arXiv:2301.05859v1 [cs.RO] 14 Jan 2023

摆锤驱动球形机器人：晃动与进动的动力学建模和分析 ⋆

Animesh Singhal * **Sahil Modi** ** **Abhishek Gupta** * **Leena Vachhani** * **Omkar A. Ghag** ***

*印度理工学院孟买分校 电子邮箱：*animeshsinghal.iitb@gmail.com, abhi.gupta@iitb.ac.in, leena.vachhani@iitb.ac.in*

**通用电气研究中心，班加罗尔（电子邮箱：*sdsahil12@gmail.com*）

***印度理工学院布巴内斯瓦尔分校（电子邮箱：*goa11@iitbbs.ac.in*）

摘要：
球形机器人具有诸多实际优势：其全部电子设备都受到外壳保护，且可由任何无人机（UAV）轻松搭载。然而，由于难以找到传感器支架，其应用受到限制。摆锤驱动球形机器人可在轭架处提供安装传感器的空间。我们研究了摆锤驱动球形机器人的非线性动力学，以分析用于安装传感器的内部组件（轭架）的动力学。针对这类机器人，我们提出了一种耦合动力学模型，用以描述前进运动与侧向运动之间的关系。我们还展示了机器人在中等前进速度下执行转向动作时，模型所捕捉到的摆动和进动效应——这是球形机器人在室内环境中运动时常见的实际情形。基于所建立模型的仿真设置能够直观呈现球形机器人的运动。

关键词：拉格朗日-达朗贝尔原理、非完整约束、摆动、进动、球形机器人、摆锤、欧拉角、机器人学、力学、巡视车

1. 引言

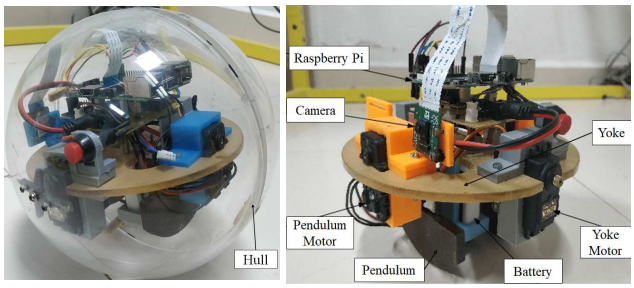
球形机器人是可移动的球状机器人。这些机器人由一个可滚动的外壳构成，驱动系统和电路封装在外壳内部，受到保护，不受极端环境和外部干扰的影响。由于球形结构，这些机器人受到扰动后能够恢复到平衡状态。凭借这些优势，球形机器人适用于监视、侦察、危险环境评估、搜寻、救援以及作为巡视车用于行星探测等应用。通过搭载球形机器人并将其投放到合适地点，可以实现许多新颖的无人机作业。Antol（2005）讨论了此类地表探测巡视车的部署概念。

本文研究一种采用轭架—摆锤组合进行驱动的球形机器人，如图1所示。摆锤驱动球形机器人有一项重要优势：从无人机上投放时，能够保持其平衡构型。驱动机构决定了机器人向多个方向滚动的灵活性。此类机构已有多种形式，从 Halme等（1996）的轮式驱动，到 Mahboubi 等（2013）、Michaud和Caron（2002）以及Yoon等（2011）的摆锤驱动装置。（Raura等，2017；Kalita等，2020）提出了一种配备跳跃机构的球形行星机器人，可跳过崎岖地形。为解决内驱动球形机器人在探索大范围行星表面时面临的电源限制，Li和Liu（2011）提出了一种风力驱动的多形态球形机器人，通过调整外形即可滚动、弹跳和飞行。Crossley（2006）、Hajos等（2005）和 Tomik等（2012）还讨论了其他多种驱动机构。

本研究所述机器人的前进和后退运动由安装在轭架上的电机实现，该电机以所需速度转动外壳。摆锤用于改变机器人的质心位置，从而实现转向运动。摄像机、其他传感器及所需的电子设备均安装在轭架上。

文献中已有多种建模方法，用于描述球形机器人的动力学。球形机器人的一阶数学模型基于纯滚动约束和角动量守恒原理（Bhattacharya 和 Agrawal，2000b，a）。Rosen（2000）和 Bloch（2003）采用拉格朗日方法和欧拉角，对球体在光滑表面上的滚动动力学进行了建模。

⋆ 本研究由印度理工学院孟买分校的 NCETIS（国家技术与内部安全卓越中心）项目资助，该项目由电子和信息技术部赞助。



(a) 组装机器人　　(b) 球形机器人的组件

机器人

图1. 球形机器人

多项研究探讨了摆锤驱动球体的动力学。Liu 等人（2008）推导了一种简化的动力学模型，以驱动电机扭矩为输入，描述向前行驶运动。Ylikorpi 等人（2014a）建立了一个统一模型，涵盖摆锤驱动球形机器人的所有常见解耦动力学模型。Li 等人（2012）从非完整约束的角度出发，采用 Maggi 方程建立模型，无需使用拉格朗日乘子。Kayacan 等人（2012）采用解耦方法对摆锤与轭架式球形机器人建模，将滚动动力学与转向运动解耦。Ylikorpi 等人（2014b）建立了满足无滑动条件的陀螺精确模型，并仿真了 GimBall 球形机器人的圆周运动轨迹。Bhattacharya 和 Agrawal（2000b）、Kayacan 等人（2012）以及 Cai 等人（2012）提出的模型通过仿真展示了球形机器人的直线运动和圆周运动。Lee 和 Park（2013）提出了一种概率方法，在考虑球形机器人随机运动的情况下，生成预先指定的起点与目的地之间的路径。

这些研究所呈现的结果为运动提供了一个宏观视角。然而，它们并未捕捉球形机器人沿直线路径或圆周等简单路径移动时表现出的小幅振荡。Dwaracherla 等人（2019）展示了实验结果，凸显了基于摆锤的球形机器人在不同摆锤角度下的不稳定特性。当机器人搭载摄像机/传感器来捕捉周围环境时，这类振荡就显得至关重要。具体而言，我们关注机器人在摆动或横向（垂直于航向）上的波动，因为这会导致机器人的轨迹偏移，并使安装的摄像机提供的视频反馈不稳定。因此，本文旨在建立机器人的动力学模型，并分析机器人执行直线运动或圆周运动时的行为。该分析揭示了机器人动力学中的耦合现象，这种耦合会引发振荡行为。由于振幅相对较小，此类振荡在文献中通常被忽略。

本文的组织结构如下。在下一节中，我们将考虑非完整约束条件，使用欧拉角和拉格朗日-达朗贝尔方程对机器人的动力学进行建模。随后一节将展示使用数值求解器对球形机器人的动力学进行仿真的结果。我们将分析这些结果，以突出运动中的振荡问题。结

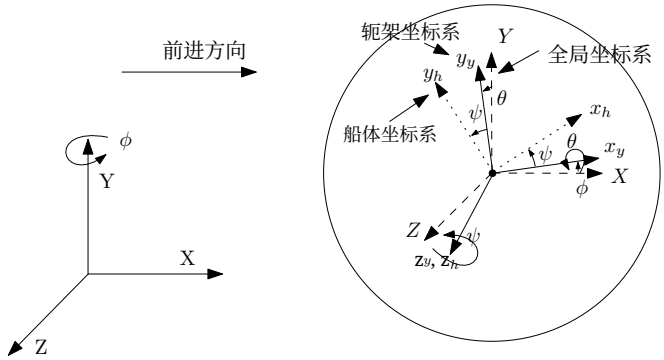


图 2. 坐标系和欧拉角 (YXZ)

尾部分将陈述本项目的结论和未来工作。

2. 建模与动力学

图1展示了摆锤驱动球形机器人。机器人由一个称为外壳的中空球体、一个容纳所有组件且称为轭架的平台，以及一个摆锤组成。摆锤通过电机安装在外壳几何中心处的轭架上。该电机使摆锤相对于轭架转动，并通过提供转矩 T_p使机器人侧向运动。轭架与外壳通过安装在轭架上的电机相连。该电机使外壳相对于轭架转动，并通过提供转矩 T_s使机器人向前运动。外壳和轭架的质心位于外壳的几何中心，而摆锤的质心距几何中心 R_p 。我们假设机器人无滑动滚动，并使用拉格朗日-达朗贝尔方程求解运动方程。

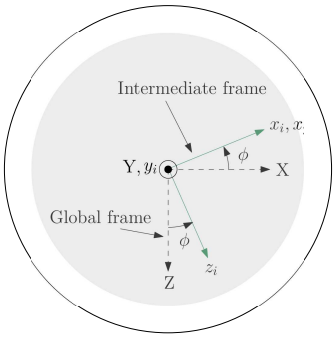
2.1 参考系与欧拉角

如图 2 所示，引入了四个参考系：一个固定于地面的全局惯性参考系 (G)，以及分别固定在轭架 (Y)、摆锤 (P) 和外壳 (H) 上的三个参考系，其原点均位于外壳的几何中心。轭架坐标系 Y 的定义满足以下约束条件：(1) 轭架的 z 轴始终与外壳的 z 轴对齐；(2) 轭架坐标系的 x 轴位于全局 XZ 平面内，即始终与地面平行。

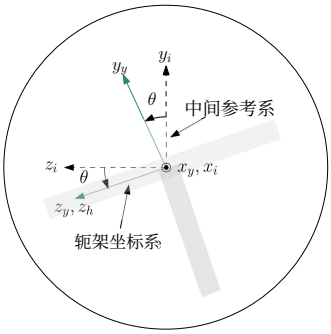
外壳在任意时刻的姿态由三个 YXZ 欧拉角 ϕ、θ 和 ψ 描述。由于增加了一个自由度，摆锤的姿态还需要另一个角度 β。坐标系之间的变换如下：

- 中间参考系 (I)：如图 3a 所示，将 G 绕其 Y 轴旋转 ϕ 角，即得到 I。 ϕ 表示机器人相对于全局 X 轴测量的航向角。该角度表征机器人的进动。

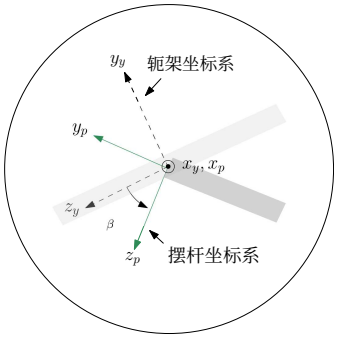
- 轭架坐标系（Y）：将 I 绕其局部 x轴x_i 旋转 θ 角度，即可得到 Y，如图3b所示。 θ表示机器人垂直于航向的侧向倾斜。该角度表征机器人的摆动。



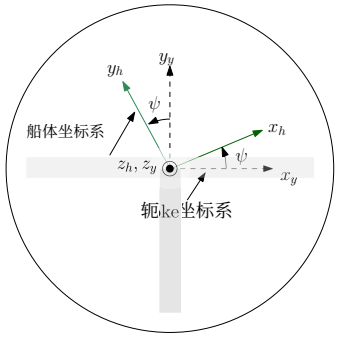
(a) 绕Y轴旋转（俯视图）



（b）绕 x_i 轴旋转（正视图）



（c）绕 x_y 轴旋转（正视图）



（d）绕 z_y 轴旋转（侧视图）

图3. 获取各坐标系的步骤

• 摆杆坐标系（P）：将 Y 绕其局部 x轴 x_y 旋转 β 角度，即可得到 P，如图3c所示。该角度表示摆锤相对于轭架的摆杆角。注意，摆锤与垂直轴 Y之间的夹角为（$\beta+\theta$）。

•船体坐标系（H）：将 Y 绕其 z 轴旋转 z_y 角度 ψ，得到如图3d所示的 H。 ψ表示机器人向前或向后移动所需的前向自旋。该角度描述了机器人的向前滚动。

2.2 旋转矩阵

旋转矩阵 ${}^{A}R_B$ 将速度、角速度和其他向量从坐标系 B 转换到坐标系 A。旋转矩阵 $R_X(\alpha)$、$R_Y(\alpha)$ 和 $R_Z(\alpha)$ 用于使向量分别绕 x、y 或 z 轴旋转角度 α。坐标系 Y、P 和 H 与 G 之间的旋转矩阵可写为:

$$ {}^{G}R_Y = R_Y\ \phi\ R_X\ \theta \quad {}^{G}R_P = ()\,()\,()\,R_Y\ \phi\ R_X\ \theta\ R_X\ \beta \quad {}^{G}R_H = R_Y\ \phi\ R_X\ \theta\ R_Z\ \psi $$

()()和()()()。

2.3 角速度

向量 $\boldsymbol{{}^{Y}\omega_X}$ 表示在 Y 坐标系中表示的 X 坐标系的角速度。通过对该坐标系与全局坐标系之间的旋转矩阵求导，得到的角速度为:

$$ \boldsymbol{{}^{Y}\omega_Y} = \begin{bmatrix}\dot{\theta} & \dot{\phi}\,cos(\theta) & -\dot{\phi}\,sin(\theta)\end{bmatrix}^{\intercal} \tag{1} $$

$$ \boldsymbol{{}^{P}\omega_P} = \begin{bmatrix}\dot{\beta}+\dot{\theta} & \dot{\phi}\,\cos(\beta+\theta) & -\dot{\phi}\,\sin(\beta+\theta)\end{bmatrix}^{\intercal} \tag{2} $$

$$ \boldsymbol{{}^{H}\omega_H} = \begin{bmatrix}\dot{\theta}\,cos(\psi) + \dot{\phi}\,cos(\theta)\,sin(\psi) \\ \dot{\phi}\,cos(\psi)\,cos(\theta) - \dot{\theta}\,sin(\psi) \\ \dot{\psi} - \dot{\phi}\,sin(\theta)\end{bmatrix} \tag{3} $$

2.4 线速度

点 P 在坐标系 $B(oxyz)$中的位置向量，以全局坐标系 $G(OXYZ)$表示，记为$\boldsymbol{{}^{G}_{B}r_P}$。轭架和外壳质心对应的位置向量为

$$ \boldsymbol{{}^{G}_{G}r_{Y_c}} = \boldsymbol{{}^{G}_{G}r_{H_c}} = [X\ R_s\ Z]^{\intercal} \tag{4} $$

其中，X 和 Z 分别是外壳中心沿全局坐标系的 x 轴和 z 轴的坐标，R_s 是球体的半径。注意，坐标系 Y、P、H 的原点均与机器人的中心重合。摆锤质心在全局坐标系中的位置向量（以全局坐标系表示）为

$$ \boldsymbol{{}^{G}_{G}r_{P_c}} = \boldsymbol{{}^{G}_{P}r_{P_c}} + \boldsymbol{{}^{G}_{G}r_{P_o}} \tag{5} $$

$$ \boldsymbol{{}^{G}_{P}r_{P_c}} = {}^{G}R_P\,\boldsymbol{{}^{P}_{P}r_{P_c}} \text{ and } \boldsymbol{{}^{P}_{P}r_{P_c}} = [0\ -R_p\ 0]^{\intercal} \tag{6} $$

$$ \boldsymbol{{}^{G}_{G}r_{P_o}} = [X\ R_s\ Z]^{\intercal} \tag{7} $$

其中，P_c 表示摆锤的质心，P_o 表示摆锤坐标系的原点，R_p 是 P_c 与 P_o之间的距离。

对位置向量求导，可得外壳、轭架和摆锤质心的速度:

$$ \boldsymbol{{}^{G}v_{H_c}} = \boldsymbol{{}^{G}v_{Y_c}} = \begin{bmatrix}\dot{X}\ 0\ \dot{Z}\end{bmatrix}^{\intercal} \tag{8} $$

$$ \boldsymbol{{}^{G}v_{P_c}} = \begin{bmatrix}\dot{X}\\0\\\dot{Z}\end{bmatrix} + \boldsymbol{{}^{G}\omega_P} \times {}^{G}R_P \begin{bmatrix}0\\-R_p\\0\end{bmatrix} \tag{9} $$

2.5 能量

现在可以将系统的动能写为

$$ K = \frac{1}{2}(m_H\|\boldsymbol{{}^{G}v_{H_c}}\|^2 + m_Y\|\boldsymbol{{}^{G}v_{Y_c}}\|^2 + m_P\|\boldsymbol{{}^{G}v_{P_c}}\|^2) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{{}^{H}\omega_H}^{\intercal}\,{}^{H}I_H\,\boldsymbol{{}^{H}\omega_H} + \boldsymbol{{}^{Y}\omega_Y}^{\intercal}\,{}^{Y}I_Y\,\boldsymbol{{}^{Y}\omega_Y} + \boldsymbol{{}^{P}\omega_P}^{\intercal}\,{}^{P}I_P\,\boldsymbol{{}^{P}\omega_P}) \tag{10} $$

其中，m_X 表示物体 X 的质量，${}^{X}I_X$ 表示物体 X 在自身参考坐标系中计算的质量转动惯量矩阵，可近似为 ${}^{H}I_H = \frac{2}{3} * diag(m_H R_s^2, m_H R_s^2, m_H R_s^2)$、${}^{Y}I_Y = \frac{1}{4} * diag(m_Y R_s^2, 2m_Y R_s^2, m_Y R_s^2)$和 ${}^{P}I_P = \frac{1}{3} * diag(m_P R_p^2, 0, m_P R_p^2)$。

系统的势能表示为

$$ V = m_P g(\boldsymbol{{}^{G}_{P}r_{P_c}} \cdot [0\ 1\ 0]^{\intercal}) + m_Y g(\boldsymbol{{}^{G}_{Y}r_{Y_c}} \cdot [0\ 1\ 0]^{\intercal}) \tag{11} $$

势能的基准点选为球体的几何中心。

2.6 非完整约束

无滑动滚动约束是非完整约束，其表达式为

$$ \boldsymbol{{}^{G}v_H} = \boldsymbol{{}^{G}\omega_H} \times \boldsymbol{{}^{G}r_H} \tag{12} $$

其中，$\boldsymbol{{}^{G}r_H} = [0\ R_s\ 0]^{\intercal}$ 表示外壳上静止点与

球心之间的向量（以全局坐标系表示），该点与地面接触。上述方程还可以进一步简化为

$$\dot{X} = R_s(\dot{\theta}sin(\phi) - \dot{\psi}cos(\phi)cos(\theta)) \tag{13}$$

$$\dot{Z} = R_s(\dot{\theta}cos(\phi) + \dot{\psi}sin(\phi)cos(\theta)) \tag{14}$$

请注意，方程 13 和 14 不能直接代入方程 8 并通过拉格朗日方法求解，因为推导拉格朗日方程时有一项重要假设：广义坐标彼此独立（Bloch，2003）。因此，约束方程写成以下形式

$$\boldsymbol{a_1}^\intercal \cdot \dot{\boldsymbol{q}} = 0 \, , \boldsymbol{a_2}^\intercal \cdot \dot{\boldsymbol{q}} = 0 \tag{15}$$

其中

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \dot{X} & \dot{Z} & \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} & \dot{\beta} \end{bmatrix}^\intercal \tag{16}$$

是广义坐标的时间导数向量，而 $\boldsymbol{a_1}$ 和 $\boldsymbol{a_2}$ 是

$$\boldsymbol{a_1} = [1 \ 0 \ 0 \ -R_s sin(\phi) \ R_s cos(\phi)cos(\theta) \ 0]^\intercal \tag{17}$$

$$\boldsymbol{a_2} = [0 \ 1 \ 0 \ -R_s cos(\phi) \ -R_s sin(\phi)cos(\theta) \ 0]^\intercal \tag{18}$$

2.7 拉格朗日-达朗贝尔方程

系统的拉格朗日量为 $L = K - V$。非完整系统的拉格朗日-达朗贝尔方程为

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \tag{19}$$

其中，Q 为广义力，λ_1 和 λ_2 为拉格朗日参数，a_1 和 a_2 为向量，由方程 17、18 给出。由于 T_s 是施加于前向运动的转矩，T_p 是施加于摆锤的转矩，因此 Q 由 $[0 \, 0 \, 0 \, 0 \, T_s \, T_p]^\intercal$ 给出。将方程改写为各个广义坐标对应的形式，

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}) = \lambda_1 \tag{20}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{Z}}) = \lambda_2 \tag{21}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \tag{22}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -R_s sin(\phi)\lambda_1 - R_s cos(\phi)\lambda_2 \tag{23}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = R_s cos(\phi)cos(\theta)\lambda_1 - R_s sin(\phi)cos(\theta)\lambda_2 + T_s \tag{24}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}}) - \frac{\partial L}{\partial \beta} = T_p \tag{25}$$

将方程 20–21 代入方程 23–24，并结合方程 13 和 14，可得动力学模型。利用微分链式法则，方程可整理为如下形式：

$$M(\mathbf{x}, t)\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t) \tag{26}$$

其中，x 为状态向量，定义如下：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi & X & Z & \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} & \dot{X} & \dot{Z} & \beta & \dot{\beta} \end{bmatrix}^\intercal \tag{27}$$

使用内置的 MATLAB 求解器 ODE15s，对方程 26 所描述的球形机器人动力学进行仿真。

3. 摆动与进动分析

本节使用方程 26 给出的动力学模型，分析机器人在转向动作中的系统响应。通过向前滚动转矩 T_s 和摆锤转矩 T_p to控制机器人，分别命令其达到特定的前向速度 $\dot{\psi}$ 和相对于轭架的摆杆角 β。我们设计了一个摆锤控制器，使用 T_p，其中包含一个前馈项，用于抵消重力转矩；还包含一个反馈项，由高增益比例微分控制器构成，以便快速使 β 稳定到期望值。我们还设计了一个速度控制器，使用 T_s，其反馈项采用高增益比例控制器，使机器人开始以期望的前向速度 $\dot{\psi}$移动。两个控制器采用高增益，有助于将重点放在稳态响应上，而不是达到稳态前的瞬态过程。

我们考虑这样一种情况：机器人开始沿直线运动。随后，使摆锤偏转至某一角度，从而产生摆动，如图 4c 所示；与此同时，机器人沿圆弧运动。最后，将摆锤恢复至其初始构型。该情况表示机器人的转向运动，如图 4a 所示。

根据文献中讨论的稳态分析，我们可以预期，机器人执行上文介绍的转向运动时，会先沿直线行进，再绕圆周转向，最后恢复直线行进。实际上，正如实验[1]中所观察到的，球形机器人在行进过程中会发生晃动。

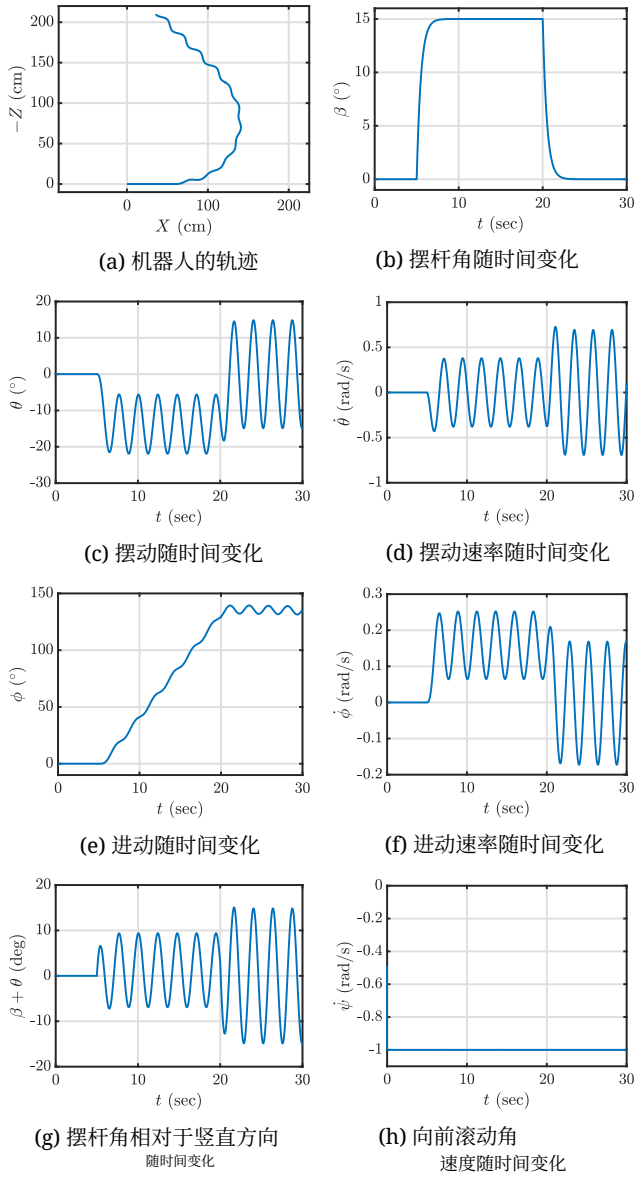
图 4 所示的系统响应表明，我们的模型在定性上捕捉到了球形机器人表现出的摆动和进动。我们的数学模型将摆动（图 4c）描述为轭架 x轴周围的欧拉角θ，将进动（图 4e）描述为全局 y 轴周围的欧拉角 ϕ。因此，摆动速率（图 4d）和进动速率（图 4d）分别为 $\dot{\theta}$和 $\dot{\phi}$。

在接下来的小节中，我们将分别分析构成机器人转向动作的初始直线运动、圆周运动和最后的直线运动。在此设置中，β的固定值意味着摆锤不会相对于轭架摆动。请注意，摆锤与竖直方向的夹角（$\theta + \beta$）决定了机器人所受的重力力矩$\boldsymbol{\tau}$，该力矩沿轭架的 x轴方向作用。这个转矩是驱动机器人进动的主要因素之一。模拟的三维可视化[2] 使用广义坐标 ϕ、θ、ψ、β、X 和 Z展示球形机器人的姿态。

3.1 初始直线运动：$t < 5$ 秒

通过使用T_s赋予机器人 1 rad/s 的前进角速度 $\dot{\psi}$，使其偏离初始平衡构型。如图4h所示，机器人很快达到该速度。机器人以这一速度沿直线继续运动 5 秒，如图4a所示。X_0 也保持

[1] 视频 https://tiny.cc/SphericalBotMotion 展示了球形机器人在现实中的转向动作，以及使用本文提出的动力学模型生成的三维仿真结果。[2] 参见脚注 1



(a) 机器人的轨迹 (b) 摆杆角随时间变化

(c) 摆动随时间变化 (d) 摆动速率随时间变化

(e) 进动随时间变化 (f) 进动速率随时间变化

(g) 摆杆角相对于竖直方向随时间变化 (h) 向前滚动角速度随时间变化

图 4. 转向运动分析

非零，这是由于纯滚动约束。此期间机器人没有晃动或进动，如图4c和图4e所示。摆锤也保持与竖直方向对齐（参见图4g），并且由于 β 最初为零，摆锤保持与轭架垂直（参见图4b）。

3.2 圆周运动：*5* 秒 $< t <$ *20* 秒

机器人相对于轭架的摆杆角 β 在沿直线运动 5 秒后，通过改变 T_p，变为 15° 。随后，在一段时间内保持 β 不变，如图（参见图4b）所示。机器人前向速度 ψ 保持不变（参见图4h）。因此，机器人开始描绘圆形轨迹，如图4a所示。

摆动 图4c展示了 θ 随时间的变化。由于摆锤电机通过改变摆杆角扰乱了机器人的稳定构型，机器人会发生摆动。为满足纯滚动约束， θ 的振荡会产生横向位移

当机器人沿圆周运动时，横向位移垂直于机器人的航向。

进动 图4e展示了 ϕ 随时间的变化。它随时间不断增大，同时还包含振荡分量。摆锤重量产生的转矩 $\boldsymbol{\tau}$ 同时促成摆动和进动。在前进速度 $\dot{\psi}$较高时，进动占主导地位；此时 $\boldsymbol{\tau}$ 大致垂直于角动量 L，而角动量沿轭架的 z轴方向，并因 $\dot{\psi}$不为零而存在。在前进速度较低时，摆动占主导地位；此时 $\boldsymbol{\tau}$促使 θ发生变化。$\dot{\psi}$在这种情况下，如果 θ 不为零，机器人的 L 会变为近似零，或与轭架的 x轴平行。在此处进行的仿真中，为观察这两种行为的组合，对中等前进速度 $\dot{\psi}$ 进行了仿真（参见图4h）。

ϕ 的线性递增趋势可归因于（$\beta + \theta$）的平均值非零，如图4g所示。这使摆锤与竖直方向所成角度的平均位置不为零。因此， $\boldsymbol{\tau}$ 基本保持不变。于是，机器人沿半径近似恒定的圆弧进动。 ϕ 的振荡是由于（$\beta + \theta$）围绕非零平均位置呈正弦变化，如图4g所示。这意味着摆-轭架-船体组件围绕其平均位置振荡，导致 $\boldsymbol{\tau}$出现轻微波动，进而使机器人的进动发生变化。

3.3 最终直线运动：$t >$ *20* 秒

通过改变 T_p，最终将机器人的摆锤调整至与轭架垂直，并将 β 改回 0° 。在仿真剩余时间内，保持 β的位置不变（参见图4b）。机器人前向速度 $\dot{\psi}$ 保持不变（参见图4h）。因此，如图4a所示，机器人沿着其运行过的圆弧的切线方向做直线运动。

摆动图4c展示了 θ 随时间的变化。尽管摆锤变得与轭架垂直，机器人仍会振荡，因为它已经偏离了平衡位置。请注意，其摇摆振幅大于沿圆周运动时的振幅。为了满足纯滚动约束，机器人的摆动还引发了垂直于其航向的横向运动，这一点在图4a中可以观察到。

进动 图4e显示了 ϕ 随时间的变化。由于其振荡特性， ϕ 随时间的净变化平均为零。在此仿真中，与 θ_0 相比，角动量 L 主要由 ψ_0 主导，差异达一个数量级（参见图4h和图4d）。因此，摆锤产生的重力力矩 $\boldsymbol{\tau}$ 近似垂直于 L，从而导致机器人进动。然而，正如图4g所示，$(\beta+\theta)$的值随时间平均为0，力矩矢量不断反转方向，因此进动随时间的净变化为零。

4. 结论与未来工作

本文探讨了结合无人机与球形机器人开发新型应用的可能性。为此，我们提出了一种摆锤驱动球形机器人的动力学模型，该模型考虑了前向运动与侧向运动之间的耦合。我们的模型成功捕捉了内部组件的振荡。在球形机器人的应用背景下，我们定义、分析并解释了两种重要的振荡类型，即摆动和进动。球形机器人运动的可视化工具（仿真设置）进一步有助于定性比较系统响应与实际机器人的行为。对这些振荡进行建模，对于今后设计稳定支架控制器、以便在球形机器人上安装传感器至关重要。航向校正、轨迹校正、摆动控制等控制器能够拓展球形机器人的用途。例如，若以 ϕ 和 θ 作为输出，分别即可实现航向控制器和摆动控制器。

参考文献

Antol, J. (2005). 一种用于行星表面探测的新型车辆——火星风滚草漫游车。载于第*1*届太空探索会议：继续发现之旅，2520。Bhattacharya, S. 和 Agrawal, S.K. (2000a). 球形滚动机器人的设计、实验与运动规划。载于*2000*年*ICRA*论文集。千年会议。*IEEE*国际机器人与自动化会议。研讨会论文集（目录号*00CH37065*），第2卷，1207–1212，第2卷。doi:10.1109/ROBOT.2000.844763。Bhattacharya, S. 和 Agrawal, S.K. (2000b). 球形滚动机器人：设计与运动规划研究。*IEEE*机器人与自动化汇刊，16(6)，835– 839。doi:10.1109/70.897794。Bloch, A. (2003). 非完整力学与控制。Springer-Verlag New York。Cai, Y., Zhan, Q. 和 Xi, X. (2012). 球形移动机器人的路径跟踪控制。《机构与机器理论》，51，58–73。Crossley, V.A. (2006). 球形滚动机器人设计的文献综述。宾夕法尼亚州匹兹堡，1–6。Dwaracherla, V., Thakar, S., Vachhani, L., Gupta, A., Yadav, A. 和 Modi, S. (2019). 利用位置反馈实现球形机器人点到点导航的运动规划。*IEEE/ASME*《机电一体化汇刊》，24(5)，2416–2426。doi:10.1109/TMECH.2019.2934789。Hajos, G., Jones, J., Behar, A. 和 Dodd, M. (2005). 行星探测用风力驱动漫游车概述。载于第*43*届*AIAA*航空航天科学会议暨展览，244。Halme, A., Schonberg, T. 和 Wang, Y. (1996). 球形移动机器人的运动控制。载于第*4*届*IEEE*高级运动控制国际研讨会论文集——*AMC '96*——*MIE*，第1卷，259–264，第1卷。doi: 10.1109/AMC.1996.509415。Kalita, H., Gholap, A.S. 和 Thangavelautham, J. (2020). 用于月球和火星极端环境探测的跳跃机器人动力学与控制。载于*2020*年*IEEE*航空航天会议，1–12。IEEE。Kayacan, E., Bayraktaroglu, Z.y. 和 Saeys, W. (2012). 球形滚动机器人的建模与控制：一种解耦动力学方法。*Robotica*，30(4)，671– 680。doi:10.1017/S0263574711000956。网址：http://dx.doi.org/10.1017/S0263574711000956。Lee, J. 和 Park, W. (2013). 球形滚动机器人的设计与路径规划。载于*ASME*国际机械工程大会暨展览会，第56246卷，V04AT04A028。美国机械工程师学会。Li, T. 和 Liu, W. (2011). 用于环境探索的多形态风力驱动球形机器人设计与分析。《航空航天工程学报》，24(1)，135–139。Li, T., Wang, Z. 和 Ji, Z. (2012). 内外驱动球形机器人的动力学建模与仿真。《航空航天工程学报》，25(4)，636–640。Liu, D., Sun, H. 和 Jia, Q. (2008). 一类球形移动机器人：采用反馈线性化实现前进运动控制。载于*2008*年第*2*届国际航天航空系统与控制研讨会，1–6。IEEE。Mahboubi, S., Seyyed Fakhrabadi, M.M. 和 Ghanbari, A. (2013). 一种新型球形移动机器人的设计与实现。《智能与机器人系统学报》，71(1)，43–64。Michaud, F. 和 Caron, S. (2002). Roball，滚动机器人。自主机器人，12(2)，211–222。doi:10.1023/A:1014005728519。网址：http://dx.doi.org/10.1023/A:1014005728519。Raura, L., Warren, A. 和 Thangavelautham, J. (2017). 用于崎岖地形穿越的球形行星机器人。载于*2017*年*IEEE*航空航天会议，1–10。IEEE。Rosen, A. (2000). 用于分析滑动与滚动问题的修正拉格朗日法。《应用力学杂志》，67，697。doi:10.1115/1.1328088。Tomik, F., Nudehi, S., Flynn, L.L. 和 Mukherjee, R. (2012). spherobot的设计、制造与控制：一种球形移动机器人。《智能与机器人系统学报》，67(2)，117–131。Ylikorpi, T., Forsman, P., Halme, A., Saarinen, J. 等 (2014a). 摆驱动球形机器人的解耦动力学模型统一表示。载于第*28*届欧洲建模与仿真会议论文集。ECMS。Ylikorpi, T., Forsman, P., Halme, A. 等 (2014b). 球形机器人运动建模中的陀螺进动。载于第*28*届欧洲建模与仿真会议论文集。ECMS。Yoon, J.C., Ahn, S.S. 和 Lee, Y.J. (2011). 配备新型双摆驱动机构的球形机器人。载于*2011*年第*15*届*IEEE*智能工程系统国际会议，275–279。IEEE。