arXiv:2301.05894v1 [math.SP] 14 Jan 2023

稀疏树上图拉普拉斯算子谱测度的精确豪斯多夫维数

Kota Ujino

摘要

本文通过间歇函数精确地给出了图拉普拉斯算子谱测度的豪斯多夫维数。间歇函数可以利用一维离散 Schr¨odinger 算子方法进行估计。

1 引言与结果

1.1 引言

我们研究稀疏树上的图拉普拉斯算子及其豪斯多夫维数。豪斯多夫维数是针对集合或测度定义的。我们估计稀疏树上图拉普拉斯算子的谱测度的豪斯多夫维数。需要注意的是，测度的豪斯多夫维数与其支集的豪斯多夫维数通常并不相同。如果谱是纯点谱，那么谱测度的豪斯多夫维数为零。如果谱是纯绝对连续谱，那么谱测度的豪斯多夫维数为一。本文精确地给出了稀疏树的豪斯多夫维数。

本文结构如下：在第 1 节余下部分，我们给出主要结果。在第 2 节，我们给出图拉普拉斯算子的分解。由此，我们可以将图拉普拉斯算子与具有稀疏势的一维离散 Schr¨odinger 算子对应起来。在第 3 节，我们证明间歇函数给出了上豪斯多夫维数的上界。在第 4 节，我们为估计间歇函数做准备。在此，我们运用二次型理论和 Helffer-Sj¨ostrand 公式估计算子核。在第 5 节，我们估计间歇函数并证明主要定理。

我们定义稀疏树。若 $G = (V, E)$是一个图，则称之为图，其中 V 是一个可数集，且 $E \subset \{e \in 2^V \mid \#e = 2\}$。 V（分别为 E）中的元素称为顶点（分别称为边）。若顶点a、 $b \in V$相邻，则称它们相邻，当且仅当 $\{a, b\} \in E$。若 a、 $b \in V$相邻，我们用 $a \sim b$表示。注意，此定义意味着不存在与自身相邻的边。若存在 $a_i \in V$、 $i = 1$、2、...、 $n-1$，使得 $a_i \notin \{a, b\}$、 $a \sim a_1$、$a_i \sim a_{i+1}$、$i = 1$、2、...、 $n-2$，且 $a_{n-1} \sim b$，则称顶点a、 $b \in V$连通。这里， $\{a, a_1, ..., a_{n-1}, b\} \in 2^V$称为从 a到b的路径。顶点 a 的度deg(a)定义为deg(a) $= \#\{b \in V \mid a \sim b\}$。若对任意顶点 $a \in V$，均有deg(a) $< \infty$，则称图为局部有限图。若图 G 中任意顶点 a、 $b \in V$均连通，则称图 $G = (V, E)$是连通的。若 G 是连通的，且对任意顶点 a、 $b \in V$，从 a 到 b都存在唯一一条路径，则称图 $G = (V, E)$是一棵树。我们固定树 G中的一个顶点 o，并称o 为 G的根。固定了根 o 的树 G 称为有根树。令 $p(a, b) \in 2^V$ 为从顶点 a 到顶点 b的唯一一条路径。 V 上的度量 $d(\cdot, \cdot)$定义为

$$d(a, b) = \begin{cases} 0, & a = b, \\ \#p(a, b) - 1, & a \neq b. \end{cases}$$

设 G 是一棵有根树，其根为 o，并令 $S_n = \{a \in V \mid d(o, a) = n\}$，其中 $n = 0$=1,.... 如果有根树 $G = (V, E)$ 中的任意顶点在 S_n 中都具有相同的

度 d_n，则称其为球面齐次树。局部有限球面齐次树 G 由序列 $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ 唯一确定，

$$g_n = \begin{cases} d_0, & n = 0, \\ d_n - 1, & n \geq 1. \end{cases}$$

定义 1.1. 设 $L_n = 2^{n^n}$, $n = 1, 2, ...,$ 和 $\Gamma \in (0, 1)$。若对于任意 $n \geq 0$，局部有限球面齐次树 $G = (V, E)$ 是一棵 Γ-稀疏树。

$$g_n = \begin{cases} [n^{\frac{1-\Gamma}{\Gamma}}], & n \in \{L_m \mid m \in \mathbb{N}\}, \\ 1, & n \notin \{L_m \mid m \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$$

我们为局部有限图定义图拉普拉斯算子。设 $G = (V, E)$ 是一个局部有限图。设 $l^2(V)$ 是 V 上平方可和函数构成的集合，它是一个希尔伯特空间，其内积定义为

$$(f, g) = \sum_{u \in V} \overline{f(u)} g(u).$$

令 $\mathcal{D} \subset l^2(V)$ 定义为 $\mathcal{D} = \{f \colon V \to \mathbb{C} \mid \#\mathrm{supp}(f) < \infty\}$。令 L, A 和 D 为算子，其定义域为 $\mathcal{D}$，并定义为

$$\begin{aligned} Lf(u) &= \sum_{v \sim u} (f(v) - f(u)), \\ Af(u) &= \sum_{v \sim u} f(v), \\ Df(u) &= \sum_{v \sim u} f(u) = \deg(u) f(u). \end{aligned}$$

它们分别称为图拉普拉斯算子、邻接矩阵和度矩阵。如果图是连通的 [14, Threom3.1]，则图拉普拉斯算子 L 是本质自伴的。

设 (X, d_X) 是一个度量空间，$\mathcal{B}(X)$ 是 (X, d_X) 的博雷尔 σ-域。设 A 是 X 的一个子集，A 的直径 $d_X(A)$ 定义为 $d_X(A) = \sup\{d_X(x, y) \mid x, y \in A\}$。设 $\delta > 0$，若 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 X 的子集族，且 $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 和 $\sup_{1 \leq i < \infty} d_X(A_i) \leq \delta$，则称其为 A 的一个 δ-覆盖。

定义 1.2. 设 $\alpha \in [0, \infty)$ 和 $\delta > 0$。令 $h_\delta^\alpha, h^\alpha \colon 2^X \to [0, \infty]$ 定义为

$$\begin{aligned} h_\delta^\alpha(A) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} d_X(A_i)^\alpha \mid \{A_i\}_{i=1}^{\infty} is\ a\ \delta\text{-cover}\ of\ A \right\}, \\ h^\alpha(A) &= \lim_{\delta \to 0} h_\delta^\alpha(A). \end{aligned}$$

这里，h^α 称为 X 的 α 维豪斯多夫测度。事实上，将 h^α 限制在 $\mathcal{B}(X)$ 上所得的是一个测度。对 $A \in 2^X$，令 $\dim A$ 定义为

$$\dim A = \sup \{\alpha \mid h^\alpha(A) \neq 0\}.$$

这称为 A 的豪斯多夫维数。由此可知，若 $0 \leq \alpha < \dim A$，则 $h^\alpha(A) = \infty$；若 $\dim A < \alpha$，则 $h^\alpha(A) = 0$。设 $\mu \colon \mathcal{B}(X) \to [0, \infty]$ 是一个测度，并将 μ 的下豪斯多夫维数 $\dim_* \mu$ 和上豪斯多夫维数 $\dim^* \mu$ 定义为

$$\begin{aligned} \dim_* \mu &= \inf \{\dim A \mid A \in \mathcal{B}(X) \text{ such that } \mu(A) \neq 0\}, \\ \dim^* \mu &= \inf \{\dim A \mid A \in \mathcal{B}(X) \text{ such that } \mu(\mathbb{R} \setminus A) = 0\}. \end{aligned}$$

若 $\alpha = \dim_* \mu = \dim^* \mu$，则称 μ 具有精确的 α-豪斯多夫维数。

令 L 为 Γ-稀疏树的图拉普拉斯算子。以下引理由 Breuer[4]证明。

˜引理 1.3。令 $H = -\overline{L}$，令 E 为 H 的谱测度，并令 E 为 E在区间 (0, 4) 上的限制，其中 $\overline{L}$ 是 L的闭包。则可得

(1) $\sigma_{\mathrm{ac}}(H) = \emptyset$, $\sigma_{\mathrm{pp}}(H) \cap (0,4) = \emptyset$, $\sigma_{\mathrm{sc}}(H) \cap (0,4) = (0,4)$,

(2) $\Gamma \leq$维数$_*\tilde{E} \leq$维数$^*\tilde{E} \leq \frac{2\Gamma}{1+\Gamma}$.

我们得到以下主定理。

˜ ˜定理 1.4. 假设与引理 1.3 相同。那么 $\Gamma =$ 维数$_*E =$ 维数$^*E$,˜且 E 具有精确的 Γ-豪斯多夫维数,

该定理推出以下推论。

推论 1.5. 对任意 $\Gamma \in (0,1)$, Γ-稀疏树上的图拉普拉斯算子的谱测度在区间 (0,4) 上的限制具有精确的 Γ- 豪斯多夫维数。

1.2 先前结果

稀疏树的谱分析与具有稀疏势的一维离散 Schr¨odinger 算子理论有一些相似之处。在 Simon-Stolz [18], 中，具有稀疏势的 Schr¨odinger 算子具有奇异连续谱。Gilbert-Pearson [12] 揭示了从属解的行为与一维 Schr¨odinger 算子的谱之间的关系。Jitomirskaya 和 Last [13] 展示了谱测度的豪斯多夫维数与从属解及非从属解的行为之间的关系。此外，他们通过计算非从属解的 L-范数来估计谱测度的豪斯多夫维数。这种从属解方法也用于 [4]。

另一方面，人们也研究了薛定谔算子的谱类型与其时间平均行为之间的关系。RAGE 定理表明，若初始态是奇异连续的，则时间平均演化会趋于无穷。Barbaroux、Combes 和 Montcho[3] 利用上豪斯多夫维数，给出了一维离散薛定谔算子时间平均动量的一个下界。这也表明上豪斯多夫维数与间歇函数之间存在不等式。然而，精确估计间歇函数至关重要。Tcheremchantsev [20] 明确给出了稀疏势情形下的间歇函数。我们将把 [20] 应用于稀疏树上的图拉普拉斯算子。

2 预备知识

关于树上的薛定谔算子，有一些分解方法。这些方法源自奈马克和索洛米亚克 [17]。Breuer [5], 科斯坚科和尼科卢西 [2] 最近发展了这种方法。他们研究的是连续基尔霍夫拉普拉斯算子的情形。Allard、弗罗泽 [1]和 Breuer [4] 研究了图拉普拉斯算子的情形。我们将他们的结果作为引理 2.1 引入。他们的结果表明，球对称齐次树上的图拉普拉斯算子可与雅可比矩阵的直和等同。因此，研究雅可比矩阵而非图拉普拉斯算子 H就足够了。

令 $G = (V, E)$ 为由序列 $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ and$H = -\overline{L}$ 确定的球对称齐次树，其中 $\overline{L}$ 是 L 的闭包。令 $\alpha_n = \#S_n$ 对于 $n = 0$、1、.....以及 $\alpha_{-1} = 0$ 成立。由于 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$是非递减的，存在唯一的 $N(k) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，使得对每个 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $\alpha_{N(k)-1} < k \leq \alpha_{N(k)}$。令 k、 $n \in \mathbb{N}$，并令 $d_k = (d_k(n))_{n=1}^{\infty}$ 和 $a_k = (a_k(n))_{n=1}^{\infty}$ 按如下方式定义：在 $k = 1$ 的情况下,

$$\begin{aligned} d_1(n) &= = \begin{cases} g_0 & (n=1), \\ g_{n-1}+1 & (n \geq 2), \end{cases} \\ a_1(n) &= = -\sqrt{g_{n-1}}. \end{aligned}$$

在 $k \geq 2$ 的情况下,

$$\begin{aligned} d_k(n) &= g_{n+N(k)-1} + 1, \\ a_k(n) &= -\sqrt{g_{n+N(k)-1}}. \end{aligned}$$

通过直接计算，我们看到对于任意 $k, n \in \mathbb{N}$

$$d_k(n) = a_k(n)^2 + 1 - \delta_1(k)\delta_1(n), \tag{2.1}$$

其中 $\delta_j(k) = \begin{cases} 1 \ (k = j), \\ 0 \ . \ (k \neq j) \end{cases}$ 令雅可比矩阵 $H^{(k)}, A^{(k)}, D^{(k)} : \ l^2(\mathbb{N}) \ \to l^2(\mathbb{N})$ 定义如下

$$H^{(k)} = \begin{pmatrix} d_k(1) & -a_k(1) & & & & \\ -a_k(1) & d_k(2) & -a_k(2) & & & \\ & -a_k(2) & d_k(3) & -a_k(3) & & \\ & & -a_k(3) & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & & \end{pmatrix},$$

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & a_k(1) & & & & \\ a_k(1) & 0 & a_k(2) & & & \\ & a_k(2) & 0 & a_k(3) & & \\ & & a_k(3) & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & & \end{pmatrix}, D^{(k)} = \begin{pmatrix} d_k(1) & & & & \\ & d_k(2) & & & \\ & & d_k(3) & & \\ & & & \ddots & \end{pmatrix}.$$

注意到 $H^{(k)} = D^{(k)} - A^{(k)}$。下一个引理给出了图拉普拉斯算子的分解。

$_\infty$引理 2.1。 H 和 $\bigoplus_{k=1} H^{(k)}$ 酉等价。

证明。参见附录 A。 □

3 间歇函数与豪斯多夫维数

本节中，我们引入间歇函数，并在引理 3.2 中给出一个重要不等式，该不等式表明间歇函数是豪斯多夫维数的上界。

设 $\psi \in l^2(\mathbb{N})$ 和 $E^{(k)}$ 为 $H^{(k)}$ 的谱测度。我们考察 $\exp(-itH^{(k)})\psi$ 的时间平均动力学。定义有限测度 $\mu_\psi^{(k)} : \ \mathcal{B}^1 \to [0, \infty]$ 为

$$\mu_\psi^{(k)}(A) = (\psi, E^{(k)}(A)\psi).$$

定义 3.1. 令 $\psi_k(t) = e^{-itH^{(k)}}\psi$ 和 $\psi_k(t, n) = (\delta_n, \psi_k(t))$ 对于 $t \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$。令 $a_\psi^{(k)}(n, T)$, $\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T)$, 和 $\beta_\psi^{(k)}(p)$ 定义如下，对于 $T > 0$ 和 $p > 0$,

$$\begin{aligned} a_\psi^{(k)}(n, T) &= \frac{1}{T} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{T}} |\psi_k(t, n)|^2 dt, \\ \langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) &= \sum_{n=1}^\infty n^p a_\psi^{(k)}(n, T), \\ \beta_\psi^{(k)}(p) &= \frac{1}{p} \liminf_{T \to \infty} \frac{\log \langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T)}{\log T}. \end{aligned}$$

我们称 $\beta_\psi^{(k)}$ 为间歇函数。$l^2(\mathbb{N})$ 的闭子空间 $\mathcal{H}_\psi$ 定义为

$$\mathcal{H}_\psi = \overline{\left\{p(H^{(k)})\psi \in l^2(\mathbb{N}) \mid p \text{ is a polynomial}\right\}},$$

并令 $U_\psi: \mathcal{H}_\psi \to L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi^{(k)})$ 定义为

$$U_\psi(p(H^{(k)})\psi)(x) = p(x).$$

引理 3.2. 设 $\alpha = \dim^*(\mu_\psi^{(k)})$ 且 $\epsilon > 0$。则存在 $C_1 = C_1(\epsilon, \psi) > 0$，使得对任意 $T > 0$,

$$\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) \geq C_1 T^{p(\alpha-\epsilon)}.$$

特别地，对任意 $p > 0$,

$$\dim^*(\mu_\psi^{(k)}) \leq \beta_\psi^{(k)}(p).$$

证明. 为简化记号，我们分别用 μ_ψ、a_ψ、$\langle |X|^p \rangle_\psi$ 和 $\psi(t,n)$ 表示 $\mu_\psi^{(k)}$、$a_\psi^{(k)}$、$\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}$ 和 $\psi_k(t,n)$。令 $\epsilon > 0$ 和 $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为 μ_ψ 的局部豪斯多夫维数:

$$\gamma(x) = \liminf_{\delta \to 0} \frac{\log(\mu_\psi([x-\delta, x+\delta]))}{\log \delta}.$$

根据 [10, 第 10 章命题 10.1],，可知 μ- ess sup $\gamma(x) = \dim^* \mu_\psi = \alpha_\circ$ 因此存在$_x S_\epsilon \in \mathcal{B}^1$，使得 $\mu_\psi(S_\epsilon) > 0$ 且 $\gamma(x) > \alpha - \epsilon$，对 $x \in S_\epsilon$ 成立。令 $\gamma_\delta(x) = \inf_{\delta' < \delta} \log \mu_\psi([x-\delta', x+\delta']) \log \delta'$。根据叶戈罗夫定理，存在 $S'_\epsilon \subset S_\epsilon$，使得 $\mu_\psi(S'_\epsilon) > 0$，且 γ_δ 在 S'_ϵ 上一致收敛于 $\gamma_\circ$ 令 $\psi' = E(S'_\epsilon)\psi_\circ$ 可知 $\|\psi'\|^2 = \mu_\psi(S'_\epsilon) > 0$，并且 $\mu_{\psi'}$ 一致地具有 $(\alpha-\epsilon)$-H¨older 连续性。令 $\chi = \psi - \psi'_\circ$ 于是可知

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} a_\psi(n,T) \\
&= \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t}{T}} \sum_{n=1}^{N} |\psi'(t,n) + \chi(t,n)|^2 dt \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t}{T}} |\psi'(t,n)|^2 dt + 2\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t}{T}} |\psi'(t,n)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \|\chi\| + \|\chi\|^2. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

我们假设 $c > 0$ 和 $N \in \mathbb{N}$ 满足

$$\left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t}{T}} |\psi'(t,n)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq c\|\psi'\|. \qquad (3.2)$$

由 (3.1) 和 (3.2) 可知,

$$\sum_{n=1}^{N-1} a_\psi(n,T) \leq \left(c\|\psi'\| + \|\chi\|\right)^2.$$

取 $c = -\frac{\|\chi\|}{\|\psi'\|} + \sqrt{\left(\frac{\|\chi\|}{\|\psi'\|}\right)^2 + \frac{1}{2}}$，我们有

$$\sum_{n=1}^{N-1} a_\psi(n,T) \leq \frac{1}{2}\|\psi'\|^2 + \|\chi\|^2. \qquad (3.3)$$

另一方面，设 $C_1' = -\frac{\|x\|}{\|\psi'\|} + \sqrt{\left(\frac{\|x\|}{\|\psi'\|}\right)^2 + \frac{1}{2}}$ 和

$$N(T) = \max\left\{ N \in \mathbb{N} \mid \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t}{T}} |\psi'(t,n)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_1' \|\psi'\| \right\}. \tag{3.4}$$

那么，对于 $c = C_1'$ 和 $N = N(T)$，(3.2) 成立。由 (3.3)，可得

$$\sum_{n=N(T)}^{\infty} a_\psi(n,T) \geq \frac{1}{2}\|\psi'\|^2. \tag{3.5}$$

~注意到，$\mu_{\psi'}$ 是一致的（$\alpha-\epsilon$）-H¨older 连续函数。因此，由引理 B.6，存在 $C = \sim C(\alpha-\epsilon, \mu_{\psi'}) > 0$，使得对于任意 $T > 0$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t}{T}} |\psi'(t,n)|^2 dt = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{T} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{T}} |\widehat{U_{\psi'}\delta_n \mu_{\psi'}}|^2 dt \leq \widetilde{C} N T^{-(\alpha-\epsilon)}. \tag{3.6}$$

由 (3.4) 和 (3.6)，可得

$$N(T) \geq \frac{(C_1'\|\psi'\|)^2}{\widetilde{C}} T^{\alpha-\epsilon}. \tag{3.7}$$

(3.5) 和 (3.7) 表明，存在 $C_1 = C_1(\epsilon, \psi) > 0$，使得对于任意 $T > 0$,

$$\langle |X|^p \rangle_\psi(T) \geq \sum_{n=N(T)}^{\infty} n^p a_\psi(n,T) \geq \frac{1}{2}\|\psi'\|^2 N(T)^p \geq C_1 T^{p(\alpha-\epsilon)}.$$

此外，我们看到，对于 $\epsilon > 0$ 和 $T' > 1$,

$$\frac{1}{p} \inf_{T>T'} \frac{\log\langle |X|^p \rangle_\psi(T)}{\log T} \geq \alpha - \epsilon + \frac{1}{p} \inf_{T>T'} \frac{\log C_1}{\log T} = \alpha - \epsilon.$$

这就证明了我们的断言。 □

4 算子核的估计

本节将准备一些引理来估计间歇函数。我们利用二次型理论和 Hellfer-Sj¨ostrand 公式，在引理 4.3 和 4.4 中估计算子核。

为简化记号，我们分别用 H、$a(n)$ 和 $d(n)$ 表示 $H^{(k)}$、$a_k(n)$ 和 $d_k(n)$。令 $\beta > 0$，并令 $\mathscr{D} = \{f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid \#\mathrm{supp}(f) < \infty\}$。令 P、Δ 和 $M_\beta\colon l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$，其定义域 $\mathscr{D}$ 定义如下

$$\begin{aligned} Pf(n) &= a(n)f(n+1), \\ \Delta f &= (P-I)f, \\ M_\beta f(n) &= \beta^n f(n), \end{aligned}$$

并令 $T_\beta = M_\beta^{-1} T M_\beta$ 对于算子 $T\colon l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$。

引理 4.1。设 $f \in \mathscr{D}$。由此可得

(1) $P^* f(n) = \begin{cases} 0 & (n=1), \\ a(n-1)f(n-1) & (n \geq 2), \end{cases}$

(2) $H^{(k)}f = \begin{cases} (\Delta\Delta^* - \delta_1)f\,(k=1) \end{cases}$

$\Delta\Delta^* f \qquad\qquad k \geq 2$, ( ) (3) $\Delta_\beta f =$
$(\beta P - I)f$, (4) $(\Delta^*)_\beta f = (\beta^{-1}P^* - I)f$.

证明。令 $f, g \in \mathscr{D}$。于是我们得到

$$(Pg, f) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\overline{g(n+1)}f(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \overline{g(n)}a(n-1)f(n-1).$$

这意味着 (1)。我们得到

$$\begin{aligned} \Delta\Delta^* f(n) &= a(n)\Delta^* f(n+1) - \Delta^* f(n) \\ &= \begin{cases} a(1)(a(1)f(1) - f(2)) + f(1) & (n=1) \\ a(n)(a(n)f(n) - f(n+1)) - a(n-1)f(n-1) + f(n) & (n \geq 2) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -a(1)f(2) + \{a(1)^2 + 1\}f(1) & (n=1) \\ -a(n)f(n+1) + \{a(n)^2 + 1\}f(n) - a(n-1)f(n-1) & (n \geq 2). \end{cases} \end{aligned} \tag{4.1}$$

(2) 由 (4.1) 和 (2.1) 得出。(3) 和 (4) 可直接证明。 □

令 $\beta > 0$ 与半双线性型 $\mathfrak{h}_\beta$: $l^2(\mathbb{N}) \times l^2(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$, 其定义域 $\mathscr{D}$ 定义如下

$$\mathfrak{h}_\beta(f, g) = ((\Delta_\beta)^* f, (\Delta^*)_\beta g) = (f, H_\beta\, g).$$

引理 4.2。对于任意 $t > 0$ 和 $f \in \mathscr{D}$,

$$|\mathfrak{h}_\beta[f] - \mathfrak{h}_1[f]| \leq C(\beta)\,\frac{t}{2}\,\mathfrak{h}_1[f] + C(\beta)(1 + \frac{1}{2t})\|f\|^2, \tag{4.2}$$

其中 $C(\beta) = |\beta - 1| + |\beta^{-1} - 1| = |\beta - \beta^{-1}|$。

证明。设 $t > 0$ 和 $f \in \mathscr{D}$。于是我们看到

$$\begin{aligned} |\mathfrak{h}_\beta[f] - \mathfrak{h}_1[f]| &= |((\beta P^* - I)f, (\beta^{-1}P^* - I)f) - ((P - I)f, (P^* - I)f)| \\ &\leq |\beta - 1||(f, Pf)| + |\beta^{-1} - 1||(f, P^* f)| \\ &\leq |\beta - 1|\{(\Delta^* f, f) + (f, f)\} + |\beta^{-1} - 1|\{(f, \Delta^* f) + (f, f)\} \\ &\leq C(\beta)\|f\|\|\Delta^* f\| + C(\beta)\|f\|^2 \\ &\leq C(\beta)\left(\frac{t}{2}\|\Delta^* f\|^2 + \frac{1}{2t}\|f\|^2 + \|f\|^2\right). \end{aligned}$$

□

Lemma 4.3。设 $z \in \mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$。设 $0 < \gamma < 1$, 并设 η_z、m_z 和 α_z b e

$$\begin{aligned} \eta_z &= \mathrm{dist}(z, \sigma(H)), \\ m_z &= \frac{\eta_z}{\sqrt{\eta_z + |z|} + 1}, \\ \alpha_z(\gamma) &= \frac{1}{4}(\gamma m_z + \sqrt{(\gamma m_z)^2 + 16}). \end{aligned}$$

那么对于任意 i、$j \in \mathbb{N}$,

$$|(\delta_i, (H - z)^{-1}\delta_j)| \leq \alpha_z(\gamma)^{-|i-j|}\,\frac{1}{\eta_z}\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^2.$$

证明。由 $\|(H-z)^{-1}\| = \eta_z^{-1}$可知，对于任意 $t>0$

$$2\left\|C(\beta)\left(\frac{t}{2}H + 1 + \frac{1}{2t}\right)(H-z)^{-1}\right\| \leq C(\beta)\left\{\left(1+\frac{|z|}{\eta_z}\right)t + \left(2+\frac{1}{t}\right)\frac{1}{\eta_z}\right\}. \tag{4.3}$$

令 $\gamma \in (0,1)$ 且

$$\begin{aligned} t_z &= \frac{1}{\sqrt{\eta_z + |z|}}, \\ \beta_z &= \frac{1}{4}(\gamma m_z + \sqrt{(\gamma m_z)^2 + 16}) > 1. \end{aligned}$$

根据算术几何平均数不等式，对于任意 $z \in \mathbb{C}^+$，有

$$\begin{aligned} C(\beta_z)\left\{\left(1+\frac{|z|}{\eta_z}\right)t_z + \left(2+\frac{1}{t_z}\right)\frac{1}{\eta_z}\right\} &= C(\beta_z)\left\{\left(1+\frac{|z|}{\eta_z}\right)t_z + \frac{1}{\eta_z}\frac{1}{t_z} + \frac{2}{\eta_z}\right\} \\ &= 2\frac{\sqrt{\eta_z+|z|}+1}{\eta_z}C(\beta_z) \\ &= \frac{2}{m_z}\left(\beta_z - \frac{1}{\beta_z}\right) \\ &= \gamma. \end{aligned} \tag{4.4}$$

(4.3) 和 (4.4) 表明，对于任意 $z \in \mathbb{C}^+$，有

$$2\left\|C(\beta_z)\left(\frac{t_z}{2}H + 1 + \frac{1}{2t_z}\right)(H-z)^{-1}\right\| \leq \gamma \tag{4.5}$$

由 (4.2)、(4.5) 和引理 C.2，存在与 $\mathfrak{h}_{\beta_z}$ 相关联的 m-扇形算子 H_{β_z}，且对于任意 $z \in \mathbb{C}^+$，有

$$\|(H_{\beta_z}-z)^{-1} - (H-z)^{-1}\| \leq \frac{4\gamma}{(1-\gamma)^2}\|(H-z)^{-1}\|.$$

因此，我们得到

$$\|(H_{\beta_z}-z)^{-1}\| \leq \frac{1}{\eta_z}\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^2.$$

设 i、$j \in \mathbb{N}$ 满足 $i<j$。于是我们得到

$$\begin{aligned} |(\delta_i, (H-z)^{-1}\delta_j)| &= |(M_{\beta_z}\delta_i, (H_{\beta_z}-z)^{-1}M_{\beta_z}^{-1}\delta_j)| \\ &\leq {\beta_z}^{i-j}\|(H_\beta - z)^{-1}\| \\ &\leq {\beta_z}^{-|i-j|}\frac{1}{\eta_z}\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^2. \end{aligned} \tag{4.6}$$

这就证明了 $i<j$ 情形下的断言。在 $i \geq j$ 情形下，令

$$\beta_z = \frac{1}{4}(-\gamma m_z + \sqrt{(\gamma m_z)^2+16}).$$

然后，我们可以用类似的方法证明 (4.6)。 □

令 $f \in C^n(\mathbb{R})$，并将 $C^n(\mathbb{R})$ 上的范数 $|||\cdot|||_n$ 定义为

$$|||f|||_n = \sum_{r=0}^{n}\int_{\mathbb{R}} |f^{(r)}(x)|\langle x\rangle^{r-1}dx.$$

下一个引理用于估计间歇函数。

引理 4.4. 假设 $f \in C^{2k+3}(\mathbb{R})$ 且 $|||f|||_{2k+3} < \infty$。那么存在 $C_2 = C_2(k) > 0$，使得对于任意 $i, j \in \mathbb{N}$,

$$|(\delta_i, f(H)\delta_j)| \le C_2 |||f|||_{2k+3} \langle i-j \rangle^{-k},$$

其中 $\langle x \rangle = (1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}$。

证明。令 $n \ge 0$ 和 $\tau \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $\tau(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \le 1) \\ 0 & (|x| \ge 2) \end{cases}$。由 Helffer-Sj¨ostrand 公式 [7, 2.2 Helffer-Sj¨ostrand 公式], 可得

$$f(H) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \overline{z}}(z)(H-z)^{-1} dxdy,$$
$$\tilde{f}(z) = \left\{ \sum_{r=0}^{n} f^{(r)}(x) \frac{(iy)^r}{r!} \right\} \tau\left(\frac{y}{\langle x \rangle} \right).$$

可得

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \overline{z}}(z) \right| &\le \frac{1}{2} \left| f^{(n+1)}(x) \frac{(iy)^n}{n!} \tau\left(\frac{y}{\langle x \rangle} \right) \right| \\ &+ \frac{1}{2} \left| \sum_{r=0}^{n} f^{(r)}(x) \frac{(iy)^r}{r! \langle x \rangle} \right| \left| \left(1 + xy\langle x \rangle^{-1}\right) \tau'\left(\frac{y}{\langle x \rangle} \right) \right|. \end{aligned}$$

令 $A, B \subset \mathbb{R}^2$ 为

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left| \frac{y}{\langle x \rangle} \right| \le 2 \right\}, B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le \left| \frac{y}{\langle x \rangle} \right| \le 2 \right\}.$$

于是可得，存在 $C_2' = C_2'(\tau) > 0$ 使得

$$\left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \overline{z}}(z) \right| \le \frac{1}{2} \left| f^{(n+1)}(x) \frac{(iy)^n}{n!} \right| \mathbb{I}^A(x,y) + C_2' \left| \sum_{r=0}^{n} f^{(r)}(x) \frac{(iy)^r}{r! \langle x \rangle} \right| \mathbb{I}^B(x,y).$$

令 $i, j \in \mathbb{N}$。于是有

$$\begin{aligned} |(\delta_i, f(H)\delta_j)| &\le \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| f^{(n+1)}(x) \frac{(iy)^n}{n!} \right| |(\delta_i, (H-z)^{-1}\delta_j)| \mathbb{I}^A(x,y) dxdy \\ &+ \frac{C_2'}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| \sum_{r=0}^{n} f^{(r)}(x) \frac{(iy)^r}{r! \langle x \rangle} \right| |(\delta_i, (H-z)^{-1}\delta_j)| \mathbb{I}^B(x,y) dxdy. \end{aligned} \tag{4.7}$$

令 $\gamma_z = \dfrac{1}{\sqrt{\eta_z + |z|} + 1} < 1$ 和 $\alpha_z = \alpha_z$（γ_z）。由引理 4.3 可知,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{C}} \left| \sum_{r=0}^{n} f^{(r)}(x) \frac{(iy)^r}{r! \langle x \rangle} \right| |(\delta_i, (H-z)^{-1}\delta_j)| \mathbb{I}^B(x,y) dxdy \\ &\le \sum_{r=0}^{n} \int_{\mathbb{C}} \left| f^{(r)}(x) \frac{(iy)^r}{r! \langle x \rangle} \right| \alpha_z^{-|i-j|} \frac{1}{\eta_z} \left(\frac{1+\gamma_z}{1-\gamma_z} \right)^2 \mathbb{I}^B(x,y) dxdy. \end{aligned} \tag{4.8}$$

我们估计 α_z 的下界。假设 $(x,y) \in B$，则 $1 \le |y| \le \eta_z$ 和 $|z| \le \sqrt{2}|y|$。因此

$$\gamma_z m_z = \frac{\eta_z}{\eta_z + |z| + 1 + 2\sqrt{\eta_z + |z|}} \ge \frac{1}{2 + \sqrt{2} + 2\sqrt{1+\sqrt{2}}} \tag{4.9}$$

设 $b=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}+2\sqrt{1+\sqrt{2}}}$。根据 α_z 的定义，(4.9) 意味着

$$\alpha_z \geq \frac{1}{4}\Big(b+\sqrt{b^2+16}\Big) > 1. \tag{4.10}$$

令 $B=\dfrac{1}{4}\big(b+\sqrt{b^2+16}\big)$.，我们看到

$$\frac{1+\gamma_z}{1-\gamma_z} = 1+\frac{2}{\sqrt{\eta_z+|z|}} \leq 1+\sqrt{2}. \tag{4.11}$$

由 (4.8)、(4.10) 和 (4.11)，我们看到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{C}} \left|\sum_{r=0}^{n} f^{(r)}(x)\frac{(iy)^r}{r!\langle x\rangle}\right| |(\delta_i,(H-z)^{-1}\delta_j)|_{\mathbb{I}^B}(x,y)dxdy \\
&\leq \Big(1+\sqrt{2}\Big)^2 B^{-|i-j|}\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\int_{\mathbb{C}}|f^{(r)}(x)|\left|\frac{y^{r-1}}{\langle x\rangle}\right|_{\mathbb{I}^B}(x,y)dxdy \\
&\leq \Big(1+\sqrt{2}\Big)^2 B^{-|i-j|}\sum_{r=0}^{n}\frac{2^{r-1}}{r!}\int_{\mathbb{C}}|f^{(r)}(x)|\langle x\rangle^{r-2}{}_{\mathbb{I}^B}(x,y)dxdy \\
&\leq \Big(1+\sqrt{2}\Big)^2 B^{-|i-j|}\sum_{r=0}^{n}\int_{\mathbb{R}}|f^{(r)}(x)|\langle x\rangle^{r-1}dx.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

由引理 4.3，我们看到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{C}}\left|f^{(n+1)}(x)\frac{(iy)^n}{n!}\right||(\delta_i,(H-z)^{-1}\delta_j)|_{\mathbb{I}^A}(x,y)dxdy \\
&\leq \int_{\mathbb{C}}\left|f^{(n+1)}(x)\frac{(iy)^n}{n!}\right|\alpha_z^{-|i-j|}\frac{1}{\eta_z}\left(\frac{1+\gamma_z}{1-\gamma_z}\right)^2{}_{\mathbb{I}^A}(x,y)dxdy.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

注意，对任意 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $t>0$,

$$e^{-t}\leq\frac{e^{-k}k^k}{t^k}.$$

这意味着，对于 i、$j\in\mathbb{N}$，当 $i\neq j$ 时，

$$\alpha_z^{-|i-j|}\leq\left(1+\Big(\frac{\gamma_z m_z}{4}\Big)^2\right)^{-\frac{|i-j|}{2}}\leq\frac{e^{-k}(2k)^k}{|i-j|^k\left(\log\left(1+\Big(\frac{\gamma_z m_z}{4}\Big)^2\right)\right)^k}. \tag{4.14}$$

假设 $(x,\,y)\in A$，则 $|y|\leq 2\langle x\rangle$ 和 $|z|\leq\sqrt{5}\langle x\rangle$。我们看到

$$\gamma_z m_z\geq\frac{1}{2}\frac{\eta_z}{\eta_z+|z|+1}\geq\frac{1}{2}\frac{|y|}{|y|+|z|+1}\geq\frac{3-\sqrt{5}}{8}\frac{|y|}{\langle x\rangle}. \tag{4.15}$$

(4.14) 和 (4.15) 推出

$$\alpha_z^{-|i-j|}\leq\frac{e^{-k}(2k)^k}{|i-j|^k\left(\log\left(1+\Big(\frac{3-\sqrt{5}}{32}\,\frac{|y|}{\langle x\rangle}\Big)^2\right)\right)^k}. \tag{4.16}$$

我们可以看到

$$\frac{1+\gamma_z}{1-\gamma_z}\leq 1+\sqrt{\frac{2}{|y|}}. \tag{4.17}$$

由式（4.13）、（4.16）和（4.17）可知

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{C}} \left| f^{(n+1)}(x) \frac{(iy)^n}{n!} \right| |(\delta_i, (H-z)^{-1}\delta_j)|_{\mathbb{I}^A}(x,y)dxdy \\
&\leq \frac{2e^{-k}(2k)^k}{n!|i-j|^k} \int_{\mathbb{C}} \frac{|f^{(n+1)}(x)||y|^{n-1}}{\left(\log\left(1+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{32}\,\frac{|y|}{\langle x\rangle}\right)^2\right)\right)^k} \left(1+\frac{2}{|y|}\right) \mathbb{I}^A(x,y)dxdy \\
&\leq \frac{8e^{-k}(2k)^k}{n!|i-j|^k} \int_{\mathbb{R}} dx|f^{(n+1)}(x)| \int_0^{2\langle x\rangle} dy \frac{|y|^{n-1}+|y|^{n-2}}{\left(\log\left(1+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{32}\,\frac{|y|}{\langle x\rangle}\right)^2\right)\right)^k} \\
&\leq \frac{8e^{-k}(2k)^k}{n!|i-j|^k} \int_{\mathbb{R}} dx|f^{(n+1)}(x)|\langle x\rangle^n \int_0^2 dt \frac{t^{n-1}+t^{n-2}}{\left(\log\left(1+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{32}\,t\right)^2\right)\right)^k}. \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

若 $n > 2k+1$,

$$C_2''(n) \coloneqq \int_0^2 dt \frac{t^{n-1}+t^{n-2}}{\left(\log\left(1+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{32}\,t\right)^2\right)\right)^k} < \infty. \qquad (4.19)$$

设 $n = 2k+2$。那么，(4.7)、(4.12)、(4.18) 和 (4.19) 表明，存在 $C_2 = C_2(k) > 0$，使得对于任意 i, $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&|(\delta_i, f(H)\delta_j)| \\
&\leq \frac{C_2'}{\pi}\left(1+\sqrt{2}\right)^2 B^{-|i-j|}|||f|||_{2k+2} + \frac{1}{2\pi}C_2''(2k+2)\frac{8e^{-k}(2k)^k}{(2k+2)!|i-j|^k}|||f|||_{2k+3} \\
&\leq C_2|||f|||_{2k+3}\langle i-j\rangle^{-k}.
\end{aligned}$$

这就证明了我们的断言。 □

5 间歇函数及主要结果的证明 t

本节主要考察 $a_\psi^{(k)}(n,T)$ 的分布，并估计动量 $\langle |X|^p\rangle_\psi^{(k)}(T)$ 的下界和上界。由此，我们精确计算间歇函数。最后，利用间歇函数证明定理 1.4。

5.1 间歇函数的下界

令 $k \in \mathbb{N}$、$\psi \in l^2$（$\mathbb{N}$）和 $T > 0$。我们定义 $S \in 2^{\mathbb{N}}$,

$$P_\psi^{(k)}(S,T) = \sum_{n\in S} a_\psi^{(k)}(n,T).$$

对于 $M \geq N \geq 1$，令 $\mathbb{N}$ 的子集 $\{N \sim M\}$ 和 $\{M \sim \infty\}$ 为

$$\begin{aligned}
\{N \sim M\} &= \{n \in \mathbb{N} \mid N \leq n \leq M\}, \\
\{M \sim \infty\} &= \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq M\}.
\end{aligned}$$

引理 5.1。设 $T>0$ 和 $\epsilon>0$。假设 $B\in\mathcal{B}^1$ 和 $A:=\mu_\psi^{(k)}(B)>0$。令

$$\begin{aligned} M_T &= \frac{A^2}{16J_\psi^{(k)}(T^{-1},B)},\\ J_\psi^{(k)}(\epsilon,B) &= \int_B \mu_\psi^{(k)}(dx)\int_{\mathbb{R}}\mu_\psi^{(k)}(dy)\frac{\epsilon^2}{(x-y)^2+\epsilon^2}. \end{aligned}$$

那么对于任意 $T>0$

$$P_\psi^{(k)}(\{M_T\sim\infty\},T)\geq\frac{A}{2}>0.$$

证明。为简化记号，我们分别用 P_ψ、μ_ψ 和 J_ψ 表示 $P_\psi^{(k)}$、$\mu_\psi^{(k)}$ 和 $J_\psi^{(k)}$。令 $\rho=E^{(k)}(B)\psi$ 和 $\chi=\psi-\rho$。注意到 $\rho\neq 0$。我们看到

$$\begin{aligned} P_\psi(\{1\sim M\},T) &= \sum_{n=1}^M\frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}}dt\,e^{-\frac{t}{T}}|\chi(n,t)+\rho(n,t)|^2\\ &= P_\chi(\{1\sim M\},T)+P_\rho(\{1\sim M\},T)+2\sum_{n=1}^M\frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}}dt\,e^{-\frac{t}{T}}\mathrm{Re}(\chi(n,t)\overline{\rho(n,t)})\\ &= P_\chi(\{1\sim M\},T)-P_\rho(\{1\sim M\},T)+2\sum_{n=1}^M\frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}}dt\,e^{-\frac{t}{T}}\mathrm{Re}(\psi(n,t)\overline{\rho(n,t)})\\ &\leq P_\chi(\{1\sim M\},T)+2\sum_{n=1}^M\frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}}dt\,e^{-\frac{t}{T}}\mathrm{Re}(\psi(n,t)\overline{\rho(n,t)}). \end{aligned}\tag{5.1}$$

由于 $P_\psi(\{M\sim\infty\},T)=\|\psi\|^2-P_\psi(\{1,M-1\},T)$ 且 $\|\psi\|^2=\|\rho\|^2+\|\chi\|^2$，(5.1) 推出

$$P_\psi(\{M\sim\infty\},T)\geq\|\rho\|^2-2|D(M-1,T)|,\tag{5.2}$$

其中

$$D(M,T)=\sum_{n=1}^M\frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}}dt\,e^{-\frac{t}{T}}\psi(n,t)\overline{\rho(n,t)}=\sum_{n=1}^M\frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}}dt\,e^{-\frac{t}{T}}(\delta_n,\psi(t))(\rho(t),\delta_n).$$

由于 $U_\psi:\mathcal{H}_\psi\to L^2(\mathbb{R},d\mu_\psi^{(k)})$ 是酉的，由施瓦茨不等式可知

$$\begin{aligned} &|D(M,T)|\\ &=\left|\sum_{n=1}^M\frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}}dt\,e^{-\frac{t}{T}}\int_{\mathbb{R}}\mu_\psi(dx)\int_B\mu_\psi(dy)e^{-it(x-y)}\overline{U_\psi\delta_n(x)}U_\psi\delta_n(y)\right|\\ &=\left|\int_{\mathbb{R}}\mu_\psi(dx)\int_B\mu_\psi(dy)\,\frac{1-iT(x-y)}{1+T^2(x-y)^2}\sum_{n=1}^M\overline{U_\psi\delta_n(x)}U_\psi\delta_n(y)\right|\\ &\leq\int_{\mathbb{R}}\mu_\psi(dx)\int_B\mu_\psi(dy)\,\frac{1}{\sqrt{1+T^2(x-y)^2}}\left|\sum_{n=1}^M\overline{U_\psi\delta_n(x)}U_\psi\delta_n(y)\right|\\ &\leq\int_B\mu_\psi(dy)\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{\mu_\psi(dx)}{1+T^2(x-y)^2}\right)^{\frac12}\left(\int_{\mathbb{R}}\mu_\psi(dx)\left|\sum_{n=1}^M\overline{U_\psi\delta_n(x)}U_\psi\delta_n(y)\right|^2\right)^{\frac12}.\\ &\leq\left(\int_B\mu_\psi(dy)\int_{\mathbb{R}}\frac{\mu_\psi(dx)}{1+T^2(x-y)^2}\right)^{\frac12}\left(\int_B\mu_\psi(dy)\int_{\mathbb{R}}\mu_\psi(dx)\left|\sum_{n=1}^M\overline{U_\psi\delta_n(x)}U_\psi\delta_n(y)\right|^2\right)^{\frac12} \end{aligned}\tag{5.3}$$

由于 $U_\psi: \mathcal{H}_\psi \to L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi^{(k)})$ 是酉的，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mu_\psi(dx) \left|\sum_{n=1}^{M} U_\psi\delta_n(x)\overline{U_\psi\delta_n(y)}\right|^2 &= \int_{\mathbb{R}} \mu_\psi(dx) \left|U_\psi\left(\sum_{n=1}^{M} \overline{U_\psi\delta_n(y)}\delta_n\right)(x)\right|^2 \\ &= \left\|\sum_{n=1}^{M} \overline{U_\psi\delta_n(y)}\delta_n\right\|_{l^2(\mathbb{N})}^2 \\ &= \sum_{n=1}^{M} |U_\psi\delta_n(y)|^2 . \end{aligned} \tag{5.4}$$

由 (5.3) 和 (5.4)，可知

$$\begin{aligned}|D(M-1,T)|^2 &\le \left(\int_B \mu_\psi(dy)\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu_\psi(dx)}{1+T^2(x-y)^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{M}\int_B \mu_\psi(dy)\,|U_\psi\delta_n(y)|^2\right) \\ &\le J_\psi(T^{-1},B)\sum_{n=1}^{M}\|U_\psi\delta_n\|_{l^2}^2 \\ &\le M J_\psi(T^{-1},B)\end{aligned}$$

设 $M = M_T$。则

$$|D(M_T-1,T)| \le \sqrt{M_T J_\psi(T^{-1},B)} = \frac{\|\rho\|^2}{4}. \tag{5.5}$$

由 (5.2) 和 (5.5)，可得

$$P_\psi(\{M_T \sim \infty\}, T) \ge \frac{\|\rho\|^2}{2} = \frac{A}{2}.$$

这就证明了我们的断言。 □

对于 $\psi \in l^2(\mathbb{N})$，定义解析函数 $m_\psi^{(k)}: \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ 为

$$m_\psi^{(k)}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu_\psi^{(k)}(d\lambda)}{\lambda - z} = (\psi, (H^{(k)} - z)^{-1}\psi).$$

设 $\epsilon > 0$ 和 $B \in \mathcal{B}^1$。定义

$$I_\psi^{(k)}(\epsilon, B) = \epsilon \int_B dE |\mathrm{Im}\, m_\psi^{(k)}(E + i\epsilon)|^2.$$

引理 5 .2. 设 $B = [a,b] \subset \mathbb{R}$。则存在 $C_3 = C_3(a,b) > 0$，使得对于任意 $\epsilon \in (0,1)$

$$J_\psi^{(k)}(\epsilon, B) \le C_3 I_\psi^{(k)}(\epsilon, B). \tag{5.6}$$

证明。为简化记号，我们分别用 J_ψ、I_ψ 和 μ_ψ 表示 $J_\psi^{(k)}$、$I_\psi^{(k)}$ 和 $\mu_\psi^{(k)}$。我们看到

$$\begin{aligned}I_\psi(\epsilon, B) &= \epsilon^3 \int_B dE \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu_\psi(dx)}{\epsilon^2 + (E-x)^2}\right)^2 \\ &= \epsilon^3 \int_B dE \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu_\psi(dx)}{\epsilon^2 + (E-x)^2}\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu_\psi(dy)}{\epsilon^2 + (E-y)^2} \\ &\ge \int_B \mu_\psi(dx)\int_{\mathbb{R}} \mu_\psi(dy)\,\epsilon^3 \int_B \frac{dE}{(\epsilon^2 + (E-x)^2)(\epsilon^2 + (E-y)^2)}.\end{aligned} \tag{5.7}$$

设 $s=\frac{x-y}{\epsilon}$。由于 $x\in B=[a,b]$ 和 $0<\epsilon<1$，我们有

$$\begin{aligned}\epsilon^3\int_B\frac{dE}{(\epsilon^2+(E-x)^2)(\epsilon^2+(E-y)^2)} &= \int_{\frac{a-x}{\epsilon}}^{\frac{b-x}{\epsilon}}\frac{dt}{(1+t^2)(1+(t+s)^2)}\\ &\geq \int_{a-x}^{b-x}\frac{dt}{(1+t^2)(1+(|t|+|s|)^2)}.\end{aligned}$$

若 $|s|\leq 1$，则

$$\int_{a-x}^{b-x}\frac{dt}{(1+t^2)(1+(|t|+|s|)^2)} \geq \int_{a-x}^{b-x}\frac{dt}{(1+t^2)(1+(|t|+1)^2)}. \tag{5.8}$$

若 $|s|\geq 1$，则存在 $C_3'=C_3'(a,b)>0$，使得对任意 $x\in B$,

$$\begin{aligned}\int_{a-x}^{b-x}\frac{dt}{(1+t^2)(1+(|t|+|s|)^2)} &= \int_{a-x}^{b-x}dt\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{1+(|t|+|s|)^2}\right)((|t|+|s|)^2-t^2)^{-1}\\ &\geq \int_{a-x}^{b-x}dt\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{1+(|t|+1)^2}\right)\frac{C_3'}{1+s^2}\end{aligned} \tag{5.9}$$

由 (5.8) 和 (5.9)，存在 $C_3=C_3(a,b)>0$，使得对任意 $x\in B$ 和任意 $y\in\mathbb{R}$,

$$\epsilon^3\int_B\frac{dE}{(\epsilon^2+(E-x)^2)(\epsilon^2+(E-y)^2)}\geq\frac{C_3}{1+s^2},\qquad s=\frac{x-y}{\epsilon}. \tag{5.10}$$

(5.7) 和 (5.10) 蕴含了我们的断言。 □

定义 5.3。设 $f\colon\ \mathbb{Z}_{\geq 0}\to\mathbb{C}$ 和 $n\in\mathbb{N}$。令 $\left(\tilde{H}^{(k)}f\right)(n)$ 定义为

$$\left(\tilde{H}^{(k)}f\right)(n)=-a_k(n)f(n+1)+d_k(n)f(n)-a_k(n-1)f(n-1),$$

其中 $a_k(0)=1$。

设 $z\in\mathbb{C}^+$，且 n、$m\in\mathbb{N}$ 满足 $n\geq m$。我们定义

$$\begin{aligned}T_z(n) &= \begin{cases}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\sqrt{\frac{g_{n-1}}{g_n}} & \frac{g_n+1-z}{\sqrt{g_n}}\end{pmatrix} & (n\geq 1),\\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1-z\end{pmatrix} & (n=0),\end{cases}\\ S_z(n,m) &= T_z(n)T_z(n-1)\cdots T_z(m),\\ S_z(n) &= S_z(n,0).\end{aligned}$$

设 $f\colon\ \mathbb{Z}_{\geq 0}\to\mathbb{C}$ 和 $z\in\mathbb{C}^+$。假设对每个 $n\in\mathbb{N}$，$\left(\tilde{H}^{(k)}f\right)(n)=zf(n)$。Then

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}f(n)\\ f(n+1)\end{pmatrix} &= T_z(n+N(k)-1)\begin{pmatrix}f(n-1)\\ f(n)\end{pmatrix}\\ &= S_z(n+N(k)-1,N(k))\begin{pmatrix}f(0)\\ f(1)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

引理 5.4. 设 $K>0$ 和 $z=E+i\epsilon$ 满足 $0<E<4$ 和 $\epsilon>0$。则存在$C_4=C_4(E,K)>0$ 使得

(1) 若 $L_m+1\le n<L_{m+1}$ 和 $n\epsilon<K$，则

$$\|S_z(n)^{-1}\|\le C_4^{m+1}\prod_{j=1}^{m}L_j^{\frac{1-\Gamma}{2\Gamma}},$$

(2) 若 $n\le L_m$ 和 $n\epsilon<K$，则

$$\|S_z(n)^{-1}\|\le C_4^{m}\prod_{j=1}^{m-1}L_j^{\frac{1-\Gamma}{2\Gamma}}.$$

证明。由定义 1.1 可知

$$T_z(n)=\begin{cases}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -[n^{\frac{1-\Gamma}{\Gamma}}]^{-\frac12} & \frac{[n^{\frac{1-\Gamma}{\Gamma}}]+1-z}{[n^{\frac{1-\Gamma}{\Gamma}}]^{\frac12}}\end{pmatrix} & (n\in\{L_m\mid m\in\mathbb{N}\}),\\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ -[n^{\frac{1-\Gamma}{\Gamma}}]^{\frac12} & 2-z\end{pmatrix} & (n\in\{L_m+1\mid m\in\mathbb{N}\}),\\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2-z\end{pmatrix} & (\text{otherwise}).\end{cases}$$

若 $L_m+1\le n<L_{m+1}$，则

$$\begin{aligned}S_z(n) &= R^{n-L_m-1}S(L_m+1)\\ &= R^{n-L_m-1}S(L_m+1,L_m)S(L_m-1)\\ &= R^{n-L_m-1}S(L_m+1,L_m)R^{L_m-L_{m-1}-2}S(L_{m-1}+1)\\ &= \cdots\\ &= R^{n-L_m-1}S(L_m+1,L_m)R^{L_m-L_{m-1}-2}\cdots S(L_1+1,L_1)R^2\end{aligned}$$

其中 $R=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2-z\end{pmatrix}$。令 $L_0=-2$。于是可知

$$\|S_z(n)^{-1}\|\le\|R^{-n+L_m+1}\|\|T_z(0)\|\prod_{j=1}^{m}\|S(L_j+1,L_j)^{-1}\|\|R^{-L_j+L_{j-1}+2}\|.\tag{5.11}$$

注意，对于任意 $m\in\mathbb{N}$，都有 $R^{-1}=\begin{pmatrix}2-z & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 和

$\|R^m\|=\|R^{-m}\|$。

$$R=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2-E\end{pmatrix}-i\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \epsilon\end{pmatrix}.$$

由于 $E\in(0,4)$，存在可逆矩阵 A_E 和 $\lambda_\pm\in\mathbb{C}$，且 $|\lambda_\pm|=1$，使得 at

$$A_E^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2-E\end{pmatrix}A_E=\begin{pmatrix}\lambda_+ & 0\\ 0 & \lambda_-\end{pmatrix}.$$

因此我们看到

$$\begin{aligned}\|A_E^{-1}R^nA_E\| &\le \left\|\begin{pmatrix}\lambda_+ & 0\\ 0 & \lambda_-\end{pmatrix}-i\epsilon A_E^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}A_E\right\|^n\\ &\le \left(1+\epsilon\|A_E^{-1}\|\|A_E\|\right)^n.\end{aligned}$$

如果 $\epsilon<\frac{K}{n}$，那么

$$\|A_E^{-1}R^nA_E\|\le 2\exp(K\|A_E^{-1}\|\|A_E\|).$$

因此我们得到，对于 $\epsilon < \frac{K}{n}$，

$$\|R^n\| = \|A_E A_E^{-1} R^n A_E A_E^{-1}\| \le 2\|A_E\|\|A_E^{-1}\|\exp(K\|A_E^{-1}\|\|A_E\|). \tag{5.12}$$

若 $0 < \epsilon < 1$，则存在 $C_4' > 0$，使得

$$\|S_z(L_j+1, L_j)^{-1}\| \le C_4'[L_j^{\frac{1-\Gamma}{\Gamma}}]^{\frac{1}{2}} \le C_4' L_j^{\frac{1-\Gamma}{2\Gamma}}. \tag{5.13}$$

由 (5.11)、(5.12) 和 (5.13)，可知对于 $L_m + 1 \le n < L_{m+1}$,

$$\|S_z(n)^{-1}\| \le (2C_4'\|A_E\|\|A_E^{-1}\|)^{m+1}\exp((m+1)K\|A_E^{-1}\|\|A_E\|)\prod_{j=1}^{m} L_j^{\frac{1-\Gamma}{2\Gamma}}.$$

这就证明了断言的第一部分。断言的第二部分可用类似方法证明。

□

引理 5.5. 设 $\psi \in l^2(\mathbb{N})$ 且 $n \in \mathbb{N}$。则对于任意 $T > 0$,

$$\frac{1}{T}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{T}}|\psi_k(t,n)|^2\,dt = \frac{\epsilon}{\pi}\int_{\mathbb{R}} |(H^{(k)} - (E+i\epsilon))^{-1}\psi(n)|^2\,dE,$$

其中 $\epsilon = \frac{1}{2T}$。

证明. 将 $H^{(k)}$ 和 ψ_k 分别简记为 H 和 ψ。可知

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{T}}|\psi(t,n)|^2\,dt &= \frac{1}{T}\int_0^\infty dt e^{-\frac{t}{T}}(\delta_n, e^{-itH}\psi)(e^{-itH}\psi, \delta_n) \\
&= \int_{\mathbb{R}}(\delta_n, E(dx)\psi)\int_{\mathbb{R}}(E(dy)\psi,\delta_n)\frac{1}{T}\int_0^\infty dt e^{-\frac{t}{T}-it(x-y)} \\
&= \int_{\mathbb{R}}(\delta_n, E(dx)\psi)\int_{\mathbb{R}}(E(dy)\psi,\delta_n)(1+iT(x-y))^{-1},
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\frac{\epsilon}{\pi}\int_{\mathbb{R}} |(H^{(k)} - (E+i\epsilon))^{-1}\psi(n)|^2\,dE \\
&= \int_{\mathbb{R}}(\delta_n, E(dx)\psi)\int_{\mathbb{R}}(E(dy)\psi,\delta_n)\frac{\epsilon}{\pi}\int_{\mathbb{R}}(E-x+i\epsilon)^{-1}(E-y-i\epsilon)^{-1} \\
&= \int_{\mathbb{R}}(\delta_n, E(dx)\psi)\int_{\mathbb{R}}(E(dy)\psi,\delta_n)(1+iT(x-y))^{-1}.
\end{aligned}$$

由此可得我们的断言。 □

定义 5.6. 设 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 是可测的，且 $B_\nu = [\nu, 4-\nu]$ 满足 $0 < \nu < 1$。如果存在 $\nu > 0$ 和 $x_0 \in B_\nu$，使得 $f \in C_0^\infty(B_\nu)$ 且 $f(x_0) \ne 0$，则称 f 为第一类；如果 f 有界，且存在 $E_0 \in (0,4)$ 和 $\nu > 0$，满足 $[E_0-\nu, E_0+\nu] \subset B_\nu$，使得 $f \in C^\infty([E_0-\nu, E_0+\nu])$ 且 $|f(x)| \ge c > 0$ 对于 $x \in [E_0-\nu, E_0+\nu]$，则称 f 为第二类。

引理 5.7. 设 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 为第二类，且 $\psi = f(H^{(k)})\delta_1$。设 N 足够大。则存在 $C_5 = C_5(\nu) > 1$，使得

(1) 若 $L_N \le T \le \frac{L_{N+1}}{4}$，则

$$P_\psi^{(k)}(\{T \sim \infty\}, T) \ge C_5^{-(N+1)} T\left(\frac{1}{T} + I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1}, B_\nu)\right)\prod_{j=1}^{N} L_j^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}}, \tag{5.14}$$

(2) 若 $\frac{L_N}{4} \le T \le L_N$，则

$$P_\psi^{(k)}(\{T \sim \infty\}, T) \ge C_5^{-(N+1)} L_N \left(\frac{1}{T} + I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1}, B_\nu) \right) \prod_{j=1}^{N} L_j^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}}, \tag{5.15}$$

(3) 若 $\frac{L_N}{4} \le T$，则

$$P_\psi^{(k)}(\{\frac{L_N}{4} \sim \frac{L_N}{2}\}, T) \ge C_5^{-N} L_N \left(\frac{1}{T} + I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1}, B_\nu) \right) \prod_{j=1}^{N-1} L_j^{\frac{1-\Gamma}{\Gamma}}. \tag{5.16}$$

Pro的。首先，我们证明 $\psi = \delta_1$ 情形下的引理。令 $z \in \mathbb{C}^+$ 和 f_k： $\mathbb{Z}_{\ge 0} \to \mathbb{C}$ b e

$$f_k(n) = \begin{cases} (H^{(k)} - z)^{-1} \delta_1(n) & (n \in \mathbb{N}), \\ 1 & (n = 0). \end{cases}$$

令 $g = (H^{(k)} - z)^{-1}\delta_1 \in l^2(\mathbb{N})$。我们看到，对于每个 $n \in \mathbb{N}$， $g(n) = f_k(n)$，并且

$$\begin{aligned} & (H^{(k)} - z) g(n) = \delta_1(n) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -a_k(n)g(n+1) + d_k(n)g(n) - a_k(n-1)g(n-1) - zg(n) = 0 & (n \ge 2) \\ -a_k(1)g(2) + d_k(1)g(1) - zg(1) = 1 & (n = 1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -a_k(n)f_k(n+1) + d_k(n)f_k(n) - a_k(n-1)f_k(n-1) = zf_k(n) & (n \ge 2) \\ -a_k(1)f_k(2) + d_k(1)f_k(1) - 1 = zf_k(1) & (n = 1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -a_k(n)f_k(n+1) + d_k(n)f_k(n) - a_k(n-1)f_k(n-1) = zf_k(n) & (n \ge 2) \\ -a_k(1)f_k(2) + d_k(1)f_k(1) - a_k(0)f_k(0) = zf_k(1) & (n = 1) \end{cases}. \end{aligned}$$

这意味着 f_k 满足方程 $\left(\tilde{H}^{(k)} f_k\right)(n) = z f_k(n)$，对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。我们看到

$$\begin{pmatrix} f_k(n) \\ f_k(n+1) \end{pmatrix} = S_z(n + N(k) - 1, N(k)) \begin{pmatrix} f_k(0) \\ f_k(1) \end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

注意， $f_k(1) = m_{\delta_1}^{(k)}(z)$。令 $z = E + i\epsilon$。由 (5.17)，我们得到

$$|f_k(n)|^2 + |f_k(n+1)|^2 \ge \frac{1 + |m_{\delta_1}^{(k)}(E + i\epsilon)|^2}{\|S_z(n + N(k) - 1, N(k))^{-1}\|^2}.$$

假设 $L_N + 1 \le n + N(k) \le L_{N+1}$ 且 $\epsilon < \frac{K}{n}$。由引理 5.4，我们看到

$$|f_k(n)|^2 + |f_k(n+1)|^2 \ge C_4^{-(N+1)} \prod_{j=1}^{N} L_j^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}} \left(1 + |\mathrm{Im}\, m_{\delta_1}^{(k)}(E + i\epsilon)|^2\right). \tag{5.18}$$

由引理 5.5 可知， $f_k(n) = (H^{(k)} - z)^{-1}\delta_1(n)$，并且

$$\frac{\epsilon}{\pi} \int_{\mathbb{R}} |(H^{(k)} - (E + i\epsilon))^{-1} \delta_1(n)|^2 \, dE = \frac{1}{T} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{T}} |\delta_{1k}(t, n)|^2 \, dt = a_{\delta_1}^{(k)}(n, T), \qquad \epsilon = (2T)^{-1}.$$

令 $(2T)^{-1} < \frac{K}{n}$。由 (5.18) 可知，存在 C_4 和 $C_4' > 0$，使得

$$\begin{aligned} a_{\delta_1}^{(k)}(n,T) + a_{\delta_1}^{(k)}(n+1,T) &\geq C_4^{-(N+1)} \prod_{j=1}^{N} L_j^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}} \frac{1}{2T} \int_{B_\nu} dE \left(1 + |\mathrm{Im}\, m_{\delta_1}^{(k)}(E + i(2T)^{-1})|^2\right) \\ &\geq C_4^{-(N+1)} \prod_{j=1}^{N} L_j^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}} \left(\frac{1}{2T} + I_{\delta_1}^{(k)}((2T)^{-1}, B_\nu)\right) \\ &\geq C_4'^{-(N+1)} \prod_{j=1}^{N} L_j^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}} \left(\frac{1}{T} + I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1}, B_\nu)\right). \end{aligned}$$

设 $L_N < T < \frac{L_{N+1}}{4}$，且 K 充分大。于是有

$$\sum_{T \leq n \leq 2T} a_{\psi}^{(k)}(n,T) + a_{\psi}^{(k)}(n+1,T) \geq C_4'^{-(N+1)} \prod_{j=1}^{N} L_j^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}} T \left(\frac{1}{T} + I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1}, B_\nu)\right),$$

因此

$$P_{\psi}^{(k)}(\{T \sim 2T\}, T) \geq C_4'^{-(N+1)} \prod_{j=1}^{N} L_j^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}} T \left(\frac{1}{T} + I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1}, B_\nu)\right). \tag{5.19}$$

设 $\frac{L_N}{4} < T < L_N$。于是我们看到

$$P_{\psi}^{(k)}(\{2L_N \sim 3L_N\}, T) \geq C_4'^{-(N+1)} \prod_{j=1}^{N} L_j^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}} L_N \left(\frac{1}{T} + I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1}, B_\nu)\right).$$

设 $\frac{L_N}{4} \leq T$。于是我们看到

$$P_{\psi}^{(k)}(\{\frac{L_N}{4} \sim \frac{L_N}{2}\}, T) \geq C_4'^{-N} \prod_{j=1}^{N-1} L_j^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}} L_N \left(\frac{1}{T} + I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1}, B_\nu)\right).$$

因此，在 $\psi = \delta_1$ 的情况下，我们可以证明该引理。

接下来，取满足 $g(x) = 1$ 在 $B_{\frac{\nu}{2}}$ 上的 $g \in C_0^\infty([0,4])$。我们证明 $\psi = g(H^{(k)})\delta_1$ 的情况下的引理。设 $\chi = \delta_1 - \psi$ 和 $z \in \mathbb{C}^+$。于是

$$|(H^{(k)} - z)^{-1}\psi(n)|^2 \geq \frac{1}{2}|(H^{(k)} - z)^{-1}\delta_1(n)|^2 - |(H^{(k)} - z)^{-1}\chi(n)|^2.$$

令 $L_N < T < \frac{L_{N+1}}{4}$。由此可见，根据 (5.19),

$$\begin{aligned} P_{\psi}^{(k)}(\{T \sim \infty\}, T) &\geq \frac{1}{2} C_4'^{-(N+1)} \prod_{j=1}^{N} L_j^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}} T \left(\frac{1}{T} + I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1}, B_\nu)\right) \\ &- \frac{1}{T} \int_{B_\nu} dE \sum_{T \leq n \leq 2T} |(H^{(k)} - (E + i\epsilon))^{-1}\chi(n)|^2. \end{aligned} \tag{5.20}$$

设 $f_z(x) = \underline{\frac{1 - g(x)}{x - z}}$。那么 $(H^{(k)} - z)^{-1}\chi(n) = f_z(H^{(k)})\delta_1(n)$，由引理 4.4 可知，对于 $l > 1$,

$$|(H^{(k)} - z)^{-1}\chi(n)| = |f_z(H^{(k)})\delta_1(n)| \leq C_2 |||f_z|||_{2l+3} n^{-l},$$

并且

$$\sum_{T\le n\le 2T}|(H^{(k)}-z)^{-1}\chi(n)|=\sum_{T\le n\le 2T}|f_z(H^{(k)})\delta_1(n)| \quad\le\quad C_2|||f_z|||_{2l+3}T^{-(l-1)}. \tag{5.21}$$

令 $z=E+i\epsilon$。注意，存在 $C_5'=C_5'(g,\nu,l)>0$，使得 $\sup_{E\in B_\nu,\ 0<\epsilon<1}|||f_z|||_{2l+3}\le C_5'$.由 (5.20) 和 (5.21)，我们得到

$$\begin{aligned}P_\psi^{(k)}(n\ge T,T) &\ge \frac{1}{2}C_4'^{-(N+1)}\prod_{j=1}^N L_j^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}}T\left(\frac{1}{T}+I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1},B_\nu)\right)-\frac{4}{T}C_2C_5'T^{-(l-1)}\\ &\ge \left\{\frac{1}{2}C_4'^{-(N+1)}-4C_2C_5'T^{-l}\prod_{j=1}^N L_j^{\frac{1-\Gamma}{\Gamma}}\right\}\prod_{j=1}^N L_j^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}}T\left(\frac{1}{T}+I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1},B_\nu)\right).\end{aligned}$$

令 l 充分大，则我们可以在 $\psi=g(H^{(k)})$ 的情况下证明 (5.14)。类似地，我们可以在 $\psi=g(H^{(k)})$ 的情况下证明 (5.15) 和 (5.16)。

最后，令 f 为第二类，并在 $\psi=f(H^{(k)})$ 的情况下证明该引理。令 ν 满足 $f\in C^\infty([E_0-\nu,E_0+\nu])$ 和 $|f(x)|\ge c>0$，其中 $x\in[E_0-\nu,E_0+\nu]$。我们取 $g\in C_0^\infty([E_0-\nu,E_0+\nu])$，使得 $g(x)=1$ 在 $[E_0-\frac{3\nu}{4},E_0+\frac{3\nu}{4}]$ 上。于是存在 $h\in C_0^\infty([E_0-\nu,E_0+\nu])$，使得 $g(x)=h(x)f(x)$。由于 $\sup_n\sum_{m=1}^\infty\langle n-m\rangle^{-l}<\infty$，由引理 4.4 可知

$$\begin{aligned}&|(H^{(k)}-z)^{-1}g(H^{(k)})\delta_1(n)|^2\\ &=|(h(H^{(k)})\delta_n,(H^{(k)}-z)^{-1}f(H^{(k)})\delta_1)|^2\\ &=\left|\sum_{m=1}^\infty(h(H^{(k)})\delta_n,\delta_m)(\delta_m,(H^{(k)}-z)^{-1}f(H^{(k)})\delta_1)\right|^2\\ &\le C_2\left|\sum_{m=1}^\infty\langle n-m\rangle^{-l}|(\delta_m,(H^{(k)}-z)^{-1}f(H^{(k)})\delta_1)|\right|^2\\ &\le C_2\left(\sum_{m=1}^\infty\langle n-m\rangle^{-l}\right)\left(\sum_{m=1}^\infty\langle n-m\rangle^{-l}|(H^{(k)}-z)^{-1}f(H^{(k)})\delta_1(m)|^2\right)\\ &\le C_2'\sum_{m=1}^\infty\langle n-m\rangle^{-l}|(H^{(k)}-z)^{-1}f(H^{(k)})\delta_1(m)|^2.\end{aligned}$$

这意味着不等式

$$\begin{aligned}A(2L,T) &:= \epsilon\sum_{n\ge 2L}\int_{B_\nu}dE\,|(H^{(k)}-z)^{-1}g(H^{(k)})\delta_1(n)|^2\\ &= C_2'\epsilon\sum_{m=1}^\infty\sum_{n\ge 2L}\langle n-m\rangle^{-l}\int_{B_\nu}dE\,|(H^{(k)}-z)^{-1}f(H^{(k)})\delta_1(m)|^2\\ &\le \epsilon\sum_{m=1}^\infty h_l(m,L)\int_{B_\nu}dE\,|(H^{(k)}-z)^{-1}f(H^{(k)})\delta_1(m)|^2,\end{aligned}\tag{5.22}$$

其中 $z=E+i\epsilon$、$\epsilon=\frac{1}{2T}$ 和 $h_l(m,L)=\sum_{n\ge 2L}\frac{C_2'}{1+|n-m|^l}$.。由此可得，对于 $\phi\in l^2(\mathbb{N})$ 和 $\epsilon>0$，有

$$\epsilon\sum_{n=1}^\infty\int_{\mathbb{R}}dE|(H^{(k)}-z)^{-1}\phi(n)|^2=\pi\|\phi\|^2,\qquad z=E+i\epsilon.$$

存在 $C_2'' > \max\{C_2', \sup_{m\geq T} h_l(m,T)\}$。由 (5.22) 可得

$$\begin{aligned} A(2T,T) &\leq \epsilon \sum_{m<T} h_l(m,T) \int_{B_\nu} dE\, |(H^{(k)}-z)^{-1} f(H^{(k)})\delta_1(m)|^2 \\ &+ \epsilon \sum_{m\geq T} h_l(m,T) \int_{B_\nu} dE\, |(H^{(k)}-z)^{-1} f(H^{(k)})\delta_1(m)|^2 \\ &\leq \pi \|f(H^{(k)})\delta_1\|^2 C_2'' T^{1-l} + C_2'' \epsilon \sum_{m\geq T} \int_{B_\nu} dE\, |(H^{(k)}-z)^{-1} f(H^{(k)})\delta_1(m)|^2 \\ &= \pi \|f(H^{(k)})\delta_1\|^2 C_2'' T^{1-l} + C_2'' P_\psi^{(k)}(\{T\sim\infty\}, T), \end{aligned} \tag{5.23}$$

其中 $z = E + i\epsilon$ 和 $\epsilon = \dfrac{1}{2T}$。设 $L_N < T < \dfrac{L_{N+1}}{4}$。那么，前面的论证表明

$$A(2T,T) = \pi P^{(k)}_{g(H^{(k)})\delta_1}(\{2T\sim\infty\}, T) \geq C_5^{-(N+1)} \prod_{j=1}^{N} L_j^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}} T \left(\frac{1}{T} + I^{(k)}_{\delta_1}(T^{-1}, B_\nu) \right). \tag{5.24}$$

我们取充分大的 l。那么，(5.23) 和 (5.24) 在 $\psi = f(H^{(k)})$ 的情况下推出 (5.14)。类似地，我们也可以证明 (5.15) 和 (5.16)。 □

引理 5.8。设 f 为第一类，且 $\sup_x |f(x)| \leq 1$ 且 $\psi = f(H^{(k)})\delta_1$。若 N 充分大，则存在 $C_6 > 0$ 和 $q_N \in \mathbb{R}$，使得 $\lim_{N\to\infty} q_N = 0$，从而对于 $\dfrac{L_N}{4} < T < \dfrac{L_{N+1}}{4}$ 使得

$$\begin{aligned} \langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) &\geq C_6 I^{(k)}_{\delta_1}(T^{-1}, B_\nu)^{-p} \\ &+ C_6 \left(L_N^{p+1+q_N} + T^{p+1} L_N^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}+q_N} \right) I^{(k)}_{\delta_1}(T^{-1}, B_\nu). \end{aligned}$$

证明。设 $M \in \mathbb{N}$。那么可得 $\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) \geq M^p P_{(k)\psi}(\{M\sim\infty\}, T)$。引理 5.1 表明

$$\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) \geq M_T^p P_\psi^{(k)}(\{M_T\sim\infty\}, T) \geq C_6' J_\psi^{(k)}(T^{-1}, B_\nu)^{-p} \geq C_6' J^{(k)}_{\delta_1}(T^{-1}, B_\nu)^{-p}.$$

由 (5.6)，我们得到

$$\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) \geq C_6'' I^{(k)}_{\delta_1}(T^{-1}, B_\nu)^{-p}. \tag{5.25}$$

注意， f 是第二类。对于 $\frac{L_N}{4} \leq T \leq L_N$，由 (5.15) 可得

$$\begin{aligned} \langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) &\geq T^p P_\psi^{(k)}(\{T\sim\infty\}, T) \\ &\geq 4C_5^{-(N+1)} T^{p+1} I^{(k)}_{\delta_1}(T^{-1}, B_\nu) \prod_{j=1}^{N} L_j^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}}. \end{aligned}$$

设 $q_N > 0$ 满足

$$L_N^{q_N} = C_5^{-(N+1)} \prod_{j=1}^{N-1} L_j^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}}.$$

于是，$\lim_{N\to\infty} q_N = 0$，并且我们看到，对于 $\frac{L_N}{4} \leq T \leq L_N$，

$$\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) \geq 4T^{p+1} L_N^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}+q_N} I^{(k)}_{\delta_1}(T^{-1}, B_\nu). \tag{5.26}$$

对于 $L_N \le T \le \dfrac{L_{N+1}}{4}$，由 (5.14) 可得

$$\begin{aligned}\langle |X|^p\rangle_\psi^{(k)}(T) &\ge T^p P_\psi^{(k)}(\{T\sim\infty\},T)\\ &\ge C_5^{-(N+1)}T^{p+1}I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1},B_\nu)\prod_{j=1}^{N}L_j^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}}\\ &\ge T^{p+1}L_N^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}+q_N}I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1},B_\nu). \end{aligned}\tag{5.27}$$

由 (5.26) 和 (5.27)，我们可知，对于 $\dfrac{L_N}{4} \le T \le \dfrac{L_{N+1}}{4}$，

$$\langle |X|^p\rangle_\psi^{(k)}(T) \ge T^{p+1}L_N^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}+q_N}I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1},B_\nu).\tag{5.28}$$

对于 $\dfrac{L_N}{4} \le T$，由 (5.16) 可知

$$\begin{aligned}\langle |X|^p\rangle_\psi^{(k)}(T) &\ge T^p P_\psi^{(k)}(\{T\sim\infty\},T)\\ &\ge C_5^{-N}L_N^{p+1}I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1},B_\nu)\prod_{j=1}^{N-1}L_j^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}}\\ &\ge L_N^{p+1+q_N}I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1},B_\nu). \end{aligned}\tag{5.29}$$

(5.25)、(5.28) 和 (5.29) 推得我们的断言。 □

引理 5.9. 设 f 是第一类，且 $\sup_x |f(x)| \le 1$ 和 $\psi = f(H^{(k)})\delta_1$。则

$$\beta_\psi^{(k)}(p) \ge \frac{p+1}{p+\frac{1}{\Gamma}}.\tag{5.30}$$

证明. 由引理 5.8，对于 $x = I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1},B_\nu)$，我们得到

$$\langle |X|^p\rangle_\psi^{(k)}(T) \ge C_6 x^{-p} + C_6\left(L_N^{p+1-q_N} + T^{p+1}L_N^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}-q_N}\right)x.$$

设 $f(x) = x^{-p} + Kx$。则 $\inf\limits_{x>0} f(x) = c(p)K^{\frac{p}{p+1}}$，其中 $c(p) = p^{-\frac{p}{p+1}} + p^{\frac{1}{p+1}}$。设 $\dfrac{L_N}{4} \le T \le \dfrac{L_{N+1}}{4}$。则存在 $C_6' = C_6'(p) > 0$，使得

$$\begin{aligned}\langle |X|^p\rangle_\psi^{(k)}(T) &\ge c(p)C_6\left(L_N^{p+1-q_N} + T^{p+1}L_N^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}-q_N}\right)^{\frac{p}{p+1}}\\ &\ge C_6' L_N^{-\frac{p}{p+1}q_N}\left(L_N^{p+1} + T^{p+1}L_N^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}}\right)^{\frac{p}{p+1}}. \end{aligned}$$

对于满足 $A = \dfrac{p+\frac{1}{\Gamma}}{p+1}$ 的 $\dfrac{L_N}{4} \le T \le L_N^A$，我们有

$$\langle |X|^p\rangle_\psi^{(k)}(T) \ge C_6' L_N^{-\frac{p}{p+1}q_N}L_N^p \ge C_6' L_N^{-\frac{p}{p+1}q_N}T^{\frac{p}{A}}.\tag{5.31}$$

对于 $L_N^A \le T \le \dfrac{L_{N+1}}{4}$，我们有

$$\langle |X|^p\rangle_\psi^{(k)}(T) \ge C_6' L_N^{-\frac{p}{p+1}q_N}T^p L_N^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}\frac{p}{p+1}} \ge C_6' L_N^{-\frac{p}{p+1}q_N}T^{\frac{p}{A}}.\tag{5.32}$$

(5.31) 和 (5.32) 表明，对于充分大的 $T>0$ 以及任意 $\epsilon>0$,

$$\langle |X|^p\rangle_\psi^{(k)}(T)\geq C_6' T^{\frac{p}{A}-\epsilon}.$$

因此我们得到

$$\beta_\psi^{(k)}(p)=\frac{1}{p}\liminf_{T\to\infty}\frac{\log\langle |X|^p\rangle_\psi^{(k)}(T)}{\log T}\geq \frac{p+1}{p+\frac{1}{\Gamma}}-\frac{\epsilon}{p}.$$

这就得到了我们要证明的结论。 □

5.2 间歇函数的上界

引理 5.10. 设 f 为第一类， $\psi=f(H^{(k)})\delta_1$，且 $p>0$。则存在 $C_7=C_7(p)>0$，使得对于具有充分大 N 的 $L_N\leq T\leq L_N^{\overline{\Gamma}}$，

$$\sum_{n\geq 2L_N} n^p a_\psi^{(k)}(n,T)\leq C_7 T^{p+1}L_N^{-\frac{1}{\Gamma}}. \tag{5.33}$$

证明. 我们有

$$\sum_{n\geq 2L_m} n^p a_\psi^{(k)}(n,T)=\sum_{n=2L_m}^{T^3} n^p a_\psi^{(k)}(n,T)+\sum_{n>T^3} n^p a_\psi^{(k)}(n,T).$$

令 $G_t(x)=e^{-itx}$。引理 4.4 表明，对于任意 $l>1$，存在 $C_7^{(4)}=C_7^{(4)}(l)>0$，使得

$$\begin{aligned}
\sum_{n>T^3} n^p a_\psi^{(k)} &= \sum_{n>T^3} n^p \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}} dt\, e^{-\frac{t}{T}}|(\delta_n, G_t(H^{(k)})f(H^{(k)})\delta_1)|^2\\
&\leq \sum_{n>T^3} n^p \frac{C_2}{T}\int_{\mathbb{R}} dt\, e^{-\frac{t}{T}}|||G_t f|||_{2l+3} n^{-l}\\
&\leq \sum_{n>T^3} n^p \frac{C_7^{(4)}}{T}\int_{\mathbb{R}} dt\, e^{-\frac{t}{T}}\, t^{2l+3} n^{-l}\\
&\leq C_7^{(4)} T^{2l+3}\sum_{n>T^3} n^{p-l}\\
&\leq C_7^{(4)} T^{-l+3p+6}.
\end{aligned}$$

T^3我们取 l 充分大，因此只需证明$\sum_{n=2L_N}^{T^3} n^p a_\psi^{(k)}(n,T)\leq C_7 T^{p+1}L_N^{-\frac{1}{\Gamma}}$. 由于 f是第一类，$f\in C_0^\infty(B_\nu)$。根据引理 5.5，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2L_N}^{T^3} n^p a_\psi^{(k)}(n,T) &= \sum_{n=2L_N}^{T^3} n^p \frac{\epsilon}{\pi}\int_{B_{\frac{\nu}{2}}} dE\,|(H^{(k)}-E-i\epsilon)^{-1}\psi(n)|^2\\
&+ \sum_{n=2L_N}^{T^3} n^p \frac{\epsilon}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus B_{\frac{\nu}{2}}} dE\,|(H^{(k)}-E-i\epsilon)^{-1}\psi(n)|^2, \qquad \epsilon=(2T)^{-1}.
\end{aligned}$$

设 $\chi_z(x)=(x-z)^{-1}$。然后，引理 4.4 表明，对于任意 $l>0$，存在 $C_7^{(3)}=C_7^{(3)}(l)>0$

使得

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon}{\pi}\sum_{n=2L_N}^{T^3} n^p\int_{-\infty}^{\frac{\nu}{2}} dE\,|(H^{(k)}-E-i\epsilon)\psi(n)|^2 &\le \frac{\epsilon}{\pi}\sum_{n=2L_N}^{T^3} n^p\int_{-\infty}^{\frac{\nu}{2}} dE\,|(\delta_n,\chi_{E+i\epsilon}(H^{(k)})f(H^{(k)})\delta_1)|^2\\ &\le C_2\frac{\epsilon}{\pi}\sum_{n=2L_N}^{T^3} n^p\int_{-\infty}^{\frac{\nu}{2}} dE\,|||\chi_{E+i\epsilon}f|||^2_{2l+3}n^{-2l}\\ &\le C_2\frac{\epsilon}{\pi}\sum_{n=2L_N}^{T^3} n^{p-2l}\int_{-\infty}^{\frac{\nu}{2}} dE\,\frac{C_7^{(3)}}{(E-\nu)^2+\epsilon^2}\\ &\le C_2C_7^{(3)}L_N^{-2l+p+1}. \end{aligned}\tag{5.34}$$

类似地，存在 $D_7^{(3)}=D_7^{(3)}(l)>0$ 使得

$$\frac{\epsilon}{\pi}\sum_{n=2L_N}^{T^3} n^p\int_{4-\frac{\nu}{2}}^{\infty} dE\,|(H^{(k)}-E-i\epsilon)^{-1}\psi(n)|^2\le C_2D_7^{(3)}L_N^{-2l+p+1}.\tag{5.35}$$

(5.34) 和 (5.35) 推出

$$\sum_{n=2L_N}^{T^3} n^p\frac{\epsilon}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus B_{\frac{\nu}{2}}} dE\,|(H^{(k)}-E-i\epsilon)^{-1}\psi(n)|^2\le\max\{C_2C_7^{(3)},C_2D_7^{(3)}\}L_N^{-2l+p+1}.$$

我们取足够大的 l，因此只需证明

$$\frac{\epsilon}{\pi}\sum_{n=2L_N}^{T^3} n^p\int_{B_{\frac{\nu}{2}}} dE\,|(H^{(k)}-E-i\epsilon)^{-1}\psi(n)|^2\le C_7T^{p+1}L_N^{-\frac{1}{\Gamma}},\qquad \epsilon=(2T)^{-1}.$$

引理 4.4 推出存在 $C=C(l,f)>0$ 使得

$$|(H^{(k)}-E-i\epsilon)^{-1}\psi(n)|^2\le C\sum_{m=1}^{\infty}(1+|n-m|^2)^{-l}|\chi_{E+i\epsilon}(H^{(k)})\delta_1(m)|^2.$$

因此只需证明

$$\frac{\epsilon}{\pi}\sum_{n=2L_N}^{T^3} n^p\int_{B_{\frac{\nu}{2}}} dE\,\sum_{m=1}^{\infty}(1+|n-m|^2)^{-l}|\chi_{E+i\epsilon}(H^{(k)})\delta_1(m)|^2\le C_7T^{p+1}L_N^{-\frac{1}{\Gamma}},\qquad \epsilon=(2T)^{-1}.$$

我们看到，对于任意 $l>1$，由引理 5.5，存在 $C_7^{(2)}=C_7^{(2)}(l)>0$ 使得

$$\begin{aligned}&\frac{\epsilon}{\pi}\sum_{n=2L_N}^{T^3} n^p\int_{B_{\frac{\nu}{2}}} dE\,\sum_{m=1}^{L_N}(1+|n-m|^2)^{-l}|\chi_{E+i\epsilon}(H^{(k)})\delta_1(m)|^2\\ &\le\sum_{n=2L_N}^{T^3} n^pL_N^{-2l}\sum_{m=1}^{L_N}\frac{\epsilon}{\pi}\int_{B_{\frac{\nu}{2}}} dE\,|\chi_{E+i\epsilon}(H^{(k)})\delta_1(m)|^2\\ &\le\sum_{n=2L_N}^{T^3} n^pL_N^{-2l}\\ &\le C_7^{(2)}T^{3(p+1)}L_N^{-2l},\qquad \epsilon=(2T)^{-1}.\end{aligned}\tag{5.36}$$

同理，我们有

$$\frac{\epsilon}{\pi}\sum_{n=2L_N}^{T^3} n^p \int_{B_{\frac{\nu}{2}}} dE \sum_{m=T^3+L_N}^{\infty} (1+|n-m|^2)^{-l} |\chi_{E+i\epsilon}(H^{(k)})\delta_1(m)|^2 \le D_7^{(2)} T^{3(p+1)} L_N^{-2l}. \quad (5.37)$$

由 (5.36) 和 (5.37) 可知，只需证明

$$\frac{\epsilon}{\pi}\sum_{n=2L_N}^{T^3} n^p \int_{B_{\frac{\nu}{2}}} dE \sum_{m=L_N}^{T^3+L_N} (1+|n-m|^2)^{-l} |\chi_{E+i\epsilon}(H^{(k)})\delta_1(m)|^2 \le C_7 T^{p+1} L_N^{-\frac{1}{\Gamma}}, \qquad \epsilon = (2T)^{-1}.$$

设 $A_N^{(k)}$ 和 $D_N^{(k)}$: $l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ 为

$$A_N^{(k)} = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & a_k(1) & & & & & & & & \\ a_k(1) & 0 & a_k(2) & & & & & & & \\ & a_k(2) & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & \ddots & 0 & a_k(L_N) & & & & & \\ & & & a_k(L_N) & 0 & 1 & & & & \\ \hline & & & & 1 & 0 & 1 & & & \\ & & & & & 1 & 0 & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots & & \end{array}\right)$$

and

$$D_N^{(k)} = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} d_k(1) & & & & & & & \\ & d_k(2) & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & & d_k(L_N) & & & \\ \hline & & & & & 2 & & \\ & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & \ddots \end{array}\right).$$

设 $H_N^{(k)} = D_N^{(k)} - A_N^{(k)}$。我们看到，对于任意 $l > 1$，都存在 $C' = C'(l) > 0$ 使得

$$\begin{aligned}
&\frac{\epsilon}{\pi} \sum_{n=2L_N}^{T^3} n^p \int_{B_{\frac{\nu}{2}}} dE \sum_{m=L_N}^{T^3+L_N} (1+|n-m|^2)^{-l} |\chi_{E+i\epsilon}(H^{(k)})\delta_1(m)|^2 \\
&= \frac{\epsilon}{\pi} \sum_{m=L_N}^{T^3+L_N} \left(\sum_{n=2L_N}^{T^3} n^p (1+|n-m|^2)^{-l} \right) \int_{B_{\frac{\nu}{2}}} dE \, |\chi_{E+i\epsilon}(H^{(k)})\delta_1(m)|^2 \\
&\le C' \frac{\epsilon}{\pi} \sum_{m=L_N}^{T^3+L_N} m^p \int_{B_{\frac{\nu}{2}}} dE \, |\chi_{E+i\epsilon}(H^{(k)})\delta_1(m)|^2 \\
&\le 2C' \frac{\epsilon}{\pi} \sum_{m=L_N}^{T^3+L_N} m^p \int_{B_{\frac{\nu}{2}}} dE \, |\chi_{E+i\epsilon}(H^{(k)})\delta_1(m) - \chi_{E+i\epsilon}(H_N^{(k)})\delta_1(m)|^2 \\
&+ 2C' \frac{\epsilon}{\pi} \sum_{m=L_N}^{T^3+L_N} m^p \int_{B_{\frac{\nu}{2}}} dE \, |\chi_{E+i\epsilon}(H_N^{(k)})\delta_1(m)|^2. \qquad (5.38)
\end{aligned}$$

由预解方程可得

$$\begin{aligned}
&\|(\chi_{E+i\epsilon}(H^{(k)}) - \chi_{E+i\epsilon}(H_N^{(k)}))\delta_1\| \\
&\le \frac{1}{\epsilon} \|(H^{(k)} - H_N^{(k)})\chi_{E+i\epsilon}(H_N^{(k)})\delta_1\| \\
&\le \frac{1}{\epsilon} \|(D^{(k)} - D_N^{(k)})\chi_{E+i\epsilon}(H_N^{(k)})\delta_1\| + \frac{1}{\epsilon} \|(A^{(k)} - A_N^{(k)})\chi_{E+i\epsilon}(H_N^{(k)})\delta_1\|. \qquad (5.39)
\end{aligned}$$

设 $z = E + i\epsilon$ 和 $\phi : \mathbb{Z}_{\ge 0} \to \mathbb{C}$ 是 $\phi(0) = 1, \phi(n) = \chi_z(H_N^{(k)})\delta_1(n)$ $(n \ge 1)$。于是可得，对于 $n > L_N$，

$$-\phi(n+1) + 2\phi(n) - \phi(n-1) = z\phi(n).$$

这意味着对于 $n > L_N$,

$$\begin{pmatrix} \phi(n) \\ \phi(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2-z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(n-1) \\ \phi(n) \end{pmatrix}.$$

设 $\lambda_\pm = \dfrac{2 - z \pm \sqrt{(2 - z^{\,2} + 4}}{2}$，则存在 $C_\pm$ 使得

$$\phi(n) = C_+ \lambda_+^{n-L_N} + C_- \lambda_-^{n-L_N}.$$

由于 $\epsilon > 0$，我们得到 $|\lambda_-| < 1$ 和 $|\lambda_+| > 1$。由于 $\|\phi\|_{l^2} < \infty$, $C_+ = 0$, $C_- = \phi(L_N)$，且存在 c, $c' > 0$ 使得，对于 $0 < E < 4$ 和 $0 < \epsilon < 1$，可得

$$e^{-c'\epsilon} \le |\lambda_-| \le e^{-c\epsilon}.$$

若 $\beta > 1$，则当 N 充分大时，有

$$L_{N+1} - L_N^\beta > \frac{1}{2} L_{N+1}.$$

因此，我们可以看出存在 $C''>0$ 使得

$$\begin{aligned}\|(D^{(k)}-D_N^{(k)})\chi_{E+i\epsilon}(H_N^{(k)})\delta_1\|^2 &= \sum_{j=N+1}^{\infty}|d_k(L_j)-2|^2|\phi(L_j)|^2\\ &\le 2|\phi(L_N)|^2\sum_{j=N+1}^{\infty}L_j^{\frac{2(1-\Gamma)}{\Gamma}}\exp(-2c\epsilon(L_j-L_N))\\ &\le 2\epsilon^{-2}\sum_{j=N+1}^{\infty}L_j^{\frac{2(1-\Gamma)}{\Gamma}}\exp(-2c\epsilon(L_j-L_N^{\beta}))\exp(-2c\epsilon(L_N^{\beta}-L_N))\\ &\le 4T^2\sum_{j=N+1}^{\infty}L_j^{\frac{2(1-\Gamma)}{\Gamma}}\exp(-c\epsilon L_j)\exp(-c\epsilon L_N^{\beta})\\ &\le C''\exp(-c\epsilon L_N^{\beta}),\end{aligned}\tag{5.40}$$

and

$$\begin{aligned}\|(A^{(k)}-A_N^{(k)})\chi_{E+i\epsilon}(H_N^{(k)})\delta_1\|^2 &\le \sum_{j=N+1}^{\infty}|1-a_k(L_j)|^2\{|\phi(L_j)|^2+|\phi(L_j+1)|^2\}\\ &\le C''T^2\sum_{j=N+1}^{\infty}\exp(-2c\epsilon(L_j-L_N))\\ &\le C''T^2\exp(-c\epsilon L_N^{\beta}).\end{aligned}\tag{5.41}$$

由 (5.39)、(5.40) 和 (5.41) 可知，存在 $C_7^{(1)}>0$，使得

$$\begin{aligned}&\epsilon\sum_{m=L_N}^{T^3+L_N}m^p\int_{B_{\frac{\nu}{2}}}dE\,|\chi_{E+i\epsilon}(H^{(k)})\delta_1(m)-\chi_{E+i\epsilon}(H_N^{(k)})\delta_1(m)|^2\\ &\le\epsilon\sum_{m=L_N}^{T^3+L_N}m^p\int_{B_{\frac{\nu}{2}}}dE\,\|\chi_{E+i\epsilon}(H^{(k)})\delta_1-\chi_{E+i\epsilon}(H_N^{(k)})\delta_1\|^2\\ &\le C_7^{(1)}T^{3(p+1)}\exp(-c\epsilon L_N^{\beta}),\qquad \epsilon=(2T)^{-1}.\end{aligned}\tag{5.42}$$

根据 (5.38) 和 (5.42)，只需证明

$$\epsilon\sum_{m=L_N}^{T^3+L_N}m^p\int_{B_{\frac{\nu}{2}}}dE\,|\chi_{E+i\epsilon}(H_N^{(k)})\delta_1(m)|^2\le C_7T^{p+1}L_N^{-\frac{1}{\Gamma}}.$$

令 $F_N(z)=(\delta_1,\chi_z(H_N^{(k)})\delta_1)=(\delta_1,(H_N^{(k)}-z)^{-1}\delta_1)$。我们看到，存在 $C'''>0$，使得 t hat

$$\frac{1}{\epsilon}\mathrm{Im}F_N(E+i\epsilon)=\|\chi_{E+i\epsilon}(H_N^{(k)})\delta_1\|^2\ge\sum_{m>L_N}|\phi(m)|^2\ge\sum_{m>L_N}e^{-c'\epsilon(m-L_N)}|\phi(L_N)|^2\ge\frac{C'''}{\epsilon}|\phi(L_N)|^2.$$

这意味着 $|\phi(L_N)|\le C'''\mathrm{Im}F_N(E+i\epsilon)$。令 $L_{N-1}<n<L_{N+1}$。于是

$$\begin{cases}-\phi(n+1)+2\phi(n)-\phi(n-1)=z\phi(n) & (n\ne L_N,L_N+1)\\ -\sqrt{[L_N^{\frac{1-\Gamma}{\Gamma}}]}\phi(L_N+1)+([L_N^{\frac{1-\Gamma}{\Gamma}}]+2)\phi(L_N)-\phi(L_N-1)=z\phi(L_N) & (n=L_N)\\ -\phi(L_N+2)+2\phi(L_N+1)-\sqrt{[L_N^{\frac{1-\Gamma}{\Gamma}}]}\phi(L_N)=z\phi(L_N+1) & (n=L_N+1).\end{cases}$$

令 $R=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2-z \end{pmatrix}$。于是对于 $L_N+1<n<L_{N+1}$，可得

$$\begin{pmatrix} \phi(n) \\ \phi(n+1) \end{pmatrix} = R^{n-L_N} \begin{pmatrix} \phi(L_N) \\ \phi(L_N+1) \end{pmatrix}.$$

类似地，对于 $L_{N-1}<n<L_N-1$，我们有

$$\begin{pmatrix} \phi(n) \\ \phi(n+1) \end{pmatrix} = R^{n-L_N+1} \begin{pmatrix} \phi(L_N-1) \\ \phi(L_N) \end{pmatrix}.$$

存在 $B=B(K)>0$ 使得 $\|R^n\|<B$ 对 $\epsilon<\frac{K}{|n|}$成立。由此可得，对于 $L_N<n<2L_N$，有

$$|\phi(n)|^2+|\phi(n+1)|^2 \geq B^{-1}(|\phi(L_N)|^2+|\phi(L_N+1)|^2).$$

因此，我们有

$$\frac{1}{\epsilon}\mathrm{Im}F_N(E+i\epsilon)=\|\phi\|^2 \geq B^{-1}L_N(|\phi(L_N)|^2+|\phi(L_N+1)|^2). \tag{5.43}$$

类似地，可得对于 $\dfrac{L_N}{2}<n<L_N$,

$$|\phi(n)|^2+|\phi(n+1)|^2 \geq B^{-1}(|\phi(L_N)|^2+|\phi(L_N+1)|^2),$$

并且

$$\frac{1}{\epsilon}\mathrm{Im}F_N(E+i\epsilon)=\|\phi\|^2 \geq B^{-1}L_N(|\phi(L_N-1)|^2+|\phi(L_N)|^2). \tag{5.44}$$

(5.43) 和 (5.44) 意味着

$$|\phi(L_N-1)|^2+|\phi(L_N+1)|^2 \leq \frac{2B}{\epsilon L_N}\mathrm{Im}F_N(E+i\epsilon). \tag{5.45}$$

我们可以看到

$$([L_N^{\frac{1-\Gamma}{\Gamma}}]+2-z)\phi(L_N)=\phi(L_N-1)+\sqrt{[L_N^{\frac{1-\Gamma}{\Gamma}}]}\phi(L_N+1).$$

这表明

$$|[L_N^{\frac{1-\Gamma}{\Gamma}}]+2-z|^2|\phi(L_N)|^2 \leq 2[L_N^{\frac{1-\Gamma}{\Gamma}}](|\phi(L_N-1)|^2+|\phi(L_N+1)|^2).$$

设 $|z|<5$。则存在 $B'>0$，使得

$$|\phi(L_N)|^2 \leq B'L_N^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}}(|\phi(L_N-1)|^2+|\phi(L_N+1)|^2). \tag{5.46}$$

(5.45) 和 (5.46) 意味着

$$|\phi(L_N)|^2 \leq 2BB'\frac{L_N^{-\frac{1}{\Gamma}}}{\epsilon}\mathrm{Im}F_N(E+i\epsilon).$$

因此，存在 $C_7 = C_7(p)$，使得

$$\begin{aligned}
&\epsilon \sum_{m=L_N}^{T^3+L_N} m^p \int_{B_{\frac{\nu}{2}}} dE\ |\chi_{E+i\epsilon}(H_N^{(k)})\delta_1(m)|^2 \\
&\leq C_7\epsilon \sum_{m=L_N}^{T^3+L_N} m^p \exp(-2c\epsilon(m-L_N)) \int_{B_{\frac{\nu}{2}}} dE\ |\chi_{E+i\epsilon}(H_N^{(k)})\delta_1(L_N)|^2 \\
&\leq C_7\epsilon^{-p} \int_{B_{\frac{\nu}{2}}} dE\ |\phi(L_N)|^2 \\
&\leq 2BB'C_7\epsilon^{-p-1}L_N^{-\frac{1}{\Gamma}} \int_{B_{\frac{\nu}{2}}} dE\ \mathrm{Im}F_N(E+i\epsilon) \\
&\leq 2BB'C_7T^{p+1}L_N^{-\frac{1}{\Gamma}}, \qquad \epsilon = (2T)^{-1}.
\end{aligned}$$

□

推论 5.11. 设 $p > 0$, f 为第一类，且 $\psi = f(H^{(k)})\delta_1$。则存在 $C_8 = C_8(p) > 0$，使得对于充分大的 $L_N \leq T \leq L_N^{\Gamma}$ 且满足 N，

$$\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) \leq C_8 L_N^p + C_8 T^{p+1} L_N^{-\frac{1}{\Gamma}}.$$

引理 5.12. 设 f 为第一类，且 $\psi = f(H^{(k)})\delta_1$。则

$$\beta_\psi^{(k)}(p) = \frac{p+1}{p+\frac{1}{\Gamma}}.$$

证明. 设 $L_N \leq T = L_N^A \leq L_N^{\frac{1}{\Gamma}}$，其中 $A = \dfrac{p+\frac{1}{\Gamma}}{p+1}$。则由推论 5.11 可知

$$\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(L_N^A) \leq C_8 L_N^p.$$

因此我们有

$$\beta_\psi^{(k)}(p) \leq \frac{1}{p} \lim_{N\to\infty} \frac{\log\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(L_N^A)}{\log L_N^A} \leq A^{-1} = \frac{p+1}{p+\frac{1}{\Gamma}}.$$

由于 f 是第一类，(5.30) 成立。 □

5.3 主要结果的证明

引理 5.13. 设 $A \in \mathcal{B}^1$。那么 $E(A) = 0$ 当且仅当对任意 $k \in \mathbb{N}$，$\mu_{\delta_1}^{(k)}(A) = 0$。

证明。假设 $E(A) = 0$。于是我们得到 $E^{(k)}(A) = 0$，并且

$$\mu_{\delta_1}^{(k)}(A) = (\delta_1, E^{(k)}(A)\delta_1) = 0.$$

反过来，假设对任意 $k \in \mathbb{N}$，$\mu_{\delta_1}^{(k)}(A) = 0$。只需证明对任意 $k \in \mathbb{N}$，$E^{(k)}(A) = 0$。设 p ba 是一个多项式，那么我们得到

$$\mu_{p(H^{(k)})\delta_1}^{(k)}(A) = (p(H^{(k)})\delta_1, E^{(k)}(A)p(H^{(k)})\delta_1) = \int_A |p(\lambda)|^2 \mu_{\delta_1}^{(k)}(d\lambda) = 0.$$

这意味着 $E^{(k)}(A)p(H^{(k)})\delta_1 = 0$。由于 δ_1 是 $H^{(k)}$ 的循环向量：$l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$，$\{p(H^{(k)})\delta_1 \in l^2(\mathbb{N}) \mid p$ 是多项式$\}$ 在 $l^2(\mathbb{N})$中稠密。因此，$E^{(k)}(A) = 0$ 随之成立。 □

引理 5.14. 设 $A \in \mathcal{B}^1$ 和 $A \subset (0,4)$。那么， $\tilde{E}(A) = 0$ 当且仅当对于任意 $k \in \mathbb{N}$以及任意 $\psi = f(H^{(k)})\delta_1$， $\mu_\psi^{(k)}(A) = 0$ 成立，其中具有第一类 f。此外，对于任意 $k \in \mathbb{N}$ 以及任意 $\psi = f(H^{(k)})\delta_1$，具有第一类 f时，$\dim_*\tilde{E} = \dim_*\mu_\psi^{(k)}$和 $\dim^*\tilde{E} = \dim^*\mu_\psi^{(k)}$ 也成立。

证明。假设 $\tilde{E}(A) = 0$。则我们看到 $E^{(k)}(A) = 0$ 且

$$\mu_\psi^{(k)}(A) = (\psi, E^{(k)}(A)\psi) = 0.$$

假设对于任意 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\psi = f(H^{(k)})\delta_1$， $\mu_\psi^{(k)}(A) = 0$ ，其中 f 是第一类。令 $f_n \in C_0^\infty(\frac{1}{n}, 4-\frac{1}{n})$， $|f_n| \le 1$，并在区间 $(\frac{2}{n}, 4-\frac{2}{n})$ 上取 $f_n = 1$， $n = 1, 2, ...$。令 $\psi_n = f_n(H^{(k)})\delta_1$。由于 f_n 是第一类，对于任意 $k \in \mathbb{N}$， $\mu_{\psi_n}^{(k)}(A) = 0$ 。只需证明对于任意 $k \in \mathbb{N}$， $E^{(k)}(A) = 0$ 。我们看到

$$\mu_{\psi_n}^{(k)}(A) = (f_n(H^{(k)})\delta_1, E^{(k)}(A) f_n(H^{(k)})\delta_1) = \int_A |f_n(\lambda)|^2 \mu_{\delta_1}^{(k)}(d\lambda) = 0.$$

由勒贝格控制收敛定理,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu_{\psi_n}^{(k)}(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A |f_n(\lambda)|^2 \mu_{\delta_1}^{(k)}(d\lambda) = \mu_{\delta_1}^{(k)}(A).$$

由引理 5.13，我们看到 $E^{(k)}(A) = 0$。于是我们证明了断言的第一部分。第二部分可由第一部分以及下豪斯多夫维数和上豪斯多夫维数的定义直接证明。

□

定理 1.4 的证明。由引理 5.14，只需证明对于任意 $k \in \mathbb{N}$ 和任意具有第一类 f 的 $\psi = f(H^{(k)})\delta_1$， $\dim_*\mu_\psi^{(k)} = \dim^*\mu_\psi^{(k)} = \Gamma$。由引理 1.3 可知

$$\Gamma \le \dim_*\mu_\psi^{(k)} \le \dim^*\mu_\psi^{(k)}.$$

由引理 3.2 和引理 5.12，对于任意 $p > 0$,

$$\dim^*(\mu_\psi^{(k)}) \le \beta_\psi^{(k)}(p) = \frac{p+1}{p+\frac{1}{\Gamma}}.$$

这意味着 $\dim_*\mu_\psi^{(k)} = \dim^*\mu_\psi^{(k)} = \Gamma$。

□

附录 A

我们讨论图拉普拉斯算子的分解，并将图拉普拉斯算子表示为雅可比矩阵。参见 [1]。

我们假设 $G = (V, E)$ 是一棵球对称齐次树。令 $\pi_n : l^2(S_n) \to l^2(S_{n+1}), n = 0, 1, ...,$ 定义如下

$$\pi_n f(u) = \sum_{v\in S_n : v\sim u} f(v), \ u \in S_{n+1}.$$

伴随算子 $\pi_n^* : l^2(S_{n+1}) \to l^2(S_n)$ 给出如下

$$\pi_n^* g(u) = \sum_{v\in S_{n+1} : v\sim u} g(v), \ u \in S_n.$$

引理 A.1. 令 $f, g \in l^2(S_n)$。则 $(\pi_n f, \pi_n g) = g_n(f, g)$。

证明。令 $f, g \in l^2(S_n)$。由于 G 是球面齐次的，

$$\langle \pi_n f, \pi_n g \rangle = \sum_{u \in S_{n+1}} \overline{\pi_n f(u)} \pi_n g(u) = g_n \sum_{u \in S_n} \overline{f(u)} g(u).$$

□

我们看到，V是 $V = \cup_{n=0}^{\infty} S_n$的不交并，并且 $l^2(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} l^2(S_n)$。定义 $\Pi : l^2(V) \to l^2(V)$如下：$\Pi = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \pi_n$。

引理 A.2. 设 $f \in \mathcal{D}$。那么 $Af = (\Pi + \Pi^*)f$。

证明. 设 $f \in \mathcal{D}$ 和 $u \in S_n$。由于 G 是球面齐次树，u 仅与 S_{n-1} 和 S_{n+1}中的顶点相邻。因此我们看到

$$(\Pi + \Pi^*)f(u) = \sum_{v \in S_{n-1}; v \sim u} f(v) + \sum_{v \in S_{n+1}; v \sim u} f(v) = \sum_{v \in V; v \sim u} f(v) = Af(u).$$

□

令 $\alpha_n = \#S_n = \dim(l^2(S_n))$，$n = 0, 1, \ldots\ldots$。假设 $\{e_k^{(n)}\}_{k=1}^{\alpha_n}$是 $l^2(S_n)$的完全正交归一系。那么我们可以按以下步骤构造 $l^2(S_{n+1})$的完全正交归一系 $\{e_k^{(n+1)}\}_{k=1}^{\alpha_{n+1}}$。令 $e_k^{(n+1)} = \|\pi_n e_k^{(n)}\|^{-1} \pi_n e_k^{(n)}$，$k = 1, 2, ..., \alpha_n$。根据引理 $A.1$，$\{e_k^{(n+1)}\}_{k=1}^{\alpha_n}$是 $l^2(S_{n+1})$的正交归一系。如果 $\alpha_n = \alpha_{n+1}$，那么 $\{e_k^{(n+1)}\}_{k=1}^{\alpha_n}$ 是 $l^2(S_{n+1})$的完全正交归一系。如果 $\alpha_n < \alpha_{n+1}$，通过格拉姆-施密特过程，我们可以得到 $e_k^{(n+1)} \in l^2(S_{n+1})$，$k = \alpha_n + 1, ..., \alpha_{n+1}$，使得 $\{e_k^{(n+1)}\}_{k=1}^{\alpha_n} \cup \{e_k^{(n+1)}\}_{k=\alpha_n+1}^{\alpha_{n+1}}$是 $l^2(S_{n+1})$的完全正交归一系。

设给定了 $l^2(S_0)$ 的一个完全正交归一系。于是，我们可以归纳地构造 $l^2(S_n)$ 的一个完全正交归一系 $\{e_k^{(n)}\}_{k=1}^{\alpha_n}$，$n = 0, 1, ...$。因此，$l^2(V)$ 的一个完全正交归一系为 $\bigcup_{n=0}^{\infty} \{e_k^{(n)}\}_{k=1}^{\alpha_n}$。

假设 $\sup_{n=0, 1, \ldots} \alpha_n = \infty$，并令 $\alpha_{-1} = 0$。由于 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是非递减的，存在唯一的 $N(k) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，使得对每个 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $\alpha_{N(k)-1} < k \leq \alpha_{N(k)}$。我们看到

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \{e_k^{(n)} \mid k = 1, 2, ..., \alpha_n\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{e_k^{(n)} \mid n = N(k), N(k)+1, ...\}.$$

引理 A.3。设 $l^2(V)$ 的闭子空间 M_k，$k = 1, 2, ...$，定义为

$$M_k = \overline{\langle \{e_k^{(n)} \mid n = N(k), N(k)+1, ...\} \rangle}.$$

则 M_k 在 A、D 和 H 下不变。

证明。根据 $e_k^{(n)}$ 的定义和引理 A.1，我们看到

$$\begin{aligned} \Pi e_k^{(n)} &= \|\pi_n e_k^{(n)}\| e_k^{(n+1)}, \\ \Pi^* e_k^{(n)} &= \begin{cases} \dfrac{g_{n-1}}{\|\pi_{n-1} e_k^{(n-1)}\|} e_k^{(n-1)} & (n \geq N(k)+1), \\ \boldsymbol{o} & (n = N(k)). \end{cases} \end{aligned}$$

这意味着 M_k 在 Π 和 Π^* 作用下不变，因此，根据引理 A.2，我们可知 M_k 在 A 作用下不变。由于 G 是一棵球对称齐次树，我们有

$$De_k^n = \begin{cases} (g_n + 1) e_k^{(n)} & (n \geq 1), \\ g_0 e_1^{(0)} & (n = 0). \end{cases}$$

因此，M_k 在 D下也不变。由于 $H = \overline{D - A}$，我们可知 M_k 在 H下不变。 □

根据引理 A.3，令 $H^{(k)}$、$A^{(k)}$、$D^{(k)}$：$M_k \to M_k$、$k = 1$、2、.....分别由H、A 和 D 限制到 M_k上定义。我们可知 $H^{(k)}$ 是自伴的，且 $H = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H^{(k)}$。

我们考虑 $H^{(k)}$关于完全正交归一系 $\{e_k^{(n)} \mid n = N(k)\ N(k)+1, ...\}$ 的矩阵表示，其中 M_k 取 $k = 2, 3, ...$ 因此，对于 $n, m \geq N(k)$，有

$$\begin{aligned}(e_k^{(n)}, H^{(k)} e_k^{(n)}) &= (e_k^{(n)}, D^{(k)} e_k^{(n)}) = g_n + 1,\\ (e_k^{(n)}, H^{(k)} e_k^{(n+1)}) &= -(e_k^{(n)}, A^{(k)} e_k^{(n+1)}) = -\sqrt{g_n},\\ (e_k^{(n)}, H^{(k)} e_k^{(m)}) &= 0, \text{ if } |n-m| \geq 2\ .\end{aligned}$$

我们有 $H^{(1)}$的矩阵表示。因此，对于 $n, m \geq N(1) = 0$，有

$$\begin{aligned}(e_1^{(n)}, H^{(1)} e_1^{(n)}) &= (e_1^{(n)}, D^{(1)} e_1^{(n)}) = \begin{cases} g_0 & (n=0),\\ g_n + 1 & (n \geq 1),\end{cases}\\ (e_1^{(n)}, H^{(1)} e_1^{(n+1)}) &= -(e_1^{(n)}, A^{(1)} e_1^{(n+1)}) = -\sqrt{g_n},\\ (e_1^{(n)}, H^{(1)} e_1^{(m)}) &= 0, \text{ if } |n-m| \geq 2.\end{aligned}$$

令 $k, n \in \mathbb{N}$，并令 $d_k = (d_k(n))_{n=1}^{\infty}$ 和 $a_k = (a_k(n))_{n=1}^{\infty}$ 定义如下：

$$\begin{aligned}d_k(n) &= (e_k^{(n+N(k)-1)}, D^{(k)} e_k^{(n+N(k)-1)}),\\ a_k(n) &= (e_k^{(n+N(k))}, A^{(k)} e_k^{(n+N(k)-1)}).\end{aligned}$$

我们可以将 $H^{(k)}: l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$，$k = 1, 2, ...$ 与下面的雅可比矩阵对应：

$$H^{(k)} = \begin{pmatrix} d_k(1) & -a_k(1) & & & \\ -a_k(1) & d_k(2) & -a_k(2) & & \\ & -a_k(2) & d_k(3) & -a_k(3) & \\ & & -a_k(3) & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \end{pmatrix}.$$

这就证明了引理 2.1。类似地，我们可以将 $A^{(k)}, D^{(k)}: l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ 与下面的雅可比矩阵对应：

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & a_k(1) & & & \\ a_k(1) & 0 & a_k(2) & & \\ & a_k(2) & 0 & a_k(3) & \\ & & a_k(3) & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \end{pmatrix}, D^{(k)} = \begin{pmatrix} d_k(1) & & & & \\ & d_k(2) & & & \\ & & d_k(3) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \end{pmatrix}.$$

附录 B

本节中，我们介绍一个关于分形测度的傅里叶分析结果。令$B_r(x) = [x - r, x + r] \subset \mathbb{R}$。令 $\mathcal{L}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度，并令 $\mu: \mathcal{B}^1 \to [0, \infty]$ 为局部有限测度。令 $M_\mu f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$M_\mu f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f| d\mu$$

对于 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, d\mu)$，其中当 $\mu(B_r(x)) = 0$ 时，我们取 $\frac{0}{0} = 0$ 。 $M_\mu f$ 是可测的，称为极大函数。

引理 B.1. M_μ：对于任意 $p \in (1,\infty)$，$L^p(\mathbb{R}, d\mu) \to L^p(\mathbb{R}, d\mu)$ 有界。

证明。令 $E_s^n = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le n, M_\mu f(x) > s\}$ 和 $x \in E_s^n$。存在 $r_x > 0$ 使得

$$\int_{B_{r_x}(x)} |f| d\mu \ge s\mu(B_{r_x}(x)).$$

注意，$\{B_{r_x}(x) \mid x \in E_s^n\}$ 是 E_s^n的 Besicovitch 覆盖。根据 [8, II, 18 Besicovitch 覆盖定理, 定理 18.1], ，我们看到存在 $\{B_j^n\}_{j=1}^\infty$ 的一个可数子集族，其中 $\{B_{r_x}(x) \mid x \in E_s^n\}$，使得 $\{B_j^n\}_{j=1}^\infty$ 是 E_s^n的闭覆盖，并且存在一个与 E_s^n无关的 $C > 0$，使得对任意 $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{1}_{E_s^n}(x) \le \sum_{j=1}^\infty \mathbb{1}_{B_j^n}(x) \le C.$$

因此我们有

$$s\ \mu(E_s^n) \le s\sum_{j=1}^\infty \mu(B_j^n) \le \sum_{j=1}^\infty \int_{B_j^n} |f| d\mu \le C\int_{\mathbb{R}} |f| d\mu.$$

令 $n \to \infty$。于是我们看到，对任意 $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu)$ 和 $s > 0$,

$$\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid M_\mu f(x) > s\}) \le Cs^{-1}\|f\|_{L^1}.$$

这意味着 M_μ： $L^1(\mathbb{R}, d\mu) \to L^1(\mathbb{R}, d\mu)$ 是弱型 (1, 1)。我们还看到，M_μ： $L^\infty(\mathbb{R}, d\mu) \to L^\infty(\mathbb{R}, d\mu)$ 是弱型 (∞, ∞)。因此，根据 [8, VIII, 9 Marcinkiewicz 插值定理，定理 9.1]，即可得证。□

我们考虑分形测度的傅里叶变换。令 $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu)$，并令$\widehat{f\mu}(\xi)$、$\xi \in \mathbb{R}$定义为

$$\widehat{f\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}\mu(dx).$$

引理 B.2. 假设 μ 为有限测度。则

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f\mu}(\xi)|^2 e^{-t\xi^2} d\xi < \infty.$$

对于任意 $f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ 和 $t > 0$。

证明. 令 $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu)$。我们看到

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f\mu}(\xi)| e^{-t\xi^2} d\xi \quad \le \quad \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\mu(dx)e^{-t\xi^2} d\xi < \infty.$$

这意味着 $L^1(\mathbb{R}, d\mu) \ni f \to \widehat{f\mu} \in L^1(\mathbb{R}, e^{-t\xi^2} d\xi)$ 有界。由于 μ为有限测度，$L^\infty(\mathbb{R}, d\mu) \ni f \to \widehat{f\mu} \in L^\infty(\mathbb{R}, e^{-t\xi^2} d\xi)$ 有界。根据 Riesz 插值定理，我们得到所述结论。

□

定义 B.3. 令 $\alpha \in (0, 1)$。如果$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$存在 $C_1 > 0$，使得对于任意区间 $I \subset \mathbb{R}$，满足 $\mathcal{L}(I) < 1$，则称测度 μ 是均匀 α-H ¨older 连续的。

引理 B.4. 设 μ 是一个一致 α-H ¨older 连续的有限测度。那么存在 $\sim$ $\sim C_2 = C_2(\alpha, \mu) > 0$，使得对任意 $f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$,

$$\sup_{0<t\le 1} t^{\frac{1-\alpha}{2}} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f\mu}(\xi)|^2 e^{-t\xi^2} d\xi < \widetilde{C}_2\|f\|_{L^2}^2.$$

证明. 设 $f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$。我们看到

$$\begin{aligned} t^{\frac{1-\alpha}{2}} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f\mu}(\xi)|^2 e^{-t\xi^2} d\xi &= t^{\frac{1-\alpha}{2}} \int_{\mathbb{R}} \mu(dx) \int_{\mathbb{R}} \mu(dy) f(x)\overline{f(y)} \int_{\mathbb{R}} e^{-t\xi^2 - i\xi(x-y)} d\xi \\ &= \pi t^{-\frac{\alpha}{2}} \int_{\mathbb{R}} \mu(dx) \int_{\mathbb{R}} \mu(dy) f(x)\overline{f(y)} e^{-\frac{(x-y)^2}{4}} \\ &= \pi t^{-\frac{\alpha}{2}} \int_{\mathbb{R}} \mu(dx) \int_{\mathbb{R}} \mu(dy) f(x)\overline{f(y)} \int_{|x-y|}^{\infty} \frac{r}{2t} e^{-\frac{r^2}{4t}} dr \\ &\le \pi t^{-\frac{\alpha}{2}} \int_{\mathbb{R}} \mu(dx)\ |f(x)| \int_0^{\infty} dr \frac{r}{2t} e^{-\frac{r^2}{4t}} \int_{B_r(x)} \mu(dy) |f(y)| \\ &\le \pi t^{-\frac{\alpha}{2}} \int_{\mathbb{R}} \mu(dx)\ |f(x)| \int_0^{\infty} dr \frac{r}{2t} e^{-\frac{r^2}{4t}} \mu(B_r(x)) M_\mu f(x). \end{aligned}$$

由于 μ 是一致 α-Hölder 连续且有限的，因此存在 $C_2' = C_2'(\alpha, \mu) > 0$，使得对于任意 $t \in (0, 1]$,

$$\begin{aligned} t^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\infty} dr \frac{r}{t} e^{-\frac{r^2}{4t}} \mu(B_r(x)) &\le \mu(\mathbb{R}) t^{-\frac{\alpha}{2}} \int_1^{\infty} dr \frac{r}{t} e^{-\frac{r^2}{4t}} + \widetilde{C}_1 t^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^1 dr \frac{r^{1+\alpha}}{t} e^{-\frac{r^2}{4t}} \\ &\le 2\mu(\mathbb{R}) t^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{1}{4t}} + 2^{2+\alpha} \widetilde{C}_1 \int_0^{\infty} s^{1+\alpha} e^{-s^2} ds \\ &\le \widetilde{C}_2'. \end{aligned}$$

令 $C_2 = \pi C_2' > 0$。由施瓦茨不等式可知，对于任意 $t \in (0, 1)$,

$$t^{\frac{1-\alpha}{2}} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f\mu}(\xi)|^2 e^{-t\xi^2} d\xi \le \widetilde{C}_2 \int_{\mathbb{R}} \mu(dx)\ |f(x)| M_\mu f(x) \le D_2 \|f\|_{L^2} \|M_\mu f\|_{L^2}.$$

由引理 B.1，断言得证。 □

引理 B.5. 设 μ 是一个一致 α-Hölder 连续的有限测度。那么存在 $\sim C_3 = C_3(\alpha, \mu) > 0$，使得对于任意 $f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$,

$$\sup_{T \ge 1} T^{\alpha - 1} \int_0^T |\widehat{f\mu}(\xi)|^2 d\xi \le \widetilde{C}_3 \|f\|^2.$$

证明. 令 $t \in (0, 1)$ 和 $T = t^{-\frac{1}{2}}$。由引理 B.4 可知，对于任意 $T > 1$,

$$\widetilde{C}_2 \|f\|^2 \ge T^{\alpha-1} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f\mu}(\xi)|^2 e^{-(\frac{\xi}{T})^2} d\xi \ge e^{-1} T^{\alpha-1} \int_0^T |\widehat{f\mu}(\xi)|^2 d\xi.$$

这就证明了断言。 □

引理 B.6. 设 μ 是一个一致 α-Hölder 连续的有限测度。那么存在 $\sim C_4 = C_4(\alpha, \mu) > 0$，使得对于任意 $f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$,

$$\sup_{T \ge 1} T^{\alpha - 1} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{T}} |\widehat{f\mu}(t)|^2 dt \le \widetilde{C}_4 \|f\|^2.$$

证明. 设 $f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$。那么，由引理 B.5 可知，对于任意 $T > 1$,

$$\begin{aligned} T^{\alpha-1}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{T}}|\widehat{f\mu}(t)|^2dt &= \lim_{N\to\infty} T^{\alpha-1}\int_0^{T(N+1)} e^{-\frac{t}{T}}|\widehat{f\mu}(t)|^2dt \\ &= \lim_{N\to\infty} T^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{N}\int_{Tn}^{T(n+1)} e^{-\frac{t}{T}}|\widehat{f\mu}(t)|^2dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{1-\alpha}e^{-n}\{T(n+1)\}^{\alpha-1}\int_{Tn}^{T(n+1)}|\widehat{f\mu}(t)|^2dt \\ &\le \widetilde{C}_3\|f\|^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{1-\alpha}e^{-n}. \end{aligned}$$

这就证明了我们的断言。 □

附录 C

本节给出一些关于二次型理论的引理，这些引理将在第 4 节中使用。令$\mathcal{H}$ 为复希尔伯特空间。设 $\mathfrak{s}\colon \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ 为闭半双线性型，且 $T\colon \mathcal{H}\to\mathcal{H}$为闭线性算子。若对 $f, g \in \mathcal{D}(\mathfrak{s})$有 $\mathfrak{s}(f,g) = \mathfrak{s}(g,f)$，则称 $\mathfrak{s}$ 为对称的；若存在 $r\in\mathbb{R}$和 $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，使得对于满足 $\|f\|=1$的 $f\in\mathcal{D}(\mathfrak{s})$,

$$\arg(\mathfrak{s}[f]-r)\le\theta,$$

其中 $\mathfrak{s}[f]=\mathfrak{s}(f,f)$。若存在 $r\in\mathbb{R}$和 $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，使得对于满足 $\|f\|=1$的 $f\in\mathcal{D}(\mathfrak{s})$，则称 T为扇形的,

$$\arg((f,Tf)-r)\le\theta,$$

若对 $f\in\mathcal{D}(T)$有 $\mathrm{Re}(f,Tf)\ge 0$，且$(T+\lambda)^{-1}$有界，并且对满足 $\mathrm{Re}\lambda>0$的 $\lambda\in\mathbb{C}$ 有 $\|(T+\lambda)^{-1}\|\le(\mathrm{Re}\lambda)^{-1}$，则称 T为最大耗散的。特别地，若存在 $\gamma\in\mathbb{R}$ 使得 $T+\gamma$ 为最大耗散的，则称 T 为拟最大耗散的；若 T 为拟最大耗散的且为扇形的，则称 T 为最大扇形的。

引理 C.1. 设 $\mathfrak{s}\colon \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ 是一个稠密定义的、闭的扇形半双线性型。则存在唯一的最大扇形算子 $S\colon \mathcal{H}\to\mathcal{H}$，使得对于 $f\in\mathcal{D}(\mathfrak{s})$ $g\in\mathcal{D}(S)$,

$$\mathfrak{s}(f,g)=(f,Sg).$$

证明. [15, VI, §2, 定理 2.1]

引理 C.2. 设 $\mathfrak{t}\colon \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ 是一个稠密定义的、闭的且下有界的对称型，且 T是与 $\mathfrak{t}$相关联的自伴算子。假设 $\mathfrak{s}\colon \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ 是关于 $\mathfrak{t}$ 相对有界的半双线性型，使得对于任意 $f\in\mathcal{D}(\mathfrak{t})\subset\mathcal{D}(\mathfrak{s})$,

$$|\mathfrak{s}[f]|\le a\mathfrak{t}[f]+b\|f\|^2,\qquad 0<a<1,\ b\ge 0.$$

则 $\mathfrak{t}'=\mathfrak{s}+\mathfrak{t}$ 是扇形的且闭的。设 T' 是与 $\mathfrak{t}'$相关联的最大扇形算子。若$0<\gamma<1$, $z\in\rho(T)$且

$$2\|(aT+b)(T-z)^{-1}\|\le\gamma<1,$$

则 $z\in\rho(T')$ 且

$$\|(T'-z)^{-1}-(T-z)^{-1}\|\le\frac{4\gamma}{(1-\gamma)^2}\|(T-z)^{-1}\|.$$

证明。 [15, VI, 第 3 节, 定理 3。9] □

致谢

本研究得到了 JST SPRING、资助编号 JPMJSP2136 的支持。

参考文献

[1] Allard, C., 和 R. Froese. “二叉树上 Schr¨odinger 算子的 Mourre 估计。”《数学物理评论》12.12（2000）：1655-1667。[2] A. Kostenko 和 N. Nicolussi，径向对称反树上的量子图，《谱理论杂志》11（2021），第 411–460 页。[3] Barbaroux, J. M., J. M. Combes, 和 R. Montcho。“关于量子动力学与分形谱之间关系的几点说明。”《数学分析与应用杂志》213.2（1997）：698-722。[4] Breuer, Jonathan。“某些稀疏树上拉普拉斯算子的奇异连续谱。”《数学物理通讯》269.3（2007）：851-857。[5] Breuer, Jonathan, 和 Netanel Levi。“度量图上拉普拉斯算子的分解。”Annales Henri Poincar´e。第 21 卷，第 2 期。Springer International Publishing，2020。[6] Damanik, David, 和 Serguei Tcheremchantsev。“一维传递矩阵与量子动力学的幂律界。”《数学物理通讯》236.3（2003）：513-534。[7] Davies, E. B.《谱理论与微分算子，Camb.》（1995）。[8] DiBenedetto, Emmanuele, 和 Emmanuele Debenedetto。《实分析》。波士顿：Birkh¨auser，2002。[9] Diestel, Reinhard。“《图论》第3版。”《数学研究生教材》173（2005）。[10] Falconer, Kenneth J., 和 K. J. Falconer。《分形几何技巧》。第 3 卷。奇切斯特：Wiley，1997。[11] Germinet, Fran¸cois, 和 Abel Klein。“广义 Schr¨odinger 算子函数的算子核估计。”《美国数学会会刊》131.3（2003）：911-920。[12] Gilbert, Daphne J., 和 David B. Pearson。“一维 Schr¨odinger 算子的从属性与谱分析。”《数学分析与应用杂志》128.1（1987）：30-56。[13] Jitomirskaya, Svetlana, 和 Yoram Last。“幂律从属性与奇异谱 I：半直线算子。”《数学学报》183.2（1999）：171-189。[14] Jorgensen, Palle ET。“图拉普拉斯算子的本质自伴性。”《数学物理学杂志》49.7（2008）：073510。[15] Kato, Tosio。《线性算子扰动理论》。第 132 卷。Springer Science & Business Media，2013。[16] Last, Yoram。“量子动力学与奇异连续谱分解。”《泛函分析杂志》142.2（1996）：406-445。[17] Naimark, K., 和 M. Solomyak。“正则树上 Sobolev 空间的几何与 Hardy 不等式。”《俄罗斯数学物理杂志》8.3（2001）：322-335。

[18] Simon, Barry, 和 G¨unter Stolz。“具有奇异连续谱的算子，V：稀疏势。”《美国数学会会刊》124.7（1996）：2073-2080。[19] Strichartz, Robert S.“分形测度的傅里叶渐近性。”《泛函分析杂志》89.1（1990）：154-187。[20] Tcheremchantsev, Serguei。“具有增长的稀疏势的 Schr¨odinger 算子的动力学分析。”《数学物理通讯》253.1（2005）：221-252。