利用深度神经网络对变厚度多维功能梯度板进行静力、动力与稳定性分析

Nam G. Luu*[1] 和 Thanh T. Banh[2a,f] 胡志明市工业大学信息技术学院数据科学系，越南胡志明市*Go Vap*区*Nguyen Van Bao*街*12*号，邮编*70000*[2] 大韩民国首尔市广津区*Neungdong-ro*路*209*号，邮编*05006*，世宗大学计算机科学系

摘要。 本文旨在分析并预测置于弹性温克勒地基上的变厚度多向功能梯度（FG）板的中心挠度、固有频率和临界屈曲载荷。首先，详细建立静力问题和特征值问题的数学模型。假设FG材料属性沿板的三个方向依据组分体积分数分布的 Mori-Tanaka 微观力学模型平滑、连续变化。随后，采用四节点张量分量混合插值（MITC4）有限元分析（FEA），从理论上消除剪切锁定现象。接着，通过若干数值算例，详细研究并讨论变厚度函数（均匀、非均匀线性和非均匀非线性）、材料性能、长厚比、边界条件及弹性参数对板响应的影响。最后，利用批归一化（BN）的深度神经网络（DNN）技术，预测多向功能梯度板的无量纲值。深度神经网络模型还表明，该技术能够处理大型数据库以及工程应用中的多种重要参数，是一种强大的方法。

关键词： 静力、动力与稳定性分析；多向功能梯度板；变厚度；弹性温克勒地基；深度神经网络；批归一化

1. 引言

近年来，功能梯度（FG）材料作为一种先进且智能的非均质复合材料取得了长足发展。20世纪80年代中期，日本科学家首次发现了这类材料，Koizumi（1997年）对此进行了研究。功能梯度材料通常由两种材料相组成：陶瓷和金属，其性能沿特定方向平滑且连续地变化。具有良好延展性和耐久性的金属能够抵抗机械载荷，而热导率较低的陶瓷非常适合承受高温环境 Nguyen-Xuan 等（2012年）。此外，由于预先定义的数学函数，层合复合材料各层中出现的不期望应力不连续性可以被完全消除。凭借这一卓越特性，功能梯度材料在航空航天、汽车、电子、

*通讯作者，电子-邮箱：luugiangnam.math@gmail.com博士，电子-邮箱：btthanhk11@gmail.com

化学和生物医学工程领域（Ilschner 1996年，Taheri 等 2014年，Radhika 等 2018年，Arslan 等 2018年，Smith 等 2019）。

在数值分析领域，过去几十年来，人们广泛发展了均匀厚度板和变厚度板的板理论，以预测结构响应，例如经典板理论（CPT）、精化板理论（RPT）（Nguyen-Xuan 等 2014年）、一阶剪切变形板理论（FSDT）（Nguyen-Xuan 等 2012年）、广义剪切变形板理论（GSDT，Thai 等 2014年）以及高阶剪切变形板理论（HSDT，Reddy 2000）。此外，由于设计性能良好且适用性强，变厚度板可灵活应用于海事、土木工程和航空等工业领域。近年来，针对 z 方向单向功能梯度（UD-FG）板的研究已大量开展。例如，Zhang Zhang（2013）基于物理中性面，对单向功能梯度材料矩形板进行了建模和高阶剪切变形理论分析。Kim 和 Reddy（2013）采用耦合应力三阶剪切变形理论和幂律分布，提出了功能梯度板弯曲、振动和屈曲的解析解。随后，Swaminathan 等人（2015）对用于研究功能梯度板静态、动态和稳定性行为的各种方法进行了全面综述。许多文献还介绍了不同类型的功能梯度材料，例如 S 形功能梯度（S-FG）微尺度板（Jung 和 Han 2015），用于分析普通板和夹层板的弯曲、振动及屈曲（Jha 等人 2013；Garg 等人 2021）。

尽管近年来单向功能梯度材料已得到广泛应用，但在严苛环境中，例如现代航天飞机或高速车辆中的先进设备，由于其所有外表面的分布相同，这些材料无法发挥最佳效能（Nemat-Alla，2003）。因此，对于此类工程应用，即使是为了减轻重量而采用变厚度设计，也有必要使用材料性能沿两个或三个方向变化的功能梯度板。近年来，许多研究人员开始关注双向功能梯度（BD-FG）和三向功能梯度（TD-FG）材料。例如，Yin 等人（2016）采用高阶剪切变形板等几何分析，研究了面内双向功能梯度（IBD-FG）非均质板的屈曲和自由振动问题。Xiang 等人（2014）基于缩尺边界有限元法（FEM）提出了一种一致的三维方法，用于分析 IBD-FG 板的自由振动和力学屈曲。随后，Do 等人（2017）提出了一种新型三阶剪切变形板理论，以消除双向功能梯度板弯曲和屈曲问题中的剪切锁定效应及剪切修正因子。Ebrahimi 和 Najafizadeh（2014）采用 Voigt 和 Mori–Tanaka 陶瓷与金属分布模型，分析了双向功能梯度圆柱壳的自由振动。Lieu等（2018）详细展示了变厚度 IBD-FG 板在两种材料分布方案下的弯曲和自由振动分析结果。此外，TD-FG板也受到研究者的广泛关注（Hughes 等，2005；Adineh 和 Kadkhodayan，2017）。尤其是，Do 等人（2020）利用深度神经网络，基于改进共生生物搜索算法（mSOS）预测了TD-FG板的行为，以降低计算成本。

另一方面，弹性地基（EF）上的结构通常用于土木工程领域，例如飞机跑道、建筑基础板、铁路轨道等。板理论中应用了三种常见的弹性地基：Winkler地基、Pasternak地基和Kerr地基。许多论文研究了这三种地基用于功能梯度板的情况，例如 Shahsavari 等（2018）、Li 等（2021）、Amirpour 等（2016）、Alinaghizadeh 和 Shariati（2016）。此外，由于功能梯度材料具有耐高温特性，也被用于探索隔热材料。Raju 和 Rao（1988、1991）提出了不同边界条件下置于弹性地基上的方板热后屈曲问题。此外，

一些关于弹性介质中屈曲约束应用和拓扑优化的研究由 Banh 等（2017）、Hoan 和 Lee（2017）以及 Hoan 等（2020）进行。Winkler- Pasternak地基被用于研究预-屈曲和后-屈曲功能梯度板的非-线性热自由振动，Taczala 等（2016）对此进行了研究。Gunda（2013）提出了置于弹性温克勒地基上的均质各向同性方形板构型热后-屈曲路径的简单闭-式解。Hoang 等（2020）提出了非-均匀 Pasternak弹性地基对由功能梯度（FG）石墨烯纳米片增强的简支板非-线性热动力学的影响。

在近期的工业革命中，数据科学和人工智能日益普及，并广泛应用于包括机械工程在内的诸多领域。此外，构建有限元法模型或求解线性方程（弯曲问题）和特征值问题（自由振动与屈曲问题）需要付出巨大的计算成本，因此提出了深度神经网络（DNN），用于直接预测多方向功能梯度板的数值输出（如无量纲值），而无需进行任何数值计算。深度神经网络的优势在于，利用简单问题的训练数据，便能以较小误差轻松预测复杂的非线性问题。还有一些论文将深度神经网络用作数值分析（尤其是板理论）中的优化方法或预测方法。部分研究利用深度神经网络来呈现机械行为，例如遗传算法（Ye 等 2001）、优化（Wang 和 Xie 2005）、模糊逻辑（Shen 等 2013）等。Abambres 等（2013）采用基于神经网络的公式，预测均布竖向荷载作用下工字形蜂窝钢梁的屈曲载荷。Do 等（2018）通过深度神经网络（DNN）和改进共生生物搜索算法（mSOS），降低了功能梯度板最优材料分布问题的计算成本。每个数据集均由分析随机生成，并可通过深度神经网络结合稳健的元启发式算法 mSOS 直接预测解。采用相同的优化方法，研究还考虑了三向功能梯度板，并使用非均匀有理 B 样条（NURBS）基函数描述沿三个方向变化的材料分布。

本文采用四节点张量分量混合插值有限元法（MITC4，Bathe 和 Dvorkin，1985），对置于弹性 Winkler 地基上、材料分布沿三个方向变化的 Mindlin–Reissner 板理论进行有限元分析。TD-FG材料的材料性能由 Mori–Tanaka 微观力学方案描述。本文考察了不同弹性 Winkler 参数下，边界条件、长厚比、板的类型（均匀板或变厚度板）以及幂指数对功能梯度板弯曲、自由振动和屈曲问题行为的影响。在通过参考结果验证所得结果后，将所有数值结果汇集为训练数据，并将深度神经网络视为一种先进技术，无需求解线性方程或特征值问题，即可直接预测多向功能梯度板的行为（无量纲挠度、固有频率和临界屈曲载荷）。批归一化通过降低所需学习率并谨慎初始化参数，加速深度网络训练。基于一阶剪切变形理论的有限元法通过迭代，利用 MITC4 随机生成这些数据集。将深度神经网络获得的最优结果与传统方法所得结果进行比较，以验证所提方法在准确性和耗时方面的有效性。

本研究其余部分的组织结构如下。第2节展示了采用嵌入弹性温克勒地基的Mori-Tanaka方案对TD-FG板进行建模的理论公式。第3节详细推导了采用MICT4的一阶剪切变形理论有限元法构造过程及总能量方程。第4节提出了用于预测不同变量下TD-FG板行为的深度神经网络。第5节展示了当前

通过若干弯曲、自由-振动和屈曲问题的数值算例，验证该方法。最后，第6节以总结性意见结束本文。

2. 多方向功能梯度变厚度板

本研究首先将陶瓷体积分数按幂律形式变化的分布作为分析测试，具体由以下模型表示。

2.1 数值模拟流程

采用本研究中的符号，可将扩展形式的哈密顿原理写为.....

$$V_c(x,y,z)=\left(\frac{x}{a}\right)^{k_x}\left(\frac{y}{a}\right)^{k_x}\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h(x,y)}\right)^{k_z} \tag{1}$$

其中，a 为方板的尺寸， 为板的变厚度$(,,)$和 分别表示 x-、y- 和 z-轴上的幂指数。函k_x k_y 数定义k_z如下（Banh 和 Lee，2019；Banh 等，2020）：

$(,)$
$x\ y)$

$$\lambda(x,y)=\begin{cases}1 & \text{type 1: uniform thickness}\\ 1+x & \text{type 2: non-uniform linear thickness}\\ 1+\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{a}{2}\right)^2 & \text{type 3: non-uniform non-linear thickness}\end{cases} \tag{2}$$

图1展示了均匀、非均匀线性以及非均匀非线性厚度板的几何形状。

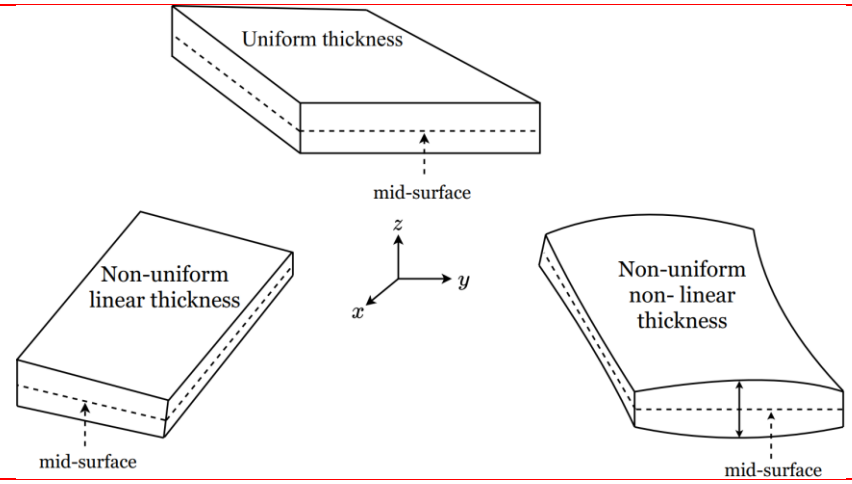


图1 均匀（类型1）、非均匀线性（类型2）和非均匀非线性（类型3）厚度板

然后按如下方式计算金属体积分数分布。

$$V_m(x,y,z)=1-V_c(x,y,z) \tag{3}$$

由杨氏模量 E、泊松比 ν、密度 ρ 组成的功能梯度板的材料性能可通过混合法则表示（Reddy, 2000）。

$$P(x,y,z)=P_c.V_c(x,y,z)+P_m.V_m(x,y,z) \tag{4}$$

然而，混合法则未考虑两种组分之间的相互作用（Vel和Batra，2002；Qian 等，2004）。因此，采用Mori-Tanaka方案来描述这些相互作用，其中有效体积模量和剪切模量可表示为。

$$K_f=\frac{V_c\left(K_c-K_m\right)}{1+V_m\dfrac{K_c-K_m}{K_m+4/3\mu_m}}+K_m,\ \mu_f=\frac{V_c\left(\mu_c-\mu_m\right)}{1+V_m\dfrac{\mu_c-\mu_m}{\mu_m+f_1}}+\mu_m \tag{5}$$

其中，且 和 分别为两相的体积模量和剪切模量，其定义如下

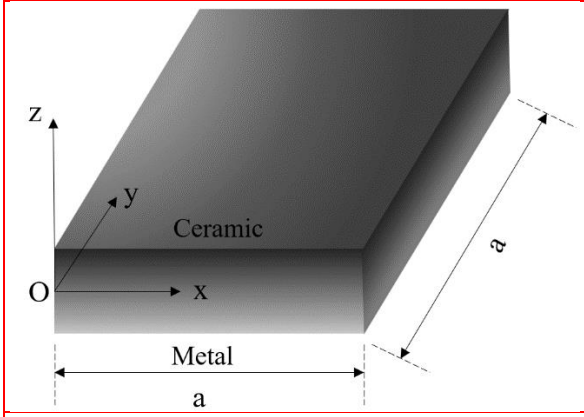
$$K_{c,m}=\frac{E_{c,m}}{3\left(1-2\mu_{c,m}\right)},\ \mu_{c,m}=\frac{E_{c,m}}{2\left(1+\mu_{c,m}\right)} \tag{6}$$

于是，功能梯度板的有效材料性能可估算为

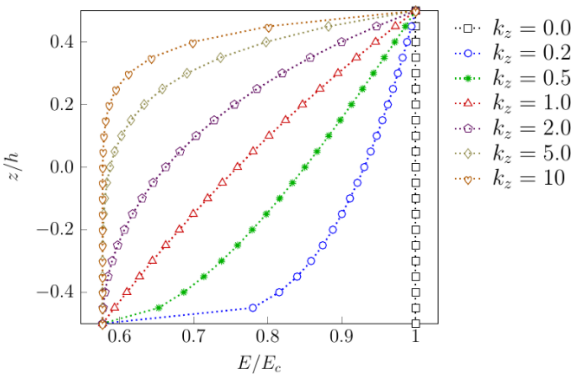
$$E=\frac{9K_f\mu_f}{3K_f+\mu_f},\nu=\frac{3K_f-2\mu_f}{2\left(3K_f+\mu_f\right)} \tag{7}$$

而 ρ(x, y, z) 仍由式（4）计算。

图 2a 展示了由陶瓷相和金属相组成的功能梯度板，而单向功能梯度 SUS304/Si_3N_4 的杨氏模量分布则展示于图 2b。



（a）TD-FG板的材料分布



（b）单向功能梯度的杨氏模量分布 SUS304/Si N_3 $_4$

图2 Mori-Tanaka 微观力学模型下多向功能梯度板的示例

3. 基于有限元分析和 MITC4 的一阶剪切变形理论基本公式

3.1 一阶剪切变形理论有限元模型的公式

根据一阶剪切变形理论，板上任意点 (x, y, z) 处的面内位移场可近似表示为

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y,t) + z\phi_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y,t) + z\phi_y(x,y) \\ w(x,y) &= w_0(x,y) \end{aligned} \tag{8}$$

其中 u_0, v_0, w_0, ϕ_x和 是ϕ_y、y、t（时间）的函数；u_0, v_0, w_0 表示中面上一点的位移； 表示横向法线绕 y 轴和 x 轴的转角。需要注意的是，逗号表示对空间变量的微分。图 3 展示了变形板的横截面视图。

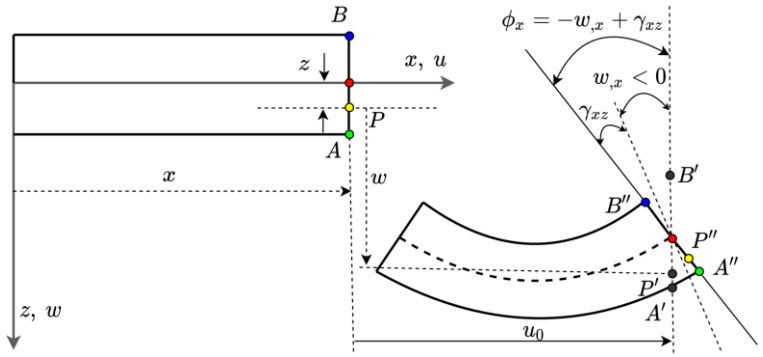


图 3 变形板的横截面图

采用有限元分析可近似表示板的广义位移和转动：使用双线性四边形形函数 $\mathrm{N_{io}}$。然后，应变可根据有限元分析表示如下：

$$\mathbf{u}=\sum_{i=\overline{1,4}} N_i\mathbf{q}_i,\ \text{where}\ \mathbf{u}=\left\{u,v,\beta_x,\beta_y\right\}^{\mathrm{T}},\mathbf{q}_i=\left\{u_i,v_i,\beta_{xi},\beta_{yi}\right\}^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0=\left\{u_{0,x}\quad v_{0,y}\quad u_{0,\mathrm{y}}+v_{0,x}\right\}^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\varepsilon}_1=\left\{\phi_{x,x}\quad \phi_{y,\mathrm{y}}\quad \phi_{\mathrm{x,y}}+\phi_{y,\mathrm{x}}\right\}^{\mathrm{T}}$$

$$\left\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\quad \boldsymbol{\varepsilon}_1\right\}^{\mathrm{T}}=\sum_{i=\overline{1,4}}\mathbf{B}_i^{\mathrm{mb}}=\mathbf{B}^{\mathrm{mb}}\mathbf{q},\qquad \boldsymbol{\varepsilon}_2=\left\{\phi_x+w_{0,x}\quad \phi_y+w_{0,\mathrm{y}}\right\}^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{s}}\mathbf{q}$$

$$\mathbf{B}^k=\left\{\mathbf{B}_1^k\quad \mathbf{B}_2^k\quad \mathbf{B}_3^k\quad \mathbf{B}_4^k\right\}^{\mathrm{T}},k\in\{\mathrm{mb,s}\}\qquad \mathbf{q}=\left\{\mathbf{q}_1\quad \mathbf{q}_2\quad \mathbf{q}_3\quad \mathbf{q}_4\right\}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{B}_i^{\mathrm{mb}}=\begin{bmatrix}N_{i,x}&0&0&0&0\\0&N_{i,y}&0&0&0\\N_{i,y}&N_{i,x}&0&0&0\\0&0&0&N_{i,x}&0\\0&0&0&0&N_{i,y}\\0&0&0&N_{i,\mathrm{y}}&N_{i,x}\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}_i^{s}=\begin{bmatrix}0&0&N_{i,x}&N_{i,y}&0\\0&0&N_{i,y}&0&N_{i,\mathrm{y}}\\0&0&0&N_{i,y}&N_{i,x}\end{bmatrix} \tag{9}$$

根据广义胡克定律，应力由本构关系确定如下：

$$\left\{\sigma_{xx}\quad \sigma_{yy}\quad \sigma_{xy}\right\}^{\mathrm{T}}=\mathbf{Q}^{\mathrm{mb}}\left\{\varepsilon_{xx}\quad \varepsilon_{yy}\quad \varepsilon_{xy}\right\}^{\mathrm{T}},\left\{\tau_{xz}\quad \tau_{yz}\right\}^{\mathrm{T}}=\mathbf{Q}^{s}\left\{\gamma_{xz}\quad \gamma_{yz}\right\}^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

其中 和

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{mb}}=\begin{Bmatrix}Q_{11}&Q_{12}&0\\Q_{21}&Q_{22}&0\\0&0&Q_{44}\end{Bmatrix},\mathbf{Q}^{s}=\begin{Bmatrix}Q_{55}&0\\0&Q_{66}\end{Bmatrix} \tag{11}$$

$$Q_{11}=Q_{22}=\frac{E}{1-\nu^2},Q_{12}=Q_{21}=\frac{E\nu}{1-\nu^2},Q_{44}=Q_{55}=Q_{66}=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

应力合力与应变之间满足以下关系：

$$\left\{N_{\alpha,\beta},M_{\alpha,\beta}\right\}=\int_{-h/2}^{h/2}\{1,z\}\sigma_{\alpha\beta}dz,S_{\alpha}=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{\alpha z}dz \tag{12}$$

其中 。由式（10）和（12）可计算得

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{N}\\ \mathbf{M}\\ \mathbf{S}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}^{\mathrm{mb}} & [\mathbf{0}]\\ [\mathbf{0}] & \mathbf{D}^{\mathrm{s}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_0\\ \boldsymbol{\varepsilon}_1\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\end{Bmatrix}=\mathbf{D}^{\mathrm{mb}}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_0\\ \boldsymbol{\varepsilon}_1\end{Bmatrix}+\mathbf{D}^{\mathrm{s}}\boldsymbol{\varepsilon}_2=\mathbf{D}^{\mathrm{mb}}\mathbf{B}^{\mathrm{mb}}\mathbf{q}+\mathbf{D}^{\mathrm{s}}\mathbf{B}^{\mathrm{s}}\mathbf{q} \tag{13}$$

其中

$$\mathbf{D}^{\mathrm{mb}}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}^1 & \mathbf{A}^2\\ \mathbf{A}^2 & \mathbf{A}^3\end{bmatrix},\mathbf{D}^{s}=\int_{-h/2}^{h/2}\mathbf{Q}^{s}dz \tag{14}$$

$$A_{ij}^1=\int_{-h/2}^{h/2}\mathbf{Q}^{\mathrm{mb}}dz,A_{ij}^2=\int_{-h/2}^{h/2}z\mathbf{Q}^{\mathrm{mb}}dz,A_{ij}^3=\int_{-h/2}^{h/2}z^3\mathbf{Q}^{\mathrm{mb}}dz \tag{15}$$

3.2 MITC4方案的构造

与薄板单元相比，厚板单元的构造更为直接：其挠度和转角分别独立定义，并基于Mindlin-Reissner板理论建立弯曲分量（Zhang and Kuang 2007）。然而，对于薄板，若仅采用未经特殊处理的低阶标准等参位移型板单元，则由于剪切锁定现象，在薄板极限下，模型中类似Kirchhoff约束的剪切应变会出现不稳定性（Arnold 1981）。因此，基于近似的膜-弯曲部分，采用MITC4的假定协变横向剪切应变场（Thompson and Thangavelu 2002）定义剪切能，以消除一阶剪切变形理论板理论中的剪切锁定现象。然而，剪切应变部分的近似必须重新定义为沿单元边中点进行线性插值；也就是说，如图4所示，假定局部对流坐标中的横向剪切插值沿ν 方向为线性。

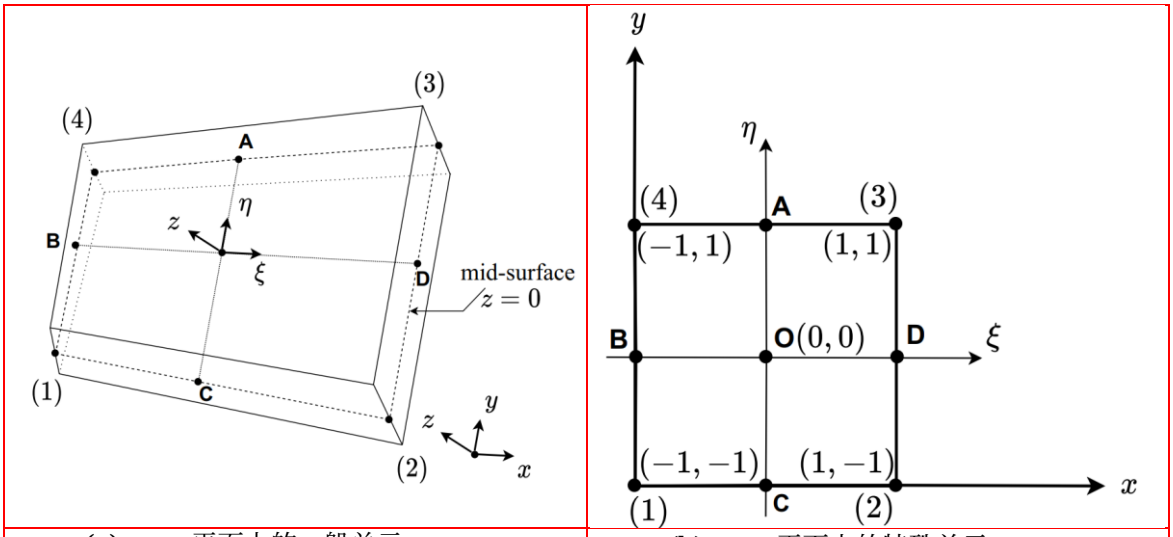
$$\boldsymbol{\gamma}_{\xi\nu}=\begin{bmatrix}\gamma_\xi\\ \gamma_\nu\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}(1-\nu)\gamma_\xi^{C}+(1+\nu)\gamma_\xi^{A}\\ (1-\nu)\gamma_\xi^{B}+(1+\nu)\gamma_\xi^{D}\end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{xy}=\begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_{,x} & \nu_{,x}\\ \xi_{,y} & \nu_{,y}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\gamma_\xi\\ \gamma_\nu\end{bmatrix}=\mathbf{J}^{-1}\begin{bmatrix}\gamma_\xi\\ \gamma_\nu\end{bmatrix} \tag{17}$$

其中，A、B、C 和 D 点处的应变分量为：

$$\gamma_\psi^\chi=x_{,\psi}^\chi\frac{\phi_x^a+\phi_x^b}{2},+y_{,\psi}^\chi\frac{\phi_y^a+\phi_y^b}{2}+\frac{w_a-w_b}{2} \tag{18}$$

其中。 ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) { 21 34 41 32 },,
,,,,,,,,,,,,,,,abCABDξψ = ξ ξ ν ν



(a) x – y 平面上的一般单元　　(b) x – y 平面上的特殊单元

图 4 四边形板单元 MITC4 的几何形状

采用 MITC4 技术，修正剪切应变分量的近似可表示为

$$\boldsymbol{\gamma}^{m}=\mathbf{J}^{-1}\left\{\boldsymbol{\gamma}_{\xi\nu}^{1}\quad\boldsymbol{\gamma}_{\xi\nu}^{2}\quad\boldsymbol{\gamma}_{\xi\nu}^{3}\quad\boldsymbol{\gamma}_{\xi\nu}^{4}\right\}^{\mathrm{T}}\left\{w^{(i)}\quad\phi_{x}^{i}\quad\phi_{y}^{i}\right\}=\mathbf{B}^{\mathrm{m}}\mathbf{q}\tag{19}$$

其中

$$\boldsymbol{\gamma}_{\xi\nu}^{i}=\begin{bmatrix}N_{,\xi}^{(i)} & \xi^{(i)}x_{,\xi}^{B,D}N_{,\xi}^{(i)} & \xi^{(i)}y_{,\xi}^{B,D}N_{,\xi}^{(i)}\\ N_{,\nu}^{(i)} & \eta^{(i)}x_{,\eta}^{B,D}N_{,\eta}^{(i)} & \eta^{(i)}y_{,\eta}^{B,D}N_{,\eta}^{(i)}\end{bmatrix}\tag{20}$$

其中 和 **J** 是映射的雅可比变换矩阵。

3.3 能量与频率方程

初始受应力板的总应变能由振动应力产生的应变能表示如下。

$$U=\frac{1}{2}\int_{V_e}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\varepsilon_{yy}+\sigma_{xy}\varepsilon_{xy}+\tau_{xz}\gamma_{xz}+\tau_{yz}\gamma_{yz}\right)dV_e\tag{21}$$

应用有限元模型:

$$\delta U=\int_{\Omega_e}\left[\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{B}^{\mathrm{mb}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}^{\mathrm{mb}}\mathbf{B}^{\mathrm{mb}}\mathbf{q}+\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{B}^{\mathrm{s}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}^{\mathrm{s}}\mathbf{B}^{\mathrm{s}}\mathbf{q}\right]d\Omega_e\tag{22}$$

其中 其中

$$\mathbf{N}_i^{\mathrm{Th}}=\begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & zN_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & N_{i,x} & 0 & 0 \\ N_{i,y} & 0 & 0 & zN_{i,y} & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & zN_{i,y} \\ 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

施加的横向载荷所做的虚功，-面内屈曲力、典型有限元的地基反力以及虚动能 分别记为， 和 具体如下。

q_0 Ω_e

δV δV_B δV_S δK

$$\delta V=-\int_{\Omega_e} q_0\delta w_0 d\Omega_e=-\int_{\Omega_e}\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}q_0\mathbf{N}_w d\Omega_e \tag{24}$$

$$\delta V_B=-\int_{\Omega_e}\left(\nabla\delta w_0\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{N}^0\nabla w_0 d\Omega_e=-\int_{\Omega_e}\left(\mathbf{B}_g\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{N}^0\mathbf{B}_g d\Omega_e \tag{25}$$

$$\delta W_s=k_W\int_{\Omega_e} w_0\delta w_0 d\Omega_e=\int_{\Omega_e}\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{N}_w^T k_W\mathbf{N}_w\right)\mathbf{q}d\Omega_e \tag{26}$$

$$\delta K=\int_{V_e}\rho\left(\ddot{u}\delta u+\ddot{v}\delta v+\ddot{w}\delta w\right)dV_e=\omega^2\int_{\Omega_e}\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{N}_p^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\mathbf{N}_p\right]\mathbf{q}d\Omega_e \tag{27}$$

其中 为如图5所示的温克勒地基反力模量，且 k_W

$$\mathbf{N}_w=\left\{\mathbf{N}_w^1\quad\mathbf{N}_w^2\quad\mathbf{N}_w^3\quad\mathbf{N}_w^4\right\}^{\mathrm{T}},\mathbf{N}_w^i=\left[0\quad 0\quad N_i\quad 0\quad 0\right] \tag{28a}$$

$$\mathbf{B}_g=\left\{\mathbf{B}_g^1\quad\mathbf{B}_g^2\quad\mathbf{B}_g^3\quad\mathbf{B}_g^4\right\}^{\mathrm{T}},\mathbf{B}_g^i=\begin{bmatrix}0&0&N_{i,x}&0&0\\0&0&N_{i,y}&0&0\end{bmatrix} \tag{28b}$$

$$\mathbf{N}_p=\left\{\mathbf{N}_p^1\quad\mathbf{N}_p^2\quad\mathbf{N}_p^3\quad\mathbf{N}_p^4\right\}^{\mathrm{T}},\mathbf{N}_p^i=\left\{\mathbf{N}_p^{i1}\quad\mathbf{N}_p^{i2}\quad\mathbf{N}_p^{i3}\right\}^{\mathrm{T}} \tag{28c}$$

$$\mathbf{N}_p^{i1}=\begin{bmatrix}N_i&0&0&0&0\\0&0&0&N_i&0\end{bmatrix},\mathbf{N}_p^{i2}=\begin{bmatrix}0&N_i&0&0&0\\0&0&0&0&N_i\end{bmatrix} \tag{28d}$$

$$\mathbf{N}_p^{i3}=\begin{bmatrix}0&0&N_i&0&0\\0&0&0&N_i&0\end{bmatrix},\mathbf{N}_0=\begin{bmatrix}N_{xx}^0&N_{xy}^0\\N_{xy}^0&N_{yy}^0\end{bmatrix} \tag{28e}$$

$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix}\mathbf{m}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\text{米}\quad {}_0=\begin{bmatrix} & I_1\\ I_1 & I_2\end{bmatrix} \tag{28f}$$

$$I_0=\int_{-h/2}^{h/2}\rho(x,y,z)dz, I_1=\int_{-h/2}^{h/2}z\rho(x,y,z)dz, I_2=\int_{-h/2}^{h/2}z^2\rho(x,y,z)dz \tag{28g}$$

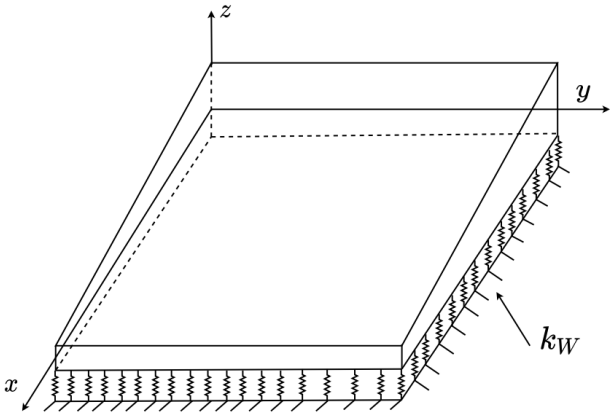


Fig. 5 嵌入弹性地基中的非均匀厚度板模型由 Winkler 模 el

请注意，变量上的上置点表示时间导数，且上述方程基于板的简谐运动这一假设推导而得，即 其中 ω 表示固有振动频率； ρ(x, y, z) 为质量密度/体积；$\ddot{\ }$ 是 ω^2 个包含面内施加力的矩阵-。

因此，置于 Winkler地基上的 TD-FG板的静态弯曲、自由振动和屈曲问题的有限元模型分别表示为以下线性代数方程的形式

$$\mathbf{Kq}=\mathbf{F},(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})\mathbf{q}=\mathbf{0},(\mathbf{K}-\lambda_{cr}\mathbf{K}_g)\mathbf{q}=\mathbf{0} \tag{29}$$

其中 $\mathbf{q}$ 是有限元分析中的自由度向量，，以及 $\mathbf{F}$ 分别为刚度矩阵、单元质量矩阵、几何刚度矩阵和单元施加载荷向量，其定义如下

$$\begin{aligned}&\mathbf{K}=\int_{\Omega}\left(\mathbf{B}^{\mathrm{mb}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}^{\mathrm{mb}}\mathbf{B}^{\mathrm{mb}}+\left(\mathbf{B}^{\mathrm{s}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}^{\mathrm{s}}\mathbf{B}^{\mathrm{s}}+\mathbf{N}_w^{\mathrm{T}}k_W\mathbf{N}_w d\Omega_e\\ &\mathbf{M}=\int_{\Omega_e}\mathbf{N}_p^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\mathbf{N}_p d\Omega_e,\mathbf{K}_g=\int_{\Omega_e}\mathbf{B}_g^{\mathrm{T}}\mathbf{N}^0\mathbf{B}_g d\Omega_e,\mathbf{F}=\int_{\Omega_e}\mathbf{N}_w^{\mathrm{T}}q_0 d\Omega_e\end{aligned} \tag{30}$$

4. 创建深度神经网络（DNN）的预测

4.1 创建深度神经网络模型

为了预测板的无-量纲基频，我们首先必须使用若干组材料参数、弹性地基刚度和无-量纲基频来训练人工神经网络模型。该人工神经网络模型将设置以下输入数据：体积分数指标（k_x、k_y、k_z）、地基刚度、长-厚比（a/h_0）、问题类型；输出则是根据问题类型确定的无-量纲值：弯曲时为中心挠度)，自由振动时为基频)，以及单-轴和双轴屈曲问题中的临界屈曲载荷 $\bar{w}$ --。

4.2 收集训练数据

完成采用 MITC4 实现有限元法以处理厚度方向功能梯度变厚度板后，现有方法通过与参考文献对比，验证了其具有较高的准确性。随后，将所有结果收集起来，作为深度神经网络模型的样本，其输入变量包括：“问题”（弯曲、自由振动、单向屈曲和双向屈曲）、“边界条件”（四边固支、四边简支、CFCF、SFSF、CSCS，其中“C”“S”和“F”分别表示固支、简支和自由边界条件）、k_x、k_y、k_z 以及板的类型（如图1所示）、a/h_0；结果则为这些变量对应的无量纲数据。所有训练和测试问题均采用 TD-FG SUS304/Si_3N_4。在深度神经网络的训练过程中，通过对弹性地基上厚度方向功能梯度变厚度板的通用代码进行迭代，随机生成数据集中的训练样本。针对厚度方向功能梯度问题，共为训练集设计了20,000个随机输入的训练样本。请注意，随机选取90%的数据样本用于训练，剩余10%用于验证。利用该数据集，深度神经网络经过5,000个训练轮次进行训练，以获得由权重表示的最优映射规则。

4.3 理论深度神经网络模型

一层感知机（MLP）模型架构用于预测无量纲值。本文中的模型由三个隐藏层组成，输入层中的神经元数量如前文所述。由于模型较浅（仅有三个

隐藏层），因此选择 Sigmoid 函数作为激活函数，而非尽管广受欢迎的 ReLU 或其变体。采用 Adam 优化器（Kingma 和 Ba，2014年）作为专为训练深度神经网络而设计的自适应学习率优化算法。损失函数定义如下：

$$L = MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1,n}\left(Y_i - Y_i\right)^2 \tag{31}$$

其中，MSE 表示均方误差，n 表示批量大小，Y_i表示真实值， 表示预测值。

为了加快神经网络（NN）的训练并提高其稳定性，我们采用了一种名为批归一化（BN，Ioffe 和 Szegedy，2015年）的算法方法。批归一化通过使用当前批次的第一阶和第二阶统计矩（均值和方差），对隐藏层的激活向量进行归一化。该归一化步骤在非线性函数之前（或之后）进行。训练阶段和测试阶段的批归一化计算方式有所不同。在每个隐藏层，批归一化按如下方式变换信号：

$$Z=\frac{Z^{(i)}-\mu_i}{\sqrt{\sigma_i^2+\varepsilon}}*\gamma_i+\beta_i,\mu=\frac{1}{n}\sum_i Z^{(i)},\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_i\left(Z^{(i)}-\mu\right)^2$$
$$Z_{\text{norm}}^{(i)}=\left(Z^{(i)}-\mu\right)/\sqrt{\sigma^2+\varepsilon} \quad (31)$$

批归一化层首先计算批次中激活值的均值 μ 和方差 ，然后对激活向量进行归一化 。 这样，每个神经元的输出在整个批次中都符合标准正态分布。最后，通过应用线性变换计算该层的输出 ，其中包含两个可训练参数 γ 和 β。在每个 隐藏层中，深度神经网络模型会选择最优分布。在每次迭代中，网络都会计算当前批次对应的均值 μ 和标准差 σ，并训练 γ 和 β。输入数据在馈入神经网络模型之前会进行预-处理。非-标量值采用独热编码，而标量值则使用 Z-分数归一化进行归一化：新值 = ，其中 表示原始值，μ 表示数据的均值，而 σ 表示数据的标准差。( )

表1展示了批归一化在多层感知机（MLP）中的优势。表2对比了采用不同激活函数（Sigmoid、Softplus、ReLU 和 Tanh）的 Adam 优化器。可以看出，对于训练误差和验证误差而言，最佳选择都是采用批归一化的 Sigmoid 函数。

表1 采用和未采用批归一化的多层感知机对比。

未采用批归一化	采用批归一化
• Raw signal	• 归一化信号
• 分布间的相互依赖性较强	• 分布间的相互依赖性有所减弱
• 训练缓慢且不稳定	• 训练快速且稳定

表2 Adam 优化器使用激活函数时训练集和验证集的均方误差。

	未使用批归一化				使用批归一化			
	Sigmoid	Softplus	ReLU	Tanh	Sigmoid	Softplus	ReLU	Tanh
训练	1.84%	1.41%	0.52%	0.50%	0.72%	0.72%	0.75%	0.59%
有效	4.54%	2.71%	1.92%	1.36%	1.19%	1.31%	3.54%	1.83%

深度神经网络模型如图 6 所示，而图 7 展示了上述深度神经网络模型所得训练损失函数和验证损失函数的收敛历程。图 8 描绘了采用深度神经网络方法预测置于弹性温克勒地基上的变厚度 TD-FG 板问题无量纲值的流程图。

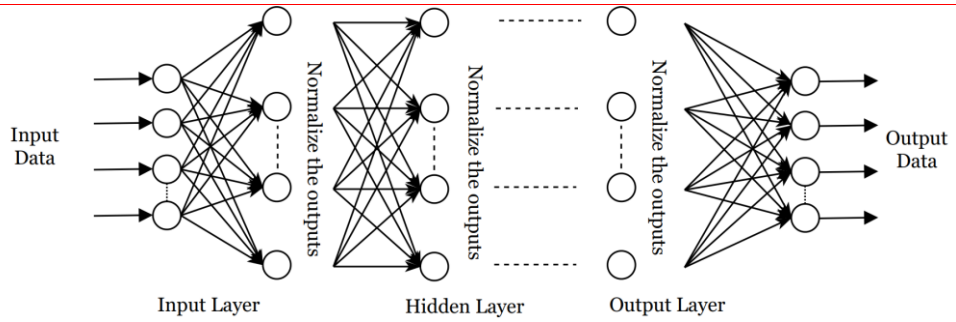


图6 包含输入数据和输出数据的深度神经网络模型。

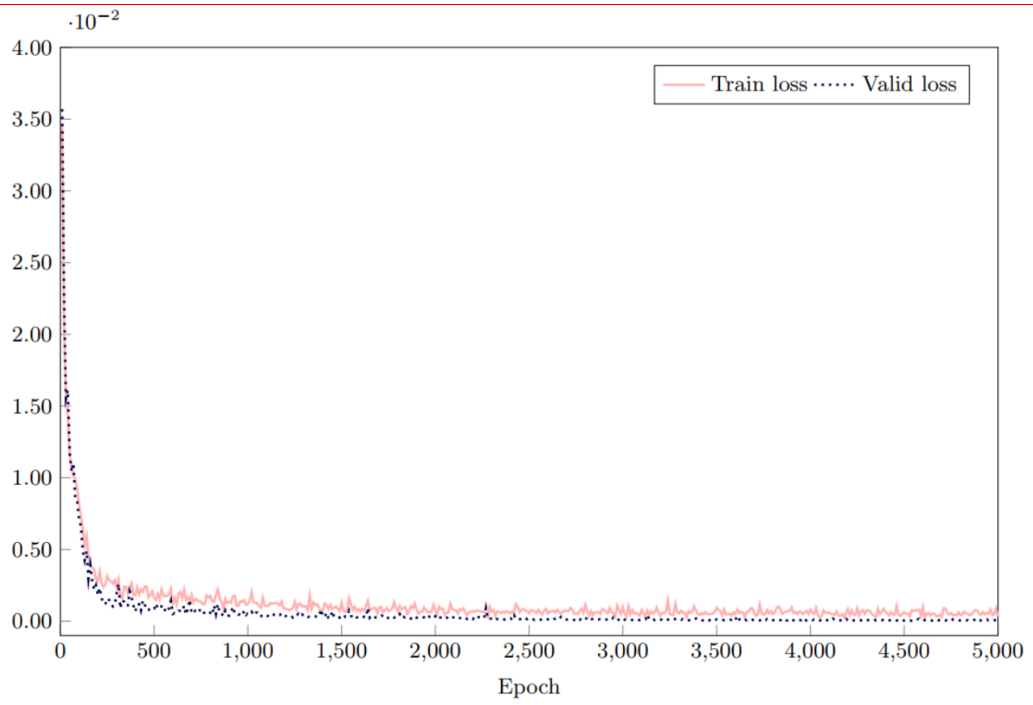


图7 随机数据集下训练损失函数和验证损失函数的收敛历程

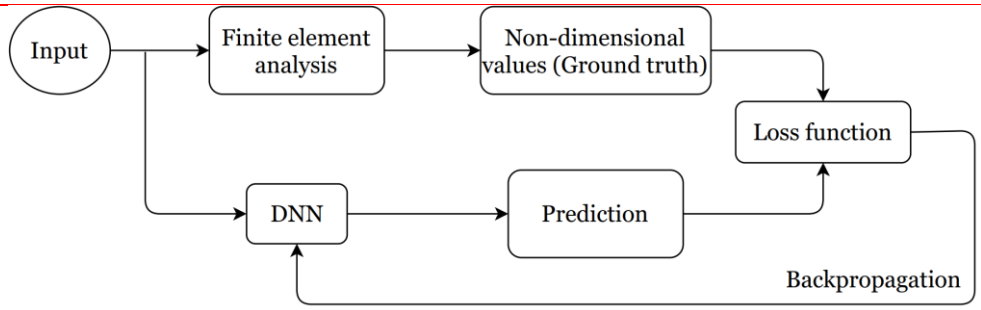


图8　用于预测静态、动态和稳定性问题行为的深度神经网络计算流程图　s

5. 数值算例

本研究通过考察若干类型的多向功能梯度板的弯曲、自由振动和屈曲行为，将所提出的方法与以往论文进行验证，并给出基于DNN预测的新结果。首先，这些功能梯度板的材料性能列于表3：

表3 普通功能梯度材料的信息。

	材料	E（帕）	ν	( )千克/米ρ
陶瓷	氮化硅（Si_3N_4）	348.43	0.24	2370
	氧化铝（Al_2O_3）	380	0.3	3800
	氧化锆（ZrO_2）	151	0.3	3000
金属	不锈钢（SUS304）	201.04	0.3262	8166
	铝（Al）	70	0.32	2702

采用 Mori-Tanaka 方法估算功能梯度材料的性能，并在各线性代数和特征值问题中考察单-、双-和三-向功能梯度材料。此外，还考虑了梯度指数、边界条件、长-厚-比、陶瓷相温度（仅限热问题）以及弹性 Winkler 参数对多-向功能梯度板的影响。本节所有问题中的剪切修正系数均固定为 SCF =。 与参考结果对比后，计算本研究的所有无-量纲弯曲问题数值（中心挠度 ）、自由-振动问题数值（固有频率 ）以及单-轴和双-轴屈曲问题数值（临界屈曲载荷 ），并收集了功能梯度材料 SUS304/Si_3N_4 的数据，如下所示：

$$\bar{w}\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)=w\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)\frac{E_c h_0^2}{a^3 q_0} \tag{33a}$$

$$\bar{\omega}=\omega\left(a/\pi\right)^2\sqrt{\frac{\rho_c h_0}{D_c}} \tag{33b}$$

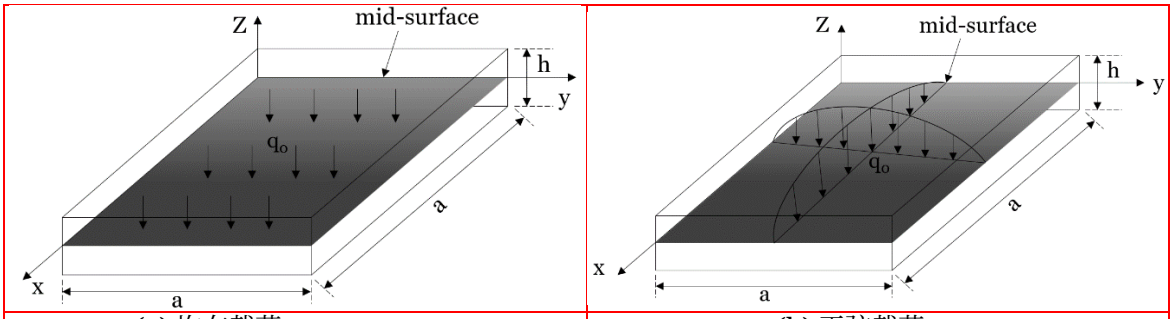
$$\bar{P}_{cr}=\frac{P_{cr}a^2}{\pi^2 D_c} \tag{33c}$$

其中 。

4.1 弯曲问题

例1：本例研究具有均匀厚度的单向功能梯度（Al/ZrO_2）厚板（k_x=k_y=0），其长厚比为 a/h_0 = 5 ，采用三种不同的边界条件：四边固支、四边简支和 SFSF。本例中的载荷分布设定为均布载荷，大小为 q=q_0=-1（见图9a）。各向同性材料属性根据 Mori-Tanaka 模型中组分体积分数的分布确定。无量纲横向位移可定义为

$$\bar{w}\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)=100w\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)\frac{q_0E_mh_0^3}{12a^4\left(1-\nu_m^2\right)} \tag{34}$$



(a) 均布载荷　　(b) 正弦载荷

图9 均布载荷和正弦载荷作用下功能梯度板的几何形状

图10展示了具有四边简支和四边固支边界条件的UD-FG板弯曲问题中无量纲横向位移，并将其与广义剪切变形理论（Nguyen-Xuan 等 2014年）和三阶剪切变形理论（Tran 等 2013年）的结果进行了比较。从图中可以看出，所得横向位移与现有结果吻合良好，相对误差百分比较小。

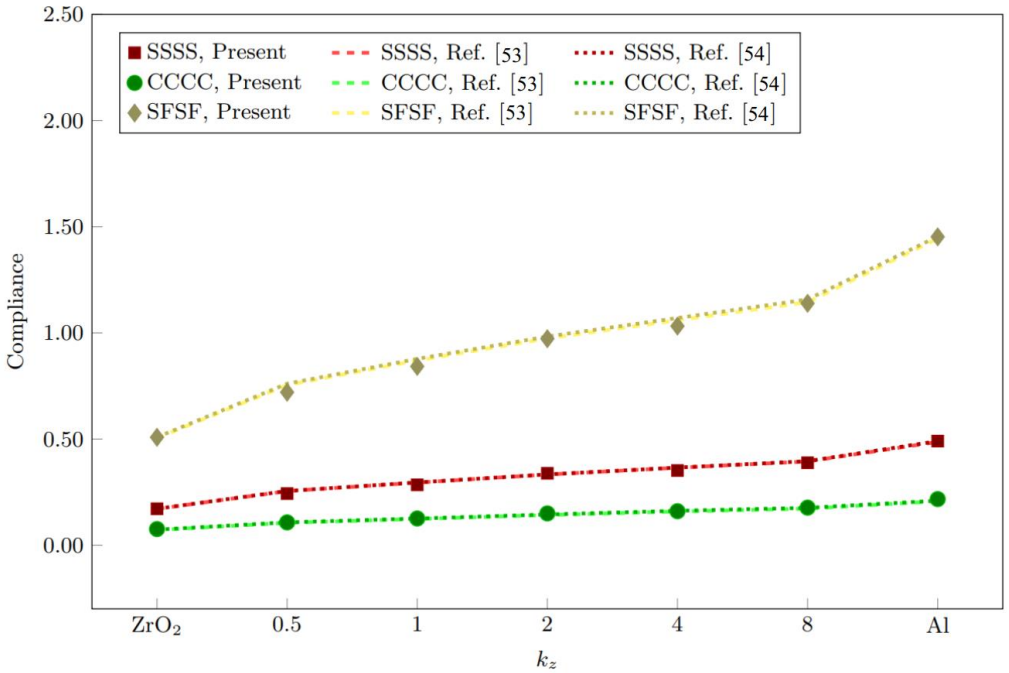


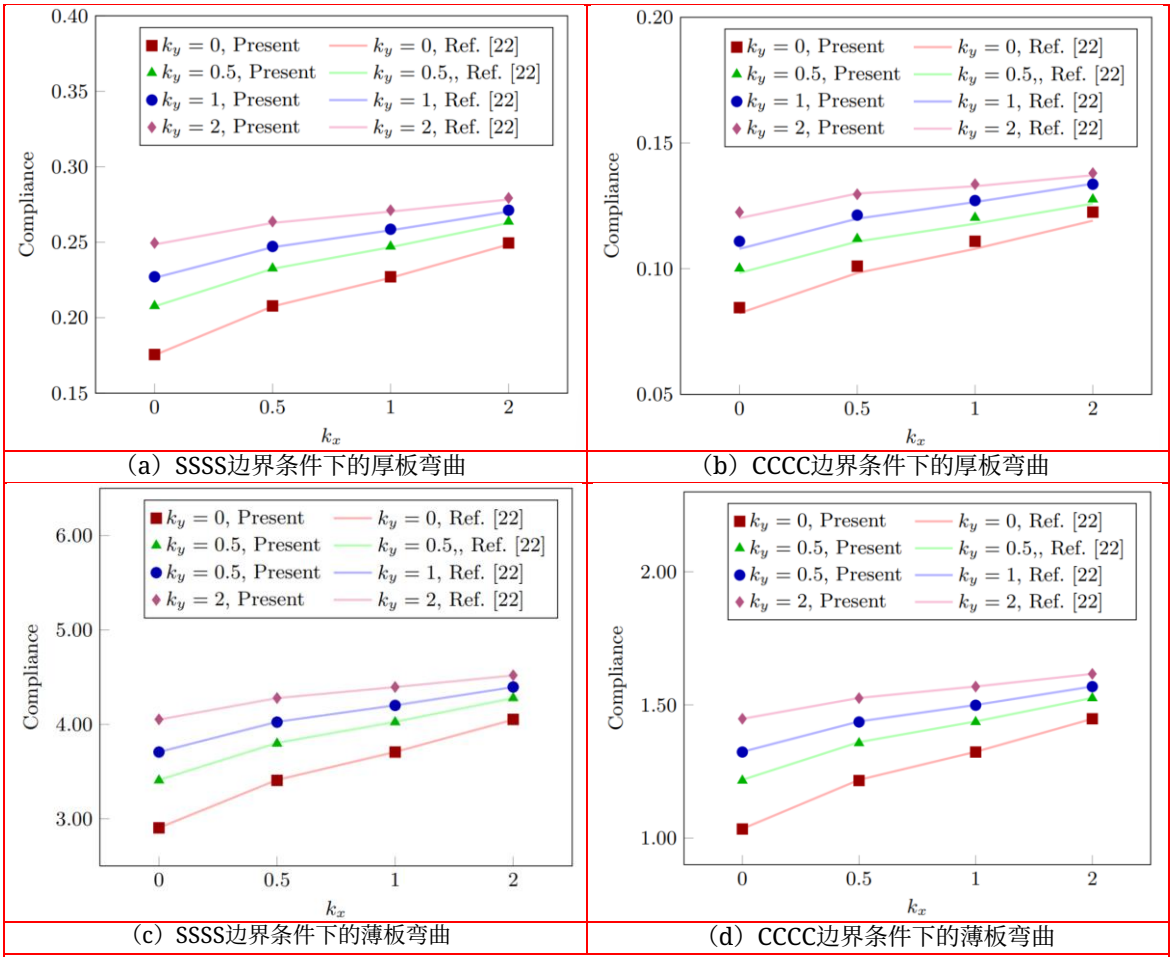
图10 均布载荷作用下UD-FG Al/ 板弯曲问题中的无量纲横向位移对比　　ZnO_2

示例 2： 面内-双向-功能梯度 SUS304/Si_3N_4 (k_z=0) 方板承受正弦载荷，载荷大小为 （如图 9b 所示），在本例中进行研究。

( ) ( ) 0 0 正弦 / 正弦 / , 1 q q x a y a q

= π π =

示例。考察板在-CCCC和SSSS边界条件下的无量纲中心挠度（见式33a），并与Lieu等（2018）的结果进行比较。图11展示了上述问题与先前研究在厚板（$a/h_0=5$）和薄板（$a/h_0=100$）情况下的比较。从图中可以看出，本文方法得到的结果与参考结果非常吻合。



（a）SSSS边界条件下的厚板弯曲　（b）CCCC边界条件下的厚板弯曲

（c）SSSS边界条件下的薄板弯曲　（d）CCCC边界条件下的薄板弯曲

图11 SSSS和CCCC边界条件下无量纲中心挠度的比较
适用于双向功能梯度 SUS304/Si_3N_4 方形厚板和薄板。

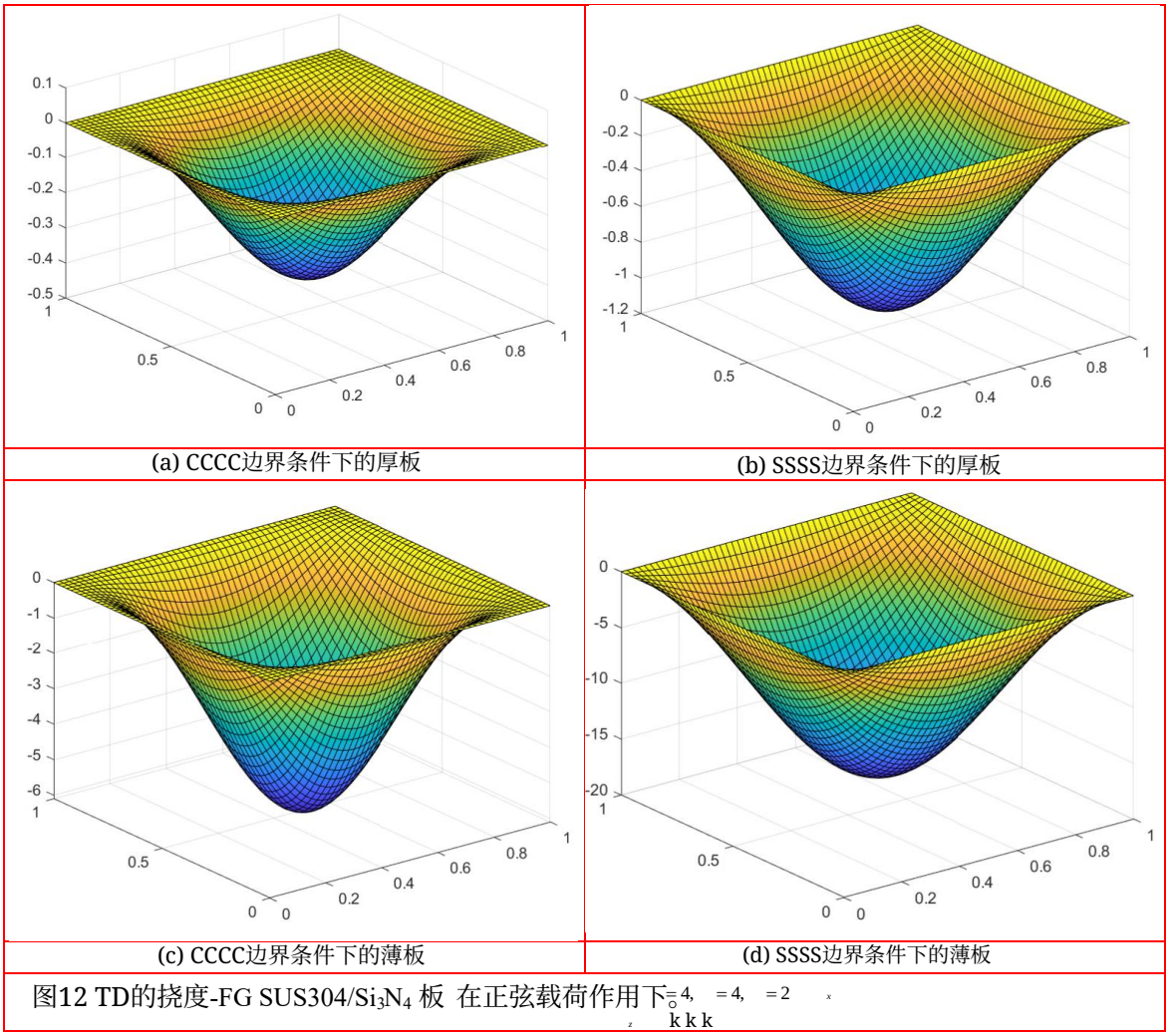
从上述示例可以得出结论，本文针对该力学问题采用的解析方法有效且可靠，可用于分析功能梯度板的弯曲行为。因此，在后续示例中，本文方法可为深度神经网络中与弯曲问题相关的训练过程提供生成数据集。

示例3：本例考虑一个承受正弦载荷的厚度方向功能梯度 SUS304/Si_3N_4 方板，如图9b所示。针对该板的无量纲中心挠度公式（33a），考察四边固支和四边简支边界条件。表4展示了本研究对上述问题的分析结果及深度神经网络预测值，分别对应厚板（$a/h_0=20$）和薄板（$a/h_0=50$）情况。可以看出，DNN预测值与采用有限元法得到的本研究结果

（使用MITC4进行的分析）一致，这验证了深度神经网络模型的准确性。厚度方向功能梯度弯曲问题的最大相对误差为-厚板 $a/h_0=20$ 、四边固支 $k_x=8$、$k_y=4$、$k_z=2$ 时的2.5492%（有限元法结果为0.3550，DNN预测值为0.3529）。此情况下的平均相对误差为1.3065%。图12展示了四边固支和四边简支条件下、k-厚度方向功能梯度厚板和薄板的挠度，以及 $k_x=4$、$k_y=4$、$k_z=2$。

表4 四边固支和四边简支厚度方向功能梯度 SUS304/Si_3N_4 厚方板$a/h_0=20$ 和薄板$a/h_0=50$的无量纲中心挠度。

		k_z	k_x	2		4		8	
			k_y	现在	预测	现在	预测	现在	预测
厚板	CCCC	2	2	0.3488	0.3640	0.3521	0.3587	0.3538	0.3461
			4	0.3521	0.3597	0.3540	0.3527	0.3550	0.3460
			8	0.3538	0.3568	0.3550	0.3529	0.3555	0.3500
		6	2	0.3512	0.3599	0.3534	0.3570	0.3545	0.3525
			4	0.3534	0.3569	0.3546	0.3534	0.3553	0.3512
			8	0.3545	0.3555	0.3553	0.3537	0.3556	0.3513
	SSSS	2	2	0.9471	0.9459	0.9558	0.9666	0.9614	0.9633
			4	0.9558	0.9653	0.9602	0.9747	0.9634	0.9650
			8	0.9614	0.9717	0.9634	0.9744	0.9651	0.9620
		6	2	0.9543	0.9747	0.9600	0.9836	0.9637	0.9791
			4	0.9600	0.9801	0.9629	0.9834	0.9650	0.9761
			8	0.9637	0.9756	0.9650	0.9751	0.9661	0.9687
薄板	CCCC	2	2	0.8379	0.8490	0.8458	0.8576	0.8500	0.8614
			4	0.8458	0.8554	0.8503	0.8603	0.8527	0.8643
			8	0.8500	0.8581	0.8527	0.8623	0.8541	0.8677
		6	2	0.8436	0.8505	0.8489	0.8584	0.8516	0.8619
			4	0.8489	0.8586	0.8519	0.8623	0.8534	0.8634
			8	0.8516	0.8624	0.8534	0.8639	0.8543	0.8643
	SSSS	2	2	2.3385	2.3738	2.3601	2.3985	2.3739	2.4038
			4	2.3601	2.4023	2.3710	2.4135	2.3789	2.4124
			8	2.3739	2.4158	2.3789	2.4200	2.3830	2.4169
		6	2	2.3562	2.3851	2.3704	2.4020	2.3795	2.4143
			4	2.3704	2.4028	2.3776	2.4104	2.3828	2.4165
			8	2.3795	2.4130	2.3828	2.4146	2.3855	2.4179



(a) CCCC边界条件下的厚板　(b) SSSS边界条件下的厚板

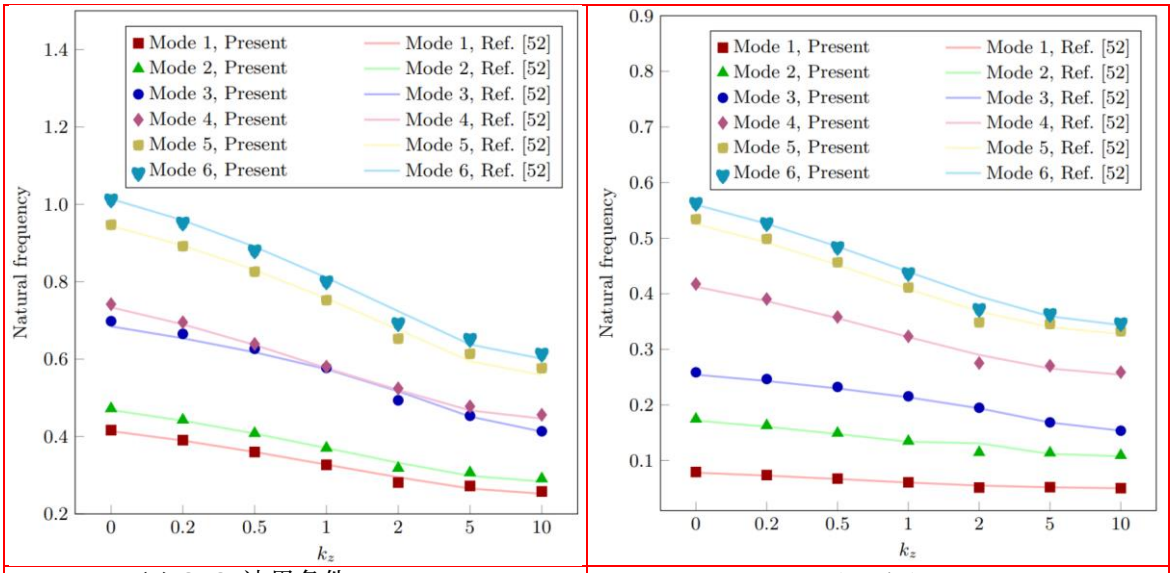
(c) CCCC边界条件下的薄板　(d) SSSS边界条件下的薄板

图12 TD的挠度-FG SUS304/Si_3N_4 板 在正弦载荷作用下

5.2 自由振动问题

本部分将从分析和预测两个方面研究自由振动算例。

例4： Al/Al_2O_3 单向-功能梯度板在CFCF和CFFF两种边界条件下进行研究。在此例中，采用无量纲频率。功能梯度材料属性的材料分布通过混合法则估算。图13展示了与三维求积单元法以及Wang等（2019）结果的比较。从结果可以看出，所得频率与先前结果吻合良好，误差极小。- -

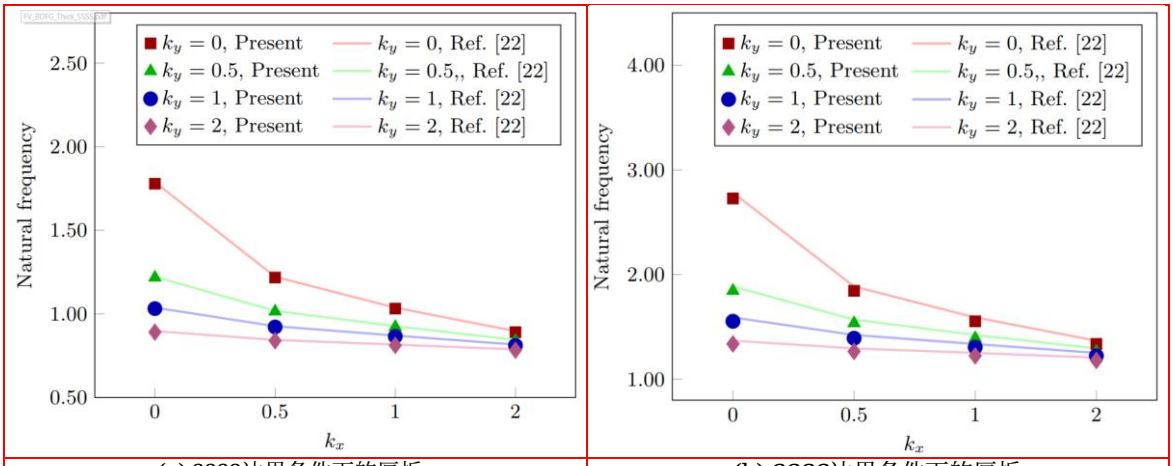


(a) CFCF边界条件　　(b) CFFF边界条件

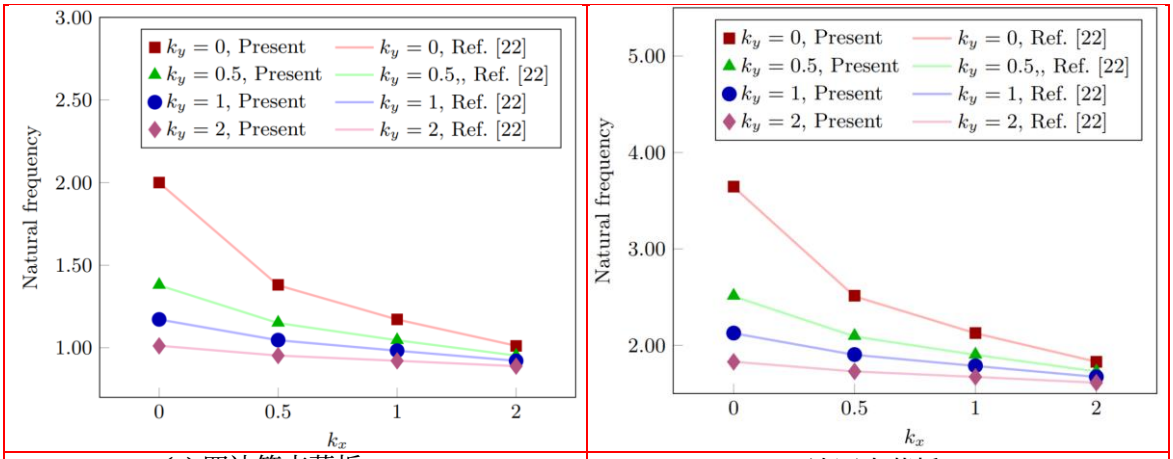
图13 CFCF和CFFF边界条件下前六阶无量纲频率的比较

单向-功能梯度 Al/ 方板。

算例5：本算例旨在参照 Lieu等（2018）的研究，考察均匀厚度面内BD-FG板（k_z=0）的自由振动响应。针对IBFG方板，分别研究厚（a/h_0=5）和薄（a/h_0=100）两种情况下的厚度 h_0，其中a为模型长度。SUS304/Si_3N_4 IBFG方板的无量纲频率由公式（33b）定义。图14展示了前述问题在不同指标 k_x 和 k_y取值下，四边固支和四边简支边界条件对应的第一阶无量纲频率。结果表明，本文方法对双向功能梯度板的自由振动分析有效且可靠。此外，当前方法的准确性能够确保生成的数据集适用于后续深度神经网络训练过程。



(a) SSSS边界条件下的厚板　　(b) CCCC边界条件下的厚板



(c) 四边简支薄板　　(d) 四边固支薄板

图14 四边固支和四边简支边界条件下的第一阶无量纲频率对比
双向功能梯度 SUS304/Si_3N_4 厚方板和薄方板。

示例6：在本例中，研究采用三种厚度模型的厚度方向功能梯度厚板和薄板的自由振动响应：均匀（类型1）、非均匀线性（类型2）和非均匀非线性（类型3）。SUS304/Si_3N_4 厚度方向功能梯度方板的无量纲频率如公式（33b）所定义。

表5、6、7和8分别展示了四边固支和四边简支边界条件下三种厚度类型的三向功能梯度板的第一阶无量纲固有频率。可以看出，所有情况的相对误差均小于2.5%，其中TD-FG板自由振动在四边固支和四边简支边界条件下的平均相对误差分别为1.7551%和1.0176%。另一方面，不同厚度类型下的相对误差分别为1.1611%（类型1）、1.6332%（类型2）和1.3647%（类型3）。具体而言，从表中可以看出，随着梯度指数k_x、k_y和k_z增大，陶瓷相的占比会降低，从而导致板的刚度下降。众所周知，振动频率与板的刚度成正比；因此，随着梯度指数增大，所得频率会降低。此外，从表5-7和表6-8的对比中可以看出，长厚比增大时，无量纲频率也会升高。图15、16和17展示了三种厚度类型下，具有k_x=5、k_y=5、k_z=2 的TD-FG SUS304/Si_3N_4 方板a/h_0=100 在四边简支边界条件下的前三阶自由振动模态。

表 5 CCCC边界条件下厚度方向功能梯度SUS304/SiN厚方板第一阶无量纲频率的对比研究$a/h_0=10$。

$\bar{\omega}=\omega\ \ \pi\ \ \sqrt{\rho}\ \ \sqrt{\ }\ \ =\ \ -\nu$

	k_z		k_x							
			1		2		5		10	
		k_y	现在	预测	现在	预测	现在	预测	现在	预测
Uniform	1	1	1.4903	1.4732	1.4435	1.4373	1.4020	1.4019	1.3900	1.3862
		2	1.4435	1.4340	1.4172	1.4139	1.3930	1.3945	1.3858	1.3833
		5	1.4020	1.4051	1.3930	1.3976	1.3844	1.3867	1.3818	1.3798
		10	1.3900	1.3908	1.3858	1.3871	1.3818	1.3830	1.3807	1.3760
	2	1	1.4579	1.4419	1.4256	1.4162	1.3964	1.3933	1.3877	1.3827
		2	1.4256	1.4159	1.4070	1.4034	1.3897	1.3897	1.3845	1.3812
		5	1.3964	1.3989	1.3897	1.3936	1.3834	1.3848	1.3815	1.3792
		10	1.3877	1.3885	1.3845	1.3860	1.3815	1.3836	1.3806	1.3760
Non-uniform	1	1	1.9789	1.9643	1.9170	1.9031	1.8655	1.8489	1.8509	1.8326
		2	1.9203	1.9007	1.8852	1.8674	1.8547	1.8376	1.8459	1.8271
		5	1.8681	1.8542	1.8557	1.8441	1.8444	1.8272	1.8412	1.8229
		10	1.8522	1.8418	1.8465	1.8371	1.8412	1.8291	1.8398	1.8259
	2	1	1.9374	1.9114	1.8948	1.8712	1.8586	1.8398	1.8480	1.8304
		2	1.8971	1.8720	1.8723	1.8528	1.8507	1.8328	1.8443	1.8262
		5	1.8604	1.8476	1.8513	1.8395	1.8431	1.8256	1.8407	1.8237
		10	1.8490	1.8394	1.8447	1.8349	1.8407	1.8294	1.8396	1.8268
Non-uniform	1	1	1.7353	1.7262	1.6804	1.6817	1.6318	1.6332	1.6175	1.6154
		2	1.6804	1.6746	1.6496	1.6477	1.6213	1.6191	1.6128	1.6097
		5	1.6318	1.6321	1.6213	1.6203	1.6113	1.6067	1.6083	1.6047
		10	1.6175	1.6165	1.6128	1.6110	1.6083	1.6075	1.6069	1.6043
	2	1	1.6972	1.6866	1.6594	1.6545	1.6253	1.6222	1.6149	1.6109
		2	1.6594	1.6516	1.6377	1.6331	1.6175	1.6134	1.6113	1.6074
		5	1.6253	1.6239	1.6175	1.6153	1.6101	1.6057	1.6078	1.6047
		10	1.6149	1.6134	1.6113	1.6097	1.6078	1.6087	1.6068	1.6052

表6 厚度方向功能梯度SUS304/Si_3N_4 厚方板在CCCC边界条件下第一阶无量纲频率的对比研究 a/h $_0$=10。( ) ( ) 2 3 2 0 0 12 1 / / , / c c c c c a h D D E h

$\omega = \omega_0 \pi \sqrt{\rho} = -\nu$

	k_z		k_x							
			1		2		5		10	
		k_y	现在	预测	现在	预测	现在	预测	现在	预测
Uniform	1	1	1.6527	1.6377	1.6009	1.5929	1.5552	1.5549	1.5423	1.5382
		2	1.6009	1.5859	1.5720	1.5630	1.5455	1.5448	1.5378	1.5345
		5	1.5552	1.5501	1.5455	1.5446	1.5363	1.5376	1.5336	1.5310
		10	1.5423	1.5405	1.5378	1.5378	1.5336	1.5319	1.5324	1.5263
	2	1	1.6180	1.6053	1.5820	1.5750	1.5495	1.5482	1.5401	1.5358
		2	1.5820	1.5685	1.5613	1.5539	1.5422	1.5405	1.5365	1.5327
		5	1.5495	1.5462	1.5422	1.5415	1.5353	1.5346	1.5332	1.5300
		10	1.5401	1.5388	1.5365	1.5358	1.5332	1.5303	1.5323	1.5264
Nonuniform	1	1	2.3973	2.4019	2.3229	2.3308	2.2631	2.2670	2.2475	2.2449
		2	2.3284	2.3291	2.2866	2.2887	2.2515	2.2514	2.2420	2.2372
		5	2.2671	2.2681	2.2530	2.2527	2.2404	2.2331	2.2369	2.2293
		10	2.2494	2.2447	2.2429	2.2371	2.2370	2.2294	2.2354	2.2295
	2	1	2.3513	2.3453	2.2994	2.2976	2.2565	2.2540	2.2449	2.2376
		2	2.3031	2.2961	2.2731	2.2699	2.2476	2.2417	2.2406	2.2314
		5	2.2594	2.2559	2.2487	2.2440	2.2391	2.2286	2.2365	2.2269
		10	2.2464	2.2420	2.2412	2.2360	2.2365	2.2306	2.2353	2.2305
Nonuniform	1	1	1.9719	1.9609	1.9096	1.9038	1.8547	1.8519	1.8391	1.8315
		2	1.9096	1.8921	1.8750	1.8623	1.8432	1.8373	1.8340	1.8252
		5	1.8547	1.8408	1.8432	1.8338	1.8323	1.8257	1.8290	1.8202
		10	1.8391	1.8311	1.8340	1.8290	1.8290	1.8256	1.8276	1.8205
	2	1	1.9304	1.9098	1.8871	1.8743	1.8481	1.8435	1.8366	1.8278
		2	1.8871	1.8646	1.8623	1.8489	1.8393	1.8336	1.8325	1.8230
		5	1.8481	1.8367	1.8393	1.8325	1.8311	1.8258	1.8286	1.8200
		10	1.8366	1.8335	1.8325	1.8317	1.8286	1.8276	1.8275	1.8211

表 7 厚度方向功能梯度 SUS304/Si_3N_4 厚方板在 SSSS 边界条件下的首阶无量纲频率对比研究 a/h $_0$=10。( ) ( ) 2 3 2 0 0 12 1 / / , / c c c c c a h D D E h

$\omega = \omega_0 \pi \sqrt{\rho} = -\nu$

	k_z		k_x							
			1		2		5		10	
		k_y	现在	预测	现在	预测	现在	预测	现在	预测
Uniform	1	1	0.8762	0.8743	0.8492	0.8529	0.8248	0.8339	0.8166	0.8232
		2	0.8492	0.8500	0.8341	0.8411	0.8199	0.8322	0.8149	0.8240
		5	0.8248	0.8420	0.8199	0.8384	0.8151	0.8320	0.8131	0.8235
		10	0.8166	0.8389	0.8149	0.8358	0.8131	0.8292	0.8122	0.8207
	2	1	0.8538	0.8515	0.8388	0.8399	0.8213	0.8296	0.8154	0.8227
		2	0.8388	0.8421	0.8280	0.8370	0.8177	0.8304	0.8140	0.8238
		5	0.8213	0.8395	0.8178	0.8361	0.8142	0.8298	0.8127	0.8230
		10	0.8154	0.8345	0.8140	0.8318	0.8127	0.8266	0.8120	0.8204
Non-uniform	1	1	1.2433	1.2414	1.2051	1.2007	1.1716	1.1638	1.1605	1.1478
		2	1.2066	1.1951	1.1850	1.1730	1.1651	1.1555	1.1580	1.1463
		5	1.1730	1.1584	1.1659	1.1532	1.1585	1.1488	1.1553	1.1457
		10	1.1613	1.1483	1.1659	1.1476	1.1555	1.1488	1.1539	1.1449
	2	1	1.2119	1.1978	1.1872	1.1737	1.1651	1.1552	1.1576	1.1463
		2	1.1882	1.1730	1.1739	1.1623	1.1607	1.1521	1.1560	1.1462
		5	1.1660	1.1570	1.1612	1.1526	1.1563	1.1480	1.1542	1.1465
		10	1.1581	1.1501	1.1563	1.1484	1.1543	1.1491	1.1532	1.1464
Non-uniform	1	1	1.0214	1.0438	0.9902	1.0129	0.9618	0.9821	0.9520	0.9662
		2	0.9902	0.9993	0.9726	0.9843	0.9559	0.9726	0.9497	0.9637
		5	0.9618	0.9740	0.9559	0.9707	0.9499	0.9688	0.9473	0.9637
		10	0.9520	0.9667	0.9497	0.9656	0.9473	0.9646	0.9460	0.9639
	2	1	0.9948	0.9995	0.9746	0.9833	0.9559	0.9724	0.9493	0.9656
		2	0.9746	0.9768	0.9631	0.9714	0.9520	0.9691	0.9478	0.9646
		5	0.9559	0.9692	0.9520	0.9680	0.9480	0.9675	0.9462	0.9655
		10	0.9493	0.9638	0.9478	0.9630	0.9462	0.9632	0.9454	0.9660

表 8 厚度方向功能梯度 SUS304/Si_3N_4 厚方板四边简支边界条件下第一阶无量纲频率的比较研究 a/h $_0$=100。

$$\omega = \omega_0 \pi \sqrt{\rho} = -\nu$$

	k_z		k_x							
			1		2		5		10	
		k_y	现在	预测	现在	预测	现在	预测	现在	预测
Uniform	1	1	0.9083	0.9294	0.8802	0.8989	0.8545	0.8642	0.8463	0.8519
		2	0.8802	0.8914	0.8645	0.8737	0.8498	0.8540	0.8446	0.8474
		5	0.8547	0.8641	0.8498	0.8573	0.8448	0.8492	0.8427	0.8456
		10	0.8463	0.8575	0.8446	0.8542	0.8428	0.8491	0.8418	0.8459
	2	1	0.8888	0.9025	0.8692	0.8822	0.8511	0.8588	0.8450	0.8488
		2	0.8692	0.8763	0.8581	0.8651	0.8475	0.8518	0.8437	0.8453
		5	0.8511	0.8582	0.8475	0.8543	0.8439	0.8485	0.8423	0.8435
		10	0.8450	0.8544	0.8437	0.8525	0.8423	0.8483	0.8416	0.8443
Nonuniform	1	1	1.3394	1.3438	1.2983	1.3096	1.2629	1.2672	1.2514	1.2540
		2	1.3002	1.3007	1.2772	1.2811	1.2562	1.2574	1.2488	1.2502
		5	1.2644	1.2674	1.2570	1.2596	1.2494	1.2492	1.2461	1.2464
		10	1.2519	1.2580	1.2492	1.2550	1.2462	1.2513	1.2445	1.2423
	2	1	1.3059	1.2989	1.2793	1.2787	1.2559	1.2579	1.2482	1.2505
		2	1.2806	1.2761	1.2654	1.2661	1.2515	1.2521	1.2465	1.2473
		5	1.2569	1.2590	1.2520	1.2538	1.2469	1.2468	1.2447	1.2442
		10	1.2486	1.2552	1.2468	1.2531	1.2448	1.2501	1.2437	1.2501
Nonuniform	1	1	1.0706	1.0850	1.0379	1.0478	1.0083	1.0143	0.9981	1.0070
		2	1.0379	1.0385	1.0196	1.0206	1.0022	1.0073	0.9958	1.0045
		5	1.0083	1.0108	1.0022	1.0059	0.9961	1.0032	0.9933	1.0000
		10	0.9981	1.0019	0.9958	0.9998	0.9933	0.9974	0.9920	0.9933
	2	1	1.0428	1.0451	1.0217	1.0253	1.0021	1.0091	0.9953	1.0043
		2	1.0217	1.0214	1.0096	1.0125	0.9981	1.0055	0.9938	1.0024
		5	1.0021	1.0073	0.9981	1.0040	0.9940	1.0018	0.9921	0.9979
		10	0.9953	0.9999	0.9938	0.9983	0.9921	0.9962	0.9912	0.9926

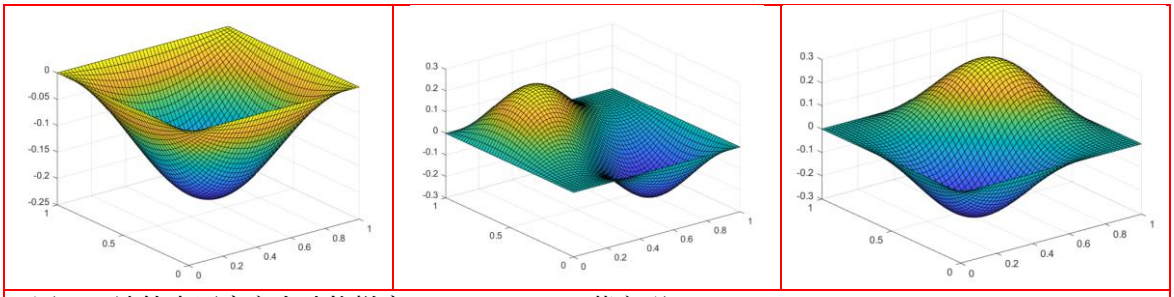


图1 四边简支厚度方向功能梯度 SUS304/Si_3N_4 薄方形均匀（类型1）板 $a/h_0=100$，其中 $k_x=k_y=5$，$k_z=2$。

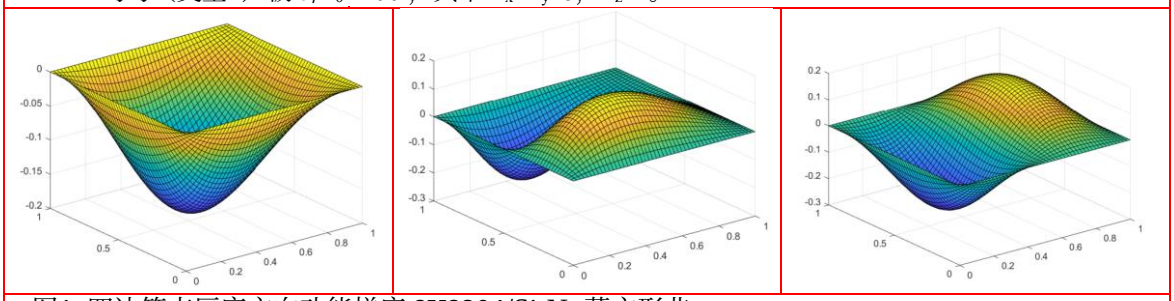


图1 四边简支厚度方向功能梯度 SUS304/Si_3N_4 薄方形非-均匀线性（类型2）板 $a/h_0=100$，其中 $k_x=k_y=5$，$k_z=2$。

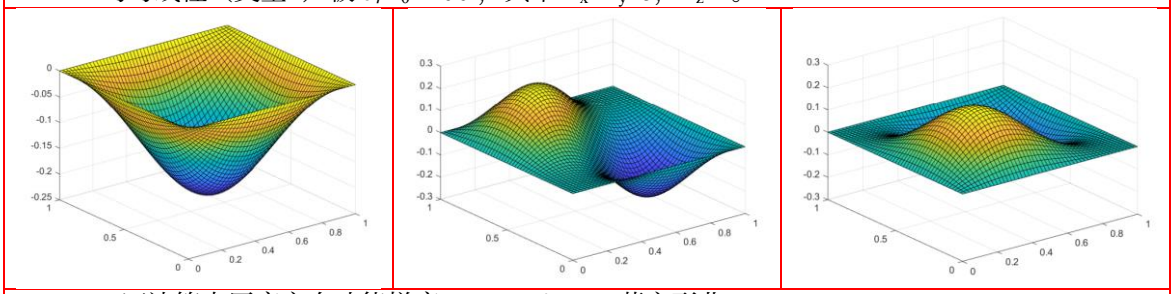


Fig. 17 四边简支厚度方向功能梯度 SUS304/Si_3N_4 薄方形非-均匀非线性（类型3）板 $a/h_0=100$，其中 $k_x=k_y=5$，$k_z=2$。

5.3 屈曲问题 屈曲研究

本部分将从解析问题和预测问题两个方面介绍该模型的表现。

示例 7：将单向、双向和厚度方向功能梯度方板的屈曲分析结果与参考文献 Do 等人（2020）的结果进行比较。这些问题采用功能梯度材料 SUS304/Si_3N_4。功能梯度材料的材料性能通过 Mori-Tanaka方案估算。单轴 ($N^0_{xx} = 1$) 和双轴 ($N^0_{xx} = N^0_{yy} = 1$) 临界屈曲载荷的无量纲形式定义于式 (33c) 中。

对于UD-FG材料，表9展示了本研究结果和DNN预测值与Do 等人（2020）参考结果在SSSS边界条件下单轴和双轴屈曲问题中的比较。在CCCC边界条件下，将展示本研究结果与深度神经网络模型预测结果的比较。可以看出，本研究结果与参考结果接近，且深度神经网络模型的预测相当准确。本研究结果和DNN

预测值始终小于2%，适用于CCCC和SSSS边界条件以及单轴和双轴屈曲问题。这些结果表明，为UD-FG板建立的有限元模型得到了验证，并且使用有限元分析生成的数据进行训练的深度神经网络模型具有较高的预测准确性。

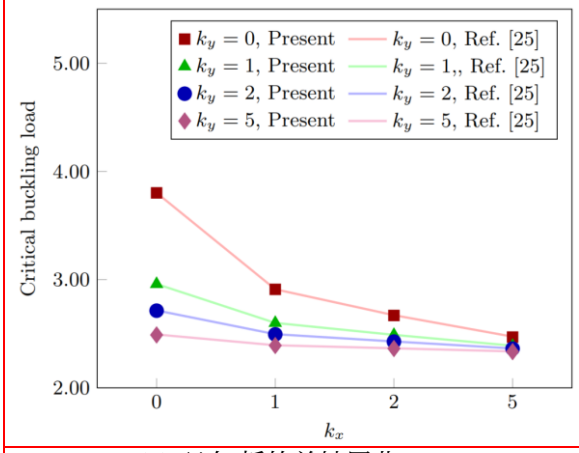
表9 单向功能梯度板第一阶无量纲临界屈曲载荷的对比及本研究结果

针对单向功能梯度 SUS304/Si_3N_4 方板。

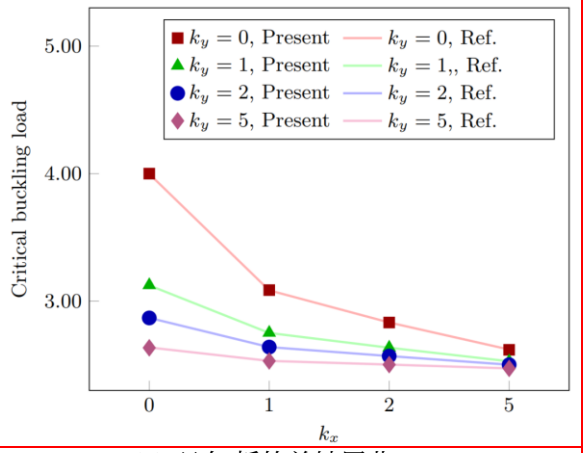
		a/h_0		k_z			
				0	1	2	5
Unaxial bucking	SSSS	10	参见 Do 等人（2020）	3.8026	2.9522	2.7995	2.6511
			现在	3.8020	2.9917	2.8400	2.6722
			预测	3.7939	3.0698	2.8977	2.6757
		100	参见 Do 等人（2020）	3.9979	3.1121	2.9627	2.8168
			现在	4.0001	3.1570	3.0052	2.8354
			预测	3.9999	3.1782	3.0217	2.8712
	CCCC	10	现在	8.4122	6.4972	6.1262	5.7586
			预测	8.4135	6.4381	6.1750	5.7676
		100	现在	10.0786	7.8449	7.4636	7.0869
			预测	10.0679	7.9904	7.5220	7.1285
Biaxial bucking	SSSS	10	参见 Do 等人（2020）	1.9013	1.4761	1.3998	1.3255
			现在	1.9010	1.4958	1.4200	1.3361
			预测	1.9126	1.5174	1.4391	1.3385
		100	参见 Do 等人（2020）	1.9990	1.5560	1.4814	1.4084
			现在	2.0001	1.5785	1.5026	1.4177
			预测	2.0000	1.5633	1.5233	1.4149
	CCCC	10	现在	4.5997	3.5586	3.3621	3.1675
			预测	4.6113	3.7506	3.3186	3.2094
		100	现在	5.3059	4.1301	3.9294	3.7312
			预测	5.3257	4.2168	3.8595	3.7588

图18对比了本文研究的无量纲临界屈曲载荷 与 Do 等人（2020）的参考结果

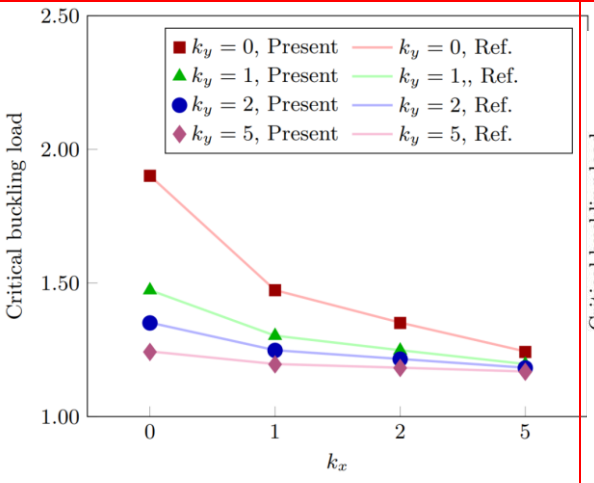
对于厚板和薄板均采用 SSSS边界条件。对于 CCCC边界条件，BD-FG板的 CCCC边界条件下的无量纲临界屈曲载荷预测值列于表10，并与当前结果进行比较。



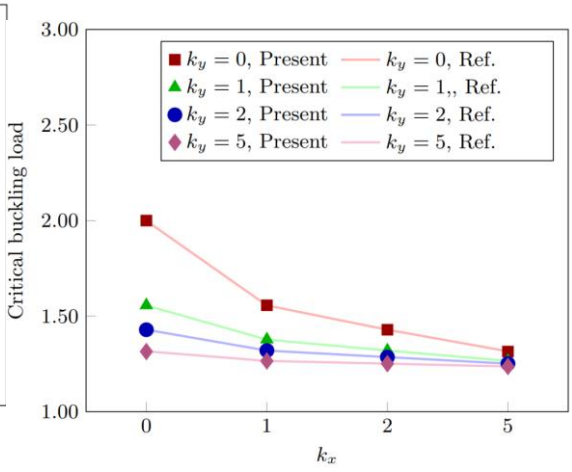
(a) 双向-板的单轴屈曲
FG SSSS边界条件下的厚板



(a) 双向-板的单轴屈曲
FG SSSS边界条件下的薄板



(a) 双向-板的双轴屈曲
FG SSSS边界条件下的厚板



(a) 双向功能梯度板的双轴屈曲
SSSS边界条件下的厚板

图18 双向功能梯度板的首阶无量纲临界单轴和双轴屈曲载荷比较
具有SSSS边界条件的SUS304/Si_3N_4 方形厚板和薄板。

表 10 本研究采用CCCC边界条件时BD-FG SUS304/Si N 方板的第一阶无量纲临界屈曲载荷。

结果		k_y	$a/h_0=10$			$a/h_0=10$		
			k_x			k_x		
			1	5	10	1	5	10
sinU	现在	1	5.6584	5.3713	5.1274	6.9119	6.5737	6.2798
	预测		5.5605	5.1451	5.0639	6.8754	6.3063	6.1832
	现在	2	5.4215	5.2428	5.0841	6.6300	6.4163	6.2243
	预测		5.4137	5.0871	5.0449	6.6626	6.2301	6.1544
	现在	5	5.1971	5.1154	5.0401	6.3630	6.2619	6.1688
	预测		5.2076	5.0450	5.0302	6.4030	6.1764	6.1363
sinB	现在	1	3.1155	2.9729	2.8430	3.6455	3.4832	3.3347
	预测		3.0695	2.8831	2.8203	3.5483	3.3799	3.2932
	现在	2	2.9729	2.8872	2.8064	3.4832	3.3843	3.2913
	预测		2.9970	2.8367	2.8021	3.4806	3.3136	3.2672
	现在	5	2.8430	2.8064	2.7713	3.3347	3.2913	3.2499
	预测		2.8888	2.7988	2.7851	3.3638	3.2612	3.2452

同样，对于TD-FG材料，表11将本研究在SSSS边界条件下的行为与参考结果进行比较，而对于四边固支，则通过预测并与已有研究结果进行验证。尽管DNN预测值总是比本研究结果更偏离参考结果，但由于相对误差很小且深度神经网络模型耗时极短，这些预测值仍可接受。最后，图19–20展示了四边固支边界条件下均匀厚度TD-FG板的前三阶屈曲模态。

表 11 本研究中双向功能梯度SUS304/Si_3N_4 四边固支边界条件下方板的第一个无量纲临界屈曲载荷。

		a/h_0	结果	k_z			
				0	1	2	5
Uniaxial	SSSS	10	参见 Do 等人（2020）	2.6003	2.4470	2.4155	2.3819
			现在	2.5997	2.4503	2.4192	2.3835
			预测	2.6325	2.4999	2.4402	2.3791
		100	参见 Do 等人（2020）	2.7509	2.5877	2.5564	2.5228
			现在	2.7524	2.5934	2.5618	2.5253
			预测	2.8029	2.6506	2.5808	2.5423
	CCCC	10	现在	5.6584	5.3354	5.2615	5.1814
			预测	5.5605	5.3801	5.2531	5.1680
		100	现在	6.9119	6.5170	6.4390	6.3532
			预测	6.8754	6.6038	6.4659	6.3806
Biaxial	SSSS	10	参见 Do 等人（2020）	1.3027	1.2241	1.2081	1.1911
			现在	1.3024	1.2258	1.2100	1.1920
			预测	1.3279	1.2750	1.2418	1.2177
		100	参见 Do 等人（2020）	1.3772	1.2943	1.2785	1.2615
			现在	1.3780	1.2971	1.2812	1.2628
			预测	1.3910	1.3374	1.3031	1.2735
	CCCC	10	现在	3.1155	2.9318	2.8916	2.8483
			预测	3.0695	2.9872	2.9247	2.8761
		100	现在	3.6455	3.4326	3.3910	3.3454
			预测	3.5483	3.4661	3.4023	3.3529

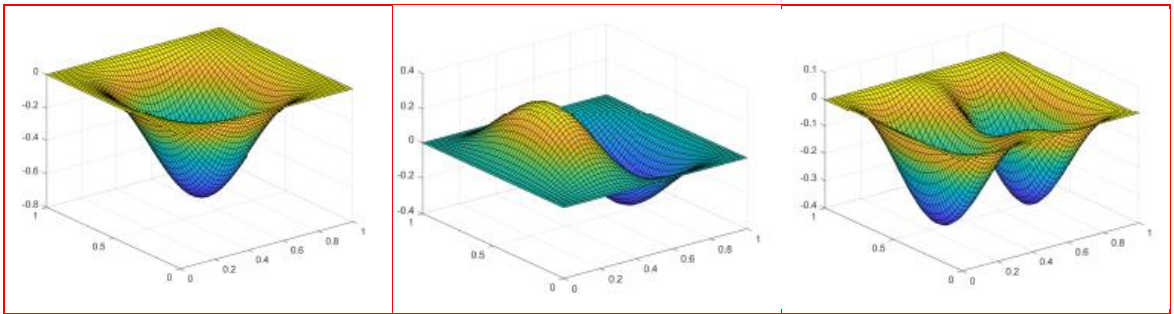


图19 四边固支厚度方向功能梯度 SUS304/Si_3N_4 均匀薄方板（a/h0 = 100， $k_x = k_y = 1$， $k_z = 5$）的前三阶单

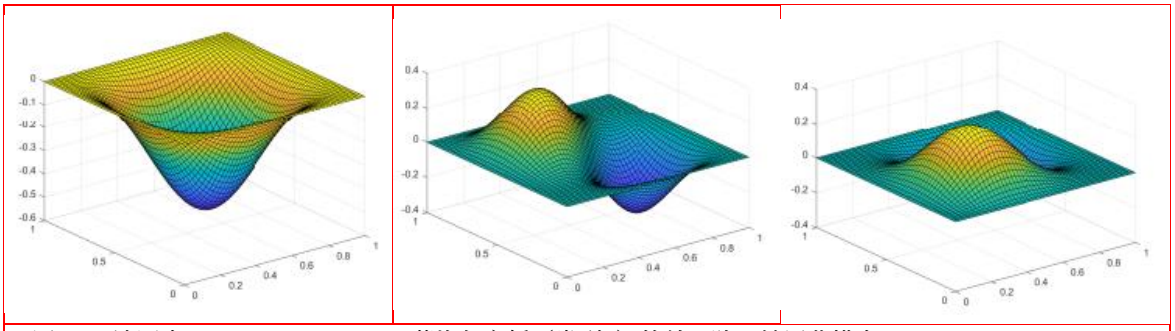


图20 四边固支TD-FG SUS304/Si_3N_4 薄均匀方板（类型1）的前三阶双轴屈曲模态，a/h0 = 100，$k_x = k_y = 1$, $k_z = 5$。

5.4 嵌入弹性地基中的TD-FG板 本节将从解析和预测两种方法研究弹性地基对TD

-FG板的影响。

例8：考虑带有弹性温克勒地基的UD-FG Al/Al_2O_3 板的自由振动问题。本例中，无量纲固有频率和温克勒参数定义如下：

$$\bar{\omega} = \omega h_0 \sqrt{\rho_m / E_m} \text{ and } \bar{k}_W = k_W a^4 / D_{11} \text{ where } D_{11} = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} z^2 Q_{11} dz$$

图21展示了现在的结果与三阶剪切变形理论（Baferani等人，2011）和高阶剪切变形理论（Li等人，2021）的参考结果之间的比较。与预期一致，所得结果与参考解高度吻合。这再次证明了现在所用方法的可靠性。

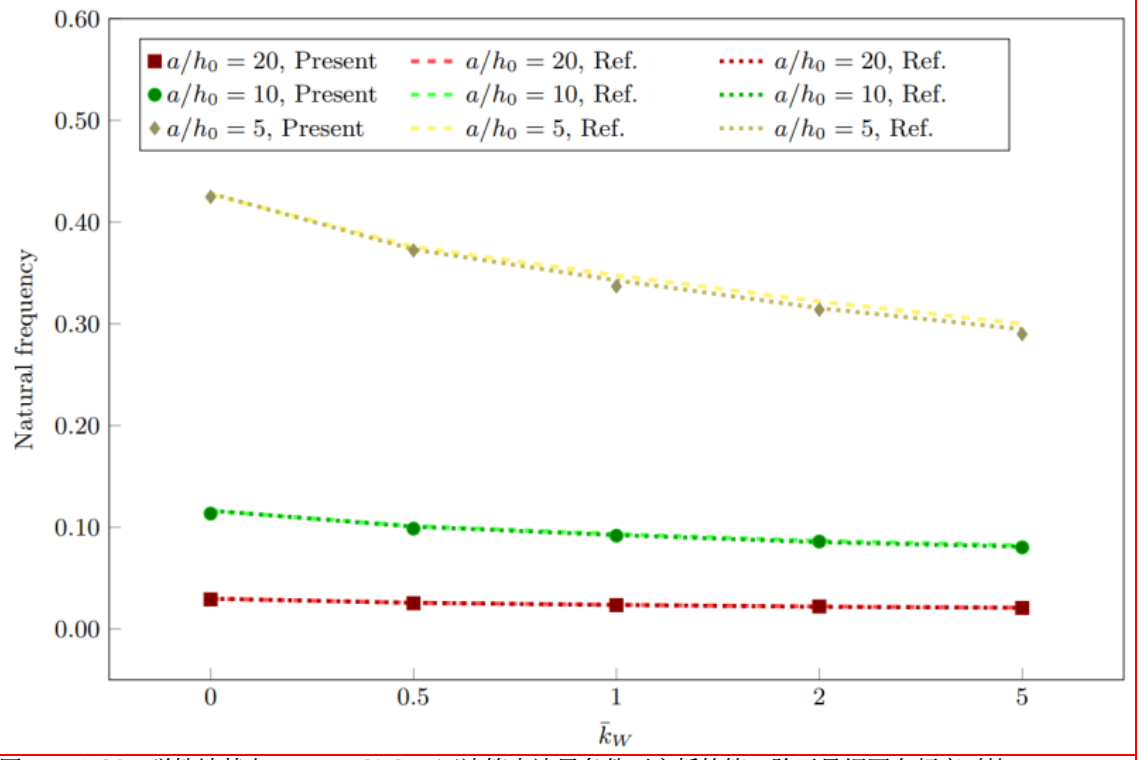


图21 Winkler弹性地基上UD-FG Al/Al_2O_3四边简支边界条件下方板的第一阶无量纲固有频率对比 = 100。 $\bar{k}_W$

示例9：一块TD-FG（$k_x = k_z = 1$）SUS304/Si_3N_4 方板采用SSSS边界条件，置于Winkler弹性地基上，用于弯曲、单轴和双轴屈曲问题。无量纲值定义为[24]

$$\bar{w}\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)=\frac{E_c h_0^2}{a^3 q_0} w\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right) \text{ and } \bar{P}_{cr}=\frac{P_{cr}a^2}{\pi^2 D_c}$$

用于弯曲问题的中心挠度以及单轴与双轴屈曲问题的临界屈曲载荷。表12展示了本研究结果与DNN预测值在四边简支和四边固支边界条件下的比较。本研究结果与预测值之间的差异很小，表明DNN模型对置于弹性温克勒地基上的TD-FG板具有良好的准确性。

表12 Winkler弹性地基上的厚度方向功能梯度（$k_x = k_z = 1$）SUS304/Si_3N_4 板在SSSS边界条件和$k_W = 3^4$下的首个无量纲中心挠度及临界屈曲载荷的本研究结果。

	a/h_0		弯曲		单轴屈曲		双轴屈曲	
		k_z	1	5	1	5	1	5
SSSS	10	现在	0.4733	0.4871	2.4503	2.3835	1.2258	1.1920
		预测	0.4630	0.5053	2.5027	2.3881	1.2714	1.2182
	20	现在	0.9073	0.9327	2.5572	2.4894	1.2791	1.2449
		预测	0.8689	0.9344	2.5520	2.4703	1.2951	1.2484
	50	现在	2.2406	2.3029	2.5888	2.5207	1.2948	1.2605
		预测	2.2291	2.3309	2.6187	2.5162	1.3371	1.2753
	100	现在	4.4734	4.5974	2.5934	2.5253	1.2971	1.2628
		预测	4.3694	4.6058	2.6506	2.5439	1.3325	1.2714
CCCC	10	现在	0.1891	0.1948	5.3354	5.1814	2.9318	2.8483
		预测	0.1875	0.1924	5.3793	5.1663	2.9823	2.8707
	20	现在	0.3341	0.3434	6.1846	6.0226	3.2926	3.2061
		预测	0.3355	0.3553	6.2407	6.0088	3.3181	3.2187
	50	现在	0.8029	0.8245	6.4732	6.3096	3.4142	3.2271
		预测	0.8167	0.8305	6.5743	6.3188	3.4667	3.3358
	100	现在	1.5965	1.6392	6.5170	6.3532	3.4326	3.3454
		预测	1.5764	1.6275	6.5820	6.3713	3.4643	3.3506

6. 结论与说明

本文从数学角度详细描述了一种置于弹性温克勒地基上的变厚度多向功能梯度方板模型，研究其弯曲、自由振动和屈曲问题。采用Mori-Tanaka 微观力学方法描述沿板的一个、两个和三个方向连续变化的材料性能。通过数值计算，验证了该功能梯度板模型在静力、动力和稳定性问题分析方面的有效性和可靠性。随后，构建采用批归一化和Adam 优化器的深度神经网络模型，根据从解析解中收集的数据集，预测中心挠度、固有频率和临界屈曲载荷等无量纲值。通过所提出的公式和考察的算例，可以得出以下若干结论：

- 采用MITC4的有限元分析结果与公开文献中的既有结果相比，在分析TD-FG板的弯曲、自由振动和屈曲行为方面表现出色。
- TD功能梯度板，尤其是嵌入弹性温克勒地基、具有不同厚度类型（类型1、2、3和）的TD-FG板的新结果。

- 训练数据集基于有限元模型收集。该数据集对于构建深度神经网络模型至关重要，而深度神经网络通过学习输入数据与输出数据之间的关系，帮助找到最优映射规则。
- 非 -无量纲中心挠度（弯曲问题）、固有频率（自由 - 振动问题）以及临界屈曲载荷（单轴和双轴屈曲问题）均可直接高精度预测，无需求解线性方程组或特征值问题。通过将预测结果与本研究及参考文献进行比较，验证了深度神经网络模型的高准确性。

本文方法可扩展至壳体或含裂纹（不连续）板等复杂工程问题。此外，拓扑优化也有待进一

致谢

None

参考文献

Koizumi, M.（1997年），“日本的功能梯度材料研究活动”，《复合材料B：工程》，28(1-2)，1-4。https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00016-9。Nguyen-Xuan, H., Tran, L.V., Thai, C.H. 和 Nguyen-Thoi, T.（2012年），“采用高效有限元法和基于节点的应变平滑分析功能梯度板”，Thin-Walled Structures，54，1-18。https://doi.org/10.1016/j.tws.2012.01.013。Ilschner, B.（年份），“梯度材料中的加工—微观结构—性能关系”，Journal of the Mechanics and Physics of Solids，44(5)，647–653， 655–656。https://doi.org/10.1016/0022- 5096(96)00023-3。Taheri, A. 和 Hassani, B.（2014年），“面向最优特征频率的功能梯度结构等几何形状与材料同步设计”，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering，277，46–80。https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.04.014。Radhika, N., Teja, K., Rahul, K. 和 Shivashankar, A.（2018年），“用于汽车应用的铜-锡-镍/碳化硅功能梯度材料的制备：其力学和摩擦学性能研究”，Silicon，10，1705–1716。https://doi.org/10.1007/s12633-017-9657-3。Arslan, K. 和 Gunes, R.（2018年），“铝/碳化硼功能梯度材料面板蜂窝夹层结构在高速冲击载荷下的实验损伤评估”，Composite Structures，202，304–312。https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.01.087。Smith, J. A., Mele, E., Rimington, R. P., Capel, A. J., Lewis, M.P., Silberschmidt, V.V. 和 Li, S.（2019），“用于生物医学应用的聚二甲基硅氧烷和聚醚醚酮功能梯度复合材料”，Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials，93，130–142。https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2019.02.012。Nguyen-Xuan, H., Tran, L.V., Thai, C.H., Kulasegaram, S. 和 Bordas, S.（2014年），“采用精化板理论对功能梯度板进行等几何分析”，《复合材料B：工程》，64，222–234。https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.04.001。Thai, C. H., Kulasegaram, S., Tran, L.V. 和 Nguyen-Xuan, H.（2014年），“基于等几何方法的功能梯度各向同性板和夹层板广义剪切变形理论”，Computers & Structures，141，94–112。https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2014.04.003。Reddy, J.N.（年份），“功能梯度板分析”，International Journal for Numerical Methods in Engineering，47(1-3)，663–684。https://doi.org/10.1002/(SICI)1097- 0207(20000110/30)47:1/3<663::AID-NME787>3.0.CO;2-8。

Zhang, D.-G.（2013年），“基于物理中性面和高阶剪切变形理论的功能梯度矩形板建模与分析”，《国际机械科学杂志》，8，92–104。https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.01.002。Kim, J. 和 Reddy, J.（2013年），“采用基于偶应力的三阶理论求解功能梯度板弯曲、振动和屈曲问题的解析解”，Composite Structures，103，86-98。https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.03.007。Swaminathan, K., Naveenkumar, D., Zenkour, A. 和 Carrera, E.（2015年），“功能梯度板的应力、振动和屈曲分析——最新研究综述”，Composite Structures，卷号加粗（期号不加粗），10–31。https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.09.070。Jung, W.-Y. 和 Han, S.-C.（2015年），“采用修正偶应力理论分析S形功能梯度材料（s-fgm）微尺度板的静力与特征值问题”，《应用数学建模》，39(12)，3506–3524。https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.11.056。Jha, D., Kant, T. 和 Singh, R.（2013年），“功能梯度板近期研究的批判性综述”，Composite Structures，96，833–849。https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.09.001。Garg, A., Belarbi, M.-O., Chalak, H. 和 Chakrabarti, A.（2021），“夹层功能梯度结构分析综述”，Composite Structures，258，113427。https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113427。Nemat-Alla, M.（2003），“通过开发二维功能梯度材料降低热应力”，《国际固体与结构杂志》，40(26)，7339–7356。https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2003.08.017。Yin, S., Yu, T., Bui, T. Q., Zheng, X. 和 Tanaka, S.（2016），“功能梯度板的面内材料非均匀性：高阶剪切变形板等几何分析”，《复合材料B：工程》，106，273–284。https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.09.008。Xiang, T., Natarajan, S., Man, H., Song, C. 和 Gao, W.（2014年），“具有面内材料非均匀性的板的自由振动与力学屈曲——一种三维一致方法”，Composite Structures，118，634–642。https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.07.043。Do, T.V., Nguyen, D.K., Duc, N.D., Doan, D. H. 和 Bui, T.Q.（2017），“采用有限元法和新型三阶剪切变形板理论分析双向功能梯度板”，Thin-Walled Structures，119，687–699。https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.07.022。Ebrahimi, M. 和 Najafizadeh, M.（2013年），“二维功能梯度圆柱壳的自由振动分析”，《应用数学建模》，38(1)，308–324。https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.06.015。Lieu, Q. X., Lee, S., Kang, J. 和 Lee, J.（2018），“采用等几何分析研究面内双向功能梯度变厚度板的弯曲和自由振动”，Composite Structures，192，434–451。https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.03.021。Hughes, T., Cottrell, J. 和 Bazilevs, Y.（2005年），“等几何分析：计算机辅助设计、有限元、非均匀有理B样条、精确几何与网格细化”，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering，194(39–41)，4135–4195。https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.10.008。Adineh 和 Kadkhodayan, M.（2017），“弹性地基上多向功能梯度斜板的三维热弹性分析与动力响应”，《复合材料B：工程》，125，227–240。https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.05.070。Do, D. T., Nguyen-Xuan, H. 和 Lee, J.（2020），“采用深度神经网络和等几何多网格设计方法优化三向功能梯度板材料”，《应用数学建模》，87，501–533。https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.06.002。Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L. 和 Karami, B.（2018），“一种用于多孔功能梯度板自由振动的新型准三维双曲理论及其在Winkler/Pasternak/Kerr地基上的应用”，《航空航天科学与技术》，72，134–149。https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.11.004。Li, M., Soares, C. G. 和 Yan, R.（2021），“采用简化准三维高阶剪切变形理论分析Winkler/Pasternak/Kerr地基上功能梯度材料板的自由振动”，《航空航天科学与技术》，264，113643。https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113643。Amirpour, M., Das, R. 和 Flores, E.S.（2016），“采用高阶剪切变形理论求解具有面内刚度变化的功能梯度厚板弹性变形问题的解析解”，

《复合材料B：工程》, 94, 109–121. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.03.040. Alinaghizadeh, F. and Shariati, M.（年份），“非线性弹性地基上变厚度厚双向功能梯度环形扇形板和矩形板的几何非线性弯曲分析”，《复合材料B：工程》, 86, 61–83. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.05.010. Raju, K. K. and Rao, G. V.（1988），“采用有限元法分析弹性地基上方板的热后屈曲”，Computers & Structures, 28(2), 195–199. https://doi.org/10.1016/0045- 7949(88)90039-9. Raju, K.K. and Rao, G.V.（年份），“受热载荷或机械载荷作用的弹性地基上点支承方板的屈曲后行为”，Computers & Structures, 40(4), 1061–1064. https://doi.org/10.1016/0045-7949(91)90339-N. Banh, T. T., Dang-Trung, H., Le-Anh, L., Ho-Huu, V. and Nguyen-Thoi, T.（2017），“采用等几何分析研究弹性介质中非均匀厚度纳米板的屈曲分析”，Composite Structures, 162, 182–193. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.11.092. Doan, Q. H. and Lee, D.（2017），“具有非伪屈曲约束的多材料结构最优拓扑设计”，Advances in Engineering Software, 114, 110–120. https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2017.06.002. Doan, Q. H., Lee, D., Lee, J. and Kang, J.（年份），“结合刚度设计准则决策的多材料结构拓扑优化”，Advanced Engineering Informatics, 45, 101098. https://doi.org/10.1016/j.aei.2020.101098. Taczala, M., Buczkowski, R. and Kleiber, M.（年份），“热环境下双参数地基上屈曲前后功能梯度材料板的非线性自由振动”，Composite Structures, 137, 85–92. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.11.017. Gunda, J.B.（2013），“弹性地基上方板的热后屈曲分析：一种简单的闭式解”，《应用数学建模》, 37(7), 5536–5548. https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.09.031. Hoang, V.N.V., Minh, V.T., Ninh, D.G., Nguyen, C.T. and Huy, V.L.（2020），“采用Selvadurai方法研究非均匀弹性地基对热环境中纳米复合材料板非线性振动的影响”，Composite Structures, 253, 112812. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112812. Ye, J., Yuan, X.-C. and Zhou, G.（年份），“用于激光光束整形的衍射光学元件优化设计遗传算法”，SPIE国际光学工程学会会议论文集, 4594, 118–127. https://doi.org/10.1117/12.446537. Wang, G. and Xie, S.（2005），“采用蚁群优化算法对组合式冲压激光切割机进行最优工艺规划”，《国际生产研究杂志》, 43(11), 2195–2216. https://doi.org/10.1080/00207540500070376. Shen, H., Shi, Y. J., Yao, Z. Q. and Hu, J.（2013），“用于激光成形弯曲角的模糊逻辑模型”，《材料科学与技术》, 22(8), 981-986. https://doi.org/10.1179/174328406X100725. Abambres, M., Rajana, K., Tsavdaridis, K.D. and Ribeiro, T.P.（2013），“用于预测工字形蜂窝钢梁屈曲载荷的神经网络公式”，Computers, 8(2), 1–26. https://doi.org/10.3390/computers8010002. Do, D. T., Lee, D. and Lee, J.（2018），“采用深度神经网络和改进共生生物搜索算法进行功能梯度板材料优化，以求解特征值问题”，《复合材料B：工程》, 159(15), 300–326. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.087. Bathe, K.-J. and Dvorkin, E.N.（1985），“基于Mindlin/Reissner板理论和混合插值的四节点板弯曲单元”，International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21(27), 367–383. https://doi.org/10.1002/nme.1620210213. Banh, T. T. and Lee, D.（2019），“多种材料多向变厚度薄板的拓扑优化”，《结构与多学科优化》, 59, 1503–1520. https://doi.org/10.1007/s00158-018-2143-8. Banh, T.T., Nguyen, X.Q., Herrmann, M., Filippou, F.C. and Lee, D.（2020），“具有非线性变厚度和Winkler地基的Mindlin-Reissner板多相材料拓扑优化”，Steel

and Composite Structures, 35(1), 129–145. https://doi.org/10.12989/scs.2020.35.1.129. Vel, S. and Batra, R.（2002）, “功能梯度厚矩形板热弹性变形的精确解”, AIAA期刊, 40(7), 1421–1433. https://doi.org/10.2514/2.1805. Qian, L., Batra, R. and Chen, L.（2004）, “采用高阶剪切与法向可变形板理论和无网格局部佩特罗夫-伽辽金法分析功能梯度厚弹性板的静态与动态变形”, 《复合材料B：工程》, 35(6–8), 685–697. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2004.02.004. Zhang, H. and Kuang, J. S.（年份）, “基于边界插值和铁木辛柯梁函数的八节点Reissner–Mindlin板单元”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 69(7), 1345–1373. https://doi.org/10.1002/nme.1809. Arnold, D.N.（1981）, “有限元离散化一个依赖模型参数的问题”, 《数值数学》, 37, 405–421. https://doi.org/10.1007/BF01400318. Thompson, L.L. and Thangavelu, S.R.（2002）, “用于精确描述Reissner–Mindlin板波响应的稳定化MITC单元”, Computers & Structures, 80(9–10), 769–789. https://doi.org/10.1016/S0045- 7949(02)00046-9. Kingma, D. P. and Ba, J.（2014）, “Adam：一种随机优化方法”, arXiv, :1412.6980. Ioffe, S. and Szegedy, C.（2015）, “批归一化：通过减少内部协变量偏移加速深度网络训练”, arXiv, :1502.03167. Tran, L.V., Ferreira, A. and Nguyen-Xuan, H.（2013）, “采用高阶剪切变形理论对功能梯度板进行等几何分析”, 《复合材料B：工程》, 51, 368–383. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.02.045. Wang, X., Yuan, Z., and Ji, C.（年份）, “采用求积单元法对多向功能梯度材料平行六面体进行三维自由振动分析”, 《应用数学建模》, 68, 383–404. https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.11.030. Baferani, A., Saidi, A. and Ehteshami, H.（2011）, “弹性地基上功能梯度厚矩形板自由振动分析的精确解”, Composite Structures, 93(7), 1842–1853. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.01.020. Li, M., Soares, C. G. and Yan, R.（年份）, “采用简化准三维高阶剪切变形理论分析Winkler/Pasternak/Kerr地基上功能梯度材料板的自由振动”, Composite Structures, 264, 113643. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113643.