arXiv:2301.05877v1 [math.GT] 14 Jan 2023

相对非正浸入

Jens Harlander、Stephan Rosebrock

2023年1月18日

摘要

如果对于每个组合浸入 $X \to K$，其中 X 有限、连通且不允许坍缩，并且要么 $\chi(X) \leq 0$，要么 X 是一个点，则 2-复形 K 具有塌缩非正浸入。这个概念归功于 Wise，他还证明了这一性质意味着基本群 $\pi_1(K)$ 局部可指示。本文研究塌缩非正浸入的相对版本，该版本可应用于 2-复形对 (L, K)：如果对于每个组合浸入 $f\colon X \to L$，其中 X有限、连通且不允许坍缩，并且要么 $\chi(X) \leq \chi(Y)$，其中 Y 是原像 $f^{-1}(K)$ 的本质部分，要么 X 是一个点，则该 2-复形对具有相对塌缩非正浸入。我们证明，在某些条件下，传递律成立：如果 (L, K) 具有相对塌缩非正浸入，且 K 具有塌缩非正浸入，那么 L 具有塌缩非正浸入。本文部分缘于以下尚未解决的问题：约化单射标记有向树是否具有塌缩非正浸入？对于某些重要的特殊情形，我们给出了肯定答案。

关键词： 局部可指示性；非正浸入；2-复形对；带标签的有向树

数学主题分类： 20F65；20E25；20F05；57M05

1 引言

假设 $\mathcal{P}$ 是可归属于某个 2-复形的一种性质。 $\mathcal{P}$ 的相对版本可应用于 2-复形对（L， K），其中 K是 L的子复形，这可能成为一种强有力的工具，尤其是在传递律成立时：如果（L， K）相对于 K 具有性质 $\mathcal{P}$，且 K 具有性质 $\mathcal{P}$，那么 L 就具有性质 $\mathcal{P}$。一个具有相对版本且满足传递律的性质的好例子是

“消失的约化同调”。在[5] 和 [6] 中，我们使用组合无球性的相对版本证明，单射标记有向树是非球面的。这回答了交替情形下带状圆盘补空间长期悬而未决的非球面性问题。本文研究相对非正浸入。

复形中的一个 n-胞腔称为**自由的**，如果它恰好在唯一一个$(n+1)$-胞腔的粘接映射中使用一次。若一个胞腔的边界包含一个自由胞腔，则可以将其塌缩而不改变该复形的同伦类型。若一个 2-复形映射 $f\colon X \to K$ 将开胞腔同胚地映到开胞腔，则称其为**组合的**。若它是局部单射的，则称其为浸入。

定义 1.1。若对每个组合浸入 $X \to K$，其中 X 是有限、连通且没有自由顶点或边的，或者 $\chi(X) \leq 0$，或者 X 是一个点，则称 2-复形 K 具有**塌缩非正浸入性质**。

Wise 定义了非正浸入的若干变体。见 [17]中的定义 1.2。另见 [16]。除此之外，Wise 还证明了：如果 K 具有非正浸入性质，那么当群 $\pi_1(K)$非平凡时，它是局部可指示的。

本质部分的 2-复形由所有 2-胞腔以及用于这些 2-胞腔的粘附路径中的边组成。

定义 1.2。设 L 是一个 2-复形，K 是一个子复形。若对于每个组合浸入 $f\colon X \to L$，其中 X 有限、连通且没有自由顶点或边，下列条件之一成立，则 (L, K) 具有**相对塌缩非正浸入**：$\chi(X) \leq \chi(Y)$，其中 Y 是原像 $f^{-1}(K)$ 的本质部分；或者 X 是一个点。

权重检验及其更强的前身——着色检验——是研究 2-复形无球性的主要工具。参见 Gersten [4] 和 Sier- adski [15]。这些检验可以应用于带角 2-复形。着色检验及其一个相对变体将在下一节中详细说明。Wise [16] 的一个重要观察指出，满足着色检验的带角 2-复形具有塌缩非正浸入。我们不知道我们的相对塌缩非正浸入版本在一般情况下是否具有传递性。假设 (L, K) 具有相对塌缩非正浸入，且 K 具有塌缩非正浸入。我们希望证明 L 具有塌缩非正浸入。因此，假设 $f\colon X \to L$ 是一个组合浸入，其中 X 没有自由顶点或边，且 X 不是一个点。令 Y为 $f^{-1}(K)$ 的本质部分。令 $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$，其中 Y_i 是连通分支。那么

$$\chi(X) \leq \chi(Y_1) + \ldots + \chi(Y_n).$$

现在 $f\colon\ Y_i \to K$ 是一个组合浸入，并且由于我们假设 K具有塌缩非正浸入，我们有 $\chi(Y_i) \le 0$，除非 Y_i 坍缩为一个点。问题就在这里：一般而言，我们没有办法避免将 Y的连通分支坍缩。然而，在某些情况下，我们可以控制这一情形。以下是我们的主要结果之一（参见定理 3.5）；相关术语将在接下来的两节中详细定义：

设 L 是一个标准 *2*-复形， $K \subseteq L$ 是其子复形，其中所有 *2*-胞腔¯都沿着指数和为零的路径附着。设 L 由 L 经¯折叠 K 到单边 y得到。假设 L 具有满足着色检验的零/一角结构，且 y^+ 和 y^- 位于lk_0（v, L）的不同连通分支中。那么（L, K）具有相对塌缩非正浸入。此外，若 K 具有塌缩非正浸入，则 L也具有塌缩非正浸入。

前文已提到，作者曾运用组合非球面的相对概念证明，约化单射带标定向树（LOT）是顶点非球面（VA）的，因而也是非球面的。本研究的动机在于探究约化单射 LOT 是否具有非正浸入。对于素情形，即 LOT 不含子标记有向树时，这一点已为人所知；而我们在一个重要但特殊的非素情形下，对这一问题给出了肯定答案。本文最后一节将介绍与 LOT 相关的术语及其部分历史。

2 着色检验

设 K 是一个 2-复形。若 v 是 K 的一个顶点，则 *v* 处的链接 $lk(v, K)$ 是 v 的正则邻域的边界。它是一个图，其边来自 2-胞腔的角。因此，我们将 $lk(v, K)$ 的边称为 v处的角。如果我们给 K 的 2-胞腔的角 c 赋予数值 $\omega(c)$，就得到一个带角 *2-* 复形。带角 2- 复形中的曲率定义如下。若 v 是 K 的一个顶点，则 $\kappa(v, K)$ 在 v 处的曲率为

$$\kappa(v, K) = 2 - \chi(lk(v, K)) - \sum \omega(c_i),$$

其中求和遍历 v 处的所有角。若 d 是 K 的一个 2-胞腔，则 $\kappa(d, K)$ 中 d 的曲率为

$$\kappa(d, K) = \sum \omega(c_j) - (|\partial d| - 2),$$

其中求和遍历 d 中的所有角，而 $|\partial d|$ 是 2-胞腔边界上的边数。组合高斯-博内

定理指出

$$2\chi(K) = \sum_{v\in K} \kappa(v,K) + \sum_{d\in K} \kappa(d,K).$$

这最初由 Ballmann 和 Buyalo [1], 证明，后来 McCammond 和 Wise [12]也发现了这一点。若映射 $X \to K$ 将开胞腔同胚地映射到开胞腔，则称其为组合映射。注意，若 K 是一个带角 2-复形，则可以将 K 中 2-胞腔的角拉回，从而使 X 成为一个带角 2-复形。我们称 X 上的这一角结构为由该组合映射诱导的角结构。

所有角度均为 0 或 1 的带角 2-复形称为零角/一角二维复形。我们用 $lk_0(v,\ K)$表示 $lk(v,\ K)$的子图，它由 $lk(v,\ K)$的顶点以及角度为 0 的角组成。以下着色检验由 Sieradski [15]提出。

定义 2.1。（着色检验）设 K 是一个零角/一角二维复形。若 K 满足着色检验，则

1. 每个 2-胞腔的曲率为 ≤ 0;
2. 对于每个顶点 v: 如果 $c_1\cdots c_n$ 是 $lk(v,\ K)$ 中的约化圈，那么 $2-\sum_{i=1}^{n}\omega(c_i) \leq 0$。

定理 *2.2. </style}*零角/一角二维复形 K 满足着色检验，当且仅当

1. 每个 *2*-胞腔的曲率为 ≤ 0;

2. 对每个顶点 v， $lk_0(v,K)$ 都是森林;

3. 角度为1 的角，其两个顶点不同时属于 $lk_0(v,K)$ 的同一个连通分支。

证明很直接。

定义 2.3。设 Λ 是一个图。

- 边圈 $e_1\cdots e_n$在 Λ中是约化的，如果不存在 e_i使得 $e_{i+1} = \bar{e}_i$ (i 模 n)，其中 $\bar{e}_i$ 是反向定向的边 e_i 。边圈 $e_1\cdots e_n$ 在 Λ 中是同调约化的，如果不存在一对 e_i，e_j 使得 $e_j = \bar{e}_i$。

设 K 是一个 2-复形。

- 设 S 为 2-球面。球面图 是一个组合映射f: $S \to K$。若对于每个顶点 $v \in S$, f 将 $lk(v)$映射为约化圈，则称其为约化的。若对于每个顶点 $v \in S$, f 将$lk(v)$映射为同调约化圈，则称其为顶点约化的。

- K 若不存在以 K 为上的约化球面图，则称其为图示可约（*DR*）。若不存在以 K 为上的顶点约化球面图，则称 K 为顶点非球面（*VA*）。

设 (L, K) 为一个 2-复形对。

- 若以 L 为上的每个约化球面图都是以 K 为上的图，则该对是相对*DR*。若以 L 为上的每个顶点约化球面图都是以 K 为上的图，则该对是相对顶点非球面。

- 组合映射 f: $X \to L$ 是 K-薄的，如果 $f^{-1}(K)$ 的本质部分 Y 没有内部顶点；这意味着对于每个顶点 $v \in X$, $lk(v, Y) \neq lk(v, X)$。

定理 2.4。若 K 通过着色检验，则它是 *DR* 的，并且具有非正浸入。

DR 部分由 Sieradski [15] 证明，非正浸入由 Wise [16]证明。

定义 2.5。设 Λ 是一个图, Λ' 是一个子图，两者均允许不连通。则

- Λ 是相对于.....的森林 Λ'，如果 Λ中的每个约化圈都包含在Λ'中。 Λ 是相对于.....的树 Λ'，如果此外 Λ是连通的。

- Λ 是相对于 Λ' 的强森林，当且仅当它是相对于 Λ' 的森林，并且对于 Λ的每个连通分支 C， $C \cap \Lambda'$ 要么为空，要么连通。

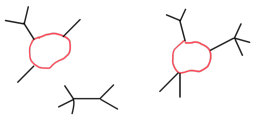


图 1：相对于 Λ' （红色）的强森林 Λ。

命题 2.6。 若 Λ 是相对于 Λ' 的森林，且 C 是Λ 的一个连通分支，使得 $C \cap \Lambda' \neq \emptyset$，那么 $C \cap \Lambda'$ 至多有一个连通分支不是树。令 Λ/Λ' 为将 Λ' 全部识别为一个单顶点后得到的商图。则以下条件等价:

1. Λ 是相对于 Λ'的强森林;
2. 商图 Λ/Λ' 是森林。

证明。 设 C 是 Λ的一个连通分支。假设 $C \cap \Lambda'$ 包含两个不是树的连通分支 A和 B。设 α 和 β 分别是 A 和 B 中的约化闭路。设 γ 是连接 α 和 β的约化路径。 $\alpha\gamma\beta\bar{\gamma}$ 的一个约化版本是 Λ 中的一条约化闭路，且不完全包含在 Λ'中，这与 Λ是相对于 Λ'的森林这一事实矛盾。

假设 Λ 是相对于 Λ' 的强森林，并设 C 是 Λ的一个连通分支。由于 $C \cap \Lambda'$ 是连通的（或为空），且 C 是相对于$C \cap \Lambda'$的树，因此商 $T_C = C/C \cap \Lambda'$ 显然是一棵树。现在， Λ/Λ' 由森林 $\bigcup T_C$ （不交并）通过识别来自不同 T_C的单个顶点而得到。这构成一个森林。

接下来假设 Λ/Λ' 是一个森林。令 C 为 Λ的一个连通分支。显然, $C \cap \Lambda'$ 是连通的或为空，因为 $C/C \cap \Lambda'$ 是一棵树。令q: $C \to C/C \cap \Lambda'$ 为商映射。假设 $\gamma = e_1 \dots e_n$是 C 中的一条约化闭路，且并非完全包含在 $C \cap \Lambda'$中。则 $q(\gamma) = q(e_1) \dots q(e_n)$ 是 $C/C \cap \Lambda'$中的一条闭路，并且确实包含一条边。注意，若 $e_i \in \Lambda'$，则从序列 $q(e_1) \dots q(e_n)$中省略 $q(e_i)$。由于$q(e_1) \dots q(e_n)$ 是树中的一条路径，它至少包含两个度为 1 的顶点，因此其中有一个度为 1 的顶点不是 $C \cap \Lambda'$。经过循环重排后，不妨设 $q(e_1)$是一条边，它包含一个不是 $C \cap \Lambda'$的度为 1 的顶点。但这样一来， e_1 就是 C 中的一条边，且包含一个度为 1 的顶点，这意味着 $e_1 \dots e_n$ 不是约化的。事实上， $e_n = \bar{e}_1$。矛盾。 □

定义 2.7. (相对着色检验) 令 K 为零/一带角 2-复形 L的一个子复形。那么，(L, K) 满足相对着色检验当且仅当

1. 每个 2-胞腔 $d \in L - K$ 的曲率为 ≤ 0;

2. 对每个顶点 v: 如果 $c_1 \cdots c_n$ 是 $lk(v, L)$ 中未完全包含于 $lk(v, K)$ 的约化圈，那么

$$2 - \sum_{i=1}^{n} \omega(c_i) \leq 0.$$

定理 2.8。 零角/一角对 (L, K) 满足相对着色检验，当且仅当

1. 每个 *2*-胞腔 $d \in L - K$ 的曲率为 ≤ 0;

2. 对每个顶点 v: $lk_0(v, L)$ 是相对于 $lk_0(v, K)$的森林;

3. 如果 *2*-胞腔 $d \in L$ 中角度为 1 的角 c 的顶点位于 $lk_0(v, L)$ 的同一个连通分支中，那么 $d \in K$ 和 c 的顶点位于 $lk_0(v, K)$ 的同一个连通分支中。

证明。 假设（L, K）满足相对着色检验。则条件 2 和 3 成立，否则可以构造一个由角组成的约化圈 $\lambda = c_1 \dots c_n$，它不完全包含在 $lk(v, K)$ 中，且满足 $\omega(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \omega(c_i) = 0$ 或 $\omega(\lambda) = 1$。

假设定理的条件成立。令 $\lambda = c_1 \dots c_n$为 $lk(v, L)$ 中的一个约化圈，且不完全包含在 $lk(v, K)$ 中。根据定理 2.8 陈述中的条件 2， $\omega(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \omega(c_i) = 0$ 不可能成立。若 $\omega(\lambda) = 1$ ，则存在 $1 \leq i \leq n$ ，使得 $\omega(c_i) = 1$ 且$\omega(c_j) = 0$ ，其中 $j \neq i$。于是根据条件 3， c_i 是K 的一个 2-胞腔中的角，其顶点 p 和 q 位于 $lk_0(v, K)$ 的同一个连通分支中。令 λ' 为 $lk_0(v, K)$ 中一条连接 p 和 q的角路径。则$c_i \dots c_{i-1} \lambda' c_{i+1} \dots c_n$的约化版本违反条件 2。因此 $\omega(\lambda) \geq 2$。 □

相对着色检验对无球性和非正浸入有一定影响，但不像经典着色检验情形那样直接。

定理 2.9。 设(L, K) 是一个带有零/一角结构的 *2*-复形对，满足相对着色检验，并且对所有 *2*-胞腔$d \in L$都有 $\kappa(d, L) \leq 0$ 。若 $f\colon S \to L$ 是一个 K-薄球面图，则它不是约化的。

证明。 假设 $f\colon S \to L$ 是一个约化的 K-薄球面图。将零/一角结构拉回到 S。于是对 S的每个 2-胞腔 d，都有 $\kappa(d,S) \leq 0$ 。设 v是 S中的一个顶点。设 $c_1 \cdots c_n$为构成 v的链接的角。由于 f是 K-薄的，因此 $f(c_1) \cdots f(c_n)$ 是 $lk(f(v), L)$中的一个约化圈，且不完全包含于 $lk(f(v), K)$中。由此可得$\kappa(v,S) \leq 0$。我们得到

$$4 = 2\chi(S) = \sum_{v\in S} \kappa(v,S) + \sum_{d\in S} \kappa(d,S) \leq 0$$

并且已经得出了矛盾。 □

在对这一对（L, K）施加某些条件后，可以证明这一结果意味着（L, K）是相对DR的。更多详情请参见 [6]。

3 强相对着色检验

鉴于定理 2.8，我们将相对着色检验定义为一个更强的版本，如下所示：

定义3.1。 零角/一角对（L, K）满足强相对着色检验，如果

1. 每个2-胞腔 $d \in L$ 的曲率都是 ≤ 0;
2. 对每个顶点 $v \in L$： $lk_0(v, L)$ 是相对于 $lk_0(v, K)$ 的强森林;
3. 如果 2-胞腔 $d \in L$ 中的角 c 的角度为 1，且其顶点都属于 $lk_0(v, L)$ 的同一个连通分支，那么 $d \in K$。

注意，如果 c 是条件 3 中所述的角，且其顶点都属于 $lk_0(v, L)$ 的同一个连通分支 C ，那么其顶点自动也属于 $lk_0(v, K)$ 的同一个连通分支，因为根据条件 2， $C \cap lk_0(v, K)$ 是连通的。

以下观察在全文中都很有用。

命题 3.2. 设 (L, K) 是满足（强）相对着色检验的零角/一角二维复形对。设 $f\colon X \to L$ 是一个组合浸入，并设 Y 是 $f^{-1}(K)$ 的本质部分。若在 (X, Y)上赋予由 (L, K)诱导的角结构，则 (X, Y) 满足（强）相对着色检验。

证明。由于 $f\colon X \to L$ 是一个组合浸入，根据定义 2.7 可立即得出 (X, Y) 满足相对着色检验。因此，根据定理 2.8，定义3.1中的条件1和3对 (X, Y) 成立，并且对于每个顶点 x, $lk_0(x, X)$ 都是相对于 $lk_0(x, Y)$ 的森林。假设 (L, K) 满足强相对着色检验。为了证明 (X, Y) 满足强相对着色检验，唯一需要做的是证明，对于每个顶点 x, $lk_0(x, X)$ 不仅是相对于 $lk_0(x, Y)$ 的森林，而且还是强森林。设 $\Lambda = lk_0(v, L)$ 和 $\Lambda_K = lk_0(v, K)$。设 $\Lambda' = lk_0(x, X)$,$\Lambda'_Y = lk_0(x, Y)$，以及 $\Lambda'_{f^{-1}(K)} = lk_0(x, f^{-1}(K))$，其中 $f(x) = v$。我们可以把 Λ' 看作 Λ的一个子图。于是有

$$\Lambda'_Y \subseteq \Lambda'_{f^{-1}(K)} \subseteq \Lambda' \subseteq \Lambda.$$

注意到

$$\Lambda' \cap \Lambda_K = \Lambda'_{f^{-1}(K)}.$$

容易看出，Λ' 是相对于 $\Lambda_{f^{-1}(K)}$的强森林。事实上，商图 $\Lambda'/(\Lambda' \cap \Lambda_K)$ 是 Λ/Λ_K 的子图，而后者是森林，因为 Λ 是相对于 Λ_K的强森林。这里我们使用命题 2.6。因此，$\Lambda'/(\Lambda' \cap \Lambda_K)$ 是森林，并且再次根据命题 2.6，Λ' 是相对于 $\Lambda'_{f^{-1}(K)}$的强森林。

由于 Y 是 $f^{-1}(K)$ 的本质部分，我们知道

$$\Lambda'_{f^{-1}(K)} = \Lambda'_Y \text{ or } \Lambda'_{f^{-1}(K)} = \Lambda'_Y \cup \{p_1, \ldots, p_n\},$$

其中 p_i 是 Λ'_Y中不包含的点。假设 C 是 Λ' 的一个连通分支，并且 $C \cap \Lambda'_Y \neq \emptyset$. 那么 $C \cap \Lambda'_{f^{-1}(K)} \neq \emptyset$，因此 $C \cap \Lambda'_{f^{-1}(K)}$ 是连通的，因为 Λ' 是相对于 $\Lambda'_{f^{-1}(K)}$的强森林。由此可得

$$C \cap \Lambda'_Y = C \cap \Lambda'_{f^{-1}(K)}$$

因此 $C \cap \Lambda'_Y$ 是连通的。 □

定理 3.3。 如果(L, K) 满足强相对着色检验，那么它具有相对塌缩非正浸入。

我们将在下一节证明这个定理。

设 L 为一个 2-复形。我们假设其 1-骨架是一个有向图。如果 e 是 L 的一条边，我们用 e^+ 表示靠近 e 起点的点，用 e^- 表示靠近 e终点的点。设 v 为 L 的一个顶点，并令 $E(v)$ 表示起点或终点为 v的边集。我们分别用 $lk^+(v, L)$ 和

$lk^-(v,\ L)$ 表示由 e^+张成的 $lk(v,\ L)$ 的子图，以及 e^-、 $e \in E(v)$。既非正也非负的角（即不属于$lk^+(v,\ L) \cup lk^-(v,\ L)$的角）称为混合角。

对于 L，存在一种标准零／一角赋值：将正角和负角的角度赋为 0，将混合角的角度赋为 1。注意，在这种情况下，我们有

$$lk_0(v, L) = lk^+(v, L) \cup lk^-(v, L),\ lk^+(v, L) \cap lk^-(v, L) = \emptyset.$$

第二个陈述始终成立，且与角赋值无关。

假设 L 是一个 2-复形，而 K 是一个子复形，其中所有 2-胞腔都沿着指数和为零的闭路径附着。我们将 2-胞腔附着到 K 中每一条指数和为零的闭路径上，无论其是否约化，从而得到一个更大的 2-复形 K。令 L 为 L 与这些新增的 2-胞腔的并。我们称 $(\hat{}L,\ \hat{}K)$ 为 $(L,\ K)$ 的极大扩张。注意， $lk^+(v,\ \hat{}K)$ 包含一个以其顶点为顶点的导出子图， $lk^-(v,\ K)$ 也如此。特别地，$lk^+(v,\ \hat{}K)$ 和 $lk^-(v,\ \hat{}K)$ 都是连通的。

定理 3.4. 设 L 是一个 *2*-复形， K 是其子复形，其中所有 *2*-胞腔都沿着指数和为零的环路附着。假设

$\hat{}$ $\hat{}$*1.* $(L、\ K)$ 具有满足强相对着色检验的零/一角结构；$\hat{}$*2.* K 上的角结构是标准的；*3.* K 具有塌缩非正浸入。

那么 L 具有塌缩非正浸入。

$\hat{}$ $\hat{}$ 由于极大扩张 $(L,\ K)$ 满足强相对着色检验，根据定理 3.3，它具有相对塌缩非正浸入。由命题 3.2 可知，该性质具有遗传性，因此 $(L,\ K)$ 具有塌缩非正浸入。定理 3.4 在一个特殊情形下确立了塌缩非正浸入的传递性。我们将在后面的章节证明这一结果，其中将涉及对给定组合浸入进行“变薄”的过程。

假设 L 是一个以 v 为单顶点的标准 2-复形，且 K 是一个子复形。假设 K 的所有 2-胞腔都沿着指数和为零的路径粘附。设 y 是 K 的一条边。注意，我们可以通过将 K 的每条边映射到 y，并将此映射延拓到 2-胞腔上，从而将 K “折叠”到 y （见图2$^-$）。设 L 是将 $K \subseteq L$ 折叠到 y 后得到的 L 的商。

例 1. 设

$$P_0 = \langle y_1, y_2 \mid y_1 y_2 y_1^{-1} y_2^{-1} \rangle \subseteq P = \langle x, y_1, y_2 \mid y_1 y_2 y_1^{-1} y_2^{-1}, x y_1 x y_2 \rangle.$$

设 $K \subseteq L$ 分别是 P_0 和 P 的表示复形。我们可以将 K 折叠到 y，得到 L，即 $\langle x, y \mid xyxy \rangle$ 的表示复形。

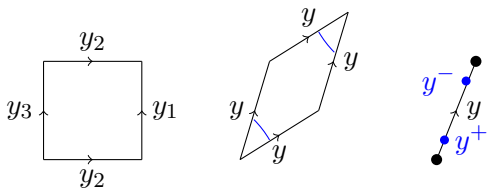


图2： K 中的一个 2-胞腔折叠到边 y。

这里有一个关键观察。$lk(v, L)$通过以下过程由 $lk(v, K)$得到：

1. 从 $lk(v, L)$中移除 $lk(v, K)$中的所有混合角。

2. 将 $lk^+(v, K)$中的所有点与 y^+识别，并将 $lk^-(v, K)$中的所有点与 y^-识别。

这是定理 3.4 的主要应用。我们已经在引言中提到过它。

定理 3.5. 设 L 为一个标准 2-复形，$K \subseteq L$ 为其子复形，且其中所有 2-胞腔均沿着指数和为零的路径附着。设 L 由 L 将 K 折叠到单边 y得到。假设 L 具有满足着色检验的零/一角结构，并且 y^+ 和 y^- 位于的不同连通分支中，其中 $lk_0(v, L)$。则(L, K) 具有相对塌缩非正浸入。此外，若 K 具有塌缩非正浸入，则 L也具有塌缩非正浸入。

证明。 给 L 赋予满足着色检验的零/一角结构。 将标准零/一角结构赋予极大扩张 K； 对于 L 中不属于 K 的 2-胞腔，则赋予从 L拉回的角结构。 我们将证明（L, K）满足强相对着色检验，因此定理 3.4 的条件成立。首先注意，我们还有一个映射 $L \to L$，它将 K 全部折叠到单边 y。

1. 如果 d 是 K 中的一个 2-胞腔，那么 $\kappa(d, K) \leq 0$。这是因为 K中的 2-胞腔沿着指数和为零的路径附着，而 K 带有标准的

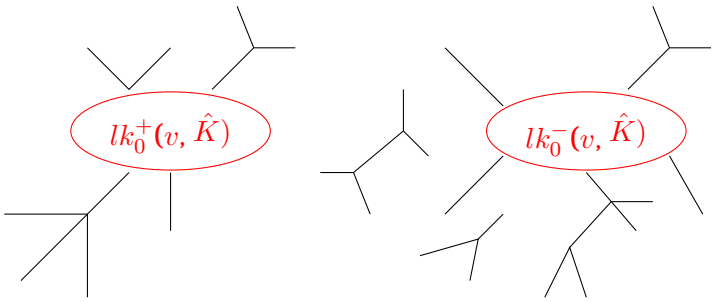
ˆ ˆ ˆ 零/一角结构。如果 d 是 L 中但不在 K中的一个 2-胞腔，那么 $\kappa(d,\ L)$ ≤ 0 ¯ ¯ ¯，因为 $\kappa(d,\ L) \leq 0$，其中 d 是 d 在折叠映射下的像。

2. 我们有一个商映射

$$q\colon lk_0(v,\hat{L}) \to lk_0(v,\bar{L}),$$

其中，所有的 $lk^+(v,\hat{K})$ 都映射到 y^+，而所有的 $lk^-(v,\hat{K})$ 都映射到 ¯ ¯ y^-。注意， $lk_0(v,L)$ 是一片森林，因为 L 满足着色检验。由于 y^+ 和 y^- 位于 $lk_0(v,\bar{L})$ 的不同连通分支中，因此 $lk^+(v,\hat{K})$ 和 ˆ ˆ$lk^-(v,K)$ 位于 $lk_0(v,L)$ 的不同连通分支中。情况如图3所示。设 C^+ 是 $lk_0(v,\hat{L})$ 中包含 lk^+ $(v,\hat{K})$ 的连通分支。由于 $q(C^+)$ 是一棵树，因此可知 C^+ 是相对于 $lk^+(v,\hat{K})$ 的树。这由命题 2.6 得出。类似地， C^- 是相对于 $lk^-(v,K)$ 的树。因此， $lk_0(v,\hat{L})$ 是相对于 $lk_0(v,\hat{K}) = lk^+(v,\hat{K}) \cup \hat{} lk^-(v,K)$ 的森林。此外，如果 C 是 $lk_0(v,L)$ 的任意一个连通分支，那么要么 $C\cap lk_0(v,\hat{K}) = \emptyset$，要么 $C\cap lk_0(v,\hat{K}) = lk_0^+(v,\hat{K})$，要么 $C\cap lk_0(v,\hat{K}) = lk_0^-(v,\hat{K})$。ˆ 因此， $C \cap lk_0(v,K)$ 要么为空，要么是连通的。

ˆ 3. 设 c 是一个角度为 1 的角。若 c 来自 K中的一个 2-胞腔，则 c 将 lk^+ $(v,\ \hat{K})$与 $lk^-(v,\ \hat{K})$连接起来，而它们位于 $lk_0(v,\ \hat{L})$的不同连通分支中。ˆ ˆ ˆ ¯假设 c 来自 L 中一个不属于 K的 2-胞腔 d 。折叠映射 $L \to L$¯将 c 映射到 d 中的 $\bar{c}$。 $\bar{c}$ 是一个角度为 1 的角，因此连接 $lk_0(v,\ L)$的两个不同连通分支，因为 L 满足着色检验。因此， c ˆ连接 $lk_0(v,\ L)$的不同连通分支。 □



ˆ图3： $lk_0(v,\ L)$

推论 3.6。 设 L 是一个标准 2-复形， $K \subseteq L$ 是一个子复形，其所有 2-胞腔¯均沿着指数和为零的路径附着。设 L 是通过将 K 折叠到单边 y而从 L 得到的¯。假设 L 满足标准零/一角结构的着色检验。那么(L, K) 具有相对塌缩非正浸入。此外，若 K 具有塌缩非正浸入，则 L也具有塌缩非正浸入。

证明。 注意，在这种情况下， $lk_0(v, \bar{L}) = lk^+(v, \bar{L}) \cup lk^-(v, \bar{L})$。我们有 $y^+ \in lk^+(v, \bar{L})$、 $y^- \in lk^-(v, \bar{L})$，以及 $lk^+(v, \bar{L}) \cap lk_0^+(v, \bar{L}) = \emptyset$。因此， y^+ 和_y^- 位于 $lk_0(v, L)$的不同连通分支中。 □

例 2。 考虑一个表示 $P_0 = \langle \mathbf{y} \quad | \mathbf{r} \rangle$，其中每个 $r \in \mathbf{r}$的指数和都为零。设 $P = \langle x, \mathbf{y} \mid \mathbf{r} \ xux^{-1}v^{-1} \rangle$，其中 u和 v是由$\mathbf{y}^{\pm 1}$ 组成且指数和相等的词 $k > 0$。表示 P 通常出现在群的 HNN 扩张的背景下，此时伴随子群为 $\mathbb{Z}$。设 L 为 P的表示复形， K 为由 P_0得到的子复形。选取 $y \in \mathbf{y}$。我们将 K 折叠到 y 上，得到¯ ¯一个商 $L \to L$。注意， L 是由 $\langle x, y \mid xy^k x^{-1} y^{-k} \rangle$构造的标准 2-复形。容易验证， $\bar{L}$ 满足标准零/一角结构的着色检验。由推论 3.6 可知，(L, K)具有相对非正浸入。

4 定理 3.3 的证明

命题 4.1. 假设(L, K) 满足强相对着色检验，且 L 没有自由顶点或边。那么 $\chi(L) \leq \chi(K)$。此外，如果存在顶点 $v_1, \ldots, v_n \in K$，使得 $\kappa(v_i, L) < \kappa(v_i, K)$，那么$\chi(L) \leq \chi(K) - n$。

证明。 设 v 是 L的一个顶点。我们有

$$\kappa(v, L) = 2 - \chi(lk(v, L)) - \sum \omega(c_i) = 2 - \chi(lk_0(v, L)),$$

其中求和遍历 $v \in L$ 的链接中的所有角。首先假设 v 是 L 的一个顶点，且不属于 K。那么 $lk_0(v, L)$ 的每个连通分支都是一棵树。我们声称连通分支不止一个。 $lk(v, L)$ 不能有度为 0 或 1 的顶点，因为 L 不包含自由顶点或边。因此， $lk_0(v, L)$ 中度为 0 或 1 的顶点，是某个角度为 1 的角的顶点。这个角连接了不同的连通分支。因此，$lk_0(v, L)$ 至少有两个连通分支。由此可得 $\chi(lk_0(v, L)) \geq 2$，因此

$$\kappa(v, L) = 2 - \chi(lk_0(v, L)) \leq 0.$$

接下来假设 v 是 K 的一个顶点。假设 $lk_0(v,\ L) = C_1 \cup \cdots \cup C_n$，其中 C_i 是这些连通分支。首先假设对于 $1 \le i \le k$，$C_i \cap lk_0(v,\ K) = \emptyset$，且对于 $k+1 \le i \le n$，$C_i \cap lk_0(v,\ K) \neq \emptyset$（$k = 0$ 和 $k = n$ 两者都可能）。那么 C_i 是相对于 $1 \le i \le k$ 的一棵树，而 C_i 是相对于连通子图 $C_i \cap lk_0(v,\ K)$ 的一棵树，其中 $k+1 \le i \le n$。因此，对于 $k+1 \le i \le n$，C_i 与 $C_i \cap lk_0(v,\ K)$ 同伦等价。我们有

$$\chi(lk_0(v,L)) = k + \sum_{i=k+1}^{n} \chi(C_i \cap lk_0(v,K)) \ge k + \chi(lk_0(v,K)). \qquad (1)$$

Thus

$$\kappa(v,L) = 2 - \chi(lk_0(v,L)) \le 2 - (\chi(lk_0(v,K)) + k) = \kappa(v,K) - k. \qquad (2)$$

利用 $\kappa(v, L) \le 0, v \notin K$ 和 $\kappa(d, L) \le 0, d \notin K$，我们得到

$$2\chi(L) = \sum_{v\in L} \kappa(v,L) + \sum_{d\in L} \kappa(d,L) \le \sum_{v\in K} \kappa(v,K) + \sum_{d\in K} \kappa(d,K) = 2\chi(K). \quad (3)$$

注意，如果存在顶点 $v_1, \ldots v_n \in K$，使得 $\kappa(v_i, L) < \kappa(v_i, K)$，那么 $\chi(L) \le \chi(K) - n$ 立即由上一个方程 3 得出。 □

定理 3.3 的证明：设 f: $X \to L$ 是一个组合浸入。假设 X 是有限的、连通的，且没有自由顶点或边，并且 X 不是单点。令 Y 为 $f^{-1}(K)$ 的本质部分。注意，根据命题 3.2，(X, Y) 满足强相对着色检验。因此，根据命题 4.1，$\chi(X) \le \chi(Y)$。 □

5 定理 3.4 所需的一组引理

设 (L, K) 是一个 2-复形对。内部点 p 属于 K，指满足 $lk(p, L) = lk(p, K)$ 的点。定义 K° 为内部点的集合，并定义 $\partial K = K - K^\circ$。注意，$\partial K = (L - K^\circ) \cap K$ 是 K 的 1-骨架的一个子图。如果 K 全部是本质的，也就是说每条边都是某个 2-胞腔的粘附路径的一部分，那么 ∂K 中的每条边都位于 K 的一个 2-胞腔和 $L - K^\circ$ 的一个 2-胞腔的边界上。

引理 5.1。 假设 (L, K) 满足强着色检验，且 L 没有自由顶点或边。我们假设 K 全部是本质的。令 v 为∂K的一个顶点。假设

1. v 是 ∂K 中的孤立顶点（度为 0），或者
2. v 在 ∂K 中的度为 1，或者
3. $lk_0(v, K)$ 是连通的。

那么，$lk_0(v, L)$ 包含一个连通分支 C，使得 $C \cap lk_0(v, K) = \emptyset$。因此，在这三种情况下，$\kappa(v, L) < \kappa(v, K)$，从而我们有 $\chi(L) < \chi(K)$。

证明。 设 C是 $lk_0(v, L)$ 的一个连通分支，满足 $C \cap lk_0(v, K) = \emptyset$。那么，$\kappa(v, L) < \kappa(v, K)$。这已在命题 3.2 证明的第二段中证明，见方程 2。由此可得 $\chi(L) < \chi(K)$ 属于同一个命题 3.2。

1. 这里有 $lk(v, L) = lk(v, K) \cup lk(v, L - K^\circ)$，以及 $lk(v, K) \cap lk(v, L - K^\circ) = \emptyset$。由于 $v \in \partial K$ 链接 $lk(v, L - K^\circ) \neq \emptyset$。设 p 是 $lk(v, L - K^\circ)$ 中的一个顶点，并设 C是 $lk_0(v, L)$ 中包含 p的连通分支。那么，$C \subseteq lk(v, L - K^\circ)$，因此 $C \cap lk_0(v, K) = \emptyset$。

2. 令 e 为 ∂K 中包含 v 的唯一边。令 $\{p\} = lk(v, L) \cap e$。我们有

$$lk(v, L) = lk(v, K) \cup lk(v, L - K^\circ) \text{ and } lk(v, K) \cap lk(v, L - K^\circ) = \{p\}$$

这意味着

$$lk_0(v, L) = lk_0(v, K) \cup lk_0(v, L - K^\circ) \text{ and } lk_0(v, K) \cap lk_0(v, L - K^\circ) = \{p\}.$$

因此，若 C 是 $lk_0(v, L)$ 的一个连通分支，使得 $p \neq C$ 且 $C \cap lk(v, L - K^\circ) \neq \emptyset$，那么 $C \cap lk(v, K) = \emptyset$。

由于 $e \in \partial K$，$lk(v, L - K^\circ)$ 中存在一个角，其端点为 p 和 q。注意，$p \neq q$，因为 (L, K) 满足强着色检验。由于 v 在 ∂K 中的度为 1，我们有 $q \notin lk(v, K)$。令 C_p 和 C_q 分别为 $lk_0(v, L)$ 中包含 p 和 q 的连通分支。见图4。

首先假设 $C_p \neq C_q$。我们有 $p \notin C_q$，且 $C_q \cap lk(v, L - K^\circ) \neq \emptyset$，因为交集包含 q。因此 $C_q \cap lk_0(v, K) = \emptyset$。

接下来假设 $C_p = C_q$。由于 C_p 包含 $q \notin lk(v, K)$，因此 C_p 不包含于 $lk_0(v, K)$。由于 C_p是相对于 $C_p \cap lk_0(v, K)$ 的树，它包含一个度为 1 的顶点 $r \notin lk_0(v, K)$。由于 L 没有自由边

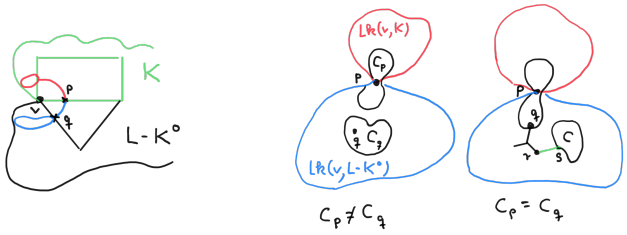


图4：左侧我们看到 ∂K 中一个度为 1 的顶点 v 。在这种情况下$lk(v, L - K^\circ \cap lk(v, K) = \{p\}$。右侧是 $lk_0(v, L)$ 的一个连通分支 C 的构造，使得 $C \cap lk_(v, K) = \emptyset$。此构造区分两种情况： $C_p \neq C_q$ 和 $C_p = C_q$。

，因此存在一个角度为 1、顶点为 r 的角 c 。由于 $c \notin lk(v, K)$（因为 $r \notin lk(v, K)$），c 将 C_p 连接到 $lk_0(v, L)$ 的另一个连通分支 C：$C_p \cap C = \emptyset$。这里我们用到了定义3.1中的条件 3。特别地，$p \notin C$。设 r 和 s 为角 c 的顶点。由于 $c \in lk(v, L - K^\circ)$，$s \in lk(v, L - K^\circ)$。我们有 $p \notin C$，并且 $C \cap lk(v, L - K^\circ) \neq \emptyset$，因为交集包含 s。因此 $C \cap lk_0(v, K) = \emptyset$。

3. 令 C 为 $lk_0(v, L)$ 中包含 $lk_0(v, K)$ 的连通分支。如果存在另一个连通分支 C'，那么 $C' \cap lk_0(v, K) = \emptyset$，于是结论成立。因此假设 C 是唯一的连通分支 $C = lk_0(v, L)$。那么 $lk(v, L - K^\circ)$ 不可能包含角度为 1 的角，因为这样的角会连接不同的连通分支。因此$lk(v, L) = C \cup lk(v, K)$。由于 C 是相对于 $lk_0(v, K)$ 的树，可知$lk(v, L)$ 是相对于 $lk(v, K)$ 的树。由于 $v \in \partial K$， $lk(v, K) \neq lk(v, L)$。因此 $lk(v, L)$ 包含一个度为 1 的顶点，这与L 没有自由边这一事实矛盾。 □

引理 5.2. 设 Λ 是一个非树的有限连通图。可以附加 *2*-胞腔得到一个 *2*-复形 K，使得：

1. K 可塌缩；
2. 每条边都位于某个 *2*-胞腔的边界上；
3. 对每个顶点 v， $lk(v, K)$ 都是连通的。

证明。 我们将对 Λ 中边的数量进行归纳。如果只有一条边，那么 Λ 是一个圆，命题成立。

在 Λ 中选择一棵极大树 T。从 Λ 中移除一条边 $e \notin T$ 的内部，得到 Λ'。如果 Λ' 是一棵树，则沿着路径 $e\gamma$ 到 Λ 附加一个 2-胞腔，其中 γ 是环绕该树的路径：从 e 的终点出发，经过所有顶点，回到其起点。参见图5。容易验证，这样得到的 2-复形具有所需的性质。

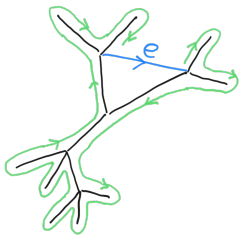


图5：沿着 $e\gamma$ 附着 2-胞腔，其中 γ 绕着一棵覆盖每条边的极大树。注意，γ 不一定是约化的。

现在假设 Λ' 不是一棵树。那么根据归纳法，我们可以将 2-胞腔附着到 Λ' 上，并得到具有所需性质的 2-复形 K'。设 p 和 q 分别为 e（可能是 $p = q$）的起始顶点和终止顶点。我们沿路径 $e\gamma$ 将 2-胞腔 d 附着到 K' 上，其中 γ 是 T 中一条从 q 到 p 的路径，覆盖了所有 T。见图5。由此得到 2-复形 K。条件1显然成立。 K 可塌缩，因为我们附着的最后一个 2-胞腔以 e 为自由边，而 K' 可塌缩。接下来检查链接。若 v 是一个既不同于 p 、也不同于 q 的顶点，那么添加 2-胞腔 d 会在 lk（v、K'）中添加边，但不会添加任何新顶点。由于 lk（v、K'）连通，因此 lk（v、K）也连通。添加 d 会在 p 处的链接中引入一个新顶点 e^+，同时还会引入一条连接 e^+ 与 lk（p、K'）的边。同样，由于 lk（p、K'）连通，因此 lk（p、K）也连通。同样的论证还表明，lk（q、K）是连通的。

□

2-复形 K 中的顶点 v 若所有包含 v 的边都指向（背离）v，则称为汇点（源点）。

引理 5.3。 设 K 是一个连通有限 *2*-复形，其所有 *2*-胞腔均沿指数和为零的路径附着。假设 $\pi_1(K) = 1$。那么， K 中的每条闭路的指数和都为零。此外， K 有汇点和源顶点。

证明。 由于 $\pi_1(K) = 1$ 每条闭路经过自由约化和扩张后都具有以下形式

$$\prod \gamma_i(\partial d_i)^{\pm 1}\gamma_i^{-1}$$

其中 d_i 不一定是彼此不同的 2-胞腔。由于 ∂d_i 的指数和为零，第一个陈述得证。

固定一个顶点 v_0。我们定义映射 $h\colon V(K) \to \mathbb{Z}$，其中 $V(K)$ 是 K 的顶点集合，定义如下：若 K 的一个顶点是 v，且 γ 是一条从 v_0 到 v 的路径，则令 $h(v)$ 为 γ 的指数和。根据刚才证明的第一条结论，这一定义是良定的。设 v_m 和 v_M 分别是使 h 取最小值和最大值的顶点。那么 v_m 是源点，v_M 是汇点。 □

6 定理 3.4 的证明

设 (L, K) 是一个零角/一角二维复形对，满足定理 3.4 的条件：

1. L 是一个 2-复形，且 K 是一个子复形，其中所有 2-胞腔都沿着指数和为零的环路附着。 ^ ^ 2. 扩张 (L, K) 具有一种零/一角结构，该结构在 K 上是标准的，并满足强相对着色检验。 3. K 具有塌缩非正浸入。

我们将证明，L 具有塌缩非正浸入。

设 $f\colon X \to L$ 是组合浸入。我们假设 X 不含自由边或顶点，且不是一个点。我们将证明 $\chi(X) \leq 0$。设 Y 为 $f^{-1}(K)$ 的本质部分。赋予 (X, Y) 从 $(L, K) \subseteq (L, K)$ 诱导的零/一角结构。由于 (L, K) 满足强相对着色检验，根据命题 3.2，(L, K) 和 (X, Y) 也都满足该检验。另请注意，由于浸入 f 是组合浸入，且 K 中的胞腔沿指数和为零的路径粘附，因此 Y 中的胞腔也沿指数和为零的路径粘附。又由于 K 上的角结构是标准的，Y 上的角结构也同样是标准的。设 $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_n$ 为连通分支的不交并。每个 $f\colon Y_i \to K$ 都是浸入。由于我们假设 K 具有塌缩非正浸入，因此 $\chi(Y_i) \leq 0$ 或 Y_i 可塌缩。于是，若没有 Y_i 可塌缩，则根据命题 4.1，

$$\chi(X) \leq \chi(Y) = \sum_{i=1}^{n} \chi(Y_i) \leq 0$$

这样就完成了。假设

$$Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m \cup \ldots \cup Y_n \text{ (connected components)}$$

其中 Y_i、 $1 \leq i \leq m$ 是可塌缩的，而 Y_i、 $m+1 \leq i \leq n$ 不是。现在的思路是找到顶点 $v_i \in Y_i$、 $1 \leq i \leq m$ ，使得 $\kappa(v_i, X) < \kappa(v_i, Y)$。然后，再由命题 4.1 可得

$$\chi(X) \leq \chi(Y) - m = \sum_{i=1}^{m} \chi(Y_i) - m + \sum_{i=m+1}^{n} \chi(Y_i).$$

由于 $\chi(Y_i) = 1, 1 \leq i \leq m$，且 $\chi(Y_i) \leq 0, m+1 \leq i \leq n$，我们得到了所需结果 $\chi(X) \leq 0$。引理 5.1 对于确定顶点v_i至关重要。不过，有一种情况该引理帮助不大：对于某个$1 \leq i \leq m$ ，图 ∂Y_i 不包含度为 0 或 1 的顶点 v ，或者 $lk_0(v, Y)$ 不连通。为避免这种情况，我们将仔细地把组合浸入 $f\colon X \to L$ 替换为一个更方便的组合浸入 $f'\colon X' \to \hat{}L$，使得 $\chi(X) \leq \chi(X')$。假设

$$Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_k \cup \ldots \cup Y_m \cup \ldots \cup Y_n \text{ (connected components)},$$

其中，对于 $1 \leq i \leq m$, ∂Y_i, $1 \leq i \leq k$， Y_i 是可塌缩的，不包含度为 0 或 1 的顶点 v ，但 ∂Y_j, $k+1 \leq j \leq m$ 则包含。令

$$Y_{col} = Y_1 \cup \ldots \cup Y_k$$

and

$$X_{rest} = X - Y_{col}^{\circ}.$$

假设

$$\partial Y_{col} = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_p \text{ (connected components)}.$$

注意， $\Delta_i, 1 \leq i \leq p$, 都不是树，因为我们假设 ∂Y_i,$1 \leq i \leq k$, 不含度为 0 或 1 的顶点。 X_{rest} 可能不连通，而 Δ_i 分布在 X_{rest}的各个连通分支中。

我们在每个 $\Delta_i, 1 \leq i \leq p$, 上附加 2-胞腔，从而得到满足引理 5.2 条件的 2-复形 Z_i 。令

$$Z = Z_1 \cup \ldots \cup Z_p$$

以及 $X' = X_{rest} \cup Z$。注意， Z 是本质的（这意味着每条边都是 Z_i中某个 2-胞腔的粘附路径的一部分）。因此， Z 中的每条边都属于 Z 的一个 2-胞腔和 X_{rest}的一个 2-胞腔。这意味着 Z}中的开 2-胞腔 $Z^{\circ} = \{$， Z 的 1-骨架是 ∂Z，并且 X' 没有自由顶点或自由边。

接下来，我们将把浸入 $f|_{X_{rest}}\colon X_{rest} \to L$ 扩展为浸入$f'\colon X' \to \hat{}L$。我们已经提到， Y中的胞腔沿着指数和为零的路径粘附。由于 Y_{col} 的连通分支是可塌缩的， Y_{col} 中的每条闭路的指数和都为零。特别地， ∂Y_{col} 中的每条闭路的指数和都为零。令 Z_i 中的一个 2-胞腔为 d ，并令 d的粘附路径为 γ 。注意， $\gamma \subseteq \partial Y_{col}$。于是， $f(\gamma) \subseteq K$ 是一条指数和为零的闭路，因此存在 K 中的一个 2-胞腔 d ，其粘附路径为 $f(\gamma)$。定义 $f'(d) = \hat{}d$。这就得到了所需的扩展浸入。注意， $f'^{-1}(\hat{}K)$的本质部分是

$$W' = Z_1 \cup \ldots Z_p \cup Y_{k+1} \cup \ldots \cup Y_m \cup \ldots \cup Y_n.$$

$\hat{}\hat{}$由于 (L, K) 满足强相对着色检验，根据命题 3.2，(X', W') 也满足该检验。又由于 $\hat{}K$ 上的角结构是标准的，因此 W' 上诱导的角结构也是标准的。由于 $Z_i, 1 \leq i \leq p$ 是可缩的，且所有 2-胞腔都沿着指数和为零的环路附着，根据引理 5.3， Z_i 中存在汇点和源点。由于 Z_i 上的角结构是标准的，这意味着存在一个顶点 $v_i \in Z_i$ ，使得 $lk(v_i, Z_i) = lk_0(v_i, Z_i)$。由于按构造 $lk(v_i, Z_i)$ 是连通的，这表明 $lk_0(v_i, Z_i) = lk_0(v_i, W')$ 是连通的。最后一个等式成立，因为

$$W' = Z_1 \cup \ldots Z_p \cup Y_{k+1} \cup \ldots Y_m \cup \ldots \cup Y_n$$

是一个不交并。现在我们可以利用引理 5.1 得出 $\kappa(v_i, X') <\kappa(v_i, W')$, $1 \leq i \leq p$。

我们知道 $Y_i, k+1 \leq i \leq m$, 是可塌缩的，并且 ∂Y_i 包含一个度为 0 或 1 的顶点 v_i。由引理 5.1 可知， $\kappa(v_i, X') < \kappa(v_i, W')$。我们找到了顶点 $v_1, \ldots, v_p, \ldots, v_m$ ，使得 $\kappa(v_i, X') < \kappa(v_i, W')$。因此，由命题 4.1 可得

$$\chi(X') \leq \chi(W') - m,$$

并且由于每个 $Z_i, 1 \leq i \leq p$, 和每个 $Y_i, k+1 \leq i \leq m$, 都是可塌缩的，因此欧拉示性数为 1，我们有

$$\chi(X') \leq \chi(W') - m = \chi(Y_{m+1}) + \ldots + \chi(Y_n).$$

由于 $Y_i, m+1 \leq i \leq n$ 不可塌缩，且 $f\colon Y_i \to K$ 是组合浸入；此外， K 具有塌缩非正浸入，因此可得 $\chi(Y_i) \leq 0$。综上，我们有

$$\chi(X') \leq 0.$$

我们还需要证明

$$\chi(X) \leq \chi(X').$$

$$\chi(X) = \chi(X - Y_{col}^{\circ}) + \chi(Y_{col}) - \chi(\partial Y_{col})$$
$$\chi(X') = \chi(X' - Z^{\circ}) + \chi(Z) - \chi(\partial Z).$$

注意到

$$X' = X_{rest} \cup \{ \text{ 2-cells of } Z\}.$$

如上所述， Z° 恰好是 Z中的开 2-胞腔。因此， $X' - Z^{\circ} = X_{rest}$。于是我们有

$$X - Y_{col}^{\circ} = X' - Z^{\circ} = X_{rest}$$

并且

$$\partial Y_{col} = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_p = \partial Z.$$

Thus

$$\chi(X) = \chi(X_{rest}) + \chi(Y_{col}) - (\chi(\Delta_1) + \ldots + \chi(\Delta_p))$$
$$\chi(X') = \chi(X_{rest}) + \chi(Z) - (\chi(\Delta_1) + \ldots + \chi(\Delta_p)).$$

我们得到

$$\chi(X) - \chi(X') = \chi(Y_{col}) - \chi(Z).$$

回忆一下

$$Y_{col} = Y_1 \cup \ldots \cup Y_k$$

而且 Y_i、 $1 \leq i \leq k$是 Y的可塌缩连通分支，因此 ∂Y_i 不含度为 0 或 1 的顶点，并且

$$Z = Z_1 \cup \ldots \cup Z_p \text{ (collapsible connected components).}$$

因此 $\chi(Y_{col}) = k$ 且 $\chi(Z) = p$。一方面，我们有

$$\partial Y_{col} = \partial Y_1 \cup \ldots \cup \partial Y_k$$

另一方面,

$$\partial Y_{col} = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_p \text{ (connected components).}$$

因此我们有 $k \leq p$，从而可得

$$\chi(Y_{col}) - \chi(Z) = k - p \leq 0.$$

总之

$$\chi(X) \leq \chi(X') \leq 0.$$

□

备注 1. 在上述证明中，我们找到了顶点 $v_i \in \Delta_i = \partial Z_i$ ，使得 $\kappa(v_i, X') < \kappa(v_i, W')$。注意，由于 $\partial Z \subseteq \partial Y$，这些顶点也包含于 Y 中。在此我们指出，对于这些顶点，还有 $\kappa(v_i, X) < \kappa(v_i, Y)$。注意， $lk_0(v_i, X')$ 是通过以下过程从 $lk_0(v_i, X)$ 得到的：移除 $lk_0(v_i, Y)$ 的内部，并将其替换为连通图 $lk_0(v_i, W')$。由于 $lk_0(v_i, X')$ 包含一个连通分支 C，使得 $C \cap lk_0(v_i, W') = \emptyset$， C 也是 $lk_0(v_i, X)$ 的一个连通分支，并且 $C \cap lk_0(v_i, Y) = \emptyset$。由此可得， $\kappa(v_i, X) < \kappa(v_i, Y)$。这一论证表明， Y 的每个可塌缩分支都包含一个顶点 v ，使得 $\kappa(v, X) < \kappa(v, Y)$。这为以下事实提供了另一种证明：$\chi(X) \leq 0$。

7 带标定向树

带标定向图（LOG） $\Gamma = (E, V, s, t, \lambda)$由两组 E边和V顶点，以及三个映射 s, t和 λ: $E \to V$组成，分别称为源点、目标点和标记。当底层图是一棵树时， Γ 称为带标定向树（LOT）。相关的 LOG 表示定义如下

$$P(\Gamma) = \langle V \mid s(e)\lambda(e) = \lambda(e)t(e),\ e \in E \rangle.$$

LOG复形 $K(\Gamma)$是由该表示定义的标准 2-复形，而由 $P(\Gamma)$表示的群 $G(\Gamma)$等于 $\pi_1(K(\Gamma))$。

已知 LOT复形是带状 2-纽结补空间的脊。参见 Howie [8]。因此，研究标记有向树是经典纽结理论的延伸。经典纽结的无球性问题已有定论，而标记有向树的无球性问题尚未解决。标记有向树的无球性问题对于 Whitehead 的无球性猜想至关重要：非球面 2-复形的子复形也是非球面的。参见 Berrick/Hillman [2], 、Bogley [3], 和 Rosebrock [14]。

子LOG $\Gamma_0 = (E_0, V_0) \subseteq \Gamma$ 是一个子图，使得 $E_0 \neq \emptyset$ 和 λ: $E_0 \to V_0$。如果 LOG 的顶点 v 的度为 1，则若存在某条边 e， $v = \lambda(e)$，称其为边界约化 。如果对于每个顶点 v ，从 v 出发或终止于 v 的任意两条边都不带有相同的标记，则称其为内部约化 。如果对于每条边 e ，标记 $\lambda(e)$ 不等于 $s(e)$ 或 $t(e)$，则称其为压缩的 。最后，如果一个 LOG 同时是边界约化、内部约化且压缩的，则称其为约化 。给定一个 LOG，可以通过约化得到一个约化 LOG；当该 LOG 是 LOT 时，这一过程不会改变 LOT 复形的同伦类型。如果标记映射 λ: $E \to V$是单射的，则称 LOG是单射的 。

我们汇集一些关于单射 LOT 的已知事实（见 Harlander/Rosebrock [7]）

F1（见 [7]中的定理 3.2 和定理 3.3）如果 Γ 是一个不包含边界可约子 LOT 的约化单射 LOT，则 $K(\Gamma)$ 具有满足着色检验的零/一角结构。由此可知，$K(\Gamma)$ 是 DR（因此是非球面的），具有可塌缩的非正浸入，并且 $G(\Gamma)$ 是局部可指示的。

F2（见 [7] 的定理 8.4）设 Γ 是约化且单射的。假设 Γ_1、.....、Γ_n 是互不相交的子 LOT，并且将每个子 LOT 塌缩为其一个¯顶点后，得到的商 LOT Γ 不含边界可约子 LOT。那么 $K(\Gamma)$ 存在一种满足相对于 $K(\Gamma_1)$ 的着色检验.....的零/一角结构；$K(\Gamma_n)$。（这种相对着色检验仅在 $n = 1$ 的情况下才与本文定义的检验一致。）

F3（见 [7] 的定理 8.5）若 Γ 是约化且单射的，则 $K(\Gamma)$ 是顶点非球面的，因此是非球面的。由此可知，若 Γ 是单射 LOT（无论是否约化），则 $K(\Gamma)$ 是非球面的。

我们认为，若 Γ 是约化单射 LOT，则 $K(\Gamma)$ 具有塌缩非正浸入。我们概述一种证明策略。Γ 含有互不相交的极大子 LOT Γ_1、.....、Γ_n，将每个子 LOT 与其¯某个顶点识别后，得到的商 LOT Γ 不含边界可约子 LOT。与这种情形不同的情况通常可通过特设考量处理。我们可以对顶点数作归纳，假设每个 $K(\Gamma_i)$ 都具有塌缩非正浸入。若 $n = 1$，则本文所发展的方法适用，我们可以得到正面的结果。见下文定理 7.1。若 $n > 1$，则我们处于上文 F2 第二点所述的情形。$K(\Gamma)$ 确实满足相对着色检验，但不是本文所述的版本，更不满足强相对着色检验。因此，本文所发展的方法不足以证明所有约化单射 LOT 复形 $K(\Gamma)$ 都具有非正浸入。我们确实认为，可以加强我们的方法以得到这一结果。这是未来工作的一个课题。

定理 7.1。设 Γ 是一个包含子 *LOT* Γ_1 的约化单射 *LOT*，且满足

1. K（Γ_1）具有塌缩非正浸入；

2. 将 Γ_1 识别为其某个顶点，会产生一个约化商 *LOT* Γ，且不含边界可约子 *LOT*。

那么 K（Γ）具有塌缩非正浸入。

证明。设 $L = K$(Γ) 和 $K = K$(Γ$_1$)。假设 Γ$_1$ 被压缩到¯ ¯顶点 y。那么 K 可以折叠到边 y，从而得到 $L = K$(Γ)。¯我们将证明结论可由定理 3.5 推出。根据上文所述的事实 F1，L 满足着色检验。为证明 y^+ 和 y^- 位于¯ lk_0(L)的不同连通分支中，我们需要仔细考察该链接。¯ ¯定理 3.3 中证明了，[7]，$L = K$(Γ)具有如下局部¯双森林性质：若 x_1、...、...、x_n 是 L的边，则存在一种对 $\epsilon_i \in \{+, -\}$ 的选取，使得 $\Lambda_1 = \Lambda(x_1^{\epsilon_1}$、.....、$x_n^{\epsilon_n})$ 和 $\Lambda_2 = \Lambda(x_1^{-\epsilon_1}$、.....、$x_n^{-\epsilon_n})$ 都是¯森林。这里，$\Lambda(x_1^{\epsilon_1}$、.....、$x_n^{\epsilon_n})$是由顶点 $x_1^{\epsilon_1}$、.....、$x_n^{\epsilon_n}$在 $lk(L)$ 中 $= \Lambda$ 张成的子图。此外，可以在¯ L 上赋予零/一角结构（参见 [7], 定理 3.2），使得

$$lk_0(\bar{L}) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2.$$

由于 Λ_1 与 Λ_2 不相交，因此 y^+ 与 y^-位于 lk_0(L)的不同连通分支中，其中 y 是 x_i中的一个¯。定理 3.5 即可得出所需结论。

□

LOT Γ 的核是对 Γ执行所有边界约化后得到的子 LOT。注意，如果定理 7.1 中 Γ$_1$ 的核不含边界可约子 LOT，那么由引理 7.2 和上述事实 F1 可知，K(Γ$_1$)确实具有塌缩非正浸入。

引理 7.2。设 Γ 为一个 *LOT*，Γ$_c$ 为其核。若 $K(\Gamma_c)$ 具有塌缩非正浸入，则 K(Γ)也具有塌缩非正浸入。

证明。设 f: $X \to K$(Γ)是一个组合浸入。假设 X没有自由顶点或自由边，且不是一个点。那么 f 映入 K(Γ$_c$)，否则它会有一条自由边。因此 $\chi(X) \leq 0$

□

参考文献

[1]W. Ballmann 和 S. Buyalo，二维多面体上的非正曲率度量，《数学杂志》，222(1):97–134，1996。[2] Berrick A.J.、Hillman J.A.，*Whitehead* 非球面性问题及其与其他未决问题的关系。载于：Singh M.、Song Y.、Wu J.（编），《代数拓扑及相关主题》。数学前沿。Birkh¨auser，新加坡（2019）。

[3]W. A. Bogley，*J. H. C. Whitehead* 的非球面性问题。载于《二维同伦与组合群论》（C. Hog-Angeloni、W. Metzler 和 A. J. Sieradski 编），伦敦数学会讲义丛书第 197 卷。剑桥大学出版社，1993。[4] S. M. Gersten，可约图与群上的方程，载于《群论论文集》（S. M. Gersten 编），MSRI 出版物 8（1987），第 15–73 页。[5] J. Harlander、S. Rosebrock，单射标记有向树是非球面的，《数学杂志》287 (1)（2017），第 199–214 页。[6]J. Harlander、S. Rosebrock，相对顶点非球面性，《加拿大数学会通报》64 (2)（2021）；第 292–305 页。[7]J. Harlander、S. Rosebrock，单射 *LOT* 复形的局部结构，已投稿，https://arxiv.org/abs/2207.07991（2022）。[8] J. Howie，关于 *J. H. C. Whitehead* 问题的若干评述，《拓扑学》22，（1983），第 475–485 页。[9] J. Howie，带状圆盘补空间的无球性，《美国数学会汇刊》，第 289 卷，第 1 期（1985），第 281–302 页。[10]G. Huck 和 S. Rosebrock，非球面标记有向树与结，《爱丁堡数学学会会刊》44，（2001），第 285–294 页。[11] R. Lyndon 和 P. Schupp。组合群论，施普林格出版社，柏林，（1977）。[12] J. P. McCammond 和 D. T. Wise，小抵消理论中的扇与梯，《伦敦数学会会刊》（第 3 辑），84(3):599–644，2002。[13] S. Rosebrock，怀特海德猜想——概述，《西伯利亚电子数学报告》，4（2007），440–449。[14] S. Rosebrock，标记有向树与怀特海德猜想；《二维同伦与组合群论进展》；剑桥大学出版社，伦敦数学会讲义第 446 卷，W. Metzler、S. Rosebrock 编；（2018），第 72–97 页。[15] A. Sieradski，非球面性的着色检验，《牛津数学季刊》（第 2 辑）34（1983），第 97–106 页。

[16] D. T. Wise，截面曲率、紧核心与局部拟凸性，《几何与泛函分析》，14(2):433–468，2004。

[17] D. T. Wise，相干性、局部可指示性与非正浸入。《朱西厄数学研究所期刊》，21(2) (2022), 659- 674。

Jens Harlander 数学系 博伊西州立大学 美国爱达荷州博伊西市，邮编 83725-1555 电子邮箱：jensharlander@boisestate.edu

Stephan Rosebrock 卡尔斯鲁厄师范大学 俾斯麦街10号 76133 卡尔斯鲁厄 德国 电子邮箱：rosebrock@ph-karlsruhe.de