于2011年IEEE国际机器人与自动化会议，中国上海，2011年5月。IEEE。12[91] Diederik P. Kingma 和 Jimmy Ba。Adam：一种随机优化方法，2017年。12[92] Adam Paszke、Sam Gross、Francisco Massa、Adam Lerer、James Bradbury、Gregory Chanan、Trevor Killeen、Zeming Lin、Natalia Gimelshein、Luca Antiga、Alban Desmaison、Andreas Kopf、Edward Yang、Zachary DeVito、Martin Raison、Alykhan Tejani、Sasank Chilamkurthy、Benoit Steiner、Lu Fang、Junjie Bai 和 Soumith Chintala。PyTorch：一种命令式风格的高性能深度学习库。载于 H. Wallach、H. Larochelle、A. Beygelzimer、F. d'Alché Buc、E. Fox 和 R. Garnett 编，《神经信息处理系统进展第32卷》，第8024–8035页。Curran Associates, Inc.，2019年。13

[93] Mohammad Ghomi 和 Joel Spruck。Cartan–Hadamard 流形中的全曲率与等周不等式。 *J. Geom.Anal.*，32(2):50，2022年1月。 14[94] Robert L. Foote。距离函数的正则性。 *Proc.Amer.Math. Soc.*，92(1):153–155，1984年。 14[95] Carlo Mantegazza 和 Andrea Carlo Mennucci。黎曼流形上的 Hamilton}–{Jacobi 方程与距离函数。 *Appl.Math.Opt.*，47(1):1–25，2002年12月。 14[96] F. Chazal 和 R. Soufflet。中轴与骨架的稳定性和有限性性质。 *J.Dyn. Control Syst.*，10(2):149–170，2004年4月。 14[97] Victor Guillemin 和 Alan Pollack。 微分拓扑，第370卷。美国数学学会，2010年8月。 14[98] Gary Genosko。横截性。 <https://schapos.people.uic.edu/MATH549_秋季2015_files/Survey

，

2013年。 14[99] Jens Behrmann、Will Grathwohl、Ricky T. Q. Chen、David Duvenaud 和 Joern-Henrik Jacobsen。可逆残差网络。载于 Kamalika Chaudhuri 和 Ruslan Salakhutdinov（编），《第*36*届国际机器学习会议论文集》，第97卷，《机器学习研究论文集》，第573–582页。PMLR，2019年。 14[100] Ulrich Pinkall 和 Konrad Polthier。计算离散极小曲面及其共轭曲面。*Exp.Math.*，2(1)：15–36，1993年1月。 15，16[101] Simone Melzi、Jing Ren、Emanuele Rodolà、Abhishek Sharma、Peter Wonka 和 Maks Ovsjanikov。ZoomOut。 *ACM*图形学汇刊，38(6)：1–14，2019年12月。 18[102] James Klatzow、Giovanni Dalmasso、Neus Martínez-Abadías、James Sharpe 和 Virginie Uhlmann。 μMatch：面向生物图像数据的三维形状对应。《计算机科学前沿》，4，2022年2月。 18