arXiv:2301.05899v1 [math.SP] 14 Jan 2023

薛定谔算子的奇异连续谱中不存在本征向量

Kota Ujino

九州大学数学研究生院，744 Motooka Nishi-ku, 福冈 819-0395，日本 ujino.kouta.699@s.kyushu-u.ac.jp

摘要

众所周知，具有稀疏势的薛定谔算子的谱由奇异连续谱构成。我们给出一个充分条件，使奇异连续谱的边缘不是本征值，并构造具有奇异连续谱且没有任何特征值的例子，以及具有一个负特征值的例子。

1 引言与一个结果

我们研究具有稀疏势的一维 Schr¨odinger 算子。已知具有稀疏势的 Schr¨odinger 算子的谱由奇异连续谱构成。Simon and Spencer [2] 证明了具有稀疏势的 Schr¨odinger 算子不存在绝对连续谱。Simon and Stoltz [1] 还证明，对于任意 $E > 0$， $-\frac{d^2}{dx^2}f + Vf = Ef$ 都没有 L^2-解。我们提出的问题是，奇异连续谱的边缘是否为本征值。我们给出嵌入本征值不存在的一个充分条件，并给出一些例子。

定义 1.1. 若存在正数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$、$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得对于 $n = 1$、2、3、....., $x_{n+1} > x_n$，则称函数 V： $[0,\infty) \to \mathbb{R}$ 为稀疏势。

(i) 极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\alpha_{n+1} + \alpha_n + 1} = \infty,$$

(ii) $|V(x)| \le h_n$，若 $x \in [x_n - \alpha_n, x_n + \alpha_n]$ 对于 $n = 1, 2, 3, ...,$

(iii) $V(x) = 0$, *if* $x \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [x_n - \alpha_n, x_n + \alpha_n]\right)^c$

我们定义 $L_n = x_{n+1} - x_n - \alpha_{n+1} - \alpha_n$ 对于 $n \ge 1$ 和 $L_0 = x_1 - \alpha_1$。由 (i)， $L_n \to \infty$ 当 $n \to \infty$。根据 Sturm-Liouville理论 [3,定理 9.1.]，方程 $-\frac{d^2}{dx^2}f + Vf = 0$ 存在唯一解 $f \in AC_{loc}([0,\infty))$，满足 $\frac{d}{dx}f \in AC_{loc}([0,\infty))$以及边界条件$f(0) = \alpha, \frac{d}{dx}f(0) = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$。我们给出了存在非 L^2-可积解的一个充分条件。

定理 1.2。设 V 为稀疏势， f 为 $-\frac{d^2}{dx^2}f + Vf = 0$ 的弱解。如果

$$\frac{L_n}{4^n}\left(\prod_{m=1}^{n}(L_{m-1}^2 + 2)\right)^{-1}\left(\prod_{m=1}^{n}(2\alpha_m^2 + 1)\right)^{-1}\exp\left(-\frac{2}{3}\sum_{m=1}^{n} h_m(4\alpha_m^3 + 3\alpha_m)\right) \to \infty, \qquad (1)$$

当 $n \to \infty$ 时，则 $f \notin L^2([0,\infty))$.

我们给出一个一维薛定谔算子的例子，其奇异连续谱中没有嵌入本征值。令 $x_n = \exp(n^n)$，其中 $n = 1$、2、3、.....，并且

$$V(x) = \begin{cases} e^n, & \text{if } |x - x_n| \le \frac{1}{2} \text{ for } n = 1, 2, 3, ..., \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

令 $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V$: $L^2([0,\infty)) \to L^2([0,\infty))$，其定义域为 $D(H) = C_0^\infty((0,\infty))$。我们看到，$H$ 在零点处是正则的，在无穷远处属于极限点情形。这意味着 H 有自伴扩张 H_θ，可由边界条件参数化。因此，H_θ 是 H^* 在 $D_\theta = \{f \in D(H^*) \mid f(0)\sin\theta - \frac{d}{dx}f(0)\cos\theta = 0\}$上的限制。由 [1],可得 $\sigma_{sc}(H_\theta) = [0,\infty)$，$\sigma_{pp}(H_\theta) \cap (0,\infty) = \emptyset$，且对所有 $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$，都有 $\sigma_{ac}(H_\theta) = \emptyset$。证明见附录 A。定理 1.2 推出以下推论。这也意味着对于某些 θ，H_θ 具有纯奇异连续谱。

推论 1.3. 由此可得

(1) $\sigma_{sc}(H_\theta) = [0,\infty)$，$\sigma_{pp}(H_\theta) \cap [0,\infty) = \emptyset$ 和 $\sigma_{ac}(H_\theta) = \emptyset$ 对所有 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

(2) H_θ 对于 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$具有纯奇异连续谱,

(3) H_θ对于 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \arctan(-\frac{1+\sqrt{3}}{2})]$有一个负本征值。

2 定理 1.2 的证明。

我们计算朗斯基矩阵的一个下界。对于一个 2×2-实矩阵 M，设

$$\operatorname{Low} M = \inf \left\{ \left| M \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \right| \,\middle|\, \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

我们看到，对于 $u \in \mathbb{R}^2$，$|Mu| \ge \operatorname{Low} M|u|$，且 $\operatorname{Low} M = \sqrt{\inf \sigma({}^tMM)}$。设 V 为稀疏势，$f \in AC_{loc}([0,\infty))$ 为 $-\frac{d^2}{dx^2}f + Vf = 0$ 的弱解，满足 $\frac{d}{dx}f \in AC_{loc}([0,\infty))$，且边界条件为 $f(0) = \cos\theta$，$\frac{d}{dx}f(0) = \sin\theta$。我们可以将该弱解具体表示如下。设 $J_0 = [0, x_1 - \alpha_1]$、$I_n = [x_n - \alpha_n, x_n + \alpha_n]$ 和 $J_n = [x_n + \alpha_n, x_{n+1} - \alpha_{n+1}]$，其中 $n = 1$、2、.....。令 p_n、q_n: $J_n \to \mathbb{R}$ 由 $p_n(x) = 1$、$q_n(x) = x - x_n - \alpha_n$ 定义，并令 p_0、q_0: $J_0 \to \mathbb{R}$ 由 $p_0(x) = 1$、$q_0(x) = x$ 定义。令 φ_n、ψ_n: $I_n \to \mathbb{R}$ 为 $-\frac{d^2}{dx^2}f + Vf = 0$ 在 I_n 上满足边界条件 $\varphi_n(x_n - \alpha_n) = 1$、$\frac{d}{dx}\varphi_n(x_n - \alpha_n) = 0$、$\psi_n(x_n - \alpha_n) = 0$ 和 $\frac{d}{dx}\psi_n(x_n - \alpha_n) = 1$ 的弱解。我们定义 $\tilde{f}$: $[0,\infty) \to \mathbb{R}$ 如下

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= c_n^{(1)} p_n(x) + c_n^{(2)} q_n(x) \qquad \text{if } x \in J_n, \\ \tilde{f}(x) &= d_n^{(1)} \varphi_n(x) + d_n^{(2)} \psi_n(x) \qquad \text{if } x \in I_n, \end{aligned}$$

其中，$c_n^{(1)}$、$c_n^{(2)}$、$d_n^{(1)}$和 $d_n^{(2)}$由 $n = 1$、2、.....归纳确定

$$\lim_{x \downarrow 0} \begin{pmatrix} p_0(x) & q_0(x) \\ \frac{d}{dx}p_0(x) & \frac{d}{dx}q_0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0^{(1)} \\ c_0^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},$$

$$\lim_{x \uparrow x_n - \alpha_n} \begin{pmatrix} p_{n-1}(x) & q_{n-1}(x) \\ \frac{d}{dx}p_{n-1}(x) & \frac{d}{dx}q_{n-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{n-1}^{(1)} \\ c_{n-1}^{(2)} \end{pmatrix} = \lim_{x \downarrow x_n - \alpha_n} \begin{pmatrix} \varphi_n(x) & \psi_n(x) \\ \frac{d}{dx}\varphi_n(x) & \frac{d}{dx}\psi_n(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_n^{(1)} \\ d_n^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\lim_{x \uparrow x_n + \alpha_n} \begin{pmatrix} \varphi_n(x) & \psi_n(x) \\ \frac{d}{dx}\varphi_n(x) & \frac{d}{dx}\psi_n(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_n^{(1)} \\ d_n^{(2)} \end{pmatrix} = \lim_{x \downarrow x_n + \alpha_n} \begin{pmatrix} p_n(x) & q_n(x) \\ \frac{d}{dx}p_n(x) & \frac{d}{dx}q_n(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n^{(1)} \\ c_n^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

根据定义， $\tilde{f}$和 $\frac{d}{dx}\tilde{f}$是连续的，并且 $\begin{pmatrix} \tilde{f}(0) \\ \frac{d}{dx}\tilde{f}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$sin。系数$c_n^{(1)}$、$c_n^{(2)}$、$d_n^{(1)}$和 $d_n^{(2)}$由 θ唯一确定。我们看到

$$\int_0^\infty \tilde{f}(x)\frac{d^2}{dx^2}g(x)dx = \int_0^\infty \tilde{f}(x)V(x)g(x)dx$$

在 $g \in C_0^\infty((0,\infty))$ 上显然成立。这意味着 $\tilde{f}$在弱导数的意义下满足 $-\frac{d^2}{dx^2}f + Vf = 0$。因此，根据解的唯一性，$f = \tilde{f}$。

引理 2.1. 设 $c_n = \begin{pmatrix} c_n^{(1)} \\ c_n^{(2)} \end{pmatrix}$.，则可得

$$\int_{J_n} |f(x)^2|dx \geq \frac{1}{4}\frac{L_n^4}{L_n^3 + 3L_n}|c_n|^2. \tag{4}$$

证明. 可得

$$\begin{aligned} \int_{J_n} |f(x)|^2 dx &= \int_{J_n} |c_n^{(1)}p_n(x) + c_n^{(2)}q_n(x)|^2 dx \\ &= \begin{pmatrix} c_n^{(1)} & c_n^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_n & \frac{1}{2}L_n^2 \\ \frac{1}{2}L_n^2 & \frac{1}{3}L_n^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n^{(1)} \\ c_n^{(2)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

矩阵 $\begin{pmatrix} L_n & \frac{1}{2}L_n^2 \\ \frac{1}{2}L_n^2 & \frac{1}{3}L_n^3 \end{pmatrix}$ 可以对角化，其特征值 $\lambda_\pm$ 为

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(L_n + \frac{1}{3}L_n^3 \pm \sqrt{(L_n + \frac{1}{3}L_n^3)^2 - \frac{1}{3}L_n^4}\right).$$

由于$1 - \sqrt{1-t} \geq \frac{1}{2}t$ 对于 $0 < t < 1$成立，因此有

$$\lambda_- = \frac{L_n + \frac{1}{3}L_n^3}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{L_n^4}{3}\left(L_n + \frac{1}{3}L_n^3\right)^{-2}}\right) \geq \frac{1}{4}\frac{L_n^4}{L_n^3 + 3L_n}.$$

这就得到了所要证明的结论。 □

由 (2) 和 (3)，我们得到 $c_n = R_n W_{n-1} c_{n-1}$，其中 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} R_m &= \lim_{x \uparrow x_m + \alpha_m} \begin{pmatrix} \varphi_m(x) & \psi_m(x) \\ \frac{d}{dx}\varphi_m(x) & \frac{d}{dx}\psi_m(x) \end{pmatrix}, \\ W_m &= \lim_{x \uparrow x_{m+1} - \alpha_{m+1}} \begin{pmatrix} p_m(x) & q_m(x) \\ \frac{d}{dx}p_m(x) & \frac{d}{dx}q_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

我们将估计 Low R_m 和 Low W_m。

引理 2.2。因此可得

$$\mathrm{Low}\, W_m \geq \frac{1}{\sqrt{L_m^2 + 2}}. \tag{5}$$

证明。 ${}^tW_m W_m$ 的特征值 $\xi_\pm$ 为

$$\xi_\pm = \frac{1}{2}\left(L_m^2 + 2 \pm \sqrt{(L_m^2+2)^2 - 4}\right).$$

由于当 $0<t<1$时 $1-\sqrt{1-t}\geq\frac{1}{2}t$，我们有

$$\xi_-=\frac{L_m^2+2}{2}\left(1-\sqrt{1-4(L_m^2+2)^{-2}}\right)\geq\frac{1}{L_m^2+2}.$$

由于 Low $M=\sqrt{\inf\ \sigma({}^tMM)}$，结论得证。 □

令 $\tilde{\varphi}_m,\tilde{\psi}_m\colon I_m\to\mathbb{R}$ 由 $\tilde{\varphi}_m(x)=1,\tilde{\psi}_m(x)=x-x_m+\alpha_m$定义。我们看到 $\tilde{\varphi}_m,\tilde{\psi}_m$满足 $-\frac{d^2}{dx^2}f=0$. 存在 $u_m^{(j)},v_m^{(j)}\in AC(I_m),\ j=1,2,$ 使得

$$\begin{pmatrix}\varphi_m(x)\\ \frac{d}{dx}\varphi_m(x)\end{pmatrix}=u_m^{(1)}(x)\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_m(x)\\ \frac{d}{dx}\tilde{\varphi}_m(x)\end{pmatrix}+u_m^{(2)}(x)\begin{pmatrix}\tilde{\psi}_m(x)\\ \frac{d}{dx}\tilde{\psi}_m(x)\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\psi_m(x)\\ \frac{d}{dx}\psi_m(x)\end{pmatrix}=v_m^{(1)}(x)\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_m(x)\\ \frac{d}{dx}\tilde{\varphi}_m(x)\end{pmatrix}+v_m^{(2)}(x)\begin{pmatrix}\tilde{\psi}_m(x)\\ \frac{d}{dx}\tilde{\psi}_m(x)\end{pmatrix}.$$

我们看到 满足 $u_m^{(1)}(x_m-\alpha_m)=1,u_m^{(2)}(x_m-\alpha_m)=0,v_m^{(1)}(x_m-\alpha_m)=0,v_m^{(2)}(x_m-\alpha_m)=1,$ 且 d

$$\begin{pmatrix}\varphi_m & \psi_m\\ \frac{d}{dx}\varphi_m & \frac{d}{dx}\psi_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_m & \tilde{\psi}_m\\ \frac{d}{dx}\tilde{\varphi}_m & \frac{d}{dx}\tilde{\psi}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_m^{(1)} & v_m^{(1)}\\ u_m^{(2)} & v_m^{(2)}\end{pmatrix}.\tag{6}$$

注意， φ_n 和 ψ_n 满足方程 $-\frac{d^2}{dx^2}f+Vf=0$，该方程等价于

$$\begin{pmatrix}\frac{d}{dx}f\\ \frac{d^2}{dx^2}f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ V & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f\\ \frac{d}{dx}f\end{pmatrix}.$$

对 (6) 两边求导，得到

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ V & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_m & \tilde{\psi}_m\\ \frac{d}{dx}\tilde{\varphi}_m & \frac{d}{dx}\tilde{\psi}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_m^{(1)} & v_m^{(1)}\\ u_m^{(2)} & v_m^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_m & \tilde{\psi}_m\\ \frac{d}{dx}\tilde{\varphi}_m & \frac{d}{dx}\tilde{\psi}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{d}{dx}u_m^{(1)} & \frac{d}{dx}v_m^{(1)}\\ \frac{d}{dx}u_m^{(2)} & \frac{d}{dx}v_m^{(2)}\end{pmatrix}.$$

因此我们有

$$\begin{pmatrix}\frac{d}{dx}u_m^{(1)} & \frac{d}{dx}v_m^{(1)}\\ \frac{d}{dx}u_m^{(2)} & \frac{d}{dx}v_m^{(2)}\end{pmatrix}=-V\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_m\tilde{\psi}_m & \tilde{\psi}_m^2\\ -\tilde{\varphi}_m^2 & -\tilde{\varphi}_m\tilde{\psi}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_m^{(1)} & v_m^{(1)}\\ u_m^{(2)} & v_m^{(2)}\end{pmatrix}.\tag{7}$$

设 $u_m=\begin{pmatrix}u_m^{(1)}\\ u_m^{(2)}\end{pmatrix}$ 和 $v_m=\begin{pmatrix}v_m^{(1)}\\ v_m^{(2)}\end{pmatrix}$。由 (7) 可知， u_m 和 v_m 满足

$$\frac{d}{dx}u_m=-V\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_m\tilde{\psi}_m & \tilde{\psi}_m^2\\ -\tilde{\varphi}_m^2 & -\tilde{\varphi}_m\tilde{\psi}_m\end{pmatrix}u_m,\tag{8}$$
$$\frac{d}{dx}v_m=-V\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_m\tilde{\psi}_m & \tilde{\psi}_m^2\\ -\tilde{\varphi}_m^2 & -\tilde{\varphi}_m\tilde{\psi}_m\end{pmatrix}v_m.\tag{9}$$

引理 2.3. 对于 $x\in I_m,\ u_m^{(1)}(x)v_m^{(2)}(x)-v_m^{(1)}(x)u_m^{(2)}(x)=1$。

证明. 由 (8) 和 (9)，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(u_m^{(1)}v_m^{(2)}-v_m^{(1)}u_m^{(2)}) &= \frac{d}{dx}u_m^{(1)}v_m^{(2)}+u_m^{(1)}\frac{d}{dx}v_m^{(2)}-\frac{d}{dx}v_m^{(1)}u_m^{(2)}-v_m^{(1)}\frac{d}{dx}u_m^{(2)}\\ &= -V(\tilde{\varphi}_m\tilde{\psi}_mu_m^{(1)}+\tilde{\psi}_m^2u_m^{(2)})v_m^{(2)}+u_m^{(1)}V(\tilde{\varphi}_m^2v_m^{(1)}+\tilde{\varphi}_m\tilde{\psi}_mv_m^{(2)})\\ &\quad +V(\tilde{\varphi}_m\tilde{\psi}_mv_m^{(1)}+\tilde{\psi}_m^2v_m^{(2)})u_m^{(2)}-v_m^{(1)}V(\tilde{\varphi}_m^2u_m^{(1)}+\tilde{\varphi}_m\tilde{\psi}_mu_m^{(2)})\\ &= 0.\end{aligned}$$

由于 $u_m^{(1)}(x_m-\alpha_m)v_m^{(2)}(x_m-\alpha_m)-v_m^{(1)}(x_m-\alpha_m)u_m^{(2)}(x_m-\alpha_m)=1,$ 因此得证。 □

引理 2.4. 假设 u_j、 $v_j \in \mathbb{R}$、 $j = 1$、2 和 $u_1v_2 - v_1u_2 = 1$。那么

$$\operatorname{Low}\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \geq \frac{1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2}}.$$

证明。设 $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ 和 $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$，以及 $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2$。矩阵$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ 的特征值 $\xi_\pm$ 为

$$\xi_\pm = \frac{1}{2}\left(|u|^2 + |v|^2 \pm \sqrt{(|u|^2 + |v|^2)^2 - 4(|u|^2|v|^2 - u \cdot v)^2}\right).$$

由于对于 $0 < t < 1$ 和 $|u|^2|v|^2 - u \cdot v = (u_1v_2 - u_2v_1)^2 = 1$，我们得到

$$\xi_- \geq \frac{1}{|u|^2 + |v|^2}.$$

这就证明了我们的断言。 □

引理 2.5。由此可得

$$\operatorname{Low} R_m \geq \frac{1}{2\sqrt{2\alpha_m^2 + 1}} \exp\left(-\frac{1}{3}h_m(4\alpha_m^3 + 3\alpha_m)\right). \tag{10}$$

证明。注意到

$$R_m = \lim_{x \uparrow x_m + \alpha_m} \begin{pmatrix} \varphi_m(x) & \psi_m(x) \\ \frac{d}{dx}\varphi_m(x) & \frac{d}{dx}\psi_m(x) \end{pmatrix} = \lim_{x \uparrow x_m + \alpha_m} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_m(x) & \tilde{\psi}_m(x) \\ \frac{d}{dx}\tilde{\varphi}_m(x) & \frac{d}{dx}\tilde{\psi}_m(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_m^{(1)}(x) & v_m^{(1)}(x) \\ u_m^{(2)}(x) & v_m^{(2)}(x) \end{pmatrix}.$$

显然可知

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow x_m + \alpha_m} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_m(x) & \tilde{\psi}_m(x) \\ \frac{d}{dx}\tilde{\varphi}_m(x) & \frac{d}{dx}\tilde{\psi}_m(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \operatorname{Low}\begin{pmatrix} 1 & 2\alpha_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\geq \frac{1}{\sqrt{4\alpha_m^2 + 2}}. \end{aligned} \tag{11}$$

由引理2.3和引理2.4可得

$$\operatorname{Low}\begin{pmatrix} u_m^{(1)}(x) & v_m^{(1)}(x) \\ u_m^{(2)}(x) & v_m^{(2)}(x) \end{pmatrix} \geq \frac{1}{\sqrt{|u_m(x)|^2 + |v_m(x)|^2}}.$$

我们看到，对于 a、 $b \in \mathbb{R}$,

$$\sup_{\theta \in [0,\pi)} \left|\left(\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}\right)\right| = \frac{a^2 + b^2}{2}. \tag{12}$$

由 (8) 和 (12)，我们得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(|u_m|^2) &= 2\left(u_m, \frac{d}{dx}u_m\right) \\ &\leq 2|V|\left|\left(u_m, \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_m\tilde{\psi}_m & \tilde{\psi}_m^2 \\ -\tilde{\varphi}_m^2 & -\tilde{\varphi}_m\tilde{\psi}_m \end{pmatrix} u_m\right)\right| \\ &\leq h_m(\tilde{\varphi}_m^2 + \tilde{\psi}_m^2)|u_m|^2. \end{aligned}$$

因此，由格朗沃尔不等式可得

$$|u_m(x)|^2 \le \exp\left(h_m \int_{x_m-\alpha_m}^{x} \left(\tilde{\varphi}_m(y)^2 + \tilde{\psi}_m(y)^2\right) dy\right).$$

特别地

$$\begin{aligned} |u_m(x_m+\alpha_m)|^2 &\le \exp\left(h_m \int_{x_m-\alpha_m}^{x_m+\alpha_m} \left(1+(y-x_m+\alpha_m)^2\right) dy\right). \\ &= \exp\left(h_m(2\alpha_m + \frac{8}{3}\alpha_m^3)\right). \end{aligned}$$

我们可以用类似的方法估计 $|v_m|^2$：

$$|v_m(x_m+\alpha_m)|^2 \le \exp\left(\frac{2}{3}h_m(4\alpha_m^3+3\alpha_m)\right).$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{Low}\begin{pmatrix} u_m^{(1)}(x) & v_m^{(1)}(x) \\ u_m^{(2)}(x) & v_m^{(2)}(x) \end{pmatrix}\Bigg|_{x=x_m+\alpha_m} &\ge \frac{1}{\sqrt{|u_m(x)|^2+|v_m(x)|^2}}\Bigg|_{x=x_m+\alpha_m} \\ &\ge \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{1}{3}h_m(4\alpha_m^3+3\alpha_m)\right). \end{aligned} \tag{13}$$

由 (11) 和 (13)，可得所述结论。 □

定理 1.2 的证明。由 (5)、(10) 以及 $c_n = R_n W_{n-1} c_{n-1}$ 对于 $n \ge 1$，我们得到

$$|c_n| \ge \frac{1}{2^n}\left(\prod_{m=1}^{n}(L_{m-1}^2+2)(2\alpha_m^2+1)\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{3}\sum_{m=1}^{n} h_m(4\alpha_m^3+3\alpha_m)\right). \tag{14}$$

如果 n 足够大，那么

$$\frac{L_n^4}{L_n^3+3L_n} \ge \frac{L_n}{4}.$$

因此，由 (4) 和 (14) 可知，若 n 足够大，则有

$$\int_{J_n} |f(x)^2| dx \ge \frac{L_n}{4^{n+2}}\left(\prod_{m=1}^{n}(L_{m-1}^2+2)(2\alpha_m^2+1)\right)^{-1} \exp\left(-\frac{2}{3}\sum_{m=1}^{n} h_m(4\alpha_m^3+3\alpha_m)\right).$$

假设 (1) 成立。于是我们得到

$$\int_{J_n} |f(x)^2| dx \to \infty.$$

这意味着，$-\frac{d^2}{dx^2}f + Vf = 0$ 的任意解 f 都不属于 $L^2([0,\infty))$. □

3 推论 1.3 的证明。

Note 使得 $x_n = \exp(n^n)$、$\alpha_n = \frac{1}{2}$、 $h_n = e^n$、 $L_0 = x_1 - \frac{1}{2}$ 以及 $L_n = x_{n+1} - x_n - 1$ 对于 $n \ge 1$。

引理 3.1. 若存在 $f \in D(H_\theta)$ 使得 $(f, H_\theta f) < 0$，则 H_θ 有一个负特征值。

证明. $\mathcal{R}[A]$ 表示映射 A 的值域。我们看到 $\dim\ \mathcal{R}[E_\theta((-\infty,0))] \le 1$。证明见引理 A.1。设 $f \in D(H_\theta)$ 使得 $(f, H_\theta f) < 0$。则这意味着 $\mathcal{R}[E_\theta((-\infty,0))] \neq \{0\}$，且 $\dim\ \mathcal{R}[E_\theta((-\infty,0))] = 1$。这就证明了我们的断言。 □

引理 3.2。因此

(1) H_θ 在 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$时没有负特征值,

(2) H_θ在 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \arctan(-\frac{1+\sqrt{3}}{2})]$时有一个负特征值。

证明。令 $f \in D(H_\theta)$。则 f满足边界条件 $f(0)\sin\theta - \frac{d}{dx}f(0)\cos\theta = 0$。我们得到

$$\begin{aligned}(f, H_\theta f) &= \int_0^\infty \overline{f(x)}(-\frac{d^2}{dx^2}f(x) + V(x)f(x))dx \\ &= \overline{f(0)}\frac{d}{dx}f(0) + \int_0^\infty \left(\left|\frac{d}{dx}f(x)\right|^2 + V(x)|f(x)|^2\right)dx.\end{aligned}$$

如果 $\theta = 0$或$\frac{\pi}{2}$，则有 $f(0)\overline{\frac{d}{dx}f(0)} = 0$以及 $(f, H_\theta f) \ge 0$。如果 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，则根据边界条件，我们得到

$$(f, H_\theta f) = |f(0)|^2\tan\theta + \int_0^\infty \left(\left|\frac{d}{dx}f(x)\right|^2 + V(x)|f(x)|^2\right)dx \ge 0.$$

因此，对于 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$，$(f, H_\theta f) \ge 0$。这就证明了断言的第一部分。

我们将证明存在 $f \in D(H_\theta)$，使得对于任意 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \arctan(-\frac{1+\sqrt{3}}{2})]$，都有 $(f, H_\theta f) < 0$。只需证明存在 $f \in L^2([0,\infty))$，使得对于任意边界条件$\frac{d}{dx}f(0)\,f(0) = -\lambda$, $\lambda \ge \frac{1+\sqrt{3}}{2}$，都有 $(-\frac{d^2}{dx^2}f + Vf, f) < 0$。令 ~~$\lambda \ge 1$~~。定义 $f_\lambda\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 为

$$f_\lambda(x) = \begin{cases}\exp\left(\dfrac{\lambda}{x-1}\right), & \text{if } 0 \le x < 1 \\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

我们看到，$f_\lambda \in L^2([0,\infty))$，且 $f_\lambda(0) = \exp(-\lambda)$、$\frac{d}{dx}f_\lambda(0) = -\lambda\exp(-\lambda)$。于是有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |\frac{d}{dx}f_\lambda(x)|^2 dx &= \int_0^1 \left|\frac{\lambda}{(x-1)^2}\exp\left(\frac{\lambda}{x-1}\right)\right|^2 dx \\ &= \frac{1}{4\lambda}(2\lambda^2 + 2\lambda + 1)\exp(-2\lambda).\end{aligned}$$

由于对于 $x \ge 0$ 有 $V(x)f_\lambda(x) = 0$，我们得到，对于 $\lambda \ge \frac{1+\sqrt{3}}{2}$，

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}f_\lambda + Vf_\lambda, f_\lambda\right) = \frac{1}{4\lambda}(-2\lambda^2 + 2\lambda + 1)\exp(-2\lambda) < 0.$$

由引理 3.1 可得结论。 □

引理 3.3. 对任意 $p > 0$，可得

$$\lim_{n\to\infty} x_n\left(\prod_{m=1}^{n-1} x_m\right)^{-p} = \infty.$$

证明. 我们得到

$$\begin{aligned} x_{n+1}\left(\prod_{m=1}^{n} x_m\right)^{-p} &= \exp\left((n+1)^{n+1} - pn^n - p\sum_{m=1}^{n-1} m^m\right) \\ &\geq \exp\left((n+1)^{n+1} - pn^n - p(n-1)^n\right) \\ &= \exp\left((n+1-2p)(n+1)^n\right) \\ &\to \infty, \qquad \text{as } n \to \infty. \end{aligned}$$

□

推论 1.3 的证明。由引理 3.2，只需证明对于所有 θ， $0 \notin \sigma_{pp}(H_\theta)$。我们看到，对于所有 $n \geq 1$,

$$\frac{L_n^2 + 2}{L_n^2} < 2.$$

因此，对于所有 $n \geq 1$，有

$$\left(\prod_{m=1}^{n}(L_{m-1}^2+2)\right)^{-1} \geq \frac{2^{n-1}}{L_0^2+2}\left(\prod_{m=1}^{n-1} L_m\right)^{-2}.$$

我们看到，对于所有 $n \geq 1$ 和当 $n \geq 1$ 充分大时的 $L_n > \frac{1}{2}x_{n+1}$， $L_n < x_{n+1}$。因此我们有

$$L_n\left(\prod_{m=1}^{n-1} L_m\right)^{-2} \geq \frac{1}{2}x_{n+1}\left(\prod_{m=1}^{n} x_m\right)^{-2}.$$

由引理 3.3，我们得到

$$\begin{aligned} &\frac{L_n}{4^n}\left(\prod_{m=1}^{n}(L_{m-1}^2+2)\right)^{-1}\left(\prod_{m=1}^{n}(2\alpha_m^2+1)\right)^{-1}\exp\left(-\frac{2}{3}\sum_{m=1}^{n} h_m(4\alpha_m^3+3\alpha_m)\right) \\ &\geq \frac{1}{2(L_0^2+2)3^n}L_n\left(\prod_{m=1}^{n-1} L_m\right)^{-2}\exp\left(-\frac{4}{3}\sum_{m=1}^{n} e^m\right) \\ &\geq \frac{1}{4(L_0^2+2)3^n}x_{n+1}\left(\prod_{m=1}^{n} x_m\right)^{-2}\exp\left(-\frac{4}{3}e^{n+1}\right) \\ &= \frac{\exp(\frac{1}{3}(n+1)^{n+1})}{4(L_0^2+2)3^n}x_{n+1}{}^{\frac{1}{3}}\left(\prod_{m=1}^{n} x_m\right)^{-2}\exp\left(\frac{1}{3}\left((n+1)^{n+1}-4e^{n+1}\right)\right) \\ &\to \infty, \qquad \text{as } n \to \infty. \end{aligned}$$

由定理 1.2，我们看到 $0 \notin \sigma(H_\theta)$。 □

附录 A

由 [1], 可知， $\sigma_{ac}(H_\theta) = \emptyset$ 以及 $\sigma_{pp}(H_\theta) \cap (0,\infty) = \emptyset$。在本附录中，我们证明对于某些 θ， H_θ具有一个负特征值，并且对于所有 θ， $\sigma_{sc}(H_\theta) = [0,\infty)$。令 V为一个稀疏势，其中 $x_n = \exp(n^n)$，对于 $n = 1$、2、.....以及

$$V(x) = \begin{cases} e^n, & \text{if } |x - x_n| \leq \frac{1}{2} \text{ for } n = 1, 2, ..., \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由 [1] 和 [2], 可知， $\sigma_{pp}(H_\theta) \cap (0,\infty) = \emptyset$，且对所有 θ， $\sigma_{ac}(H_\theta) = \emptyset$。

引理 A.1. 设 E_θ 为 H_θ 的谱测度。对所有 θ，$\dim \mathcal{R}[E_\theta((-\infty, 0))] \leq 1$。

证明。我们用反证法证明这一点。假设 $\dim \mathcal{R}[E_\theta((-\infty, 0))] > 1$。那么我们可以取 $\varphi, \psi \in E_\theta((-\infty, 0))$，使得 φ 和 ψ 彼此正交。令 $\varphi_n = E_\theta((-n, -\frac{1}{n}))\varphi$ 和 $\psi_n = E_\theta((-n, -\frac{1}{n}))\psi$。我们看到 $\varphi_n, \psi_n \in D(H_\theta)$，$\varphi_n \to \varphi$ 和 $\psi_n \to \psi$。令 $N \geq 1$ 足够大，使得 φ_N 和 ψ_N 线性无关。由于对于 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$，有 $\alpha\varphi_N + \beta\psi_N \in \mathcal{R}[E_\theta((-N, -\frac{1}{N}))]$，因此对于 $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$，

$$(\alpha\varphi_N + \beta\psi_N, H_\theta(\alpha\varphi_N + \beta\psi_N)) < 0. \tag{15}$$

另一方面，由于 H 的亏格指标相等且均为一，存在一个等距算子 $U_\theta : \ker(H^* - i) \to \ker(H^* + i)$ 和 $w \in \ker(H^* - i)$，使得

$$D(H_\theta) = \left\{ v + \alpha(w + U_\theta w) \middle| v \in D(\overline{H}), \alpha \in \mathbb{C} \right\},$$

其中 $\overline{H}$ 是 H 的闭包。令 $u_\theta = w + U_\theta w$。存在 v_1、$v_2 \in D(\overline{H})$ 以及 α_1、$\alpha_2 \in \mathbb{C}$，使得

$$\begin{aligned} \varphi_N &= v_1 + \alpha_1 u_\theta, \\ \psi_N &= v_2 + \alpha_2 u_\theta. \end{aligned}$$

若 $\alpha_1 = 0$，则 $(\varphi_N, H_\theta\varphi_N) = (v_1, \overline{H}v_1) \geq 0$。(15) 推出 $\alpha_1 \neq 0$。类似地，我们有 $\alpha_2 \neq 0$。于是得到

$$(\alpha_2\varphi_N + \alpha_1\psi_N, H_\theta(\alpha_2\varphi_N + \alpha_1\psi_N)) = (\alpha_2 v_1 + \alpha_1 v_2, \overline{H}(\alpha_2 v_1 + \alpha_1 v_2)) \geq 0.$$

这与 (15) 矛盾。因此断言得证。 □

令 $E < 0$。我们看到 $\dim \ker(H^* - E) = 1$。这意味着存在一个边界条件 $\theta(E)$，使得 $H_{\theta(E)}$ 具有唯一的负特征值 E。

引理 A.2. 对所有 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$，可推出 $\sigma_{sc}(H_\theta) = [0, \infty)$。

证明。由于对所有 θ，$\sigma_{pp}(H_\theta) \cap (0, \infty) = \emptyset$ 且 $\sigma_{ac}(H_\theta) = \emptyset$，我们看到 $\sigma(H_\theta) \cap (0, \infty) = \sigma_{sc}(H_\theta) \cap (0, \infty)$。我们通过反证法证明，对于所有 θ，有 $(0, \infty) \subset \sigma(H_\theta)$。假设存在$\theta \in [0, \pi)$ $E > 0$，使得 $E \in (0, \infty) \setminus \sigma(H_\theta)$。由于 H 在零点是正则的，并且在无穷远处属于极限圆型情形，亏格指标 $\dim \ker(H^* \pm i)$ 等于一。因此 $\dim \ker(H^* - E) = 1$。这意味着存在 L^2- $-\frac{d^2}{dx^2}f + Vf = Ef$解。根据 [1, 定理 2.3.], 然而，$-\frac{d^2}{dx^2}f + Vf = pf$ 没有满足 $f \in L^2([0, \infty))$ 的解，对于任意 $p > 0$ 均如此。这是矛盾，因此对于所有 θ，我们得到 $(0, \infty) \subset \sigma_{sc}(H_\theta)$。由于 $\sigma_{sc}(H_\theta) \cap (-\infty, 0) = \emptyset$，故断言得证。

□

致谢

本研究获得 JST SPRING 项目支持，项目编号 JPMJSP2136。

声明

伦理批准

作者　hor 声明与本文内容相关的竞争利益。

竞争利益

作者声明不存在利益冲突。

作者贡献

作者确认对本稿件承担全部责任。

资助

本研究由 JST SPRING 项目资助，项目编号 JPMJSP2136。

数据和材料的可用性

本研究未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

参考文献

[1] Simon、Barry 和 G¨unter Stolz。《具有奇异连续谱的算子，V：稀疏势》。《美国数学会会刊》124.7（1996）：2073-2080。[2] Simon、Barry 和 Thomas Spencer。《迹类扰动与绝对连续谱的缺失》。《数学物理通讯》125.1（1989）：113-125。[3] Teschl、Gerald。《量子力学中的数学方法》。《数学研究生丛书》99（2009）：106。