arXiv:2301.05887v1 [math.GR] 14 Jan 2023

特征二域上 O(qk) 型对合的不动点群

Mark Hunnell 温斯顿-塞勒姆
州立大学 hunnellm@wssu.edu

John Hutchens 温斯顿-塞勒姆州立大学
hutchensjd@wssu.edu

2023年1月18日

利益声明：无。本研究未获得公共、商业或非营利部门任何资助机构的专项拨款。数学主题分类：20G15 关键词：正交群；二次型；对合；代数群；特征 2

摘要

对于 O(q k)，即域 k 上关于二次型 q 的正交群（该域的特征为 2），我们讨论对合不动点的同构类。当二次空间是全奇异或非奇异时，我们给出了同构类的完整分类。我们还探讨了这些结果对特征为 2 的域上的一般二次空间所具有的一些意义。

1 引言

我们继续讨论 [18] 中关于 O(q k) 的 O(q k) 对合共轭类的问题，其中 k 是特征为 2 的域，并将重点转向这类对合的不动点群。本研究旨在描述形如 $G(k)/H(k)$ 的广义对称空间，其中 G 是定义在域 k 上的代数群，H 是 G 上某个二阶自同构的不动点群，而 $G(k)$（分别为 $H(k)$）表示 G（分别为 H）的 k-有理点。具体而言，我们希望将 Helminck 对 k-对合和对称 k-簇 [15] 的研究拓展到特征为 2 的域。此前，[22, 25] 已研究过类型 G_2 和 A_n 的群，而 [6, 3, 2, 4, 19, 20, 21] 则研究了特征不为 2 的域上的情形。我们还拓展了 Aschbacher 和 Seitz [1] 的结果，他们研究了特征为 2 的有限域上的类似结构。Gantmacher 最初于 [12] 研究对称空间，旨在对实单李群进行分类。Berger 在 [5] 继续了这项研究，并给出了实单李代数对称空间的完整分类。

关于特征为 2 的域上的二次型的记号和术语，我们参见 [17] 。特征为 2 的域上的正交群和辛群已得到广泛研究。在 [14] 中，Cheng Hao 讨论了二次型非亏格时，完美域上正交群的自同构。Pollak 在 [24] 中讨论了整体域上特征为 2 的域上的正交群，所考虑的情形是二次型非亏格；Connors 则在 [7, 8, 9, 10] 中论述了非退化二次型下，特征为 2 的域上正交群的自同构群。在 [27] 中，Wiitala 使用若尔当标准形研究了特征为 2 的域上正交群的对合，所讨论的是非亏格情形。在 [11] 中，Jean Dieudonn´e 讨论了特征为 2 的域上的代数齐性空间。

下文将确定这样一些同构类：二次空间分别配有全奇异二次型和非奇异二次型时，正交群中对合的不动点群。我们还将刻画由特征为 2 的域上的一般二次型定义的正交群的不动点群。在可能的情况下，我们不要求该型非退化。

在特征不为 2 的域上，阶为 2 的自同构的 G（k）-共轭类与 G 上对合的不动点群的 G（k）-共轭类一一对应，见 [16]。然而，在特征 2 下，存在不相互 G（k）-共轭但其不动点群同构的对合，见定理 5.23，以及 [22] 中的定理 5.27。

在预备知识部分，我们回顾特征 2 的域上的二次型和双线性型的定义、记号及相关的有用结果，以及与之相关的代数群。本节还介绍对称 k-簇理论中的记号。接下来，在第 3 节中，我们回顾 k 为特征 2 的域时，正交群 O(q k) 的对合相关结果。随后，我们将描述不同类型向量空间的不动点群的同构类。在第 4 节中，我们考察全奇异向量空间的二次型 q 所对应的正交群 O(q k) 中对合的不动点群。接着在第 5 节中，我们讨论非奇异向量空间的二次型 q 所对应的对合的不动点群。最后，第 6 节概述这些结果对于特征为 2 的域上的一般向量空间的意义。

2 预备知识

以下定义见于 [17]。我们也经常参考 [13] ，其中正交群的一些术语用法与 [17] 不同。遇到这种情况时，我们采用 [17] 中的定义。

设 k 是一个特征为 2 的域， W 是定义在 k 上的向量空间。若 $\mathrm{q}: W \to k$ 满足对所有 $a \in k$、 $w \in W$ 都有 $\mathrm{q}(aw) = a^2\mathrm{q}(w)$，则称 q 为二次型。存在相应的对称双线性型 $\mathrm{B}: W \times W \to k$ ，使得对所有 w、 $w' \in W$ 都有 $\mathrm{q}(w + w') = \mathrm{q}(w) + \mathrm{q}(w') + \mathrm{B}(w, w')$。在特征为 2 的域上，非奇异对称双线性型也是辛型。

称有序对（W, q）为二次空间。 W 的子空间

$$\mathrm{rad}(W) = \{x \in W \mid \mathrm{B}(x, w) = 0, \text{ for all } w \in W\}.$$

称为 W 的根。

给定一个二次型，存在 W 的一组基，由 x_i、y_i、g_j 构成，其中 $i \in \{1,2,\ldots,r\}$ 和 $j \in \{1,2,\ldots,s\}$，以及域元素 a_i、b_i、$c_j \in k$，使得

$$\mathrm{q}(w) = \sum_{i=1}^{r}(a_i e_i^2 + e_i f_i + b_i f_i^2) + \sum_{j=1}^{s} c_j z_j^2$$

当 $w = \sum_{i=1}^{r}(e_i x_i + f_i y_i) + \sum_{j=1}^{s} z_j g_j$ 时。我们将此二次型记为

$$\mathrm{q} = [a_1, b_1] \perp [a_2, b_2] \perp \cdots \perp [a_r, b_r] \perp \langle c_1, c_2, \ldots, c_s \rangle \tag{1}$$

因此，$\mathrm{rad}(W) = \mathrm{span}\{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$。第 1 节中给出的 q 的表示称为 q 的二次型符号。我们称这样的二次型为 (r, s) 型。非零向量 $w \in W$ 是各向同性向量，当 $\mathrm{q}(w) = 0$；若向量空间 V 含有各向同性元素，则称其为各向同性向量空间，否则称其为各向异性。若 W 满足 $s = 0$，则称其为非奇异；若满足 $r = 0$，则称其为全奇异。此外，若 W 满足 $s = 0$ 或 $\mathrm{rad}(W)$ 是各向异性的，则称其为非亏格。双曲平面上的二次型与形式 $[0,0]$ 等距，记作 $\mathbb{H}$。若存在一个形式 p，使得 $\mathrm{q} \cong \mathrm{q}' \perp \mathrm{p}$，则称 q' 是 q 的子型。在这种情况下，p 称为相对于 q 的 q' 的补全。

有时我们需要引用一个对角双线性型

$$\mathrm{B}(w, w') = a_1 w_1 w_1' + a_2 w_2 w_2' + \cdots + a_l w_l w_l',$$

记作 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_l \rangle_{\mathrm{B}}$，遵循 [17]。全文中，我们将使用花体数学字体表示 W 中的向量集合，例如$\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_l\}$，且 $\overline{\mathcal{U}}$ =张成 $\mathcal{U}$。下一个结果是 [17]中的命题 2.4。

命题 2.1。设 q 是 k上的二次型。那么

$$\mathrm{q} \cong m \times \mathbb{H} \perp \widetilde{\mathrm{q}_r} \perp \widetilde{\mathrm{q}_s} \perp d \times \langle 0 \rangle,$$

其中 $\widetilde{q_r}$ 非奇异，$\widetilde{\ }\mathrm{q}_s$ 全奇异，且 $\widetilde{\ }\mathrm{q}_r \perp \widetilde{q_s}$ 各向异性。形式$\widetilde{\ }\mathrm{q}_r \perp \widetilde{\ }\mathrm{q}_s$ 在等距变换意义下唯一确定。特别地，m 和 d 唯一确定。

我们称 m 为 q 的 Witt 指数，称 d 为 q 的亏格。如果

$$\mathrm{q} \cong m \times \mathbb{H} \perp \widetilde{\mathrm{q}_r} \perp d \times \langle 0 \rangle \perp \widetilde{\mathrm{q}_s},$$

相对于基

$$\{x_1, y_1, \ldots x_m, y_m, \ldots, x_r, y_r, g_1, \ldots g_d, g_{d+1}, \ldots, g_s\},$$

我们将称为

$$\mathrm{def}(W) = \mathrm{span}\{g_1, \ldots g_d\},$$

W的亏格。若 $\mathcal{U}$ 是子空间$\overline{\mathcal{U}}$ 的一组基，而$\overline{\mathcal{U}}$ 是 W的子空间，我们将相对于这组基把 q 在 $\overline{\mathcal{U}}$ 上的限制记为 q$_{\mathcal{U}}$。

设 G 是一个代数群，则自同构 $\theta: G \to G$ 是一个对合，当且仅当 $\theta^2 = \mathrm{id}, \quad \theta \neq \mathrm{id}$。若此外 $\theta(G(k)) = G(k)$，则自同构 θ 是一个 k-对合，其中 $G(k)$表示 G的 k-有理点。我们将 θ 在 $G(k)$中的不动点群定义为

$$G(k)^\theta = \{\gamma \in G(k) \mid \theta\gamma\theta^{-1} = \gamma\},$$

在不存在关于 θ的歧义时，文献中常将其记为 $H(k)$或 H_k。设 $\mathcal{I}_\tau$ 表示由 τ给出的共轭。

我们常考虑保持双线性型或二次型不变的群。若 B 是非奇异向量空间 W 上的双线性型，我们将 (W,q) 上定义于域 k 上的辛群记为

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{B}, k) = \{\varphi \in \mathrm{GL}(W) \mid \mathrm{B}(\varphi(w), \varphi(w')) = \mathrm{B}(w, w') \text{ for } w, w' \in W\}.$$

关于特征满足 char(k) $\neq 2$ 的域 k 上 Sp(B k) 的对合分类，已有文献 [3] 进行研究。对于域 k 上的任意二次空间 W，我们将把 (W,q) 的正交群记作

$$\mathrm{O}(\mathrm{q}, k) = \{\varphi \in \mathrm{GL}(W) \mid \mathrm{q}(\varphi(w)) = \mathrm{q}(w) \text{ for all } w \in W\}.$$

当 W 非奇异时，我们有 O(q k) $\subset$ Sp(B k)，其中 B 是与 q 相关联的双线性型。

我们需要用到以下引理中陈述的一些关于二次空间的事实。第一个陈述概述了特征 2 的域上二次型的一些标准等距变换，第二个则允许我们利用非奇异空间的另一种补全来表示 q。这些结果及其他类似结果见 [17]。

引理 2.2. 设 q 是向量空间 W 上的二次型，且假设 $\alpha \in k$。那么，以下是 q 在 W 上的等价表示:

1. $[a, a'] = [a, a + a' + 1] = [a', a] = [\alpha^2 a, \alpha^{-2} a']$

2. $[a, a'] \perp [b, b'] = [a + b, a'] \perp [b, a' + b'] = [b, b'] \perp [a, a']$

引理 2.3. 设 $a_i, b_i, c_i \in k$ 对于 $1 \leq i \leq n$。假设 $\{a_1, ..., a_n\}$ 和 $\{b_1, ..., b_n\}$ 在 k^2 上张成同一个向量空间，且 $\mathrm{q} = [a_1, c_1] \perp \ldots \perp [a_n, c_n]$。那么存在 $c_i' \in k$, $1 \leq i \leq n$，使得 $\mathrm{q} = [b_1, c_1'] \perp \ldots \perp [b_n, c_n']$。

对于映射 $\theta \in \mathrm{GL}(W)$，我们将 θ 的剩余空间定义为 $\theta + \mathrm{id}$ 的像，并将 θ 的剩余维数定义为剩余空间的维数。

3 对合结果总结

这里总结我们需要用来讨论每个对合的 $\mathrm{O}(\mathrm{q}\ k)$-共轭类的不动点群分类的结果 [18] 。

如果 W 是关于 q 的非奇异向量空间，我们可以在 W 上定义一个由 $w \in W$ 和 $a \in k$ 诱导的换位

$$\tau_{w,a}(z) = z + a\mathrm{B}(w, z)w,$$

正交换位的形式为$\tau_{w,\ \ ^{1}\,\mathrm{q}(w)}$，其中 $w \in W$ 满足 $\mathrm{q}(w) \neq 0$。在这种情况下，我们将该换位记为 τ_w。

如果 $\mathcal{U}$ 是诱导一组正交换位乘积的两两正交向量的集合 τ，我们称 $\mathcal{U}$ 为其诱导集

$$\tau = \tau_{\mathcal{U}} = \tau_{u_l} \cdots \tau_{u_2} \tau_{u_1}.$$

设 $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_l\}$ 和 $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_l\}$ 是 W 的一个非奇异子空间中的两两正交向量集。下文将把对合分解为给定类型（正交换位、基本零变换、基本根基变换）的对合之积；若这种分解所用的因子数最少，则称其为约化分解。我们将约化分解中的因子数称为对合的长度。

引理 3.1. 由正交换位的约化乘积给出的两个正交对合相等，当且仅当 $\tau_{u_l} \cdots \tau_{u_2} \tau_{u_1} = \tau_{x_l} \cdots \tau_{x_2} \tau_{x_1}$ 且 $\overline{\mathcal{U}} = \overline{\mathcal{X}}$。以及

$$\langle \mathrm{q}(u_1), \mathrm{q}(u_2), \ldots, \mathrm{q}(u_l) \rangle_{\mathrm{B}} \cong \langle \mathrm{q}(x_1), \mathrm{q}(x_2), \ldots, \mathrm{q}(x_l) \rangle_{\mathrm{B}}.$$

随后可以描述非奇异空间中由换位乘积给出的对合的正交群(q k)-共轭类分类。

定理 3.2。设 $\tau_{u_l}\cdots\tau_{u_2}\tau_{u_1}$和 $\tau_{x_l}\cdots\tau_{x_2}\tau_{x_1}$是 W 上的正交对合，并可写成换位的乘积，使得 $\phi\in$ O(q k)。那么

$$\phi\tau_{u_l}\cdots\tau_{u_2}\tau_{u_1}\phi^{-1}=\tau_{x_l}\cdots\tau_{x_2}\tau_{x_1}$$

当且仅当

$$\langle \mathrm{q}(u_1),\mathrm{q}(u_2),\ldots,\mathrm{q}(u_l)\rangle_{\mathrm{B}}\cong\langle \mathrm{q}(x_1),\mathrm{q}(x_2),\ldots,\mathrm{q}(x_l)\rangle_{\mathrm{B}},$$

且 dim($\overline{\mathcal{U}}$) =dim($\overline{\mathcal{X}}$)。

最后一个条件 dim($\overline{\mathcal{U}}$) =dim($\overline{\mathcal{X}}$)，区分了约化长度为 res(τ) $+1$的元素τ（称为双曲对合）与约化长度为 res(τ)的元素（称为对角型）。

还有一种非奇异对合，称为零对合。

定义 3.3。若平面 $P=$ span$\{x,y\}$ 满足以下两个条件，则称其为双曲（或阿廷）平面:

1. $\mathrm{q}(x)=\mathrm{q}(y)=0$
2. $B(x,y)\neq 0.$

若 x、y 张成一个双曲平面，我们可以重新缩放，使得 $B(x,y)=1$。[26] 的命题 188.2 保证，每个非奇异的非零各向同性向量都包含在一个双曲平面中。

定义 3.4. 设 η 是正交群 O(q k) 的一个对合，其中 (W, q) 是一个二次空间；设 $\mathbb{P}$ 是两个双曲平面的正交和。若对合 η 满足以下所有条件，则称其为 $\mathbb{P}$ 中的基本零对合:

1. η 保持 $\mathbb{P}$ 不变
2. η 固定 $\mathbb{P}$ 的一个二维子空间，且其中每个向量的范数都为零
3. $\eta|_{\mathbb{P}^C}=\mathrm{id}_{\mathbb{P}^C}$，其中 $\mathbb{P}^C$ 是 $\mathbb{P}$ 在 W 中的补空间。

零对合是若干基本零对合的乘积。注意，若 η 是一个零对合，而 τ 是一个换位，则 $\tau\eta$ 是若干仿射变换[26], 的乘积，因此我们只需考虑零对合彼此之间的共轭。

命题 3.5. 两个零对合在 O(q k)下共轭，当且仅当它们具有相同的长度。

最后，我们考虑仅作用于 W 的根上的对合。

命题 3.6. $\mathrm{O}(\mathrm{q}^{\mathrm{rad}(W)}, k) \cong \mathrm{GL}_d(k) \ltimes \mathrm{Mat}_{d,\ s-d}(k)$，其中 d 是 $\mathrm{rad}(W)$ 的亏格。

证明。设 d 是 W 的亏格。我们可以选取如下形式的一组基

$$\{g_1, \dots, g_d, g_{d+1}, \dots, g_s\}$$

其中，对于 $1 \le i \le d$，$\mathrm{q}(g_i) = 0$

$$\mathcal{G}_{\mathrm{is}} = \{g_1, \dots, g_d\},$$

以及由以下向量张成的子空间

$$\mathcal{G}_{\mathrm{an}} = \{g_{d+1}, \dots, g_s\}$$

是各向异性的。我们声称，可以用以下形式表示 $\mathrm{rad}(W)$ 上的等距变换

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi & M \\ 0 & \mathrm{id} \end{bmatrix}.$$

必须有 $\Psi|_{\mathcal{G}_{\mathrm{an}}} = \mathrm{id}$，否则 $\mathcal{G}_{\mathrm{an}}$ 中会存在两个范数相同的元素；由于该空间是全奇异的，这两个向量之和的范数为零。限制 $\Psi|_{\mathcal{G}_{\mathrm{is}}} = \psi \in \mathrm{GL}_d(k)$，因为 ψ 必须可逆；但由于双线性型和范数在 $\overline{\mathcal{G}_{\mathrm{is}}}$ 上恒为零，因此没有其他约束。来自 $\overline{\mathcal{G}_{\mathrm{is}}}$ 的元素的等距像不能包含来自 $\overline{\mathcal{G}_{\mathrm{an}}}$ 的任何分量，否则就意味着 $\overline{\mathcal{G}_{\mathrm{an}}}$ 不是各向异性的。最后，M 块不受约束，因为我们可以将根中的任意各向同性向量加到 W 中的任意向量上，而不改变二次型（和双线性型）。

我们可以分解

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi & M \\ 0 & \mathrm{id} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{id} & M \\ 0 & \mathrm{id} \end{bmatrix}$$

其中 $\begin{bmatrix} \psi & M \\ 0 & \mathrm{id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{id} & B \\ 0 & \mathrm{id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi & M \\ 0 & \mathrm{id} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{id} & \psi B \\ 0 & \mathrm{id} \end{bmatrix}$。 □

根基对合是定义在 W 的根中的向量上的 $\rho \in$ 正交群(q k) 中的一个阶为 2 的元素。注意，在 rad(W) 上的非平凡正交变换会检测出 W 中的缺陷向量，因为若 $\rho(g) = g'$，则 q($g + g'$) =q(g) + q(g') $= 0$。基本根基对合是一个根基对合 $\rho_i \in$正交群(q k)，满足 $\rho_i(g_i) = g_i'$，其中 g_i, g_i' 是 rad(W) 中的线性无关向量，且 q(g_i) $=$ q(g_i')，而 ρ_i 在 $\overline{\{g_i, g_i'\}}$ 的补空间上平凡作用。所有根基对合都可以写成基本根基对合的有限乘积。

命题 3.7. 两个基本根基对合 ρ_1, ρ_2 是 O(q k)-共轭的，当且仅当 ρ_1 和 ρ_2 在等距向量上非平凡作用。

推论 3.8. 所有长度为 m 且二次型符号与

$$\langle \mathrm{q}(g_1), \mathrm{q}(g_2), \ldots, \mathrm{q}(g_m) \rangle,$$

同构的根基对合都是 O(q k)-共轭的。

4 全各向同性空间

现在我们可以讨论 O(q k) 中这些对合的不动点群的同构类，这些同构类可用于研究相应的对称 k-簇。首先，我们讨论作用于全各向同性向量空间上的对合的不动点群。由此将进一步讨论非奇异子空间上对角对合的不动点群。

设向量空间 W 满足 $W =$ rad(W)。回想一下，在这样的向量空间中，任意二次型都具有如下形式

$$\mathrm{q} = \langle \mathrm{q}(g_1), \mathrm{q}(g_2), \ldots, \mathrm{q}(g_s) \rangle,$$

根据命题 2.1，我们有一个等距变换

$$\mathrm{q} \cong \langle 0, \ldots, 0, \mathrm{q}(g_1), \mathrm{q}(g_2), \ldots, \mathrm{q}(g_{s-d}) \rangle,$$

其中 d是 q 的亏格。

由命题 3.6 可知，正交群(q$^{\mathrm{rad}(W)}$, k) $\cong$ GL$_d$(k) $\ltimes$ Mat$_{d,\ s-d}$(k)。要使元素 $\delta \in$ 正交群(q k) 在对合 ρ 的共轭作用下保持不变，我们需要 $\rho\delta\rho = \delta$。

命题 4.1。若 q 是定义在 $W = \mathrm{rad}(W)$ 上的二次型，且 $\rho \in$ 正交群$(\mathsf{q}\ k)$ 是 W 上的对合，使得 $\rho(g_i) = g_i'$，并且二次型符号

$$\langle \mathrm{q}(g_1), \mathrm{q}(g_2), \cdots, \mathrm{q}(g_n) \rangle$$

于是 $\mathrm{O}(\mathsf{q}\ k)^{\mathcal{I}_\rho} \cong \mathrm{O}(\mathsf{q}^{\mathcal{G}\cup\mathcal{H}}, k) \ltimes \mathrm{Mat}_{n,s-n}(k)$，其中

$$\begin{aligned} \mathcal{G}' &= \{g_1', \ldots, g_n'\} \\ \mathcal{G} &= \{g_1, \ldots, g_n\} \\ \mathcal{H} &= \{h_1, \ldots, h_{s-2n}\} \end{aligned}$$

满足 $\rho(h_i) = h_i$ 和 $\overline{\mathcal{G}' \cup \mathcal{G} \cup \mathcal{H}} = W$。

证明。设 $\langle \mathsf{q}(g_1), \mathsf{q}(g_2) \ldots, \mathsf{q}(g_n) \rangle$ 是根基对合 ρ的符号，其中 $\rho(g_i) = g_i'$，且对任意 i或 i'，都有 $g_i' \neq g_i$。注意到 $\rho(g_i + g_i') = g_i + g_i'$，并且进一步有 $\rho(g_i) = g_i + (g_i + g_i')$。现在我们为 W排列一个基，

$$\mathcal{W} = \{g_1 + g_1', g_2 + g_2', \ldots, g_n + g_n', h_1, h_2, \ldots, h_{s-2n}, g_1, g_2, \ldots, g_n\}$$

使得 $\overline{\mathcal{W}} = W$ 且 $\rho(h_i) = h_i$。相对于这个基，我们可以将ρ 表示为分块矩阵

$$\rho = \begin{bmatrix} \mathrm{id} & 0 & \mathrm{id} \\ 0 & \mathrm{id} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id} \end{bmatrix},$$

因此，任意 $\delta \in \mathrm{O}(\mathsf{q}\ k)^{\mathcal{I}_\rho}$

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix},$$

使得 $\delta\rho = \rho\delta$ 具有如下形式

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ 0 & \delta_{22} & \delta_{23} \\ 0 & 0 & \delta_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{22} & \delta_{23} \\ 0 & 0 & \delta_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{id} & \delta_{12}' & \delta_{13}' \\ 0 & \mathrm{id} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id} \end{bmatrix}$$

其中 $\delta_{ij}' = \delta_{11}^{-1}\delta_{ij}$。注意，$\delta_{12}'$ 和 δ_{13}' 可以取任意矩阵值，因为 $\overline{\{g_1 + g_1', \ldots, g_n + g_n'\}}$包含在 W 的亏格中，而其余基向量张成的空间将会是

$$\mathcal{H} \cup \mathcal{G} = \{h_1, \ldots, h_{s-2n}, g_1, \ldots, g_n\},$$

现在，子群

$$\mathsf{M}=\left\{\begin{bmatrix}\delta_{11}&0&0\\0&\delta_{22}&\delta_{23}\\0&0&\delta_{11}\end{bmatrix}\;\middle|\;\begin{bmatrix}\delta_{22}&\delta_{23}\\0&\delta_{11}\end{bmatrix}\in \mathrm{O}(\mathrm{q}_{\mathcal{H}\cup\mathcal{G}},k,\overline{\mathcal{H}})\right\},$$

使得 $\mathsf{M}\cong$正交群$(\mathrm{q}^{\mathcal{H}\cup\mathcal{G}},k,\overline{\mathcal{H}})$，这是正交群$(\mathrm{q}^{\mathcal{H}\cup\mathcal{G}},k)$的子群，它保持子空间$\overline{\mathcal{H}}$不变。该子群

$$\mathsf{M}'=\left\{\begin{bmatrix}\mathrm{id}&\delta'_{12}&\delta'_{13}\\0&\mathrm{id}&0\\0&0&\mathrm{id}\end{bmatrix}\;\middle|\;\delta'_{12}\in\mathrm{Mat}_{n,d'}(k),\delta'_{13}\in\mathrm{Mat}_{n,s-n-d'}(k)\right\},$$

使得 $\mathsf{M}'\cong\mathrm{Mat}_{n,\ s-n}(k)$，并且 M 是正交群$(\mathrm{q}\ k)^{\mathcal{I}_\rho}$的正规子群，因此我们有正交群$(\mathrm{q}\ k)^{\mathcal{I}_\rho}\cong$正交群$(\mathrm{q}^{\mathcal{H}\cup\mathcal{G}},k,\overline{\mathcal{H}})\ltimes\mathrm{Mat}_{n,\ s-n}(k)$。 □

注4.2. 注意，若 $W=\mathrm{rad}(W)$是各向异性的，则正交群$(\mathrm{q}\ k)=\{id\}$，因此不存在对合；另一方面，若 W 是全迷向的，则正交群$(\mathrm{q}\ k)\cong\mathrm{GL}_s(k)$。

5 非奇异空间

现在我们考察非奇异空间上对角对合的不动点群。

命题 5.1. 设 $\tau=\tau_{u_l}\cdots\tau_{u_2}\tau_{u_1}$是一个约化对角正交对合，其诱导集为 $\mathcal{U}$，则 $\varphi\in$正交群$(\mathrm{q}\ k)^{\mathcal{I}_\tau}$当且仅当 $\varphi(\overline{\mathcal{U}})=\overline{\mathcal{U}}$。

证明。令 $\varphi\in$正交群$(\mathrm{q}\ k)^{\mathcal{I}_\tau}$注意到 $\tau\varphi\tau^{-1}=\varphi$当且仅当 $\varphi\tau\varphi^{-1}=\tau$因此

$$\varphi\tau_{u_l}\cdots\tau_{u_2}\tau_{u_1}\varphi^{-1}=\tau_{\varphi(u_l)}\cdots\tau_{\varphi(u_2)}\tau_{\varphi(u_1)}=\tau_{u_l}\cdots\tau_{u_2}\tau_{u_1}.$$

由引理 3.1 $\varphi(\overline{\mathcal{U}})=\overline{\mathcal{U}}$。

现在假设 $\varphi\in$正交群$(\mathrm{q}\ k)$ 且 $\varphi(\overline{\mathcal{U}})=\overline{\mathcal{U}}$那么

$$\langle\mathrm{q}(\varphi(u_1)),\mathrm{q}(\varphi(u_2)),\ldots,\mathrm{q}(\varphi(u_l))\rangle_B=\langle\mathrm{q}(u_1),\mathrm{q}(u_2),\ldots,\mathrm{q}(u_l)\rangle_B.$$

因此，根据定理 3.2，我们有 $\varphi\tau\varphi^{-1}=\tau$。 □

我们首先考虑 τ 在非奇异空间中长度达到最大值的情形。记 $\varphi_{\mathcal{U}}$ 为 φ 在子空间 $\overline{\mathcal{U}}$ 上的限制相对于基 $\mathcal{U}$ 的矩阵表示。回想一下,

$$\mathrm{q}_{\mathcal{U}} \cong \langle \mathrm{q}(u_1), \mathrm{q}(u_2), \ldots, \mathrm{q}(u_l) \rangle,$$

因为 $\overline{\mathcal{U}}$ 是 W的全奇异子空间。在这种情况下，命题 2.1 得出

$$\mathrm{q}_{\mathcal{U}} \cong m' \times \langle 0 \rangle \perp \langle c_{m'+1}, \ldots, c_l \rangle.$$

这对应于 $\mathcal{U}' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_l\}$ 的一组基，使得对于$1 \leq i \leq l$ ，$\mathrm{q}(u'_i) = c_i$；对于 $1 \leq i \leq m'$，$\mathrm{q}(c_i = 0)$。由于 $\overline{\mathcal{U}}$ 中的向量不属于 $\mathrm{rad}(W)$，因此在 W 中存在非奇异补全，它们构成一个非奇异子空间的基。q 的一个非奇异补全形式如下

$$[0, \mathrm{q}(v_1)] \perp [0, \mathrm{q}(v_2)] \perp \ldots \perp [0, \mathrm{q}(v_{m'})] \perp [c_{m'+1}, \mathrm{q}(v_{m'+1})] \perp \ldots \perp [c_l, \mathrm{q}(v_l)],$$

其中 $\mathrm{B}(u'_i, v_i) = 1$，当 $j \neq i$时 $\mathrm{B}(u'_i, v_j) = 0$，且 $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_l\}$ 张成一个全奇异子空间。注意，对于 $1 \leq i \leq m'$，我们可以选取$v'_i = v_i + \mathrm{q}(v_i)u'_i$。我们将此补全中的向量称为 $\mathcal{V}'$。现在

$$\mathrm{B}(u'_i, v'_i) = \mathrm{B}(u'_i, v_i) + \mathrm{q}(v_i)\mathrm{B}(u'_i, u'_i) = \mathrm{B}(u'_i, v_i) = 1,$$

and

$$\mathrm{q}(v'_i) = \mathrm{q}(v_i) + \mathrm{q}(v_i)^2\,\mathrm{q}(u'_i) + \mathrm{q}(v_i)B(v_i, u'_i) = \mathrm{q}(v_i) + \mathrm{q}(v_i) = 0.$$

因此，这个非奇异空间存在一组基 $\mathcal{W}$，其形式为

$$\mathcal{W}' = \mathcal{U}' \cup \mathcal{V}' = \{u'_1, v'_1, u'_2, v'_2, \ldots, u'_l, v'_l\},$$

相应的二次型为

$$\mathrm{q}_{\mathcal{W}} \cong m' \times [0, 0] \perp [c_{m'+1}, d_{m'+1}] \perp \ldots \perp [c_l, d_l],$$

其中，对 $1 \leq i \leq l$，$\mathrm{q}(v'_i) = d_i$。

考虑 $\varphi \in$正交群$(\mathrm{q}\ k)^{\mathcal{I}_\tau}$。由于 φ保持 $\overline{\mathcal{U}}$不变，我们有

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathcal{U}} & \varphi_{\mathcal{U}} A \\ 0 & \varphi_{\mathcal{V}} \end{bmatrix},$$

其中 $\varphi_{\mathcal{V}} : \overline{\mathcal{V}} \to \overline{\mathcal{V}}$，且 $A : \overline{\mathcal{V}} \to \overline{\mathcal{U}}$。考虑双线性型可得

$\mathrm{B}(\varphi(u_i)\ \varphi(v_j)) = \mathrm{B}(\varphi_{\mathcal{U}}(u_i)\ \varphi_{\mathcal{V}}(v_j) + \varphi_{\mathcal{U}}(Av_j)) = \mathrm{B}(\varphi_{\mathcal{U}}(u_i)\ \varphi_{\mathcal{V}}(v_j)) = \mathrm{B}(u_i, v_j)$.

因此，我们证明了以下结论

命题 5.2。映射 $\varphi_{\mathcal{V}}$ 完全由 $\varphi_{\mathcal{U}}$确定。

现在我们将使用 $\varphi_{\mathcal{V}} = \varphi_{\mathcal{U}}^{*}$，并利用 $\varphi_{\mathcal{U}}$ 的矩阵表示，得到 $\varphi_{\mathcal{U}}^{*} = (\varphi_{\mathcal{U}}^{-1})^{T}$。我们可以用分块矩阵表示 $\varphi \in$ 正交群$(\mathrm{q}\ k)^{\mathcal{I}_{\tau}}$

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathcal{U}} & \varphi_{\mathcal{U}} A \\ 0 & \varphi_{\mathcal{U}}^{*} \end{bmatrix}.$$

我们定义加法群

$$\mathrm{A}(\mathrm{q}_{\mathcal{U}}, k) = \{A \in \mathrm{Lin}(\overline{\mathcal{V}}, \overline{\mathcal{U}}) \mid \mathrm{q}(Av) = \mathrm{B}(v, Av)\}.$$

注意，$\mathrm{A}(\mathrm{q}_{\mathcal{U}}, k)$ 嵌入正交群$(\mathrm{q}\ k)^{\mathcal{I}_{\tau}}$ 中，作为一个加法群，因为

$$\mathrm{q}((A+C)v) = \mathrm{q}(Av) + \mathrm{q}(Cv) = \mathrm{B}(v, Av) + \mathrm{B}(v, Cv) = \mathrm{B}(v, (A+C)v),$$

对于 $A, C \in \mathrm{A}(\mathrm{q}_{\mathcal{U}}, k)$。我们将用 φ^{-*} 表示 $(\varphi^{-1})^{*}$。以下结果让我们得以深入了解不动点群的结构。

引理 5.3. 若 $u \in \overline{\mathcal{U}}$ 且 $v \in \overline{\mathcal{V}}$，则 $\mathrm{B}(\varphi_{\mathcal{U}}(u)\ v) = \mathrm{B}(u, \varphi_{\mathcal{U}}^{-*}(v))$。

证明。

$$\begin{aligned} \mathrm{B}(u, \varphi_{\mathcal{U}}^{-*}(v)) &= \mathrm{B}(\varphi(u), \varphi\varphi_{\mathcal{U}}^{-*}(v)) \\ &= \mathrm{B}(\varphi_{\mathcal{U}}(u), (\varphi_{\mathcal{U}}^{*} + \varphi_{\mathcal{U}} A)\varphi_{\mathcal{U}}^{-*}(v)) \\ &= \mathrm{B}(\varphi_{\mathcal{U}}(u), v + \varphi_{\mathcal{U}} A \varphi_{\mathcal{U}}^{-*}(v)) \\ &= \mathrm{B}(\varphi_{\mathcal{U}}(u), v), \end{aligned}$$

因为 $\varphi_{\mathcal{U}} A \varphi_{\mathcal{U}}^{-*}(v) \in \mathcal{U}$。 □

在下一个结果中，我们将看到这为加法群 $\mathrm{A}(\mathrm{q}_{\mathcal{U}}, k)$ 给出了一个同构。

引理 5.4. 对于 $\varphi_{\mathcal{U}} \in$ 正交群$(\mathrm{q}_{\mathcal{U}}, k)$ 和 $A \in \mathrm{A}(\mathrm{q}_{\mathcal{U}}, k)$，我们有

$$\Phi_{\varphi_{\mathcal{U}}}(A) = \varphi_{\mathcal{U}} A \varphi_{\mathcal{U}}^{-*},$$

是 $\mathrm{A}(\mathrm{q}_{\mathcal{U}}, k)$ 的一个同构。

证明。映射 $\Phi_{\varphi_{\mathcal{U}}}(A)$ 关于 $\mathsf{A}(\mathsf{q}_{\mathcal{U}}, k)$ 中的加法是一个同态，并且

$$\begin{aligned}\mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{U}} A \varphi_{\mathcal{U}}^{-*}(v)) &= \mathrm{q}(A\varphi_{\mathcal{U}}^{-*}(v)) \\ &= B(\varphi_{\mathcal{U}}^{-*}(v), A\varphi_{\mathcal{U}}^{-*}(v)) \\ &= B(v, \varphi_{\mathcal{U}} A \varphi_{\mathcal{U}}^{-*}(v)),\end{aligned}$$

由引理 5.3 以及 $\varphi_{\mathcal{U}} \in \mathsf{O}(\mathsf{q}_{\mathcal{U}}, k)$ 这一事实，可得结论。 □

命题 5.5. 对于 $\varphi = \left[\begin{smallmatrix} \varphi_{\mathcal{U}} & \varphi_{\mathcal{U}} A \\ 0 & \varphi_{\mathcal{U}}^{*} \end{smallmatrix}\right]$，$\varphi \in \mathsf{O}(\mathsf{q}\ k)^{\mathcal{I}_\tau}$ 当且仅当 $\varphi_{\mathcal{U}} \in \mathsf{O}(\mathsf{q}\ k)$ 且 $\mathsf{q}(v + Av) = \mathsf{q}(\varphi_{\mathcal{U}}^{*}(v))$，其中 $v \in \overline{\mathcal{V}}$ 是 $\overline{\mathcal{U}}$ 在 W 中的一个非奇异补全。

证明. 可通过以下计算证明。我们来计算

$$\begin{aligned}\mathrm{q}(\varphi(v)) &= \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{U}}^{*}(v) + \varphi_{\mathcal{U}}(Av)) \\ \mathrm{q}(v) &= \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{U}}^{*}(v)) + \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{U}}(Av)) + \mathrm{B}(\varphi_{\mathcal{U}}^{*}(v), \varphi_{\mathcal{U}}(Av)) \\ \mathrm{q}(v) &= \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{U}}^{*}(v)) + \mathrm{q}(Av) + \mathrm{B}(v, Av) \\ \mathrm{q}(v) + \mathrm{q}(Av) + \mathrm{B}(v, Av) &= \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{U}}^{*}(v)) \\ \mathrm{q}(v + Av) &= \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{U}}^{*}(v)).\end{aligned}$$

□

注记 5.6. 我们在此指出，并非对每个 $\varphi_{\mathcal{U}} \in \mathsf{O}(\mathsf{q}_{\mathcal{U}}, k)$，都必然存在一个形如 $\left[\begin{smallmatrix} \varphi_{\mathcal{U}} & 0 \\ 0 & \varphi_{\mathcal{U}}^{*} \end{smallmatrix}\right] \in \mathsf{O}(\mathsf{q}\ k)^{\mathcal{I}_\tau}$ 的元素。然而，对每个 $\varphi_{\mathcal{U}} \in \mathsf{O}(\mathsf{q}_{\mathcal{U}}, k)$，确实存在 $A_\varphi : \overline{\mathcal{V}} \to \overline{\mathcal{U}}$，使得 $\left[\begin{smallmatrix} \varphi_{\mathcal{U}} & \varphi_{\mathcal{U}} A_\varphi \\ 0 & \varphi_{\mathcal{U}}^{*} \end{smallmatrix}\right] \in \mathsf{O}(\mathsf{q}\ k)^{\mathcal{I}_\tau} \subset \mathsf{O}(\mathsf{q}\ k)$；我们将在下文陈述这一点。

引理 5.7. 若 $\tau = \tau_{u_l} \cdots \tau_{u_2} \tau_{u_1}$ 是 W 上长度为 l 的对角对合，$\dim(W) = 2l$，且 $\varphi_{\mathcal{U}} \in \mathsf{O}(\mathsf{q}_{\mathcal{U}}, k)$，则存在 $\varphi = \left[\begin{smallmatrix} \varphi_{\mathcal{U}} & \varphi_{\mathcal{U}} A \\ 0 & \varphi_{\mathcal{U}}^{*} \end{smallmatrix}\right] \in \mathsf{O}(\mathsf{q}_{\mathcal{U}}, k)^{\mathcal{I}_\tau}$。

证明. 我们知道，元素 $\varphi \in \mathsf{O}(\mathsf{q}\ k)^{\mathcal{I}_\tau}$ 保持 $\overline{\mathcal{U}}$ 不变，且必定具有如下形式

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathcal{U}} & A \\ 0 & \varphi_{\mathcal{U}}^{*} \end{bmatrix}.$$

现在考虑 $\varphi_{\mathcal{U}'}$ 其中 $\mathcal{U}'$ 是 $\overline{\mathcal{U}}$ 相对于

$$\mathrm{q}' = m \times [0,0] \perp [\mathrm{q}(u'_{m+1}), \mathrm{q}(v'_{m+1})] \perp \ldots \perp [\mathrm{q}(u'_l), \mathrm{q}(v'_l)]$$

并且 $[\mathrm{q}(u'_{m+1}), \mathrm{q}(v'_{m+1})] \perp \ldots \perp [\mathrm{q}(u'_l), \mathrm{q}(v'_l)]$ 是各向异性的，因此 q 的 Witt 指数为 m。那么我们可以写成

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathcal{U}'} & A' \\ 0 & \varphi^*_{\mathcal{U}'} \end{bmatrix},$$

其中

$$\varphi_{\mathcal{U}'} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & \mathrm{id} \end{bmatrix} \text{ which give us } \varphi^*_{\mathcal{U}'} = \begin{bmatrix} P_1^* & 0 \\ P_2^T P_1^* & \mathrm{id} \end{bmatrix}.$$

注意，我们可以选择 $P_1 \in \mathbf{GL}_m(k)$ 和 $P_2 \in \mathbf{Mat}_{m,\ l-m}(k)$，因为 P_1 作用于 $\overline{\{u'_1, \ldots, u'_m\}}$，所有向量两两正交且范数均为零。映射 P_2 将零范数向量加到各向异性向量上；同样，空间 $\mathcal{U}'$ 中的所有向量都彼此正交，因此没有其他约束。

令 $\mathcal{U'}_{\mathbb{H}} = \{u'_1, \underline{\ldots, u'_m}\}$ 和 $\mathcal{V'}_{\mathbb{H}} = \{v'_1, \ldots, v'_m\}$ 分别为 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 的缺陷子空间，其中 $\mathcal{U}'_{\mathbb{H}} \cup \mathcal{V}'_{\mathbb{H}}$ 构成 $W = \overline{\mathcal{W}}$ 的双曲子空间。

我们需要证明 A' 存在，其中

$$A' = \begin{bmatrix} A'_1 & A'_2 \\ A'_3 & A'_4 \end{bmatrix}.$$

我们可以选择 $A'_2 = A'_3 = A'_4 = 0$ 和 $A'_1 : \overline{\mathcal{V'}_{\mathbb{H}}} \to \overline{\mathcal{V'}_{\mathbb{H}}}$，使得 $A'_1 v'_j = \mathrm{q}(P_2^T P_1^* v'_j) P_1 u'_j$。首先注意，对于 v'_j

$$\begin{aligned}
\mathrm{q}(\varphi(v'_j)) &= \mathrm{q}(A'_1 v'_j + P_1^* v'_j + P_2^T P_1^* v'_j) \\
&= \mathrm{q}(A'_1 v'_j) + \mathrm{q}(P_1^* v'_j + P_2^T P_1^* v'_j) + B(A'_1 v'_j, P_1^* v'_j + P_2^T P_1^* v'_j) \\
&= \mathrm{q}(P_1^* v'_j) + \mathrm{q}(P_2^T P_1^* v'_j) + B(A'_1 v'_j, P_1^* v'_j) \\
&= \mathrm{q}(P_2^T P_1^* v'_j) + B(A'_1 v'_j, P_1^* v'_j) \\
&= \mathrm{q}(P_2^T P_1^* v'_j) + B(\mathrm{q}(P_2^T P_1^* v'_j) P_1 u'_j, P_1^* v'_j) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

因为 $A'_1 v'_j$、$P_1^* v'_j \in \mathcal{V}_{\mathbb{H}}$ 和 $B(u'_j, v'_j) = 1$。我们运用命题 5.5，注意到 $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathcal{U}} & A \\ 0 & \varphi^*_{\mathcal{U}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathcal{U}} & \varphi_{\mathcal{U}} \varphi_{\mathcal{U}}^{-1} A \\ 0 & \varphi^*_{\mathcal{U}} \end{bmatrix}$。现在，如果 $v'_j \in \mathcal{V'}_{\mathbb{H}}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{q}(v'_j + \varphi_{\mathcal{U}}^{-1}(A v'_j)) &= \mathrm{q}(v'_j) + \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{U}}^{-1}(A v'_j)) + \mathrm{B}(v'_j, \varphi_{\mathcal{U}}^{-1}(A v'_j)) \\
&= 0 + \mathrm{q}(\mathrm{q}(P_2 P_1^* v'_j) u'_j) + \mathrm{B}(v'_j, \mathrm{q}(P_2 P_1^* v'_j) u'_j)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + \mathrm{q}(P_2P_1^*v_j')\mathrm{B}(v_j', \mathrm{q}(P_2P_1^*v_j')u_j') \\
&= \mathrm{q}(P_2P_1^*v_j') \\
&= \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{U}}^*(v_j')).
\end{aligned}
$$

如果 v_j 是一个不属于 $\overline{\mathcal{V}'_{\mathbb{H}}}$ 的基向量，那么 $Av_j' = 0$ ，命题 5.5 显然成立。 □

我们将 $A_\varphi \in \mathrm{Mat}_{l,l}(k)$ 定义为对角矩阵，其中第 j 个对角元为 $\mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{U}}^*(v_j'))$，其余位置为 0，即 $A_\varphi v_j = \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{U}}^*(v_j'))u_j$ 当$1 \le j \le m$ 时，以及 $A_\varphi v_j' = 0$ 当 $m+1 \le j \le l$时。

命题 5.8. $A_{\varphi\theta} = \theta_{\mathcal{U}}^{-1} A_\varphi \theta_{\mathcal{U}}^* + A_\theta$

证明. 若令

$$
\theta_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & \mathrm{id} \end{bmatrix},
$$

则有

$$
\varphi = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_1A_{\varphi 1} & 0 \\ 0 & \mathrm{id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_1^* & 0 \\ 0 & 0 & P_2^TP_1^* & \mathrm{id} \end{bmatrix} \text{ and } \theta = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_1A_{\theta 1} & 0 \\ 0 & \mathrm{id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_1^* & 0 \\ 0 & 0 & Q_2^TQ_1^* & \mathrm{id} \end{bmatrix}.
$$

由此得到乘积

$$
\varphi\theta = \begin{bmatrix} P_1Q_1 & P_1Q_2 + P_2 & P_1A_{\varphi 1}Q_1 + P_1Q_1A_{\theta 1} & 0 \\ 0 & \mathrm{id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_1^*Q_1^* & 0 \\ 0 & 0 & (P_2^TP_1^* + Q_2^T)Q_1^* & \mathrm{id} \end{bmatrix}
$$

并计算 $(\theta_{\mathcal{U}}^{-1} A_\varphi \theta_{\mathcal{U}}^* + A_\theta)v_j'$，其中 $1 \le j \le m$

$$
\begin{aligned}
(\theta_{\mathcal{U}}^{-1} A_\varphi \theta_{\mathcal{U}}^* + A_\theta)v_j' &= P_1Q_1(Q_1^{-1}A_\varphi Q_1^* + A_\theta)v_j' \\
&= Q_1^{-1}A_\varphi Q_1^* v_j' + A_\theta v_j' \\
&= Q_1^{-1}\,\mathrm{q}(P_2^TP_1^*Q_1^*v_j)Q_1u_j' + \mathrm{q}(Q_2^TQ_1^*v_j)u_j' \\
&= \mathrm{q}(P_2^TP_1^*Q_1^*v_j)u_j' + \mathrm{q}(Q_2^TQ_1^*v_j)u_j' \\
&= \mathrm{q}((P_2^TP_1^* + Q_2^T)Q^*v_j)u_j' \\
&= A_{\varphi\theta}v_j'.
\end{aligned}
$$

注意，$(\theta_{\mathcal{U}}^{-1} A_\varphi \theta_{\mathcal{U}}^* + A_\theta)v_j' = 0$ 对 $m \le j \le l$ 成立。 □

我们作如下对应

$$\begin{bmatrix} \varphi_{\mathcal{U}} & \varphi_{\mathcal{U}} A_\varphi \\ 0 & \varphi_{\mathcal{U}}^* \end{bmatrix} \mapsto (\varphi_{\mathcal{U}}, 0),$$

由此得到乘积

$$(\varphi_{\mathcal{U}}, A)(\theta_{\mathcal{U}}, C) = (\varphi_{\mathcal{U}}\theta_{\mathcal{U}}, \theta_{\mathcal{U}}^{-1} A \theta_{\mathcal{U}}^* + C) \tag{2}$$

and

$$(\varphi_{\mathcal{U}}, A)^{-1} = (\varphi_{\mathcal{U}}^{-1}, \varphi_{\mathcal{U}} A \varphi_{\mathcal{U}}^{-*}). \tag{3}$$

推论 5.9. $(\varphi_{\mathcal{U}}, 0)(\theta_{\mathcal{U}}, 0) = (\varphi_{\mathcal{U}}\theta_{\mathcal{U}}, 0)$

引理 5.10. 若 τ 是 W 上长度为 l 的对角对合，且 $\dim(W) = 2l$，则 $\varphi \in \mathrm{O}(\mathrm{q}\ k)^{\mathcal{I}_\tau}$ 可写成 $(\varphi_{\mathcal{U}}, A)$，其中 $\varphi_{\mathcal{U}} \in \mathrm{O}(\mathrm{q}_{\mathcal{U}}, k)$ 且 $A \in \mathrm{A}(\mathrm{q}_{\mathcal{U}}, k)$。

证明. 根据命题 5.2，我们已确定 $\mathrm{O}(\mathrm{q}\ k)^{\mathcal{I}_\tau}$ 中的元素具有如下形式

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathcal{U}} & \varphi_{\mathcal{U}} M \\ 0 & \varphi_{\mathcal{U}}^* \end{bmatrix}$$

并且我们作了如下对应

$$\begin{bmatrix} \varphi_{\mathcal{U}} & \varphi_{\mathcal{U}} A_\varphi \\ 0 & \varphi_{\mathcal{U}}^* \end{bmatrix} \mapsto (\varphi_{\mathcal{U}}, 0).$$

由 (2) 可得 $(\varphi, A) = (\varphi, 0)(\mathrm{id}\ A)$，其中 $A \in \mathrm{A}(\mathrm{q}_{\mathcal{U}}, k)$，且我们可以令 $M = A_\varphi + A$。对于 $v \in \overline{\mathcal{V}}$，作为 $\overline{\mathcal{U}}$ 的一个非奇异补全，我们检验

$$\begin{aligned} \mathrm{q}(v + (A_\varphi + A)v) &= \mathrm{q}(v) + \mathrm{q}(A_\varphi v + Av) + \mathrm{B}(v, A_\varphi v) + \mathrm{B}(v, Av) \\ &= \mathrm{q}(v) + \mathrm{q}(A_\varphi v) + \mathrm{q}(Av) + \mathrm{B}(v, A_\varphi v) + \mathrm{B}(v, Av) \\ &= \mathrm{q}(v) + \mathrm{q}(A_\varphi v) + \mathrm{B}(v, A_\varphi v) \\ &= \mathrm{q}(v + A_\varphi v) \\ &= \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{U}}^*(v)) \end{aligned}$$

因此，由命题 5.5 可得该结果。 □

最后，我们证明不动点群的所有元素都可以分解为上述两个子群的半直积，这两个子群均属于 $\mathrm{O}(\mathrm{q}\ k)^{\mathcal{I}_\tau}$。

定理 5.11。当 $\tau = \tau_{u_l} \cdots \tau_{u_2} \tau_{u_1}$ 是定义在维数为 $2l$ 的非奇异空间上的长度为 l 的对角对合时

$$\mathrm{O}(\mathrm{q}, k)^{\mathcal{I}_\tau} \cong \mathrm{O}(\mathrm{q}_{\mathcal{U}}, k) \ltimes \mathsf{A}(\mathrm{q}_{\mathcal{U}}, k).$$

证明。由命题 5.1，我们知道 φ 必须保持$\overline{\mathcal{U}}$ 不变。由命题 5.2，我们知道，保持 $\overline{\mathcal{V}}$ 不变的 φ 的作用完全由 $\varphi_{\mathcal{U}}$决定。引理 5.7 告诉我们，对于任意 $\varphi_{\mathcal{U}} \in \mathsf{O}(\mathrm{q}_{\mathcal{U}}, k)$，都存在 $(\varphi_{\mathcal{U}}, 0) \in \mathsf{O}(\mathrm{q}\ k)^{\mathcal{I}_\tau}$。现在考虑任意 $(\varphi_{\mathcal{U}}, C) \in \mathsf{O}(\mathrm{q}\ k)^{\mathcal{I}_\tau}$，则我们可以分解

$$(\varphi_{\mathcal{U}}, C) = (\varphi_{\mathcal{U}}, 0)(\mathrm{id}, C)$$

并且我们知道 $(\varphi_{\mathcal{U}}, 0)$、$(\varphi_{\mathcal{U}}, C) \in \mathsf{O}(\mathrm{q}\ k)$，所以必有 $(\mathrm{id}\ C) \in \mathsf{A}(\mathrm{q}_{\mathcal{U}}, k)$。现在 $\mathsf{A}(\mathrm{q}_{\mathcal{U}}, k)$ 是一个正规子 group of $\mathrm{O}(\mathrm{q}, k)^{\mathcal{I}_\tau}$, 因为

$$\begin{aligned}
(\theta_{\mathcal{U}}, D)(\mathrm{id}, C)(\theta_{\mathcal{U}}, D)^{-1} &= (\theta_{\mathcal{U}}, D)(\mathrm{id}, C)(\theta_{\mathcal{U}}^{-1}, \theta_{\mathcal{U}} D \theta_{\mathcal{U}}^{-*}) \\
&= (\theta_{\mathcal{U}}, D + C)(\theta_{\mathcal{U}}^{-1}, \theta_{\mathcal{U}} D \theta_{\mathcal{U}}^{-*}) \\
&= (\theta_{\mathcal{U}} \theta_{\mathcal{U}}^{-1}, \theta_{\mathcal{U}}(D + C)\theta_{\mathcal{U}}^{-*} + \theta_{\mathcal{U}} D \theta_{\mathcal{U}}^{-*}) \\
&= (\mathrm{id}, \theta_{\mathcal{U}} C \theta_{\mathcal{U}}^{-*}).
\end{aligned}$$

□

这里我们考察非奇异向量空间 W 上的对角对合的不动点群，其中 $\dim(W) = 2r$ 且具有 $2l < 2r$。

命题 5.12. 元素 $\varphi \in$ 正交群$(\mathrm{q}\ k)^{\mathcal{I}_\tau}$，其中 $\tau = \tau_{\mathcal{U}}$ 是正交换位的乘积，可以写成如下形式

$$\begin{bmatrix} \varphi_{\mathcal{U}} & \varphi_{\mathcal{U}} C & \varphi_{\mathcal{U}} A \\ 0 & \varphi_{\mathcal{X}} & \varphi_{\mathcal{X}} D \\ 0 & 0 & \varphi_{\mathcal{U}}^{*} \end{bmatrix},$$

其中 $\varphi_{\mathcal{U}} \in$正交群$(\mathrm{q}_{\mathcal{U}}, k)$，$\varphi_{\mathcal{X}} \in$辛群$(\mathrm{B}_{\mathcal{X}}, k)$，且 $\varphi_{\mathcal{U}}^{*}$ 是满足 $\mathrm{B}(\varphi_{\mathcal{U}}(u)\ \varphi_{\mathcal{U}}^{*}(v)) = \mathrm{B}(u, v)$ 的唯一线性映射。

证明。映射 φ 以有序基作用于 W

$$\mathcal{W} = \{u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_{r-l}, y_1, \ldots, y_{r-l}, v_1, \ldots, v_l\}$$

其中 $\mathcal{U}$ 是 τ的诱导集，$\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{U}$ 的非奇异补全，且$\tau(x) = x$ 对所有满足以下条件的 $x \in \overline{\mathcal{X}}$

$$\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_{r-l}, y_1, \ldots, y_{r-l}\}.$$

注意，第一列中 $\varphi_{\mathcal{U}}$ 下的分块为零，因为根据命题 5.1，子空间 $\overline{\mathcal{U}}$ 在正交群 $\mathrm{O}(\mathrm{q}\ k)^{\mathcal{I}_\tau}$ 的任意元素作用下保持不变，其中

$$\tau = \tau_{\mathcal{U}} = \tau_{u_l} \cdots \tau_{u_2} \tau_{u_1}.$$

第二列中的第三个块为零，因为 $\overline{\mathcal{U}}$ 在 φ 和 $\overline{\mathcal{X}} \subset \overline{\mathcal{U}}^{\perp}$ 下保持不变。

□

我们已经证明 $\mathrm{B}(\varphi_{\mathcal{U}}(u)\ \varphi^*_{\mathcal{U}}(v)) = \mathrm{B}(u, v)$，并且我们将看到 C 和 D 具有类似的关系。

命题 5.13. 设 $\mathcal{X}$ 是 $\left(\overline{\mathcal{U} \cup \mathcal{V}}\right)^{\perp}$ 的一组基，使得对所有 $x \in \overline{\mathcal{X}}$，$\tau(x) = x$。映射 $\varphi_{\mathcal{X}} \colon \overline{\mathcal{X}} \to \overline{\mathcal{X}}$ 保持双线性型不变。

证明. 设 $x, x' \in \overline{\mathcal{X}}$，则

$$\begin{aligned} \mathrm{B}(x, x') &= \mathrm{B}(\varphi(x), \varphi(x')) \\ &= \mathrm{B}(\varphi_{\mathcal{X}}(x) + \varphi_{\mathcal{U}}(Cx), \varphi_{\mathcal{X}}(x') + \varphi_{\mathcal{U}}(Cx')) \\ &= \mathrm{B}(\varphi_{\mathcal{X}}(x), \varphi_{\mathcal{X}}(x')) \end{aligned}$$

因为 $\overline{\mathcal{U}} \subset \overline{\mathcal{U}}^{\perp}$。 □

群 $\mathrm{O}(\mathrm{q}\ k)^{\mathcal{I}_\tau}$ 有一个同构于 $\mathrm{O}(\mathrm{q}_{\mathcal{U}}, k)$ 的子群，其元素形式为

$$\begin{bmatrix} \varphi_{\mathcal{U}} & 0 & \varphi_{\mathcal{U}} A_\varphi \\ 0 & \mathrm{id} & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^*_{\mathcal{U}} \end{bmatrix}.$$

接下来，我们引入定理 14.1 [13], ，后文将多次用到。以下结果将导出关于 $\mathrm{O}(\mathrm{q}\ k)$ 上对合的不动点群的描述。

定理 5.14. 设 (W, q) 是一个二次空间，其极大非奇异子空间为 W_1，其中 $2r = \dim(W_1)$ 且 $s = \dim(\mathrm{rad}(W))$，并且 $\mathrm{q}\ |_{\mathrm{rad}(W)}$是各向异性的。若 $\sigma \in \mathrm{O}(W)$，则 $\sigma|_{\mathrm{rad}(W)} = \mathrm{id}^{\mathrm{rad}(W)}$, $\sigma|_{W_1} = \sigma_0 + \sigma_1$，其中$\sigma_0 \colon W_1 \to \mathrm{rad}(W)$ 且 $\sigma_1 \in \mathrm{Sp}(W_1)$。若 $\tau \in \mathrm{Sp}(W_1)$，则存在$\sigma \in \mathrm{O}(W)$，满足 $\sigma_1 = \tau$ 当且仅当对所有$w \in W_1$，$\mathrm{q}(\tau(w)) + \mathrm{q}(w) \in \mathrm{q}(\mathrm{rad}(W))$；此外，若 σ 存在，则它唯一。

命题 5.15. $\mathrm{B}(v, Cx) = \mathrm{B}(Dv, x)$.

证明. 考虑

$$\begin{aligned}0 &= \mathrm{B}(v,x)\\ &= \mathrm{B}(\varphi(v),\varphi(x))\\ &= \mathrm{B}(\varphi_{\mathcal{U}}(Av)+\varphi_{\mathcal{U}}^{*}(v)+\varphi_{\mathcal{X}}(Dv),\varphi_{\mathcal{U}}(Cx)+\varphi_{\mathcal{X}}(x))\\ &= \mathrm{B}(\varphi_{\mathcal{X}}(Dv),\varphi_{\mathcal{X}}(x))+\mathrm{B}(\varphi_{\mathcal{U}}^{*}(v),\varphi_{\mathcal{U}}(Cx))\\ &= \mathrm{B}(Dv,x)+\mathrm{B}(v,Cx).\end{aligned}$$

□

由于 D 完全由 C 确定，我们将 D 记作 $C^{\dagger}$。因此，我们可以改写命题 5.15 中的结果

$$\mathrm{B}(v,Cx)=\mathrm{B}(C^{\dagger}v,x) \tag{4}$$

事实上，我们可以为 W 选取一组基，使得 $\mathrm{B}_{\mathcal{UV}}:\overline{\mathcal{U}}\times\overline{\mathcal{V}}\to k$ 表示为 id，而 $\mathrm{B}_{\mathcal{X}}:\ \overline{\mathcal{X}}\times\overline{\mathcal{X}}\to k$ 表示为如下形式的对角分块矩阵

$$J=\begin{bmatrix}0 & \mathrm{id}\\ \mathrm{id} & 0\end{bmatrix},$$

由此得到方程 $C=C^{\dagger T}J$，换言之，即 $C^{\dagger}=JC^{T}$。由此可见，$(C+C')^{\dagger}=C^{\dagger}+C'^{\dagger}$

我们选取基

$$\mathcal{W}=\{u_1,u_2,\ldots,u_l,x_1,x_2,\ldots,x_{r-l},y_1,y_2,\ldots,y_{r-l},v_1,v_2,\ldots,v_l\}$$

并将 $\varphi\in$ 正交群$(\mathrm{q}\ k)^{\mathcal{I}_\tau}$ 写作

$$\varphi=\begin{bmatrix}\varphi_{\mathcal{U}} & \varphi_{\mathcal{U}}C & \varphi_{\mathcal{U}}A\\ 0 & \varphi_{\mathcal{X}} & \varphi_{\mathcal{X}}C^{\dagger}\\ 0 & 0 & \varphi_{\mathcal{U}}^{*}\end{bmatrix}.$$

$x\in\overline{\mathcal{X}}$ 在 $\varphi\in$ 正交群$(\mathrm{q}\ k)^{\mathcal{I}_\tau}$ 下的像给出了以下关系

$$\begin{aligned}\mathrm{q}(x) &= \mathrm{q}(\varphi(x))\\ &= \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{U}}(Cx)+\varphi_{\mathcal{X}}(x))\\ &= \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{U}}(Cx))+\mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{X}}(x))\\ &= \mathrm{q}(Cx)+\mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{X}}(x)).\end{aligned}$$

因此，我们进一步得到

$$\mathrm{q}(x + Cx) = \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{X}}(x)).$$

从这里开始，我们着手构造一个论证：对于每一对 $(\varphi_{\mathcal{X}}, C)$，只要 $\mathrm{q}(x + Cx) = \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{X}}(x))$，就存在一个线性变换 M，使三元组 $(\varphi^*_{\mathcal{U}}, C^\dagger, M)$ 在 $\overline{\mathcal{V}}$的像上保持 q 不变，同时在 $\varphi(W)$ 上保持 B 不变。

引理 5.16. 设 $\mathrm{q}_{\mathcal{U}}$ 是各向异性的，且 $T_{x,\omega} \in \mathrm{GL}(W)$ 具有如下形式

$$T_{x,\omega} = \begin{bmatrix} \mathrm{id}_{\mathcal{U}} & C & M \\ 0 & \tau_{x,\omega} & \tau_{x,\omega} C^\dagger \\ 0 & 0 & \mathrm{id}_{\mathcal{V}} \end{bmatrix}$$

其中 $\tau_{x,\omega} \in \mathrm{Sp}(\mathrm{B}_{\mathcal{X}}, k)$，并且对所有 $z \in \mathcal{X}$，$\mathrm{q}(\tau_{x,\omega}(z) + Cz) = \mathrm{q}(z)$。则存在一个 $M : \overline{\mathcal{V}} \to \overline{\mathcal{U}}$，使得 $T_{x,\omega} \in \mathrm{O}(\mathrm{q}\ k)$。

证明. 设 $x \in \overline{\mathcal{X}}$。为了证明对于这对 $(\tau_{x,\omega}, C)$ 存在这样的 M，考虑

$$\begin{bmatrix} \mathrm{id} & C & M \\ 0 & \tau_{x,\omega} & \tau_{x,\omega} C^\dagger \\ 0 & 0 & \mathrm{id} \end{bmatrix}$$

我们可以假设 $x = x_1$ 是一个基向量，且存在 $y_1 \in \overline{\mathcal{X}}$，使得 $\mathrm{B}(x_1, y_1) = 1$。

由于 $C : \overline{\mathcal{X}} \to \overline{\mathcal{U}}$ 且 $\overline{\mathcal{U}}$ 是 W的全奇异各向异性子空间，我们知道 $\mathrm{q}_{\mathcal{U}}$的像为 $k^2[\mathrm{q}(u_1), \mathrm{q}(u_2) \ldots, \mathrm{q}(u_l)],$，即由 $\mathcal{U}$中元素的范数张成的 k^2 向量空间。

假设 $\mathrm{q}(z) = \mathrm{q}(\tau_{x,\omega}(z) + Cz)$，则有 $\mathrm{q}(z) + \mathrm{q}(\tau_{x,\omega}(z)) = \mathrm{q}(Cz)$，其中 $\mathrm{q}(Cz) \in k^2[\mathrm{q}(u_1), \mathrm{q}(u_2) \ldots, \mathrm{q}(u_l)]$。

我们将 $\{x_1, y_1\}$ 扩充为 $\mathcal{X}$的一组基 $\{x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n\}$，使得

$$\mathrm{q}_{\mathcal{X}} = [\mathrm{q}(x_1), \mathrm{q}(y_1)] \perp \cdots \perp [\mathrm{q}(x_n), \mathrm{q}(y_n)].$$

现在我们可以更明确地描述 C的像。若 $\mathrm{q}(z) = \mathrm{q}(\tau_{x_1,\ \omega}(z))$，则 $\mathrm{q}(Cz) = 0$，因此 $Cz = 0$，因为 $\overline{\mathcal{U}}$ 是各向异性的。现在假设 $\mathrm{q}(z) \neq \mathrm{q}(\tau_{x_1,\ \omega}(z))$，并令 $c_{jj'}$ 为 $Cx_{j'}$ 的 u_j 的系数，$d_{jj'}$ 为 $Cy_{j'}$的 u_j 的系数。由于 $\tau_{x_1,\ \omega}(x_{j'}) = x_{j'}$，$\tau_{x_1,\ \omega}(y_{j'}) = y_{j'}$（对于 $j' \neq 1$），且$\tau_{x_1,\ \omega}(y_1) = y_1 + \omega x_1$，我们有

$$\sum_{j=1}^{l} c_{jj'}^2\, \mathrm{q}(u_j) = 0 \text{ for all } j, j' \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{l} d_{jj'}^2 \,\mathrm{q}(u_j) = 0 \text{ for all } j \text{ and all } j' \neq 1 \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{l} d_{j1}^2 \,\mathrm{q}(u_j) = \mathrm{q}(y_1) + \mathrm{q}(y_1 + \omega x_1) \tag{7}$$

由 (5) 可知，对所有 j 和 j'，$c_{jj'} = 0$ 成立；由 (6) 可知，对所有 $j' \neq 1$，$d_{jj'} = 0$ 成立。在 (7) 中解出 $\mathrm{q}(x_1)$，得到

$$\mathrm{q}(x_1) = \frac{1}{\omega} + \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{d_{j1}}{\omega}\right)^2 \mathrm{q}(u_j).$$

现在我们考虑 v_i的像

$$T_{x_1,\omega}(v_i) = v_i + \tau_{x_1,\omega}(C^\dagger v_i) + M v_i,$$

并计算此方程两边的范数，得到

$$\mathrm{q}(v_i) = \mathrm{q}(v_i) + \mathrm{q}(Mv_i) + \mathrm{B}(v_i, Mv_i) + \mathrm{q}(\tau_{x_1,\omega}(C^\dagger v_i))$$

$\mathrm{q}(Mv_i) + \mathrm{B}(v_i, Mv_i) = \mathrm{q}(\tau_{x_1,\omega}(C^\dagger v_i))$

$\mathrm{q}(Mv_i) + \mathrm{B}(v_i, Mv_i) = \mathrm{q}(C^\dagger v_i + \omega \mathrm{B}(x_1, C^\dagger v_i)x_1)\ \mathrm{q}(Mv_i) + \mathrm{B}(v_i, Mv_i) = \mathrm{q}($
$C^\dagger v_i) + \mathrm{q}(\omega \mathrm{B}(x_1, C^\dagger v_i)x_1) + \mathrm{B}(C^\dagger v_i, \omega \mathrm{B}(x_1, C^\dagger v_i)x_1)\ \mathrm{q}(Mv_i) + \mathrm{B}(v_i, Mv_i) =$
$\mathrm{q}(C^\dagger v_i) + \omega^2 \mathrm{B}(x_1, C^\dagger v_i)^2\ \mathrm{q}(x_1) + \omega \mathrm{B}(x_1, C^\dagger v_i)^2$

回想一下 $C^\dagger = JC^T$，我们有

$$C^\dagger v_i = \sum d_{ij'} x_{j'} + \sum c_{ij'} y_{j'} = d_{i1} x_1,$$

因为所有其他系数都为零。根据上述计算，我们需要Mv_i 满足

$$\begin{aligned}
\mathrm{q}(Mv_i) + \mathrm{B}(v_i, Mv_i) &= \mathrm{q}(C^\dagger v_i) + \omega^2 \mathrm{B}(x_1, C^\dagger v_i)^2\, \mathrm{q}(x_1) + \omega \mathrm{B}(x_1, C^\dagger v_i)^2 \\
&= \mathrm{q}(d_{i1} x_1) + \omega^2 \mathrm{B}(x_1, d_{i1} x_1)^2\, \mathrm{q}(x_1) + \omega \mathrm{B}(x_1, d_{i1} x_1)^2 \\
&= \mathrm{q}(d_{i1} x_1) \\
&= \frac{d_{i1}^2}{\omega} + \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{d_{i1} d_{j1}}{\omega}\right)^2 \mathrm{q}(u_j)
\end{aligned}$$

令

$$Mv_i = \sum_{j=1}^{l} \frac{d_{i1}d_{j1}}{\omega} u_j,$$

我们看到

$$\begin{aligned}
\mathrm{q}(Mv_i) + \mathrm{B}(v_i, Mv_i) &= \mathrm{q}\left(\sum_{j=1}^{l} \frac{d_{i1}d_{j1}}{\omega} u_j\right) + \mathrm{B}\left(v_i, \sum_{j=1}^{l} \frac{d_{i1}d_{j1}}{\omega} u_j\right) \\
&= \frac{d_{i1}^2}{\omega} + \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{d_{i1}d_{j1}}{\omega}\right)^2 \mathrm{q}(u_j).
\end{aligned}$$

注意，这也保持了双线性型，因为

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(T_{x_1,\omega}(v_i), T_{x_1,\omega}(v_{i'})) &= \mathrm{B}(v_i + \tau_{x_1,\omega}(C^\dagger v_i) + Mv_i, v_{i'} + \tau_{x_1,\omega}(C^\dagger v_{i'}) + Mv_{i'}) \\
&= \mathrm{B}\left(v_i, \sum \frac{d_{i'1}d_{j1}}{\omega} u_j\right) \\
&\quad + \mathrm{B}(\tau_{x_1,\omega}(C^\dagger v_i), \tau_{x_1,\omega}(C^\dagger v_{i'})) + \mathrm{B}\left(\sum \frac{d_{i1}d_{j1}}{\omega} u_j, v_{i'}\right) \\
&= \frac{d_{i'1}d_{i1}}{\omega} \mathrm{B}(v_i, u_i) + \mathrm{B}(C^\dagger v_i, C^\dagger v_{i'}) + \frac{d_{i1}d_{i'1}}{\omega} \mathrm{B}(u_{i'}, v_{i'}) \\
&= \frac{d_{i'1}d_{i1}}{\omega} + \mathrm{B}(d_{i1}x_1, d_{i'1}x_1) + \frac{d_{i1}d_{i'1}}{\omega} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

命题 5.17。设

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathcal{U}} & \varphi_{\mathcal{U}} C & \varphi_{\mathcal{U}} A \\ 0 & \varphi_{\mathcal{X}} & \varphi_{\mathcal{X}} C^\dagger \\ 0 & 0 & \varphi_{\mathcal{U}}^* \end{bmatrix}$$

使得 $C\colon \overline{\mathcal{X}} \to \overline{\mathcal{U}}$对于 $\varphi_{\mathcal{X}} \in \mathrm{Sp}(\mathrm{B}_{\mathcal{X}}, k)$，使得对于所有 $x \in \overline{\mathcal{X}}$，$\mathrm{q}(x + Cx) = \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{X}})$，那么存在一个 $M\colon \overline{\mathcal{V}} \to \overline{\mathcal{U}}$ 使得

$$\mathrm{q}(\varphi(v)) = \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{U}}(Mv) + \varphi_{\mathcal{X}}(C^\dagger v) + \varphi_{\mathcal{U}}^*(v)).$$

此外 $\varphi \in$ 正交群$(\mathrm{q}\ k)$。

证明。按之前的方式排列基，并考虑

$$\begin{bmatrix} \varphi_{\mathcal{U}} & \varphi_{\mathcal{U}}C & \varphi_{\mathcal{U}}A \\ 0 & \varphi_{\mathcal{X}} & \varphi_{\mathcal{X}}C^{\dagger} \\ 0 & 0 & \varphi_{\mathcal{U}}^{*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathcal{U}} & 0 & \varphi_{\mathcal{U}}(A+M) \\ 0 & \mathrm{id} & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{\mathcal{U}}^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{id} & C & M \\ 0 & \varphi_{\mathcal{X}} & \varphi_{\mathcal{X}}C^{\dagger} \\ 0 & 0 & \mathrm{id} \end{bmatrix} \tag{8}$$

首先，我们选择 v_j，其中 $1 \le j \le m$ 是一个各向同性基向量 $\mathrm{q}(v_j) = 0$，位于$\overline{\mathcal{V}}$中。我们选择 $Mv_j = (\mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{X}}(C^{\dagger}v_j)) + \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{U}}^{*}(v_j)))u_j$

$$\begin{aligned} \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{U}}(Mv_j) + \varphi_{\mathcal{X}}(C^{\dagger}v_j) + \varphi_{\mathcal{U}}^{*}(v_j)) &= \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{U}}(Mv_j)) + \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{X}}(C^{\dagger}v_j)) \\ &\quad + \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{U}}^{*}(v_j)) + \mathrm{B}(\varphi_{\mathcal{U}}(Mv_j), \varphi_{\mathcal{U}}^{*}(v_j))) \\ &= \mathrm{q}(Mv_j) + \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{X}}(C^{\dagger}v_j)) \\ &\quad + \mathrm{q}(\varphi_{\mathcal{U}}^{*}(v_j)) + \mathrm{B}(Mv_j, v_j) = 0 \end{aligned}$$

现在令 v_j满足 $m < j \le l$。那么 $\mathrm{q}(v_j) \neq 0$，且 $\varphi_{\mathcal{U}}^{*}(v_j) = v_j$。不失一般性，我们可以假设 $\overline{\mathcal{U}}$ 是各向异性的，因为 $\overline{\mathcal{U}}$ 中的任何各向同性向量都不会对 $\varphi(v_j)$的整体范数产生贡献：它的范数为零，且与所有各向异性基向量的双线性型均为平凡。

由于 $\varphi_{\mathcal{X}} \in \mathrm{Sp}(\mathrm{B}_{\mathcal{X}}, k)$，且 $\mathcal{U}$是各向异性的，根据[23] 中的定理 2.1.9，$\varphi_{\mathcal{X}}$ 可以写成辛换位的乘积

$$\varphi_{\mathcal{X}} = \tau_{x_N,\omega_N} \cdots \tau_{x_2,\omega_2}\tau_{x_1,\omega_1}$$

并且根据定理 5.14 C 是唯一的。因此我们可以分解

$$\begin{bmatrix} \mathrm{id} & C & M \\ 0 & \varphi_{\mathcal{X}} & \varphi_{\mathcal{X}}C^{\dagger} \\ 0 & 0 & \mathrm{id} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{id} & C_N & M_N \\ 0 & \tau_{z_N,\omega_N} & \tau_{z_N,\omega_N}C_N^{\dagger} \\ 0 & 0 & \mathrm{id} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \mathrm{id} & C_1 & M_1 \\ 0 & \tau_{z_1,\omega_1} & \tau_{z_1,\omega_1}C_1^{\dagger} \\ 0 & 0 & \mathrm{id} \end{bmatrix}$$

其中 $\varphi_{\mathcal{X}} = \tau_{z_N,\ \omega_N} \cdots \tau_{z_2,\ \omega_2}\tau_{z_1,\ \omega_1}$。根据引理 5.16，对于$1 \le i \le N$，$M_i$存在。由于每个 C_i 都是唯一的，右侧的乘积给出了左侧唯一的 C 和 M。该乘积保持双线性型，因为每个 $T_{x_i,\ \omega_i}$都保持双线性型。

根据引理 5.7，我们可以选取 $A+M$，使得 (8) 右侧的第一个因子是正交群 $\mathrm{O}(\mathrm{q}\ k)$ 的一个元素。我们已构造出第二个因子，使其成为正交群 $\mathrm{O}(\mathrm{q}\ k)$ 的一个元素，因此 $\varphi \in \mathrm{O}(\mathrm{q}\ k)$。

□

为了确定特征为 2 的域上的非奇异向量空间中对合的不动点群的同构类，我们需要一个基，其中的向量按照特定性质排列。令

$$\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_l\}$$

为 W 中诱导出对角对合 $\tau_{\mathcal{U}}$ 的各向异性两两正交向量集合。我们为 $\overline{\mathcal{U}}$ 选取一组新基，以标明 $\overline{\mathcal{U}}$ 的 Witt 指数 m。我们将这组基称为

$$\mathcal{U}' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_m, u'_{m+1}, \ldots, u'_l\},$$

使得 $\overline{\mathcal{U}} = \overline{\mathcal{U}'}$，且 $\dim_k(\overline{\mathcal{U}}) = l$，并且对于 $1 \leq i \leq m$，$\mathrm{q}(u'_i) = 0$。本节末尾将讨论 $\dim_k(\overline{\mathcal{U}}) = l - 1$ 的情形。

现在，我们可以选取 $\mathcal{V}'$，使其为构成非奇异子空间 $\overline{\mathcal{U} \cup \mathcal{V}} = \overline{\mathcal{U}' \cup \mathcal{V}'} \subset W$ 的相应双曲对，并满足对于 $1 \leq i \leq m$，$\mathrm{q}(v'_i) = 0$，且 $\dim(\overline{\mathcal{U} \cup \mathcal{V}}) = 2l$。我们为 $W = \overline{\mathcal{W}}$ 选取一组新的有序基 $\mathcal{W}'$

$$\mathcal{W} = \{u_1, u_2, \ldots, u_l, v_1, v_2, \ldots, v_l, x_1, x_2, \ldots, x_{r-l}, y_1, y_2, \ldots, y_{r-l}\}$$

其中 $\mathcal{W}' = \mathcal{U}' \cup \mathcal{X} \cup \mathcal{V}'$ 按照以下顺序排列

$$\mathcal{U}' = \{u'_1, u'_2, \ldots u'_m, u'_{m+1}, \ldots, u'_l\},$$

$$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{r-l}, y_1, y_2, \ldots, y_{r-l}\}$$

and

$$\mathcal{V}' = \{v'_{m+1}, \ldots, v'_l, v'_1, v'_2, \ldots, v'_m\}.$$

这样，$\mathcal{U}'$ 中的全向量和 $\mathcal{V}'$ 中的全向量分别排在最前和最后。我们可以将 k 的一个元素表示为如下矩阵：

$$P_\varphi X_\varphi C_\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathcal{U}} & \varphi_{\mathcal{U}} C & \varphi_{\mathcal{U}} M \\ 0 & \varphi_{\mathcal{X}} & \varphi_{\mathcal{X}} C^\dagger \\ 0 & 0 & \varphi^*_{\mathcal{U}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_1C_1 + P_2C_3 & P_1C_2 + P_2C_4 & P_1M_1 + P_2M_3 & P_1M_2 + P_2M_4 \\ 0 & \mathrm{id} & C_3 & C_4 & M_3 & M_4 \\ 0 & 0 & X_1 & X_2 & X_1C_4^T + X_2C_3^T & X_1C_2^T + X_2C_1^T \\ 0 & 0 & X_3 & X_4 & X_3C_4^T + X_4C_3^T & X_3C_2^T + X_4C_1^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} & P_2^T P_1^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1^* \end{bmatrix}$$

$$P_\varphi = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & 0 & 0 & 0 & A_\varphi \\ 0 & \mathrm{id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} & P_2^T P_1^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1^* \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$X_\varphi = \begin{bmatrix} \mathrm{id} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id} & C_3 & C_4 & M_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & X_1 & X_2 & X_1 C_4^T + X_2 C_3^T & 0 \\ 0 & 0 & X_3 & X_4 & X_3 C_4^T + X_4 C_3^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$C_\varphi = \begin{bmatrix} \mathrm{id} & 0 & C_1 & C_2 & M_1 & M_2 \\ 0 & \mathrm{id} & 0 & 0 & 0 & M_4 \\ 0 & 0 & \mathrm{id} & 0 & 0 & C_2^T \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} & 0 & C_1^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} \end{bmatrix} \tag{11}$$

我们用 $\mathcal{U}_{is}$ 表示 $\mathcal{U}$ 中的全向量，用 $\mathcal{U}_{an}$ 表示 $\mathcal{U}$中的各向异性向量。

命题 5.18. 若 $\varphi \in$ 正交群(q $k)^{\mathcal{I}_\tau}$，其中 $\tau = \tau_{\mathcal{U}}$，则由 (9)、(10) 和 (11) 得到 $\varphi = P_\varphi X_\varphi C_\varphi$。

证明. 矩阵 P_φ 与正交群(q$\mathcal{U}, k$)中的一个元素同构，其中 A_φ 唯一。矩阵 X_φ 与正交群(q$_{\mathcal{U}_{\mathrm{an}} \cup X}, k$)中的一个元素同构，$\cong H \subset$ 辛群(B$_{\mathcal{X}}, k$)，其中 $[C_3|C_4]$ 是定理 14.1 中从 $[13]$ 出发的唯一线性映射。映射 C_1、$C_2 \colon \overline{X} \to \overline{\mathcal{U}}_{is}$ 的像是 rad($\overline{\mathcal{U} \cup \mathcal{X}}$) $= \mathcal{U}$ 中的各向同性像，因此在 $\overline{\mathcal{U} \cup \mathcal{X}}$ 上范数和双线性型均为零。由于 P_φ、$X_\varphi \in$ 属于正交群(q k)，且 $\varphi \in$ 属于正交群(q $k)^{\mathcal{I}_\tau}$，因此 $C_\varphi \in$ 属于正交群 (q k)，且 $P_\varphi X_\varphi C_\varphi = \varphi$ 保持 $\overline{\mathcal{U}}$ 不变。 □

我们证明，矩阵 P_φ、X_φ 和 C_φ 分别对应于 O(q $k)^{\mathcal{I}_\tau}$ 的子群，并分别将这些子群记为 P、X 和 C。接下来，我们考察 P、C 和 X 要成为 O(q k) 的子群还需要满足哪些限制。

为了刻画这些子群，以下我们假设 $\overline{\mathcal{U}\cup\mathcal{V}}$ 的基按如下顺序排列

$$\{u'_1, u'_2, \dots u'_m, u'_{m+1}, \dots, u'_l, v'_{m+1}, \dots, v'_l, v'_1, v'_2, \dots, v'_m\} \tag{12}$$

其中 m 是 $\overline{\mathcal{U}\cup\mathcal{V}}$ 的 Witt 指数，且对于 $1 \le i \le m$，$\mathsf{q}(u'_i) = \mathsf{q}(v'_i) = 0$。

命题 5.19。元素 $C_\varphi \in \mathbf{C} \subset$ 正交群$(\mathsf{q}\ k)$ 具有 $C_1, C_2 \in \mathbf{Mat}_{m,\ s-l}(k)$ 和 $M_1 \in \mathbf{Mat}_{m,\ l-m}(k)$，$M_4 = M_1^T$以及 $M_2 \in \mathbf{Mat}_{m,\ m}(k)$，使得

$$M_2 + M_2^T = C_1 C_2^T + C_2 C_1^T.$$

证明。利用有序基 (12)，我们看到 $\mathrm{B}_{\mathcal{U}\cup\mathcal{V}}$ 的矩阵表示具有如下形式

$$[\mathrm{B}_{\mathcal{U}\cup\mathcal{V}}] = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{id}_{l-m} \\ \mathrm{id}_m & 0 \end{bmatrix}.$$

现在注意到 $M_1 : \overline{\mathcal{V}_{\mathrm{is}}} \to \overline{\mathcal{U}_{\mathrm{an}}}$ 且 $M_4 : \overline{\mathcal{V}_{\mathrm{an}}} \to \overline{\mathcal{U}_{\mathrm{is}}}$。我们将针对 i和 j的不同取值计算 $\mathrm{B}(Mv_i, v_j)$。首先注意到

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(Mv_i, v_j) &= (Mv_i)^T [\mathrm{B}_{\mathcal{U}\cup\mathcal{V}}] v_j \\
&= v_i^T \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{id}_{l-m} \\ \mathrm{id}_m & 0 \end{bmatrix} v_j \\
&= v_i^T \begin{bmatrix} M_1^T & 0 \\ M_2^T & M_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{id}_{l-m} \\ \mathrm{id}_m & 0 \end{bmatrix} v_j \\
&= v_i^T \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{id}_{l-m} \\ \mathrm{id}_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_4^T & M_2^T \\ 0 & M_1^T \end{bmatrix} v_j
\end{aligned}$$

因此，我们有以下关系

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(Mv_i, v_j) &= \mathrm{B}(M_1 v_i, v_j) \\
&= \mathrm{B}(v_i, M_2^T v_j + M_1^T v_j) \\
&= \mathrm{B}(v_i, M_1^T v_j)
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(v_i, Mv_j) &= \mathrm{B}(M_2 v_j + M_4 v_j, v_i) \\
&= \mathrm{B}(M_4 v_j, v_i) \\
&= \mathrm{B}(v_j, M_4^T v_i)
\end{aligned}$$

当 $1 \le j < m+1 \le i \le l$ 和

$$\begin{aligned} \mathrm{B}(Mv_i, v_j) &= \mathrm{B}(M_2 v_i + M_4 v_i, v_j) \\ &= \mathrm{B}(M_2 v_i, v_j) \\ &= \mathrm{B}(v_i, M_2^T v_j + M_1^T v_j) \\ &= \mathrm{B}(v_i, M_2^T v_j) \end{aligned}$$

当 $1 \le i, j \le m$ 时。

现在我们计算 $1 \le i, j \le m$ 时的 $\mathrm{B}(C_\varphi v_i, C_\varphi v_j)$

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{B}(C_\varphi v_i, C_\varphi v_j) \\ &= \mathrm{B}(v_i + (C_1^T + C_2^T + M_4 + M_2)v_i, v_j + (C_1^T + C_2^T + M_4 + M_2)v_j) \\ &= \mathrm{B}(v_i, M_2 v_j) + \mathrm{B}(C_1^T v_i, C_2^T v_j) + \mathrm{B}(C_2^T v_i, C_1^T v_j) + \mathrm{B}(M_2 v_i, v_j) \end{aligned}$$

因此，我们有

$$\mathrm{B}(v_i, (M_2 + M_2^T)v_j) = \mathrm{B}(v_i, (C_1 C_2^T + C_2 C_1^T)v_j)$$

又由于 B 在这个非奇异空间上是非退化的，我们有 $M_2 + M_2^T = C_1 C_2^T + C_2 C_1^T$。

另一方面，若 $1 \le i \le m < j \le l$，则有

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{B}(C_\varphi v_i, C_\varphi v_j) \\ &= \mathrm{B}(v_i + (C_1^T + C_2^T + M_4 + M_2)v_i, v_j + M_1 v_j) \\ &= \mathrm{B}(v_i, M_1 v_j) + B(M_4 v_i, v_j) \\ \mathrm{B}(v_i, M_1 v_j) &= \mathrm{B}(v_i, M_4^T v_j) \end{aligned}$$

因此，我们有 $M_1 = M_4^T$。进一步注意到，C_1、C_2 和 M_1 的像都在 $\overline{\mathcal{U}}$ 的全迷向子空间中，因此在 $\overline{\mathcal{U} \cup \mathcal{X}}$ 上的范数为零，双线性型的值也为零。

映射 M_2 还受到进一步的约束。为此，我们考察 C_φ 作用于 v_i 上并取 $1 \le i \le m$ 时所得像的范数。

$$\begin{aligned} \mathrm{q}(C_\varphi v_i) &= \mathrm{q}(v_i + (C_1^T + C_2^T + M_4 + M_2)v_i) \\ \mathrm{q}(v_i) &= \mathrm{q}(v_i) + \mathrm{q}((C_1^T + C_2^T)v_i) + \mathrm{q}(M_4 v_i + M_2 v_i) + \mathrm{B}(v_i, M_4 v_i + M_2 v_i) \\ \mathrm{B}(v_i, M_2 v_i) &= \mathrm{q}((C_1^T + C_2^T)v_i) + \mathrm{q}(M_1^T v_i) \end{aligned}$$

这一计算表明，M_2 的对角型由形如 $\mathrm{q}((C_1^T + C_2^T)v_i) + \mathrm{q}(M_1^T v_i))$ 的项组成。 □

引理 5.20. 子群 P 与 O(qu, k) 同构。

证明。这是引理 5.7 和命题 5.8 中的同一个群。 □

引理 5.21。子群 X 同构于正交群 O(q$^{u'_{\mathrm{an}} \cup x}, k$)

证明。这是定理 14.1 及相关讨论中所描述的群。定理 14.1 在本文档中也以定理 5.14 的形式出现。

□

引理 5.22。XC $=$ CX $\cong$ X $\ltimes$ C。

证明。注意，XC 在乘法下封闭。我们通过验证 C 是 XC 的正规子群来证明 XC $=$ CX。考虑来自（10）的 $X_\varphi \in$X，并计算其逆元

$$X_\varphi^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{id} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id} & C_3X_4^T + C_4X_3^T & C_3X_2^T + C_4X_1^T & C_3C_4^T + C_4C_3^T + M_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & X_4^T & X_2^T & C_4^T & 0 \\ 0 & 0 & X_3^T & X_1^T & C_3^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} \end{bmatrix}$$

我们将 φ_x 定义为带有 $\overline{x}$ 的标准辛基的辛矩阵 $\left[\begin{smallmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{smallmatrix}\right]$。现在 $X_\varphi C_\varphi X_\varphi^{-1} \in$ C。

□

我们将命题 5.19 中描述的群 C 定义为 A(qu, k)。

定理 5.23。由两两正交的向量 $\mathcal{U}$ 所诱导的仿射变换之积 $\tau = \tau_{\mathcal{U}}$，其不动点群为 O(q k)$^{\mathcal{I}_\tau} \cong$O(q$u, k$) $\ltimes$ (O(q$^{u_{\mathrm{an}} \cup x}, k$) $\ltimes$ A(qu, k)。

证明。我们为 $\overline{u}$ 选取一组基，使得对应于 $\overline{u}$ 中最大缺陷的基向量列在最前面，而 $\overline{u}$ 在 W 中的非奇异补全 $\overline{v}$ 所对应的亏格的基向量列在最后。于是根据命题 5.12 $\varphi \in$，正交群(q k)$^{\mathcal{I}_\tau}$ 具有如下形式

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_u & \varphi_u C & \varphi_u M \\ 0 & \varphi_x & \varphi_x C^\dagger \\ 0 & 0 & \varphi_u^* \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_1C_1+P_2C_3 & P_1C_2+P_2C_4 & P_1M_1+P_2M_3 & P_1(M_2+A_\varphi)+P_2M_4 \\ 0 \text{ 标识 } & & C_3 & C_4 & M_3 & M_4 \\ 0 & 0 & X_1 & X_2 & X_1C_4^T+X_2C_3^T & X_1C_2^T+X_2C_1^T \\ 0 & 0 & X_3 & X_4 & X_3C_4^T+X_4C_3^T & X_3C_2^T+X_4C_1^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{id} & P_2^TP_1^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1^* \end{bmatrix}$$

注意，根据 (9)、(10) 和 (11)，这可以分解为 $\varphi = P_\varphi X_\varphi C_\varphi$ ；又由于 $\varphi \in$ 正交群(q k)，并且我们已经证明 P_φ、$X_\varphi \in$ 正交群(q k)，因此 $C_\varphi \in$ 正交群(q k)。由引理 5.22，我们已经证明了 X 与 C 之间的半直积关系；同样可以验证 XC 是 P(XC) 的正规子群，因此有

$$\mathrm{O}(\mathrm{q},k)^{\mathcal{I}_\tau} \cong \mathrm{O}(\mathrm{q}_{\mathcal{U}},k) \ltimes (\mathrm{O}(\mathrm{q}_{\mathcal{U}_{\mathrm{an}}\cup\mathcal{X}},k) \ltimes \mathsf{A}_{\mathcal{U}}(\mathrm{q},k)).$$

□

对合为双曲型时，唯一的变化是 $\overline{\mathcal{U}\cup\mathcal{V}}$ 的维数为 $2l-2$ ，而不是 $2l$。由此可见，存在一些不共轭于 O(q k) 的对合，它们具有相同的不动点群。这为特征为 2 的域上两个不同的 $G(k)$ 共轭类具有相同不动点群提供了其他例子。

注 5.24. 在对合 $\tau = \tau_{\mathcal{U}}$ 的诱导集 $\mathcal{U}$ 张成各向异性向量空间 $\overline{\mathcal{U}}$ 的情况下，我们有 O(q$_{\mathcal{U}}$, k) = {id}，且矩阵 C 和 M 在给定的 $\varphi_{\mathcal{X}}$ 下是唯一的。因此我们有 O(q k)$^{\mathcal{I}_\tau} \cong$O(q$_{\mathcal{U}\cup\underline{\mathcal{X}}}$, k)。

如果 $\mathcal{U}$ 是全迷向的，那么 O(q$_{\mathcal{U}}$, k) $\cong$GL($\overline{\mathcal{U}}$)，且 O(q$_{\mathcal{U}_{\mathrm{an}}\cup\mathcal{X}}$, k) $\cong$O(q$_{\mathcal{X}}$, k)。

6 一般二次空间

现在我们去掉 W 非奇异这一限制。设 W_1 表示 W 中维数最大的非奇异子空间，则 $W = W_1 \perp \mathrm{rad}(W)$。三元组 (ρ, Y, τ) 表示 O(q k) 中的一个元素，其中 τ是若干辛换位的乘积，q($\tau(w)+\rho(Yw)$) = q(w)，而 ρ 是若干基本根基对合的乘积。

命题 6.1. O(q k) 中的一个对合是如下形式的映射

$$(\rho, Y, \tau) = \begin{bmatrix} \rho & \rho Y \\ 0 & \tau \end{bmatrix},$$

其中 $\tau = \tau_{\mathcal{U}} \in$Sp($B_{\mathcal{U}\cup\mathcal{V}}, k$), $\overline{\mathcal{U}\cup\mathcal{V}} \subset W_1$, Y: $W_1 \to$rad(W), $\rho \in$O(q$_{\mathrm{rad}(W)}, k$), 且 q($\tau(w) + \rho(Yw)$) =q(w), 其中 $\tau^2 =$id, $\rho^2 = id$和$Y = \rho Y\tau$。

证明。映射 $(\rho, Y, \tau) \in$O(q k) 必须保持 rad(W) 不变。若将 (ρ, Y, τ) 平方并令其等于恒等变换，则需要 $\rho^2 =$id$^{\mathrm{rad}(W)}$和$\tau^2 =$ id。在 [23] 中，O'Meara 指出，τ 可以写成由 W_1 中两两正交向量诱导的辛换位的乘积。我们将这组向量称为 $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_l\}$，并考虑对 W_1 中这个全奇异子空间作非奇异补全，再由向量$\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_l\}$ 补全，使得当 $i = j$ 时 B(u_i, v_j) $= 1$，否则为零。因此$\tau \in$Sp(B$_{\mathcal{U}\cup\mathcal{V}}, k$)。由于正交群 O(q k) 中的元素保持根不变，我们有 $\rho \in$O(q$_{\mathrm{rad}(W)}$ k)。线性变换 Y: $W_1 \to$rad(W) 可以存在，因为加上根向量不会改变双线性型。只要 q($\tau(w) + \rho(Yw)$) = q(w)，二次型就保持不变。 □

推论 6.2. 若 $w \in W$ 满足 $\tau(w) = w$，则 $\rho(Yw) = Yw$。

命题 6.3. 对于形如下式的对合 $(\rho, Y, \tau) \in$正交群(q k)

$$(\rho, Y, \tau) = \begin{bmatrix} \rho & \rho Y \\ 0 & \tau \end{bmatrix},$$

其中 $\tau = \tau_{\mathcal{U}} \in$辛群(B$_{\mathcal{U}\cup\mathcal{V}}, k$), $\overline{\mathcal{U}\cup\mathcal{V}} \subset W_1$, Y: $W_1 \to$rad(W), $\rho \in$正交群(q$_{\mathrm{rad}(W)}$ k), 且 q($\tau(w) + \rho(Yw)$) =q(w), 我们可以选取一组基 $\mathcal{U}'$，使得相对于新基 (ρ, Y, τ)，其形式为

$$\begin{bmatrix} \rho & Y_0 \\ 0 & \tau_Y \end{bmatrix}$$

其中 $\tau_Y \in$ 正交群(q k) 可表示为正交换位的乘积，$Y_0 v_i = 0$，且 q($Y_0 w$) = 0。

证明。令 $\tau = \tau_{a_l,u_l} \cdots \tau_{a_2,u_2}\tau_{a_1,u_1} \in$Sp(B$_{\mathcal{U}\cup\mathcal{V}}, k$)。因此，$l$是我们为 $1 \le i \le l$ 选择的换位长度。令 $\mathcal{X}$ 为一个基

对于 $(\overline{\mathcal{U}\cup\mathcal{V}})^{\perp}\cap W_1$，注意到若 $w\in\overline{\mathcal{U}\cup\mathcal{X}}$，则 $(\rho,Y,\tau)(w)=\tau(w)+\rho(Yw)=w+\rho(Yw)$，且 $\mathrm{q}(Yw)=0$，因为 $\mathrm{B}(w,\rho(Yw))=0$。

接下来，对于 $v_i\in\mathcal{V}$

$$\begin{aligned}\mathrm{q}((\rho,Y,\tau)(v_i))&=\mathrm{q}(\tau(v_i)+\rho(Yv_i))\\ \mathrm{q}(v_i)&=\mathrm{q}\left(v_i+a_iu_i+\rho(Yv_i)\right)\\ \mathrm{q}(v_i)&=\mathrm{q}(v_i)+a_i^2\,\mathrm{q}(u_i)+a_i\mathrm{B}(v_i,u_i)+\mathrm{q}(Yv_i)\\ \mathrm{q}(Yv_i)&=a_i^2\,\mathrm{q}(u_i)+a_i.\end{aligned}$$

现在我们看到

$$\begin{aligned}(\rho,Y,\tau)(v_i)&=\tau(v_i)+\rho(Yv_i)\\ &=v_i+a_iu_i+\rho(Yv_i)\\ &=v_i+a_i\mathrm{B}\left(v_i,u_i+\frac{1}{a_i}\rho(Yv_i)\right)\left(u_i+\frac{1}{a_i}\rho(Yv_i)\right)\\ &=\tau_{a_i,u_i+\frac{1}{a_i}\rho(Yv_i)}(v_i)\\ &=\tau_{u_i+\frac{1}{a_i}\rho(Yv_i)}(v_i)\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}\mathrm{q}\left(u_i+\frac{1}{a_i}\rho(Yv_i)\right)&=\mathrm{q}(u_i)+\frac{1}{a_i^2}\,\mathrm{q}(Yv_i)\\ &=\mathrm{q}(u_i)+\frac{1}{a_i^2}(a_i^2\,\mathrm{q}(u_i)+a_i)\\ &=\frac{1}{a_i}.\end{aligned}$$

现在我们定义

$$\mathcal{U}_Y=\left\{u_1+\frac{1}{a_1}\rho(Yv_1),u_2+\frac{1}{a_2}\rho(Yv_2),\ldots,u_l+\frac{1}{a_l}\rho(Yv_l)\right\}$$

并考虑 W，$W_1'=\overline{\mathcal{U}_Y\cup\mathcal{X}\cup\mathcal{V}}$ 的极大非奇异子空间。此外，我们定义

$$\tau_Y=\tau_{u_l+\frac{1}{a_l}\rho(Yv_l)}\cdots\tau_{u_2+\frac{1}{a_2}\rho(Yv_2)}\tau_{u_1+\frac{1}{a_1}\rho(Yv_1)}$$

且 $Y_0w=Yw$ 对于 $w\in\overline{\mathcal{U}\cup\mathcal{X}}$，对于 $v\in\overline{\mathcal{V}}$，$Y_0v=0$。使用这个基（$\rho$，$Y,\tau$）的形式为

$$\begin{bmatrix}\rho & Y_0\\ 0 & \tau_Y\end{bmatrix}$$

并且我们有 $\tau_Y \in$ 正交群(q k) 是正交换位的乘积， $Y_0 v_i = 0$，且对于所有 $w \in W_1'$, q($Y_0 w$) $= 0$。 □

命题 6.4。对合 $\left[\begin{smallmatrix} \rho & \rho Y \\ 0 & \tau \end{smallmatrix}\right]$ 逐点固定形如$u_i + \frac{1}{a_i}\rho(Y v_i)$的元素。此外，
$Y_0 \left(u_i + \frac{1}{a_i}\rho(Y v_i) \right) = 0$。

证明。设 $\tau = \tau_{\mathcal{U}}$ 和 $u_i \in \mathcal{U}$ 满足 $v_i \in \mathcal{V}$，且 B(u_i, v_i) $= 1$。由于 (ρ, Y, τ) 是一个对合，我们有 $\rho^2 =$id、 $\tau^2 =$id 以及 $Y = \rho Y \tau$。首先，我们注意到

$$Y v_i = \rho(Y\tau(v_i)) = \rho(Y(v_i + a_i u_i)).$$

我们计算

$$\begin{aligned}(\rho, Y, \tau)\left(u_i + \frac{1}{a_i}\rho(Y v_i)\right) &= \tau(u_i) + \rho(Y u_i) + \rho\left(\frac{1}{a_i}\rho(Y v_i)\right) \\ &= u_i + \rho(Y u_i) + \frac{1}{a_i} Y v_i \\ &= u_i + \rho(Y u_i) + \frac{1}{a_i}\rho(Y(v_i + a_i u_i)) \\ &= u_i + \frac{1}{a_i}\rho(Y v_i).\end{aligned}$$

由于

$$(\rho, Y, \tau)\left(u_i + \frac{1}{a_i}\rho(Y v_i)\right) = \tau_Y\left(u_i + \frac{1}{a_i}\rho(Y v_i)\right)$$

我们有 $Y_0 \left(u_i + \frac{1}{a_i}\rho(Y v_i) \right) = 0$。

□

最后，我们讨论一般情况下 O(q k) 的对合的共轭类和不动点群，并给出关于一般二次空间中特殊情形的评注。

命题 6.5. 设 $(\rho_1, Y_1, \tau_1) \in$ 正交群(q k) 是一个对合，满足 $\tau_1 \in$正交群($q^{W_1'}, k$) 且 $\rho_1 \in$正交群($q_{\mathrm{rad}(W)}$ k)，那么 (ρ_1, Y_1, τ_1) 与 $(\rho_2, Y_2, \tau_2) \in$正交群(q k) 在正交群(q k) 下共轭，当且仅当

1. ρ_1 可由 $\psi \in$正交群($q^{\mathrm{rad}(W)}, k$) 将 ρ_2 共轭得到
2. τ_1 在 $\mu \in$ Sp(B$^{W_1'}, k$)下与 τ_2 共轭

3. 存在 $Z:\ W_1' \to \mathrm{rad}(W)$，使得对于所有 $w \in W_1'$，$\mathrm{q}(w) = \mathrm{q}(\mu(w)) + \mathrm{q}(Zw)$，并且

$$\psi(\rho_1 Z + Z\tau_1 + Y_1)\mu^{-1} = Y_2.$$

证明。命题中的性质列表等价于 $\mathcal{I}_{(\psi,Z,\mu)}((\rho_1, Y_1, \tau_1)) = (\rho_2, Y_2, \tau_2)$。为此，我们计算

$$\begin{bmatrix} \psi & \psi Z \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_1 Y_1 \\ 0 & \tau_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^{-1} & Z\mu^{-1} \\ 0 & \mu^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi\rho_1\psi^{-1} & \psi(\rho_1 Z + Z\tau_1 + Y_1)\mu^{-1} \\ 0 & \mu\tau_1\mu^{-1} \end{bmatrix}.$$

□

命题 6.6。设 $(\rho, Y, \tau) \in$ 正交群$(\mathrm{q}\ k)$ 是一个对合，且 $\tau \in$正交群$(\mathrm{q}^{W_1'}, k)$ 和 $\rho \in$ 正交群$(\mathrm{q}^{\mathrm{rad}(W)}, k)$，则 $(\psi, D, \mu) \in$正交群$(\mathrm{q}\ k)$ 被 $\mathcal{I}_{(\rho,Y,\tau)}$ 逐点固定，当且仅当

1. ψ在 ρ于正交群$(\mathrm{q}^{\mathrm{rad}(W)}, k)$ 中的共轭作用下保持不变
2. μ在 $\tau \in$正交群$(\mathrm{q}^{W_1'}, k)$ 的共轭作用下保持不变
3. 存在 $Z:\ W_1' \to \mathrm{rad}(W)$，使得对所有 $w \in W_1'$，有 $\mathrm{q}(w) = \mathrm{q}(\mu(w)) + \mathrm{q}(Zw)$，并且

$$Y + \psi^{-1} Y \mu = Z + \rho Z \tau$$

证明。上述性质列表等价于形如 $(\psi, Z, \mu) \in$正交群$(\mathrm{q}\ k)$ 的元素被 $\mathcal{I}_{(\rho,Y,\tau)}$ 固定。我们可以计算

$$\begin{bmatrix} \rho & \rho Y \\ 0 & \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi & \psi Z \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho & \rho Y \\ 0 & \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho\psi\rho & \rho\psi Y\tau + (\rho\psi Z + \rho Y\mu)\tau \\ 0 & \tau\mu\tau \end{bmatrix}.$$

因此，我们立即得到 $\rho\psi\rho = \psi$ 和 $\tau\mu\tau = \mu$。如果我们考虑

$$\begin{aligned} \psi Z &= \rho\psi Y\tau + (\rho\psi Z + \rho Y\mu)\tau \\ &= \rho\psi Y\tau + \rho\psi Z\tau + \rho Y\mu\tau \\ &= \psi\rho Y\tau + \psi\rho Z\tau + \rho Y\tau\mu \\ &= \psi Y + \psi\rho Z\tau + Y\mu \\ Z + \rho Z\tau &= Y + \psi^{-1} Y\mu \end{aligned}$$

我们便得到所需结果；回想一下，要使 (ρ, Y, τ) 的阶为 2，需要满足 $Y = \rho Y \tau$。

□

注 6.7。当 $\mathrm{rad}(W)$ 是各向异性时，正交群$(\mathrm{q}^{\mathrm{rad}(W)}, k) = \{\mathrm{id}\}$，且 Z 对给定的 μ 是唯一的。

当 $\mathrm{rad}(W)$ 是全迷向时，我们有 $\mathrm{O}(\mathrm{q}^{\mathrm{rad}(W)}, k) \cong \mathrm{GL}_s(k)$，$Z \in \mathrm{Mat}_{s,\ 2r}(k)$ 和 $\mu \in \mathrm{O}(\mathrm{q}^{W_1'}, k)$。

参考文献

[1] M. Aschbacher 和 G.M. Seitz. 偶数阶域上 Chevalley 群中的对合。Nagoya 数学杂志，63:1–91，1976.[2] A.G. Helminck 和 L. Wu。《SL(2, k) 的对合分类》。代数通信，30(1):193–203，2002年。[3] R.W. Benim、F. Jackson Ward 和 A.G. Helminck。 $n > 2$ 的 Sp($2n, k$) 对合同构类。《李理论杂志》，25(4):903–948，2015年。[4] R.W. Benim、C.E. Dometrius、A.G. Helminck 和 L. Wu。 $n > 2$ 的 $SO(n, k, \beta)$ 对合同构类。《李理论杂志》，26(2):383–438，2016年。[5] M. Berger。非紧对称空间。Annales scientifiques ´de l'Ecole Normale Sup ´erieure，74: 85–177，1957.[6] C.E. Dometrius、A.G. Helminck 和 L. Wu。SL(n, k) 的对合，($n > 2$)。应用数学，90(1):91–119，2006.[7] E.A. Connors。特征 2 下正交群的自同构。数论杂志，5(6):477–501，1973.[8] E.A. Connors。退化空间的正交群的自同构。《代数杂志》，29(1):113–123，1974.[9] E.A. Connors。退化情形下 O′(V)/DO(V) 的结构。《代数杂志》，34(1):74–83，1975.[10] E.A. Connors。特征 2 下正交群的自同构，II。美国数学杂志，98(3):611–617，1976.[11] J. Dieudonn´e. 特征二域上的代数齐性空间。美国数学会会刊。2(2):295-304，1951.[12] F. Gantmacher。实单李群的分类。Rec. Math. N.S.，5:217–249，1939.

[13] L. Grove。《经典群与几何代数》。数学研究生学习第39卷。美国数学会，普罗维登斯，2002年。[14] X.C. Hao。关于特征为 2 的完美域上正交群的自同构。《数学学报》，16(4)：453–502，1966年。[15] A.G. Helminck。关于 k-对合的分类。《数学进展》，153(1)：1–117，1988年。[16] A.G. Helminck 和 S.P. Wang。关于约化群对合的有理性性质。《数学进展》，99(1)：26–96，1993年。[17] D.W. Hoffmann 和 A. Laghribi。特征 2 下的二次型与 Pfister 邻体。《美国数学会汇刊》，356(10)：4019–4053，2004年。[18] M. Hunnell、J. Hutchens 和 N. Schwartz。关于特征二的域上 O(q, k) 型对合，《线性代数及其应用》，593：228–250，2020年。[19] J. Hutchens。G_2 的 k-对合同构类。《代数及其应用杂志》，13(7)：1–16，2014年。[20] J. Hutchens。F_4 的 k-对合同构类。《李理论杂志》，25(4)：1–19，2015年。[21] J. Hutchens。E_6 型代数群的 k-对合同构类。《代数与几何论丛》，57(3)：525–552，2016年。[22] J. Hutchens 和 N. Schwartz。特征为 2 的域上 G_2 型对合。《代数与表示论》，21(3)：487–510，2018年。[23] O.T. O'Meara。辛群。数学调查丛书，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1978。[24] B. Pollak。特征为 2 的整体域上的正交群。《代数杂志》，15(4)：589–595，1970年。[25] N. Schwartz。特征为 2 的域上 SL(n, k) 的 k-对合。《代数通讯》，46(5)：1912–1925，2018年。

[26] E. Snapper 和 R.J. Troyer。度量仿射几何。多佛高级数学丛书。多佛出版社，纽约，第二版，1989。

[27] S.A. Wiitala。《特征二正交群中对合的因子分解：将若尔当标准形应用于群论》。《线性代数及其应用》，21(1):59–64，1978。