arXiv:2301.05902v1 [math.QA] 14 Jan 2023

与小维数循环 Leibniz 代数相关的 $\mathbb{N}$分次顶点代数

C. BARNES、E. MARTIN、J. SERVICE 和 G.YAMSKULNA

Abstract. 本文的主要目标是：i）研究与顶点 A-拟代数相关的 $\mathbb{N}$分次顶点代数 V_B 的代数结构，其中 B 是循环非李左莱布尼茨代数；ii）探讨这些顶点代数 V_B 与秩一海森堡顶点算子代数之间的关系。为实现这些目标，我们首先对与给定循环非李左莱布尼茨代数 B相关的顶点A-拟代数 B 进行分类。接着，我们利用构造出的顶点 A-拟代数 B ，构造一族不可分解的非单顶点代数 V_B。最后，我们利用所发现的含幺交换结合代数 A 的代数结构，研究某类顶点代数 V_B与秩一 Heisenberg 代数所对应的顶点算子代数之间的关系。

1. Introduction

关于 $\mathbb{N}$ 分次顶点代数 $V=\oplus_{n=0}^{\infty}V_n$ 的研究远未完成，其中 $\dim V_0\geq 2$ 的情形尤为如此。对于这种情形， V_0 是一个含幺交换结合代数，而 V_1 是一个 Leibniz 代数。顶点代数的斜对称性和 Jacobi 恒等式带来了相容的额外关系。事实上，关于 $V_0\oplus V_1$ 的这些附加关系可归纳为顶点 V_0 代数丛 V_1 的概念（参见 [GMS、MS1、MS2、MSV]）。文献 [GMS] 证明，对于给定的顶点 A 代数丛 B，可以构造一个 $\mathbb{N}$ 分次顶点代数 $V=\oplus_{n=0}^{\infty}V_n$ ，使得 $V_0=A$ 且 $V_1=B$。此外，Li 和本文最后一位作者还在文献 [LiY1、LiY2] 中研究了与顶点代数丛相关的顶点代数的分次单扭曲模和非扭模的分类。

在 [JY1], 中，Jitjankarn 与本文最后一位作者还证明了：对于一个 $\mathbb{N}$-分次顶点代数 $V=\oplus_{n=0}^{\infty}V_n$，若 $2\leq\dim V_0<\infty$ 且 $1<\dim V_1<\infty$，当 V_0 是局部代数时， V 是不可分解的顶点代数。此外，若 V 由 V_0 和 V_1生成，且 V_0 是局部代数，并且不是 Lie V_0-拟群胚$V_1/(V_0)_{-1}\partial(V_0)$的单模，那么 V 是不可分解的非单顶点代数。在 [JY2], 中，Jitjankarn 与本文最后一位作者研究了与顶点 A-拟群胚 B 相关的不可分解非单 $\mathbb{N}$-分次顶点代数的代数结构，其中 B 是（半）单 Leibniz 代数，且其 Levi 因子为 sl_2 。他们建立了单 sl_2-模等价类代表元集合与 $\mathbb{N}$-分次单 V_B-模等价类代表元集合之间的一一对应关系。此外，Jitjankarn 与本文最后一位作者证明，某个商空间

Key words and phrases. 不可分解的无理顶点代数。G. Yamskulna 由伊利诺伊州立大学文理学院资助。通讯作者：G. Yamskulna。

V_B 是一个满足 C_2-条件且仅有两个不可约模的不可分解非单顶点代数。这两个不可约模实际上同构于有理的 C_2-余有限 CFT-型顶点算子代数 $V_{\mathbb{Z}\alpha}$ 的不可约模；该代数与一个秩一格 $\mathbb{Z}\alpha$ 相关联，并配备双线性形式 $(\ ,\ )$，使得 $(\alpha,\alpha) = 2$。在 [BuY], 中，Bui 与本文最后一位作者将 [JY2] 中的结果推广到顶点A-拟群胚 B 为任意有限维单莱布尼茨代数的情形。他们构造了不可分解的非单 C_2-余有限 $\mathbb{N}$-分次顶点代数 U_B。此外，他们还展示了这些不可约 U_B-模与某些类型的有理C_2-余有限 CFT-型仿射顶点代数的不可约模之间存在一一对应关系。注意，[BuY、JY2]中的结果提供了新的一类非有理 C_2-余有限顶点代数。

本文的工作是我们试图理解一种代数结构的垫脚石：与顶点代数胚相关的分次顶点代数，其中它们不再是（半）单莱布尼茨代数，以及它们与许多众所周知的分次顶点代数之间的联系，例如维数为.....的情形。我们也关注交换结合代数在分次顶点代数表示论研究中所起的作用。

本文构造了与顶点代数胚相关的不可分解非单分次顶点代数，其中代数胚是非李循环左莱布尼茨代数。此外，我们还研究了所构造的不可分解非单顶点代数与秩一海森堡顶点算子代数之间的关系。如上所述，要研究由.....生成的分次顶点代数的不可分解非单性质，我们只需研究顶点代数胚的代数结构。因此，我们自然从分类并研究与非李循环 Leibniz 代数相关的顶点代数胚的代数结构开始。这种顶点代数胚的分类有助于我们确定不可分解非单顶点代数与秩一海森堡顶点算子代数之间的联系。事实上，交换结合代数是确定不可分解非单顶点代数与秩一海森堡顶点算子代数之间可能关系的主要工具。我们证明，与顶点代数胚相关的某类不可分解非单顶点代数的适当商空间实际上是秩一海森堡顶点算子代数。

在第2节中，我们介绍循环左 Leibniz 代数和顶点代数丛的背景知识。在第3节中，我们对与循环左 Leibniz 代数相关的顶点代数丛进行分类。具体而言，在第3.1和3.2小节中，我们分别对与二维非李循环左 Leibniz 代数和三维非李循环左 Leibniz 代数相关的顶点代数丛进行分类。第 4.1 小节回顾了由顶点代数丛构造顶点代数及其模的方法。第 4.2 小节讨论了当 B 为循环非李左 Leibniz 代数时，与顶点 A 代数丛相关的顶点代数及其模的表示论。第 4.3 小节探讨了这些顶点代数与秩一 Heisenberg 代数相关的顶点算子代数之间的关系。

2. A review on cyclic Leibniz algebras and vertex algebroids

我们首先介绍本文将用到的非李循环 Leibniz 代数的背景知识。随后，我们回顾 1-截断共形代数、顶点代数丛和 Lie 拟代数的定义，并讨论李代数丛模。

定义 1. [DMS，FM] 左Leibniz代数 $\mathfrak{L}$ 是一个 $\mathbb{C}$-向量空间，配备双线性映射 $[\ ,\ ]: \mathfrak{L}\times\mathfrak{L}\to\mathfrak{L}$，并满足莱布尼茨恒等式

$$[a,[b,c]]=[[a,b],c]+[b,[a,c]]$$

对所有 a、b、$c\in\mathfrak{L}$均成立。

设 I 是 $\mathfrak{L}$的一个子空间。若 $[\mathfrak{L},I]\subseteq I$（分别地，$[I,\mathfrak{L}]\subseteq I$），则 I 是 $\mathfrak{L}$ 的左（分别地，右）理想。若 I 既是左理想又是右理想，则它是 $\mathfrak{L}$ 的理想。

设 $\mathfrak{L}$ 是一个左Leibniz代数，并设 $u\in\mathfrak{L}$。现在，我们将 $u^1=u$、$u^2=[u,u]$ 记作 $n\geq 1$ 的 $u^{n+1}=[u,u^n]$，一般情形亦如此。显然，$[[u,u],y]=0$；更一般地，对于所有 $y\in\mathfrak{L}$、$n\geq 2$，都有 $[u^n,y]=0$。

定义2. 设 $\mathfrak{L}$ 是一个Leibniz 代数。当且仅当存在某个 $u\in\mathfrak{L}$ 使得 $\mathfrak{L}=\langle u\rangle=Span\{u^k\mid k=1,2,....\}$ 时，$\mathfrak{L}$ 是循环的。若 $\mathfrak{L}=\langle v\rangle$，则称 v 为 $\mathfrak{L}$ 的生成元。

命题3. [BuHLSS, DMS]

(1) 对于一个非李左Leibniz代数 B，若 $\dim B=2$，则 B 同构于由 b 生成的循环左莱布尼茨代数，其中 $[b,b^2]=0$ 或 $[b,b^2]=b^2$。(2) 满足 $\dim B=3$ 且非零括号为 $[\ ,\ ]$ 的循环非李左莱布尼茨代数的完整列表 B 如下：(a) $[x,x]=y$，$[x,y]=z$。(b) $[z,y]=y$；$[z,x]=\alpha x$、$\alpha\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 和 $\alpha\neq 1$。(c) $[z,x]=x+y$；$[z,y]=y$。(d) $[z,x]=y$；$[z,y]=y$；$[z,z]=x$。

推论4. [BuHLSS]

设 B 是一个非李循环莱布尼兹代数 B，满足 $\dim B=3$。

(1) 若 B 在命题3中属于类型（b），则 B 有一组基 $\{b,b^2,b^3\}$，使得 $b^4=b^2-\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}ib^3$（$\alpha\neq 1$）。(2) 若 B 在命题3中属于类型（c），则 B 有一组基 $\{b,b^2,b^3\}$，使得 $b^4=b^2+2ib^3$。(3) 若 B 在命题 3 中属于类型（d），则 B 有一组基 $\{b,b^2,b^3\}$，使得 $b^4=b^3$。

定义5. [GMS] 一个1-截断共形代数是一个分次向量空间 $C=C_0\oplus C_1$，配备线性映射 $\partial: C_0\to C_1$ 以及双线性运算 $(u,v)\mapsto u_iv$，其中 $i=0$，1 的次数为 $-i-1$，定义在 $C=C_0\oplus C_1$ 上，并满足以下公理：

对 $a\in C_0$、$u\in C_1$ 的导子性，

$$(\partial a)_0=0,\quad (\partial a)_1=-a_0,\quad \partial(u_0a)=u_0\partial a; \tag{1}$$

（交换性）对于 $a\in C_0$、u、$v\in C_1$，

$$u_0a=-a_0u,\quad u_0v=-v_0u+\partial(u_1v),\quad u_1v=v_1u; \tag{2}$$

（结合律）对于 α、β、$\gamma \in C_0 \oplus C_1$,

$$\alpha_0\beta_i\gamma = \beta_i\alpha_0\gamma + (\alpha_0\beta)_i\gamma. \tag{3}$$

定义 6. [Br1、Br2、GMS] 设 $(A, *)$ 是一个$\mathbb{C}$ 上的含幺交换结合代数，其单位元为 1_A。顶点 A-代数胚是一个 $\mathbb{C}$-向量空间 Γ，并配备

(1) 一个 $\mathbb{C}$-双线性映射 $A \times \Gamma \to \Gamma$, $(a, v) \mapsto a \cdot v$，使得 $1 \cdot v = v$（即一个非结合的含幺 A-模），(2) 一个 Leibniz $\mathbb{C}$-代数 $[\ ,\ ]$ 的结构：$\Gamma \times \Gamma \to \Gamma$，(3) 左 Leibniz $\mathbb{C}$-代数 π 的一个同态：$\Gamma \to Der(A)$，(4) 一个对称的 $\mathbb{C}$- 双线性配对 $\langle\ ,\ \rangle$：$\Gamma \otimes_{\mathbb{C}} \Gamma \to A$,
(5) 一个 $\mathbb{C}$-线性映射 ∂：$A \to \Gamma$，使得 $\pi \circ \partial = 0$ 并满足以下条件：

$$\begin{aligned}
&a \cdot (a' \cdot v) - (a * a') \cdot v = \pi(v)(a) \cdot \partial(a') + \pi(v)(a') \cdot \partial(a),\\
&[u, a \cdot v] = \pi(u)(a) \cdot v + a \cdot [u, v],\\
&[u, v] + [v, u] = \partial(\langle u, v\rangle),\\
&\pi(a \cdot v) = a\pi(v),\\
&\langle a \cdot u, v\rangle = a * \langle u, v\rangle - \pi(u)(\pi(v)(a)),\\
&\pi(v)(\langle v_1, v_2\rangle) = \langle [v, v_1], v_2\rangle + \langle v_1, [v, v_2]\rangle,\\
&\partial(a * a') = a \cdot \partial(a') + a' \cdot \partial(a),\\
&[v, \partial(a)] = \partial(\pi(v)(a)),\\
&\langle v, \partial(a)\rangle = \pi(v)(a)
\end{aligned}$$

对于 $a, a' \in A$, $u, v, v_1, v_2 \in \Gamma$。

命题 7. [LiY1] 设 $(A, *)$ 是一个含幺交换结合代数，并设 B 是 A 作为非结合代数的一个模。那么，在 B 上定义顶点 A-拟代数结构，恰好等价于在 $C = A \oplus B$ 上定义一个 1-截断共形代数结构，其中

$$\begin{aligned}
&a_i a' = 0,\\
&u_0 v = [u, v],\ u_1 v = \langle u, v\rangle,\\
&u_0 a = \pi(u)(a),\ a_0 u = -u_0 a
\end{aligned}$$

对于 $a, a' \in A$, $u, v \in B$, $i = 0$，存在 1 使得

$$\begin{aligned}
&a \cdot (a' \cdot u) - (a * a') \cdot u = (u_0 a) \cdot \partial a' + (u_0 a') \cdot \partial a,\\
&u_0(a \cdot v) - a \cdot (u_0 v) = (u_0 a) \cdot v,\\
&u_0(a * a') = a * (u_0 a') + (u_0 a) * a',\\
&a_0(a' \cdot v) = a' * (a_0 v),\\
&(a \cdot u)_1 v = a * (u_1 v) - u_0 v_0 a,\\
&\partial(a * a') = a \cdot \partial(a') + a' \cdot \partial(a).
\end{aligned}$$

定义 8. 设 I 是顶点 A-拟代数 B 的一个子空间。向量空间 I 称为顶点 A-拟代数 B 的一个理想，如果 I 是左 Leibniz 代数 B 的一个左理想，并且对所有 $a \in A$、$u \in I$，$a \cdot u \in I$。

设 $(A,*)$ 是一个含幺交换结合代数。设 B 是一个顶点 A-拟代数。定义 $A\partial(A) := Span\{a\cdot\partial(a') \mid a,a'\in A\}$。向量空间 $A\partial(A)$ 是顶点 A-拟代数 B 的一个理想。此外， $A\partial(A)$ 是一个阿贝尔李代数。

注意，对于 a、 a'、 $a''\in A$、 $u\in B$，我们有

$$\begin{aligned}(a\cdot\partial(a'))_0a'' &= 0, \text{ and}\\ (a\cdot\partial(a'))_0u &= a\cdot(u_0\partial(a'))+(u_0a)\cdot\partial(a')+\partial(u_1(a\cdot\partial(a'))\in A\partial(A).\end{aligned}$$

定义 9. 设 A 是一个交换结合代数。Lie A-代数丛是一个李代数 $\mathfrak{g}$，配备一个 A-模结构，以及在 A 上的模作用，该作用满足导子性，使得

$$\begin{aligned}[u,av] &= a[u,v]+(ua)v,\\ a(ua') &= (au)a'\end{aligned}$$

对于 u、 $v\in\mathfrak{g}$、 a、 $a'\in A$，有。

Lie A-代数丛 $\mathfrak{g}$ 的一个模是一个向量空间 W，配备一个 $\mathfrak{g}$-模结构和一个 A-模结构，使得

$$\begin{aligned}u(aw)-a(uw) &= (ua)w,\\ a(uw) &= (au)w\end{aligned}$$

对所有 $a\in A$、 $u\in\mathfrak{g}$、 $w\in W$。

命题 10. [Br2] 设 A 是 $\mathbb{C}$ 上的含幺交换结合代数，且 B 是一个顶点 A-代数拟簇。那么 $B/A\partial(A)$ 是一个李 A-代数拟簇。

命题 11. [LiY1] 设 $\mathfrak{g}$ 是一个李 A-代数拟簇。那么 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数，且 A 是一个 $\mathfrak{g}$-模。将 $\mathfrak{g}$-模 A 添入 $\mathfrak{g}$ 后，我们得到一个李代数 $A\oplus\mathfrak{g}$，其中 A 是一个阿贝尔理想。记 J 为包络代数 $U(A\oplus\mathfrak{g})$ 中由下列向量生成的双边理想

$$1_A-1,\ a\cdot a'-aa',\ a\cdot b-ab$$

对于 a、 $a'\in A$、 $b\in\mathfrak{g}$，其中 1_A 是 A 的单位元，而 $\cdot$ 表示包络代数中的乘积。令

$$\overline{U}(A\oplus\mathfrak{g}) = U(A\oplus\mathfrak{g})/J.$$

向量空间 W 上关于李 A-代数拟簇 $\mathfrak{g}$ 的（简单）模结构，恰好等价于一个（简单的）$\overline{U}(A\oplus\mathfrak{g})$-模结构。

3. Classification of vertex algebroids associated with non-Lie cyclic left Leibniz algebras

本节对所有顶点 A-代数胚 B when B 为循环非李左莱布尼茨代数，且满足 $B\neq A\partial(A)$、$\dim B$ 为 2 或 3 的情形进行分类。在第 3.1 小节中，我们将找出所有顶点 A-代数胚 B when B 为满足 $B\neq A\partial(A)$ 的二维非李循环左 Leibniz 代数的情形。在第 3.2 小节中，我们研究并分类所有顶点 A-代数胚B when B 为满足 $B\neq A\partial(A)$ 的三维循环非李左莱布尼茨代数的情形。

值得一提的是，本节的结果对于研究与顶点 A-拟群 B 相关的顶点代数 V_B 的表示论具有至关重要的作用，其中 B是一个非李循环左莱布尼茨代数，满足 $B\neq A\partial(A)$且 $2\leq$ 维数$B\leq 3$；此外，这些结果还将用于

第4节中对顶点代数 V_B 与秩一海森堡顶点算子代数之间关系的探讨。

现在，设 A 是一个含幺交换结合代数，并设 B 是一个顶点 A-代数胚，使得 B 是一个循环非李左莱布尼茨代数， $B \neq A\partial(A)$，且 $\dim(B) = n$。因此， B 具有 $Span\{b, b_0b, ..., (b_0)^{n-1}b\}$ 的形式。令 $a = b_1b$。由于 $b_0b = -b_0b + \partial(b_1b)$，且 B 是一个循环非李左莱布尼茨代数，我们可以得出 $\partial(a) = 2b_0b \neq 0$ 和 $a \neq 0$。利用 $\{b, b_0b, ..., (b_0)^{n-1}b\}$ 是 B 的一组基这一事实，以及 $(b_0)^i\partial(a) = \partial((b_0)^i a)$，我们可以得出

$$\{b, \partial(a), ..., \partial((b_0)^{n-2}a)\}$$

也是 B 的一组基。由于 $\partial(A) \subseteq A\partial(A) \subseteq B$，且 $1 = \dim B/\partial(A) \geq \dim B/A\partial(A) \geq 1$，我们可以得出 $A\partial(A) = \partial(A)$，并且

$$\{\partial(a), ..., \partial((b_0)^{n-2}a)\}$$

是 $\partial(A)$ 的一组基。

命题12. [JY1] 设 A 是一个有限维含幺交换结合代数，其单位元为 1_A，并设 B 是一个有限维非李左Leibniz代数。假设 B 是一个顶点 A-代数胚。若 $Ker(\partial) = \mathbb{C}1_A$，则 A 是一个局部代数。

命题13. 设 A 是一个含幺交换结合代数，其单位元为 1_A。设 B 是一个顶点 A-代数胚，使得 B 是一个循环非李左莱布尼茨代数， $B \neq A\partial(A)$，且 $\dim(B) = n$。那么，存在 $b \in B$，使得 $\{b, b_0b, ..., (b_0)^{n-1}b\}$ 是 B 的一组基。令 $a = b_1b$。假设 $Ker(\partial) = \mathbb{C}1_A$。那么 A 是一个局部代数，其一组基为 $\{1_A, a, b_0a, ..., (b_0)^{n-2}a\}$。

证明。首先，我们将证明 $\{1_A, a, b_0a, ..., (b_0)^{n-2}a\}$ 线性无关。设

$$\alpha 1_A + \alpha_0 a + \alpha_1 b_0 a + ... + \alpha_{n-2}(b_0)^{n-2}a = 0. \tag{4}$$

将 ∂ 应用于 (4)，得到

$$\alpha_0\partial(a) + \alpha_1\partial(b_0a) + ... + \alpha_{n-2}\partial((b_0)^{n-2}a) = 0.$$

由于 $\{\partial(a)\ \partial(b_0a)\ ...., \partial((b_0)^{n-2}a)\}$ 线性无关，我们可以得出 $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_{n-2} = 0$。此外，我们有 $\alpha 1_A = 0$。这意味着 $\alpha = 0$，并且$\{1_A, a, b_0a, ..., (b_0)^{n-2}a\}$ 线性无关。

接下来，我们证明 $A = Span\{1_A, a, b_0a, ..., (b_0)^{n-2}a\}$。设 $a' \in A$。那么 $\partial(a') \in \partial(A)$。因此，存在 $\beta_0, ..., \beta_{n-2} \in \mathbb{C}$，使得

$$\partial(a') = \beta_0\partial(a) + \beta_1\partial(b_0a) + ... + \beta_{n-2}\partial((b_0)^{n-2}a).$$

因此，我们有 $a' - (\beta_0 a + \beta_1 b_0 a + ... + \beta_{n-2}(b_0)^{n-2}a) \in Ker(\partial)$。由于 $Ker(\partial) = \mathbb{C}1_A$，这意味着存在 $\chi \in \mathbb{C}$ 使得

$$a' = \beta_0 a + \beta_1 b_0 a + ... + \beta_{n-2}(b_0)^{n-2}a + \chi 1_A.$$

因此， $A = Span\{1_A, a, b_0a, ..., (b_0)^{n-2}a\}$。

□

3.1. 二维非李左Leibniz代数所关联的顶点代数丛的分类。

设 A 是一个含幺交换结合代数，其单位元为 1_A。设 B 是一个顶点 A-代数胚，使得 B 是一个非李左 Leibniz 代数，$\dim(B) = 2$，且 $B \neq A\partial(A)$。因此，存在 $b \in B$，使得 $\{b, b_0 b\}$ 是 B 的一组基。

令 $a = b_1 b$。假设 $Ker(\partial) = \mathbb{C}1_A$。则 A 是一个局部代数，其基为$\{1_A, a\}$，而 $\{b, \partial(a)\}$ 是 B的一组基。为方便起见，我们还令

$$a * a = \alpha_1 1_A + \alpha_2 a.$$

这里，α_1，$\alpha_2 \in \mathbb{C}$。显然，我们有

$$a \cdot \partial(a) = \frac{1}{2}\alpha_2 \partial(a).$$

由于 B 是一个二维左Leibniz代数，根据命题3，我们知道，要么 $b_0(b_0 b) = 0$，要么 $b_0(b_0 b) = b_0 b$。在定理 14 和定理 15 中，我们分别研究了当 $b_0(b_0 b) = 0$ 以及当 $b_0(b_0 b) = b_0 b$时，顶点 A-代数胚 B 的代数结构。

定理 14. 设 A 是一个含幺交换结合代数，单位元为 1_A。设 B 是一个顶点 A-拟代数，且 B 是循环非李左Leibniz代数，$\dim B = 2$，$B \neq A\partial(A)$，并且 $Ker(\partial) = \mathbb{C}1_A$。显然，存在 $b \in B$，使得 $\{b, b_0 b\}$ 是 B 的一个基。令 $a = b_1 b$，则集合 $\{b, \partial(a)\}$ 是 B 的一个基，而集合 $\{1_A, a\}$ 是 A 的一个基。

假设 $b_0(b_0 b) = 0$。则 (i) $b_0 a = 0$，(ii) $a \cdot b \in \partial(A)$，(iii) $a * a = 0$，$A \cong \mathbb{C}[x]/(x^2)$，以及 (iv) $a \cdot \partial(a) = 0$。(v) 此外，B 是 A 的交换结合代数模。(vi) 理想 (a) 是 A 的唯一极大理想。此外，对于 $u \in (a)$，$w \in B/A\partial(A)$

，

$w_0 u = 0$ 和 $u \cdot w = 0$。

证明。假设 $b_0 b_0 b = 0$。由于 $\partial(a) = 2b_0 b$，我们有 $b_0\partial(a) = 0$。首先，我们证明命题 (i)。由于 $\partial(b_0 a) = b_0\partial(a) = 0$，因此有 $b_0 a \in Ker(\partial) = \mathbb{C}1_A$。所以，存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $b_0 a = \lambda 1_A$。此外，$b_0 b_0 a = 0$.

令 $a \cdot b = \beta_1 b + \beta_2 \partial(a)$。回顾一下，$a \cdot \partial(a) = \frac{1}{2}\alpha_2 \partial(a)$。由于

$$\begin{aligned} b_0(a \cdot b) &= a \cdot b_0 b + (b_0 a) \cdot b = \frac{1}{2} a \cdot \partial(a) + \lambda b = \frac{1}{4}\alpha_2 \partial(a) + \lambda b \text{ and} \\ b_0(a \cdot b) &= b_0(\beta_1 b + \beta_2 \partial(a)) = \beta_1 \frac{1}{2}\partial(a) + \beta_2 \partial(b_0 a) = \beta_1 \frac{1}{2}\partial(a), \end{aligned}$$

我们有 $\beta_1 \frac{1}{2}\partial(a) = \frac{1}{4}\alpha_2 \partial(a) + \lambda b$。由于 $\{b, \partial(a)\}$线性无关，因此可得 $\lambda = 0$和 $\frac{1}{4}\alpha_2 = \frac{1}{2}\beta_1$。此外，我们有

$$b_0 a = 0,\ \beta_1 = \frac{1}{2}\alpha_2 \text{ and } a \cdot b = \frac{1}{2}\alpha_2 b + \beta_2 \partial(a). \tag{5}$$

这就证明了（i）。

接下来，我们将证明陈述（v）。回忆一下，对于 a'、$a'' \in A$、$u \in B$,

$$a'' \cdot (a' \cdot u) - (a'' * a') \cdot u = (u_0 a'') \cdot \partial(a') + (u_0 a') \cdot \partial(a'').$$

若令 $u = b$, $a' = a'' = a$，则

$$a \cdot (a \cdot b) - (a * a) \cdot b = (b_0 a) \cdot \partial(a) + (b_0 a) \cdot \partial(a).$$

由于 $b_0 a = 0$，我们有

$$a \cdot (a \cdot b) - (a * a) \cdot b = 0. \tag{6}$$

同样，若令 $u = \partial(a)$，$a' = a'' = a$，则

$$a \cdot (a \cdot \partial(a)) - (a * a) \cdot \partial(a) = ((\partial(a))_0 a) \cdot \partial(a) + ((\partial(a))_0 a) \cdot \partial(a) = 0. \tag{7}$$

由 (6)、(7)，我们可以得出，B 是交换结合代数 A 上的一个模。这证明了 (v)。

现在，我们将证明命题 (ii) $-$ (iv)。回想一下，对于 $u, v \in B$, $a \in A$,

$$(a \cdot u)_1 v = a * (u_1 v) - u_0 v_0 a.$$

当我们令 $u = v = b$ 时，有 $(a \cdot b)_1 b = a * (b_1 b) - b_0 b_0 a$。由于 $b_1 b = a$ 和 $b_0 a = 0$，我们得到

$$(a \cdot b)_1 b = a * a. \tag{8}$$

由 (5)，我们有

$$a * a = (a \cdot b)_1 b = (\frac{1}{2}\alpha_2 b + \beta_2 \partial(a))_1 b = \frac{1}{2}\alpha_2 a + \beta_2 (b_0 a) = \frac{1}{2}\alpha_2 a.$$

由于 $a * a = \alpha_1 1_A + \alpha_2 a$ 和 $a * a = \frac{1}{2}\alpha_2 a$，我们可以得出 $\alpha_1 1_A + \frac{1}{2}\alpha_2 a = 0$。这意味着 $\alpha_1 = 0$，并且 $\alpha_2 = 0$。此外，

$$a * a = 0,\ a \cdot b = \beta_2 \partial(a) \in \partial(A),\ a \cdot \partial(a) = \frac{1}{2}\alpha_2 \partial(a) = 0.$$

这证明了 (ii) $-$(iv)。命题 (v)、(vi) 是 (i)-(iv) 的推论 . □

定理 15. 设 A 是含幺交换结合代数，其单位元为 1_A。设 B 是一个顶点 A-拟代数，使得 B 是循环非李左莱布尼茨代数，$\dim B = 2$，$B \neq A\partial(A)$，且 $Ker(\partial) = \mathbb{C}1_A$。存在 $b \in B$，使得 $\{b, b_0 b\}$ 是 B 的一组基。令 $a = b_1 b$。则 $\{b, \partial(a)\}$ 是 B 的一组基，而 $\{1_A, a\}$ 是 A 的一组基。

假设 $b_0(b_0 b) = b_0 b$。若令 $a * a = \alpha_1 1_A + \alpha_2 a$，则有 (i) $\alpha_1 = -\frac{1}{4}\alpha_2^2$，(ii) $b_0 a = a - \frac{1}{2}\alpha_2 1_A$，(iii) $a \cdot b = \frac{1}{2}\alpha_2 b + (\frac{1}{2}\alpha_2 - 1)\partial(a)$，(iv) $a * a = \alpha_2 a - \frac{1}{4}\alpha_2^2 1_A$，$a \cdot \partial(a) = \frac{\alpha_2}{2}\partial(a)$ 和 $A \cong \mathbb{C}[x]/(x - \frac{1}{2}\alpha_2)^2$。(v) 向量空间 $(a - \frac{1}{2}\alpha_2 1_A)$ 是 A 的唯一极大理想。此外，对于 $u \in (a - \frac{1}{2}\alpha_2 1_A)$、$w \in B/A\partial(A)$、$w_0 u \in (a - \frac{1}{2}\alpha_2 1_A)$ 和 $u \cdot w = 0$。

证明。由于 $\partial(b_0a) = \partial(a)$，因此我们有 $\partial(b_0a - a) = 0$，且 $b_0a - a \in Ker(\partial)$。由于$Ker(\partial) = \mathbb{C}1_A$，我们可以得出，对于某个 $\rho \in \mathbb{C}$， $b_0a = a + \rho 1_A$。

现在，我们设 $a \cdot b = \beta_1 b + \beta_2 \partial(a)$。由于 $b_0(a \cdot b) = a \cdot (b_0b) + (b_0a) \cdot b$，且 $b_0a = a + \rho 1_A$，因此我们有 $b_0(a \cdot b) = a \cdot \frac{1}{2}\partial(a) + (a + \rho 1_A) \cdot b$. 由于

$$\begin{aligned} b_0(a \cdot b) &= b_0(\beta_1 b + \beta_2 \partial(a)) \\ &= \beta_1 \frac{1}{2}\partial(a) + \beta_2 \partial(b_0a) \\ &= \frac{1}{2}\beta_1 \partial(a) + \beta_2 \partial(a) \\ &= (\frac{1}{2}\beta_1 + \beta_2)\partial(a) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} b_0(a \cdot b) &= a \cdot \frac{1}{2}\partial(a) + (a + \rho 1_A) \cdot b \\ &= \frac{1}{4}\alpha_2 \partial(a) + a \cdot b + \rho b \\ &= \frac{1}{4}\alpha_2 \partial(a) + \beta_1 b + \beta_2 \partial(a) + \rho b \\ &= (\beta_1 + \rho)b + (\frac{1}{4}\alpha_2 + \beta_2)\partial(a), \end{aligned}$$

我们可以得出 $(\frac{1}{2}\beta_1 + \beta_2)\partial(a) = (\beta_1 + \rho)b + (\frac{1}{4}\alpha_2 + \beta_2)\partial(a)$。因为 $\{b, \partial(a)\}$ 是一组基，所以我们有 $\beta_1 = -\rho$和 $\beta_1 = \frac{1}{2}\alpha_2.$。这意味着 $\rho = -\frac{1}{2}\alpha_2.$。总之，我们有

$$\begin{aligned} b_0a &= a - \frac{1}{2}\alpha_2 1_A, \\ a \cdot b &= \frac{1}{2}\alpha_2 b + \beta_2 \partial(a). \end{aligned}$$

这就证明了（ii）。

Since $b_0(a * a) = b_0(\alpha_1 1_A + \alpha_2 a) = \alpha_2 b_0 a = \alpha_2(a - \frac{1}{2}\alpha_2 1_A) = \alpha_2 a - \frac{1}{2}\alpha_2^2 1_A$ and

$$b_0(a * a) = a * (b_0a) + (b_0a) * a = 2a * (b_0a) = 2a * (a - \frac{1}{2}\alpha_2 1_A) = 2a * a - \alpha_2 a,$$

我们有

$$a * a = \alpha_2 a - \frac{1}{4}\alpha_2^2 1_A.$$

这就证明了（iv）。

由于 $a * a = \alpha_1 1_A + \alpha_2 a$ 和 $\{1_A, a\}$ 是 A的一组基，因此我们可以得出

$$\alpha_1 = -\frac{1}{4}\alpha_2^2.$$

这就证明了（i）。

现在，我们来求解 β_2。回想一下，$(a\cdot b)_1b = a*a - b_0(b_0a)$。由于

$$\begin{aligned}(a\cdot b)_1b &= (\frac{1}{2}\alpha_2 b + \beta_2\partial(a))_1 b\\ &= \frac{1}{2}\alpha_2 a + \beta_2 b_0 a,\\ &= \frac{1}{2}\alpha_2 a + \beta_2(a - \frac{1}{2}\alpha_2 1_A) \text{ and}\\ (a\cdot b)_1b &= a*a - b_0(b_0a)\\ &= \alpha_2 a - \frac{1}{4}\alpha_2^2 1_A - b_0(a - \frac{1}{2}\alpha_2 1_A)\\ &= \alpha_2 a - \frac{1}{4}\alpha_2^2 1_A - b_0 a\\ &= \alpha_2 a - \frac{1}{4}\alpha_2^2 1_A - (a - \frac{1}{2}\alpha_2 1_A)\end{aligned}$$

我们有 $\frac{1}{2}\alpha_2 a + \beta_2(a - \frac{1}{2}\alpha_2 1_A) = \alpha_2 a - \frac{1}{4}\alpha_2^2 1_A - (a - \frac{1}{2}\alpha_2 1_A)$。等价地，我们有

$$(\frac{1}{2}\alpha_2 + (-1-\beta_2))a + (-\frac{1}{4}\alpha_2^2 + (1+\beta_2)(\frac{1}{2}\alpha_2))1_A = 0.$$

利用 $\{1_A, a\}$ 线性无关这一事实，我们可以得出 $(\frac{1}{2}\alpha_2 + (-1-\beta_2)) = 0$ 和 $(-\frac{1}{4}\alpha_2^2 + (1+\beta_2)(\frac{1}{2}\alpha_2)) = 0.$。这意味着

$$\beta_2 = \frac{1}{2}\alpha_2 - 1.$$

因此，$a\cdot b = \frac{1}{2}\alpha_2 b + (\frac{1}{2}\alpha_2 - 1)\partial(a)$。这证明了 (iii)。由 (ii)-(iv) 可立即得到命题 (v)。□

3.2. 与三维循环非 Lie Leibniz 代数相关的顶点代数胚的分类。

循环非李左Leibniz代数有4种类型（参见命题3和推论4）。在本小节中，我们将对与这4种类型的3维循环非李左Leibniz代数相关的顶点代数丛进行分类。分类结果见定理 17—定理 20。

引理16. 设 A 是一个含幺交换结合代数，其单位元为 1_A。设 B 是一个顶点 A-代数丛，使得 B 是一个循环非李左Leibniz代数，$\dim B = 3, B \neq A\partial(A)$，且 $Ker(\partial) = \mathbb{C}1_A$。那么存在 $b \in B$，使得 $\{b, b_0b, (b_0)^2b\}$ 是 B 的一组基。此外，若设 $a = b_1b$，则 $\{1_A, a, b_0a\}$ 是 A 的一组基，而 $\{b, \partial(a)\ \partial(b_0a)\}$ 是 B 的一组基。

假设

$$a\cdot b = \beta b + \gamma_0\partial(a) + \gamma_1\partial(b_0a), \tag{9}$$

$$b_0\partial(b_0a) = c_0\partial(a) + c_1\partial(b_0a). \tag{10}$$

这里，$\beta, \gamma_0, \gamma_1, c_0, c_1 \in \mathbb{C}$。那么我们有以下结论:

$$\begin{aligned}
&b_0b_0a = \chi 1_A + c_0a + c_1b_0a \text{ for some } \chi \in \mathbb{C},\\
&a * (b_0a) = \beta b_0a,\\
&(b_0a) * (b_0a) = 0,\\
&(b_0a) \cdot \partial(b_0a) = 0,\\
&(b_0a) \cdot b \in A\partial(A),\\
&a * a = (\gamma_1 + 1)\chi 1_A + (\beta + (\gamma_1 + 1)c_0)a + (\gamma_0 + (\gamma_1 + 1)c_1)b_0a,\\
&a \cdot \partial(a) = \frac{1}{2}((\beta + (\gamma_1 + 1)c_0)\partial(a) + (\gamma_0 + (\gamma_1 + 1)c_1)\partial(b_0a)).
\end{aligned}$$

此外，以下结论成立

$$\begin{aligned}
&(\gamma_0 + (\gamma_1 + 1)c_1)\chi = 0,\\
&(\gamma_0 + (\gamma_1 + 1)c_1)c_0 = 0,\\
&\beta = (\gamma_1 + 1)c_0 + (\gamma_0 + (\gamma_1 + 1)c_1)c_1.
\end{aligned}$$

证明。由于 $\partial((b_0)^2a - (c_0a + c_1b_0a)) = 0$ (参见等式 (10))，且 $Ker(\partial) = \mathbb{C}1_A$，因此存在 $\chi \in \mathbb{C}$ 使得 $(b_0)^2a = \chi 1_A + c_0a + c_1b_0a$。由于 $(b + A\partial(A))_0(a \cdot (b + A\partial(A)) = a \cdot ((b + A\partial(A))_0(b + A\partial(A))) + (b_0a) \cdot (b + A\partial(A))$，并且 $a \cdot b = \beta b + \gamma_0\partial(a) + \gamma_1\partial(b_0a)$，我们得到

$$(b_0a) \cdot (b + A\partial(A)) = 0 + A\partial(A), \text{ and } (b_0a) \cdot b \in A\partial(A).$$

利用 $B/A\partial(A)$ 是一个 Lie A-丛代数这一事实，我们得到

$$a * (b_0a) = a * ((b + A\partial(A))_0a) = (a \cdot (b + A\partial(A))_0a = (\beta b + A\partial(A))_0a = \beta b_0a.$$

由于 $(b_0a) \cdot b \in A\partial(A)$，因此我们得到

$$(b_0a) * (b_0a) = (b_0a) * ((b + A\partial(A))_0a) = ((b_0a) \cdot (b + A\partial(A)))_0a = 0.$$

由于 $(a \cdot b)_1b = a * (b_1b) - b_0b_0a$，我们有

$$\begin{aligned}
a * a &= a * (b_1b)\\
&= (a \cdot b)_1b + (b_0)^2a\\
&= (\beta b + \gamma_0\partial(a) + \gamma_1\partial(b_0a))_1b + (b_0)^2a\\
&= \beta a + \gamma_0 b_0a + \gamma_1(b_0)^2a + (b_0)^2a\\
&= \beta a + \gamma_0 b_0a + (\gamma_1 + 1)(b_0)^2a\\
&= \beta a + \gamma_0 b_0a + (\gamma_1 + 1)(\chi 1_A + c_0a + c_1b_0a)\\
&= (\gamma_1 + 1)\chi 1_A + (\beta + (\gamma_1 + 1)c_0)a + (\gamma_0 + (\gamma_1 + 1)c_1)b_0a.
\end{aligned}$$

此外，由于 $b_0(a * a) = 2a * (b_0a) = 2\beta b_0a$，我们可以得出

$$\begin{aligned}
&2\beta b_0a\\
&= b_0(a * a)\\
&= (\beta + (\gamma_1 + 1)c_0)b_0a + (\gamma_0 + (\gamma_1 + 1)c_1)(b_0)^2a\\
&= (\beta + (\gamma_1 + 1)c_0)b_0a + (\gamma_0 + (\gamma_1 + 1)c_1)(\chi 1_A + c_0a + c_1b_0a)\\
&= (\gamma_0 + (\gamma_1 + 1)c_1)\chi 1_A + (\gamma_0 + (\gamma_1 + 1)c_1)c_0a + (\beta + (\gamma_1 + 1)c_0 + (\gamma_0 + (\gamma_1 + 1)c_1)c_1)b_0a.
\end{aligned}$$

利用 $\{1_A, a, b_0a\}$ 是 A 的一组基这一事实，我们有

$$\begin{aligned}&(\gamma_0 + (\gamma_1 + 1)c_1)\chi = 0,\\&(\gamma_0 + (\gamma_1 + 1)c_1)c_0 = 0,\\&(\gamma_1 + 1)c_0 + (\gamma_0 + (\gamma_1 + 1)c_1)c_1 = \beta.\end{aligned}$$

□

定理 17. 设 A 是含幺交换结合代数，单位元为 1_A。设 B 是一个顶点 A-拟代数，且具有引理16中的性质。

假设 $b_0\partial(b_0a) = 0$。那么

$$\beta = 0,\ a * (b_0a) = 0,\ a * a = (\gamma_1 + 1)\chi 1_A + \gamma_0 b_0 a,\ a \cdot b = \gamma_0\partial(a) + \gamma_1\partial(b_0a),$$
$$a \cdot \partial(a) = \frac{1}{2}\gamma_0\partial(b_0a),\ \textit{and}\ \gamma_0\chi = 0.$$

(i) 当 $\gamma_0 = 0$ 时，我们有

$$(b_0a) \cdot b = 0,\ \chi = 0,\ a * a = 0,\ a \cdot \partial(a) = 0,\ a \cdot b = \gamma_1\partial(b_0a),$$
$$A \cong \mathbb{C}[x, y]/(x^2, y^2, xy).$$

向量空间 (a, b_0a) 是 A 的唯一极大理想。此外，对于 $u \in (a, b_0a), w \in B/A\partial(A)$，$w_0u \in (a, b_0a)$ 和 $u \cdot w = 0$。

(ii) 当 $\gamma_0 \neq 0$ 时，我们有

$$a * a = \gamma_0 b_0 a,\ a * a * a = 0,\ (b_0a) \cdot b = \frac{3}{4}\gamma_0\partial(b_0a),\ A \cong \mathbb{C}[x]/(x^3).$$

向量空间（a）是 A的唯一极大理想。对于 $u \in$（a）、$w \in B/A\partial$（A）、$w_0u \in$（a）和 $u \cdot w = 0$。

证明。将引理16中的 c_0、c_1 设为0，我们得到

$$\beta = 0,\ a * (b_0a) = 0,\ a * a = (\gamma_1 + 1)\chi 1_A + \gamma_0 b_0 a,\ a \cdot b = \gamma_0\partial(a) + \gamma_1\partial(b_0a),$$
$$a \cdot \partial(a) = \frac{1}{2}\gamma_0\partial(b_0a),\ \text{and}\ \gamma_0\chi = 0.$$

现在，我们首先考虑 $\gamma_0 = 0$的情形。回顾一下，对于 u、$v \in B$、$a' \in A$，我们有u_0（$a' \cdot v$）$- a' \cdot$（u_0v）$=$（u_0a'）$\cdot v$. 当我们设 $u = v = b$ 和 $a' = a$时，我们得到

$$b_0(a \cdot b) - a \cdot (b_0b) = (b_0a) \cdot b.$$

由于 $a \cdot b_0b = \frac{1}{2}a \cdot \partial$（$a$）$= 0$ 且 $a \cdot b = \gamma_1\partial$（$b_0a$），我们得到

$$(b_0a) \cdot b = b_0(\gamma_1\partial(b_0a)) = \gamma_1\partial(b_0b_0a) = 0. \tag{11}$$

回顾一下，对于 $a', a'' \in A, u \in B$，有 $a' \cdot (a'' \cdot u) - (a' * a'') \cdot u = (u_0a') \cdot \partial(a'') + (u_0a'') \cdot \partial(a')$。现在，若设 $a' = a, a'' = b_0a, u = b$，则

$$a \cdot (b_0a \cdot b) - (a * (b_0a)) \cdot b = (b_0a) \cdot \partial(b_0a) + (b_0b_0a) \cdot \partial(a).$$

由于 $b_0a\cdot\partial(b_0a)=0$、$(b_0a)\cdot b=0$ 和 $a*(b_0a)=0$，我们有 $(b_0b_0a)\cdot\partial(a)=0$。此外，由于 $b_0b_0a=\chi 1_A+c_0a+c_1b_0a$且 $c_0=c_1=0$，我们有 $b_0b_0a=\chi 1_A$。由于 $(b_0b_0a)\cdot\partial(a)=0$，我们有 $\chi\partial(a)=0$。因此，

$$\chi=0,\ \text{and}\ a*a=0. \tag{12}$$

因此，$A\cong\mathbb{C}[x,y]/(x^2,y^2,xy)$。此外，向量空间 (a,b_0a) 是 A 的唯一极大理想。对于 $u\in(a,b_0a)$、$w\in B/A\partial(A)$、$w_0u\in(a,b_0a)$ 和 $u\cdot w=0$，当 $\gamma_0=0$ 时的情形至此完成。

接下来，我们考虑 $\gamma_0\neq 0$ 的情形。由于 $\gamma_0\chi=0$ 和 $\gamma_0\neq 0$，我们有 $\chi=0$。由于 $\chi=0$ 和 $a*a=(\gamma_1+1)\chi 1_A+\gamma_0b_0a$，我们有

$$a*a=\gamma_0b_0a. \tag{13}$$

由于 $a*(b_0a)=0$，我们可以得出

$$a*(a*a)=a*(\gamma_0b_0a)=0. \tag{14}$$

回忆一下，对于 $u、v\in B$、$a'\in A$，有 $u_0(a'\cdot v)-a'\cdot(u_0v)=(u_0a')\cdot v$。当我们令$u、v=b$ 和 $a'=a$时，有

$$b_0(a\cdot b)-a\cdot b_0b=(b_0a)\cdot b.$$

由于 $a\cdot b=\gamma_0\partial(a)+\gamma_1\partial(b_0a)$ 且 $b_0b=\frac{1}{2}\partial(a)$，因此我们有

$$b_0(\gamma_0\partial(a)+\gamma_1\partial(b_0a))-a\cdot\frac{1}{2}\partial(a)=(b_0a)\cdot b.$$

等价地，$\gamma_0\partial(b_0a)+\gamma_1\partial(b_0b_0a)-\frac{1}{2}a\cdot\partial(a)=(b_0a)\cdot b$。由于 $\partial(b_0b_0a)=0$ 且 $a\cdot\partial(a)=\frac{1}{2}\gamma_0\partial(b_0a)$，我们有

$$(b_0a)\cdot b=\gamma_0\partial(b_0a)-\frac{1}{4}\gamma_0\partial(b_0a)=\frac{3}{4}\gamma_0\partial(b_0a). \tag{15}$$

因此，$A\cong\mathbb{C}[x]/(x^3)$。此外，$(a)$ 是 A 的唯一极大理想。对于 $u\in(a)$、$w\in B/A\partial(A)$、$w_0u\in(a)$ 和 $u\cdot w=0$。这就完成了 $\gamma_0\neq 0$ 时的情形。□

定理18. 设 A是一个含幺交换结合代数，其单位元为 1_A。设 B是一个具有引理16中所述性质的顶点 A-代数胚。

假设

$$b_0\partial(b_0a)=\partial(a)-\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)i\partial(b_0a)\ (\alpha\notin\{0,1\}).$$

那么以下结论成立：

$$\begin{aligned}
&(\gamma_0+(\gamma_1+1)(-\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)i))=0,\ \beta=\gamma_1+1,\ a*(b_0a)=(\gamma_1+1)b_0a,\\
&a\cdot\partial(a)=(\gamma_1+1)\partial(a),\\
&(b_0a)\cdot b=\gamma_1\partial(a)+\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}i\partial(b_0a),\\
&a\cdot b=(\gamma_1+1)b+(\gamma_1+1)\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)i\partial(a)+\gamma_1\partial(b_0a).
\end{aligned}$$

(i) 若 $\gamma_1+1\neq 0$，则

$$\begin{aligned}&\chi=-\gamma_1-1,\\&b_0b_0a=(-\gamma_1-1)1_A+a-\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)ib_0a,\\&a*a=-(\gamma_1+1)^2 1_A+2(\gamma_1+1)a,\\&A\cong\mathbb{C}[x,y]/((x-(\gamma_1+1))^2,(x-(\gamma_1+1))y,y^2).\end{aligned}$$

向量空间 $(a-(\gamma_1+1))1_A)$ 是 A 的唯一极大理想。此外，对于 $u\in(a-(\gamma_1+1_A)1_A)$，$w\in B/A\partial(A)$、$w_0u\in(a-(\gamma_1+1)1_A)$ 以及 $u\cdot w=0$。

(ii) 若 $\gamma_1+1=0$，则

$$\begin{aligned}&\chi=0,\\&b_0b_0a=a-\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)ib_0a,\\&a*a=0,\\&a\cdot b=-\partial(b_0a),\\&A\cong\mathbb{C}[x,y]/(x^2,xy,y^2).\end{aligned}$$

向量空间 (a,b_0a) 是 A 的唯一极大理想。此外，对于 $u\in(a,b_0a)$，$w\in B/A\partial(A)$、$w_0u\in(a,b_0a)$ 以及 $u\cdot w=0$。

证明。当我们在引理16中令 $c_0=1$, $c_1=-\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)i$ 时，有

$$\begin{aligned}&(\gamma_0+(\gamma_1+1)(-\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)i))\chi=0,\\&(\gamma_0+(\gamma_1+1)(-\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)i))=0,\\&\beta=\gamma_1+1+(\gamma_0+(\gamma_1+1)(-\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)i))(-\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)i).\end{aligned}$$

这些意味着

$$\begin{aligned}&\beta=\gamma_1+1,\\&a*(b_0a)=(\gamma_1+1)b_0a,\\&a*a=(\gamma_1+1)\chi 1_A+2(\gamma_1+1)a,\\&a\cdot\partial(a)=(\gamma_1+1)\partial(a).\end{aligned}$$

此外，$A\cong\mathbb{C}[x,y]/(x^2-2(\gamma_1+1)x-(\gamma_1+1)\chi,xy-(\gamma_1+1)y,y^2)$。

由于 $\beta=\gamma_1+1$, $\gamma_0=(\gamma_1+1)\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)i$，因此我们有

$$a\cdot b=(\gamma_1+1)b+(\gamma_1+1)\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)i\partial(a)+\gamma_1\partial(b_0a).$$

因为 $b_0(a\cdot b)-a\cdot(b_0b)=(b_0a)\cdot b$，且 $a\cdot\partial(a)=(\gamma_1+1)\partial(a)$，所以我们有

$$\begin{aligned}&(b_0a)\cdot b\\&=b_0((\gamma_1+1)b+(\gamma_1+1)\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)i\partial(a)+\gamma_1\partial(b_0a))-\frac{1}{2}a\cdot\partial(a)\\&=b_0((\gamma_1+1)b+(\gamma_1+1)\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)i\partial(a)+\gamma_1\partial(b_0a))-\frac{1}{2}(\gamma_1+1)\partial(a)\\&=\gamma_1\partial(a)+\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}i\partial(b_0a).\end{aligned}$$

由于 $c_0=1$，且 $c_1=-\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}i$，我们有 $b_0b_0a=\chi 1_A+a-\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}ib_0a$。因为

$$a\cdot(b_0a\cdot b)-(a*b_0a)\cdot b=(b_0a)\cdot\partial(b_0a)+(b_0b_0a)\cdot\partial(a),$$

$a*(b_0a)=(\gamma_1+1)b_0a$，且 $(b_0a)\cdot\partial(b_0a)=0$，我们有

$$a\cdot(\gamma_1\partial(a)+\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)i\partial(b_0a))-((\gamma_1+1)b_0a)\cdot b=(\chi 1_A+a-\frac{(\alpha+1)}{\sqrt{\alpha}}ib_0a)\cdot\partial(a).$$

这意味着

$$\begin{aligned}&\chi\partial(a)\\&=(\gamma_1-1)a\cdot\partial(a)+\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)i(a\cdot\partial(b_0a)+(b_0a)\cdot\partial(a))-(\gamma_1+1)(b_0a)\cdot b\\&=(\gamma_1-1)(\gamma_1+1)\partial(a)+\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)i\partial(a*(b_0a))-(\gamma_1+1)(b_0a)\cdot b\\&=(\gamma_1^2-1)\partial(a)+\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)i\partial((\gamma_1+1)b_0a)-(\gamma_1+1)(b_0a)\cdot b\end{aligned}$$

上述陈述等价于以下内容：

$$(\gamma_1^2-\chi-1)\partial(a)+\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)i(\gamma_1+1)\partial(b_0a)=(\gamma_1+1)(b_0a)\cdot b.$$

若 $(\gamma_1+1)\neq 0$ 则 $(b_0a)\cdot b=\frac{\gamma_1^2-1-\chi}{\gamma_1+1}\partial(a)+\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)i\partial(b_0a)$。

由于

$$\begin{aligned}(b_0a)\cdot b&=\gamma_1\partial(a)+\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)i\partial(b_0a)\text{ and}\\(b_0a)\cdot b&=\frac{\gamma_1^2-1-\chi}{\gamma_1+1}\partial(a)+\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)i\partial(b_0a),\end{aligned}$$

我们可以得出结论：$\chi=-\gamma_1-1$ 并且

$$b_0b_0a=(-\gamma_1-1)1_A+a-\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)ib_0a.$$

此外，$A\cong\mathbb{C}[x,y]/((x-(\gamma_1+1))^2,(x-(\gamma_1+1))y,y^2)$。向量空间 $(a-(\gamma_1+1))1_A)$ 是 A 的唯一极大理想。此外，对于 $u\in(a-(\gamma_1+1_A)1_A)$，$w\in B/A\partial(A)$，$w_0u\in(a-(\gamma_1+1)1_A)$ 和 $u\cdot w=0$。

若 $\gamma_1+1=0$，则 $\chi\partial(a)=0$。这意味着 $\chi=0$ 和 $b_0b_0a=a-\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}}\right)ib_0a$。此外，我们有 $\beta=0$，$a*b_0a=0$，$a*a=0$，$a\cdot\partial(a)=0$，$\gamma_0=0$ 和 $a\cdot b=-\partial(b_0a)$。含幺交换结合代数 $A\cong\mathbb{C}[x,y]/(x^2,xy,y^2)$。向量空间 (a,b_0a) 是 A 的唯一极大理想。此外，对于 $u\in(a,b_0a)$，$w\in B/A\partial(A)$，$w_0u\in(a,b_0a)$ 和 $u\cdot w=0$。□

定理19. 设 A是一个含幺交换结合代数，其单位元为 1_A。设 B是一个满足引理16中所述性质的顶点 A-algebroid。

假设 $b_0\partial(b_0a)=\partial(a)+2i\partial(b_0a)$。则有以下结论：

$$\gamma_0+(\gamma_1+1)2i=0,\ \beta=\gamma_1+1,$$
$$a*(b_0a)=(\gamma_1+1)b_0a,\ a*a=-(\gamma_1+1)^21_A+2(\gamma_1+1)a,$$
$$a\cdot\partial(a)=(\gamma_1+1)\partial(a),\ (b_0a)\cdot b=\gamma_1\partial(a)-2i\partial(b_0a).$$

此外，$A\cong\mathbb{C}[x,y]/((x-(\gamma_1+1))^2,xy-(\gamma_1+1)y,y^2)$。向量空间 $(a-(\gamma_1+1)1_A,b_0a)$ 是 A 的唯一极大理想。此外，对于 $u\in(a-(\gamma_1+1)1_A,b_0a)$，$w\in B/A\partial(A)$,$w_0u\in(a-(\gamma_1+1)1_A)$ 和 $u\cdot w=0$。

证明。在引理16中，当我们设定 $c_0=1$ 和 $c_1=2i$ 时，以下陈述成立

$$\gamma_0=-(\gamma_1+1)2i,\ \beta=\gamma_1+1,$$
$$a*(b_0a)=(\gamma_1+1)b_0a,\ a*a=(\gamma_1+1)\chi1_A+2(\gamma_1+1)a,$$
$$a\cdot\partial(a)=(\gamma_1+1)\partial(a),\ a\cdot b=(\gamma_1+1)b-(\gamma_1+1)2i\partial(a)+\gamma_1\partial(b_0a).$$

由于 $(b_0a)\cdot b=b_0(a\cdot b)-a\cdot(b_0b)$，我们有

$$(b_0a)\cdot b=\gamma_1\partial(a)-2i\partial(b_0a). \tag{16}$$

因为

$$b_0b_0a=\chi1_A+a+2ib_0a,\ a\cdot((b_0a)\cdot b)-(a*(b_0a))\cdot b=(b_0a)\cdot\partial(b_0a)+(b_0b_0a)\cdot\partial(a),$$
$$a*(b_0a)=(\gamma_1+1)b_0a,\ (\gamma_1+1)\partial(b_0a)=\partial(a*b_0a)=a\cdot\partial(b_0a)+(b_0a)\cdot\partial(a),$$

我们有

$$a\cdot(\gamma_1\partial(a)-2i\partial(b_0a))-(\gamma_1+1)(b_0a)\cdot b=(\chi1_A+a+2ib_0a)\cdot\partial(a).$$

等价地，$(\chi+\gamma_1+1)\partial(a)=0$. 因此，$\chi=-(\gamma_1+1)$，并且

$$a*a=-(\gamma_1+1)^21_A+2(\gamma_1+1)a.$$

其余部分立即可得。□

定理 20. 设 A是一个含幺交换结合代数，其单位元为 1_A。设 B是一个满足引理16中所述性质的顶点 A-拟代数。

假设 $b_0\partial(b_0a)=\partial(b_0a)$。则以下结论成立：

$$\chi=0,\ \beta=\gamma_0+\gamma_1+1,$$
$$a*(b_0a)=\beta b_0a,\ a*a=\beta a+\beta b_0a,$$
$$a\cdot\partial(a)=\frac{1}{2}(\beta\partial(a)+\frac{1}{2}\beta\partial(b_0a)).$$

（1）若 $\gamma_0+\gamma_1+1=0$，则

$$a\cdot b=(-1-\gamma_1)\partial(a)+\gamma_1\partial(b_0a),\ b_0b_0a=b_0a,$$
$$a*(b_0a)=0,\ a*a=0,\ a\cdot\partial(a)=0,\ (b_0a)\cdot b=-\partial(b_0a),$$
$$A\cong\mathbb{C}[x,y]/(x^2,y^2,xy).$$

向量空间 (a,b_0a) 是 A 的唯一极大理想。对于 $u\in(a,b_0a)$、 $w\in B/A\partial(A)$、 $w_0u\in(a,b_0a)$ 和 $u\cdot w=0$。

(2) 若 $\gamma_0+\gamma_1+1\neq0$，则

$$b_0b_0a=b_0a,\ a*a=(\gamma_0+\gamma_1+1)(a+b_0a),\ and$$
$$A\cong\mathbb{C}[x,y]/(x^2-(\gamma_0+\gamma_1+1)(x+y),xy-(\gamma_0+\gamma_1+1)y,y^2).$$

向量空间 $(a-(\gamma_0+\gamma_1+1)1_A,b_0a)$ 是 A 的唯一极大理想。此外，对于 $u\in(a-(\gamma_0+\gamma_1+1)1_A,b_0a)$、 $w\in B/A\partial(A)$、 $w_0u\in(a-(\gamma_0+\gamma_1+1)1_A,b_0a)$ 和$u\cdot w=0$。

证明。若在引理16中令 $c_0=0,c_1=1$，则有

$$(\gamma_0+(\gamma_1+1))\chi=0,\ \beta=\gamma_0+\gamma_1+1,$$
$$a*a=(\gamma_1+1)\chi1_A+(\gamma_0+\gamma_1+1)a+(\gamma_0+\gamma_1+1)b_0a,$$
$$a\cdot\partial(a)=\frac{1}{2}((\gamma_0+\gamma_1+1)\partial(a)+(\gamma_0+\gamma_1+1)\partial(b_0a)).$$

由于 $(b_0a)\cdot b=b_0(a\cdot b)-a\cdot(b_0b)$，我们有

$$\begin{aligned}&(b_0a)\cdot b\\&=b_0(\beta b+\gamma_0\partial(a)+\gamma_1\partial(b_0a))-\frac{1}{2}a\cdot\partial(a)\\&=\frac{1}{2}\beta\partial(a)+\gamma_0\partial(b_0a)+\gamma_1\partial(b_0a)-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\beta\partial(a)+\frac{1}{2}\beta\partial(b_0a))\\&=\frac{1}{4}\beta\partial(a)+(\gamma_0+\gamma_1-\frac{1}{4}\beta)\partial(b_0a)\\&=\frac{1}{4}\beta\partial(a)+(\frac{3}{4}\beta-1)\partial(b_0a).\end{aligned}$$

现在，假设 $\gamma_0+\gamma_1+1=0$。对于这种情况，我们有

$$\beta=0,\ b_0b_0a=\chi1_A+b_0a,\ a*b_0a=\beta b_0a=0,$$
$$(b_0a)\cdot\partial(b_0a)=0,\ a\cdot\partial(a)=0,\ (b_0a)\cdot b=-\partial(b_0a).$$

回顾一下， $a\cdot(b_0a\cdot b)-(a*b_0a)\cdot b=(b_0a)\cdot\partial(b_0a)+(b_0b_0a)\cdot\partial(a)$。由于

$$a\cdot((b_0a)\cdot b)-(a*(b_0a))\cdot b=a\cdot(-\partial(b_0a))$$

并且 $(b_0a)\cdot\partial(b_0a)+(b_0b_0a)\cdot\partial(a)=(\chi1_A+b_0a)\cdot\partial(a)$，我们可以得出结论：

$$\chi\partial(a)+(b_0a)\cdot\partial(a)=-a\cdot\partial(b_0a).$$

等价地，我们有 $\chi\partial(a)+\partial(a*b_0a)=0$。由于 $a*b_0a=0$，因此我们有 $\chi\partial(a)=0$。这意味着 $\chi=0$，且 $a*a=0$。含幺交换结合代数

$A \cong \mathbb{C}[x,y]/(x^2,y^2,xy)$。向量空间 (a, b_0a) 是 A 的唯一极大理想。对于$u \in (a, b_0a)$， $w \in B/A\partial(A)$， $w_0u \in (a, b_0a)$ 且 $u \cdot w = 0$。

接下来，我们假设 $\gamma_0 + \gamma_1 + 1 \neq 0$。那么 $\chi = 0$、 $b_0b_0a = b_0a$ 和

$$a * a = (\gamma_0 + \gamma_1 + 1)(a + b_0a).$$

含幺交换结合代数 $A \cong \mathbb{C}[x,y]/(x^2 - (\gamma_0 + \gamma_1 + 1)(x + y)\ xy - (\gamma_0 + \gamma_1 + 1)y, y^2)$。向量空间 $(a - (\gamma_0 + \gamma_1 + 1)1_A, b_0a)$ 是 A 的唯一极大理想。此外，对于 $u \in (a - (\gamma_0 + \gamma_1 + 1)1_A, b_0a)$、 $w \in B/A\partial(A)$、 $w_0u \in (a - (\gamma_0 + \gamma_1 + 1)1_A, b_0a)$ 和 $u \cdot w = 0$。

□

4. On vertex algebras associated to non-Lie cyclic left Leibniz algebras

本节将从多个方面讨论与顶点 A-拟代数 B 相关的顶点代数 V_B 的表示论，其中 B 为非李循环左莱布尼茨代数，且 $2 \leq$ 维数为 $B \leq 3$。具体而言，在第 4.1 小节中，我们回顾与任意顶点 A-拟代数 B 相关的顶点代数 V_B 及其模的一般构造。在第 4.2 小节和第 4.3 小节中，我们重点讨论这样的顶点代数 V_B ： 其中 B 是顶点A-拟代数，且为非李循环左莱布尼茨代数，维数为 $2 \leq B \leq 3$。此外，我们还从 Lie 拟代数表示论的角度讨论与顶点 A-拟代数 B 相关的顶点代数 V_B 的表示论，并描述特定类型的顶点代数 V_B与秩一海森堡顶点代数之间的关系。

命题 21. [JY1]设 $V = \oplus_{n=0}^{\infty} V_{(n)}$ 是一个 $\mathbb{N}$-分次顶点代数，其中 $V_{(0)}$ 是有限维含幺交换结合代数，且 $\dim V_{(0)} \geq 2$。若 $V_{(0)}$ 是局部代数，则 V 是不可分解的。

命题 22. [JY1] 设 $V = \oplus_{n=0}^{\infty} V_{(n)}$ 是一个满足以下性质的 $\mathbb{N}$-分次顶点代数:

(a) $2 \leq \dim V_{(0)} < \infty$, $1 \leq dim V_{(1)} < \infty$, V 由 $V_{(0)}$ 和 $V_{(1)}$ 生成;

(b) $V_{(0)}$ 是局部代数。

若 $V_{(0)}$ 不是李 $V_{(0)}$-余代数 $V_{(1)}/V_{(0)}D(V_{(0)})$ 的单模，则 V 是一个不可分解的非单顶点代数。

定理 23. 设 $V = \oplus_{n=0}^{\infty} V_{(n)}$ 是一个满足以下性质的 $\mathbb{N}$-分次顶点代数:

(a) $2 \leq \dim V_{(0)} < \infty$, $1 \leq dim V_{(1)} < \infty$, V 由 $V_{(0)}$ 和 $V_{(1)}$ 生成;

(b) $V_{(1)}$ 是一个循环左莱布尼茨代数，且 $\dim V_{(1)}$ 为 2 或 3；(c) $Ker(D|_{V_{(0)}}) = \mathbb{C}\mathbf{1}$

那么， V 是一个不可分解的非单 $\mathbb{N}$-分次顶点代数。

证明。由于 V 是一个 $\mathbb{N}$-分次顶点代数，我们可以立即得出 V_1 是一个顶点 V_0-拟环面。由于 $Ker(D|_{V_{(0)}}) = \mathbb{C}\mathbf{1}$，我们可以立即得出 $V_{(0)}$ 是一个局部代数。由定理 14、定理 15、定理 17—定理 20，我们有 V_0 是

李 $V_{(0)}$-拟环面 $V_{(1)}/V_{(0)}D(V_{(0)})$ 的非单模。由命题 22，我们可以得出 V 是一个不可分解的非单 $\mathbb{N}$-分次顶点代数。

□

4.1. 关于与顶点代数丛 B 及其模相关的顶点代数 V_B 的回顾。本小节中，我们回顾 [LiY1] 中与顶点代数丛相关的顶点代数构造 [。

设 A 是一个带单位元 1_A 的交换结合代数，并设 B 是一个顶点代数丛 A。我们令 $L(A\oplus B) = (A\oplus B)\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]$.。子空间 $L(A)$ 和 $L(B)$ 是以显然的方式定义的。

我们令 $\hat{\partial} = \partial\otimes 1 + 1\otimes\frac{d}{dt}$：$L(A)\to L(A\oplus B)$。对于 $a\in A$, $b\in B$, $n\in\mathbb{Z}$，定义 $deg(a\otimes t^n) = -n-1$, $deg(b\otimes t^n) = -n$。于是 $L(A\oplus B)$ 成为一个 $\mathbb{Z}$ 分次向量空间：

$$L(A\oplus B) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} L(A\oplus B)_{(n)}$$

其中 $L(A\oplus B)_{(n)} = A\otimes\mathbb{C}t^{-n-1} + B\otimes\mathbb{C}t^{-n}$。显然，子空间 $L(A)$ 和 $L(B)$ 也是$\mathbb{Z}$-分次向量空间。此外，对于 $n\in\mathbb{N}$, $L(A)_{(n)} = A\otimes\mathbb{C}t^{-n-1}$.，线性映射 ∂：$L(A)\to L(A\oplus B)$ 的次数为 1。我们定义 $L(A\oplus B)$ 上的双线性乘积 $[\cdot,\cdot]$ 如下：

$$[a\otimes t^m, a'\otimes t^n] = 0, \tag{17}$$
$$[a\otimes t^m, b\otimes t^n] = a_0 b\otimes t^{m+n}, \tag{18}$$
$$[b\otimes t^n, a\otimes t^m] = b_0 a\otimes t^{m+n}, \tag{19}$$
$$[b\otimes t^m, b'\otimes t^n] = b_0 b'\otimes t^{m+n} + m(b_1 b')\otimes t^{m+n-1} \tag{20}$$

对于 $a,a'\in A$, $b,b'\in B$, $m,n\in\mathbb{Z}$。为方便起见，记

$$\mathcal{L} := L(A\oplus B)/\hat{\partial}L(A).$$

文献 [LiY1] 中证明了 $\mathcal{L} = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{L}_{(n)}$ 是一个 $\mathbb{Z}$-分次李代数。这里，

$$\mathcal{L}_{(n)} = L(A\oplus B)_{(n)}/\hat{\partial}(L(A)_{(n-1)}) = (A\otimes\mathbb{C}t^{-n-1} + B\otimes\mathbb{C}t^{-n})/\hat{\partial}(A\otimes\mathbb{C}t^{-n}).$$

特别地，$\mathcal{L}_{(0)} = A\otimes\mathbb{C}t^{-1} + B/\partial A$。

设 ρ：$L(A\oplus B)\to\mathcal{L}$ 是由下式定义的自然线性映射

$$\rho(u\otimes t^n) = u\otimes t^n + \hat{\partial}L(A).$$

对于 $u\in A\oplus B$, $n\in\mathbb{Z}$，我们令 $u(n) = \rho(u\otimes t^n)$ 和 $u(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n)z^{-n-1}$。设 W 是一个$\mathcal{L}$-模。我们用 $u_W(n)$，有时也简写为 $u(n)$，表示作用在 W 上的相应算子，并记作 $u_W(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n)z^{-n-1}\in(\mathrm{End}\ W)[[z,z^{-1}]]$。用生成函数表示的换位子关系如下：

$$[a(z_1), a'(z_2)] = 0, \tag{21}$$

$$[a(z_1), b(z_2)] = z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right)(a_0 b)(z_2), \tag{22}$$

$$[b(z_1), b'(z_2)] = z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right)(b_0 b')(z_2) + (b_1 b')(z_2)\frac{\partial}{\partial z_2} z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \tag{23}$$

对于 $a, a' \in A$, $b, b' \in B$。

接下来，我们定义 $\mathcal{L}^{\geq 0} = \rho((A \oplus B) \otimes \mathbb{C}[t]) \subset \mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}^{<0} = \rho((A \oplus B) \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]) \subset \mathcal{L}$。作为一个向量空间，$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\geq 0} \oplus \mathcal{L}^{<0}$。子空间 $\mathcal{L}^{\geq 0}$ 和 $\mathcal{L}^{<0}$ 是 $\mathcal{L}$ 的分次子代数。

现在我们将 $\mathbb{C}$ 视为平凡的 $\mathcal{L}^{\geq 0}$-模，并构造以下诱导模

$$V_{\mathcal{L}} = U(\mathcal{L}) \otimes_{U(\mathcal{L}^{\geq 0})} \mathbb{C}.$$

根据庞加莱-比尔霍夫-维特定理，作为一个向量空间有 $V_{\mathcal{L}} = U(\mathcal{L}^{<0})$。令 $\mathbf{1} = 1 \in V_{\mathcal{L}}$。我们可以将 $A \oplus B$ 视为一个子空间：

$$A \oplus B \to V_{\mathcal{L}}, \quad a + b \mapsto a(-1)\mathbf{1} + b(-1)\mathbf{1}.$$

We 赋予 $deg\ \mathbb{C} = 0$。于是，$V_{\mathcal{L}} = \oplus_{n\in\mathbb{N}}(V_{\mathcal{L}})^{(n)}$ 是一个受限的 $\mathbb{N}$-分次 $\mathcal{L}$-模。

命题 24. [FKRW, MeP]

存在唯一的顶点代数结构定义在 $V_{\mathcal{L}}$ 上，使得 $Y(u, x) = u(x)$，其中 $u \in A \oplus B$。事实上，顶点代数 $V_{\mathcal{L}}$ 是一个 $\mathbb{N}$-分次顶点代数，且由 $A \oplus B$生成。此外，任意受限的 $\mathcal{L}$-模 W 自然是一个 $V_{\mathcal{L}}$- 模，且 $Y_W(u, x) = u_W(x)$，其中 $u \in A \oplus B$。反过来，任意 $V_{\mathcal{L}}$- 模 W 自然是一个受限的 $\mathcal{L}$-模，且 $u_W(x) = Y_W(u, x)$，其中 $u \in A \oplus B$。

现在，我们令

$$\begin{aligned}
&E_0 = Span\{1_A - \mathbf{1}, a(-1)a' - a * a' \mid a, a' \in A\} \subset (V_{\mathcal{L}})_{(0)},\\
&E_1 = Span\{a(-1)b - a \cdot b \mid a \in A, b \in \mathfrak{L}\} \subset (V_{\mathcal{L}})_{(1)},\\
&E = E_0 \oplus E_1.
\end{aligned}$$

我们定义

$$I_B = U(\mathcal{L})\mathbb{C}[D]E.$$

向量空间 I_B 是 $V_{\mathcal{L}}$的一个 $\mathcal{L}$-子模。我们令

$$V_B = V_{\mathcal{L}}/I_B.$$

命题 25. [GMS, LiY1]

(i) V_B 是一个 $\mathbb{N}$分次顶点代数，使得（V_B）$_{(0)} = A$ 且（V_B）$_{(1)} = B$ （在线性映射 $v \mapsto v(-1)\mathbf{1}$下），并且作为顶点代数的 V_B 由 $A \oplus B$生成。此外，对于任意$n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
&(V_B)_{(n)}\\
&= span\{b_1(-n_1).....b_k(-n_k)\mathbf{1} \mid b_i \in B, n_1 \geq ... \geq n_k \geq 1, n_1 + ... + n_k = n\}.
\end{aligned}$$

(ii) V_B-模 W 是李代数 $\mathcal{L}$ 的一个受限模，其中 $v(n)$对$v \in A \oplus B$、 $n \in \mathbb{Z}$作用为 v_n 。此外，V_B-子模的集合恰好是 $\mathcal{L}$-子模的集合。

命题 26. [LiY1] 设 $W = \oplus_{n\in\mathbb{N}} W_{(n)}$ 是一个带有 $W_{(0)} \neq \{0\}$的 $\mathbb{N}$-分次 V_B-模。则 $W_{(0)}$ 是一个带有 $a \cdot w = a_{-1}w$ 的 A-模，其中 $a \in A$、 $w \in W_{(0)}$，并且 $W_{(0)}$ 是李代数 $B/A\partial(A)$ 的模，且 $b \cdot w = b_0 w$，其中 $b \in B$、 $w \in W_{(0)}$。此外，赋予这些模结构的 $W_{(0)}$ 是 Lie A-代数胚 $B/A\partial A$ 的模。如果 W 是分次单的，则 $W_{(0)}$ 是 Lie A-代数胚 $B/A\partial A$ 的单模。

现在，令 $\mathcal{L}_{\pm} = \oplus_{n\geq 1}\mathcal{L}_{(\pm n)}$ 和 $\mathcal{L}_{\leq 0} = \mathcal{L}_{-} \oplus \mathcal{L}_{(0)}$。设 U 是李代数$\mathcal{L}_{(0)}(= A \oplus B/\partial(A))$ 的一个模。则根据以下作用， U 是一个 $\mathcal{L}_{(\leq 0)}$-模:

$$a(n-1)\cdot u = \delta_{n,0} a \cdot u, \quad b(n)\cdot u = \delta_{n,0} b \cdot u \text{ for } a \in A, b \in B, n \geq 0.$$

接下来，我们构造诱导的 $\mathcal{L}$-模 $M(U) = \text{Ind}_{\mathcal{L}_{(\leq 0)}}^{\mathcal{L}} U$。赋予 U 次数 0，使 $M(U)$ 成为一个 $\mathbb{N}$-分次的 $\mathcal{L}$-模。事实上， $M(U)$ 是一个 $V_{\mathcal{L}}$-模。我们定义

$$W(U) = span\{v_n u \mid v \in E,\ n \in \mathbb{Z},\ u \in U\} \subset M(U),$$

and

$$M_B(U) = M(U)/U(\mathcal{L})W(U).$$

命题 27. [LiY1]

(i) 设 U 是李代数 $\mathcal{L}_{(0)}$ 的一个模。那么 $M_B(U)$ 是一个 V_B-模。若 U 是李 A-代数胚 $B/A\partial A$ 的一个模，则 $(M_B(U))_{(0)} = U$。

(ii) 设 U 是李 A-代数胚 $B/A\partial A$ 的一个模。那么存在唯一的 $U(\mathcal{L})$ 的极大分次子模 $J(U) \subset M(U)$, 满足 $J(U) \cap U = 0$。此外，$L(U) = M(U)/J(U)$ 是一个 $\mathbb{N}$-分次的 V_B-模，使得 $L(U)_{(0)} = U$ 是李 A-代数胚 $B/A\partial A$ 的一个模。若 U 是一个单的 $B/A\partial A$，则 $L(U)$ 是一个 $\mathbb{N}$-分次单 V_B-模。

(iii) 设 $W = \coprod_{n\in\mathbb{N}} W_{(n)}$ 是一个带有 $W_{(0)} \neq 0$ 的 $\mathbb{N}$ 分次单 V_B-模。那么 $W \cong L(W_{(0)})$。

(iv) 对于 Lie A-拟环面 $B/A\partial A$ 的简单模等价类的一组任意完备代表元集 H， $\{L(U) \mid U \in H\}$ 是 $\mathbb{N}$ 分次单 V_B-模等价类的一组完备代表元集。

4.2. 当 B 是循环 Leibniz 代数时，顶点代数 V_B 的表示论。以下定理是定理 23 的直接推论。

定理 28. 设 B 是定理 14–定理 15、定理 17–定理 20 中的顶点 A-拟环面。那么 V_B 是一个不可分解的非单顶点代数。

现在，我们将对当 B 为定理 14–定理 15、定理 17–定理 20 中的顶点 A-拟环面时的顶点代数 V_B 的不可约模进行分类。根据命题 27，只需对 Lie A-拟环面 $B/A\partial(A)$ 的简单模进行分类。

以下引理是由 Lie 拟代数的模、可分解模和非不可约模的定义推得的。

引理29. 设 U 为 Lie A-拟代数 $B/A\partial(A)$）。

(i) 若 U 是可分解的李 A-algbroid $B/A\partial(A)$-模，则 U 是李代数 $B/A\partial(A)$ 的可分解模，且 U 是可分解的 A-模。等价地，若 U 是李代数 $B/A\partial(A)$ 的不可分解模或不可分解的 A-模，则U 是不可分解的李 A-algbroid $B/A\partial(A)$-模。

(ii) 若 U 不是不可约的李 A-algbroid $B/A\partial(A)$-模，则 U 不是李代数 $B/A\partial(A)$ 的不可约模，且 U 不是不可约的 A-模。同样，若 U 是李代数 $B/A\partial(A)$ 的不可约模或不可约的 A- 模，则 U 是不可约的李 A-algbroid $B/A\partial(A)$- 模。

引理 30. 设 $(\mathfrak{a},*)$ 是一个含幺交换结合代数，其单位元为 $1_{\mathfrak{a}}$。设 $\mathfrak{g}$ 是一个李 $\mathfrak{a}$-拟代数，且 $\mathfrak{g}$ 可解。假设

(i) $\mathfrak{a}$ 是一个局部代数，且 $\mathfrak{a}=\mathbb{C}1_{\mathfrak{a}}\oplus\mathfrak{a}'$。这里 $\mathfrak{a}'$ 是 $\mathfrak{a}$ 的唯一极大理想；(ii) 对于 $u\in\mathfrak{a}'$， $w\in\mathfrak{g}$， $w_0u\in\mathfrak{a}'$ 和 $u\cdot w=0$。

那么，每个有限维不可约李 $\mathfrak{a}$-拟代数 $\mathfrak{g}$-模 $U\neq 0$ 都是一维的。此外， $\mathfrak{a}'$ 在 U 上作用为零。

证明. 设 $U\neq 0$ 是一个有限维不可约李 $\mathfrak{a}$-拟代数 $\mathfrak{g}$-模。那么， U 是可解李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个模。此外， U 含有一个公共特征向量 v ，它对应于 $\mathfrak{g}$ 中的所有自同态，并且 $K=\mathbb{C}v$ 是 $\mathfrak{g}$-子模 U。对于 $g\in\mathfrak{g}$，存在 $k_g\in\mathbb{C}$ 使得 $g\cdot v=k_gv$。

令 $\mathfrak{a}'\cdot v=Span\{\alpha'\cdot v\mid\alpha'\in\mathfrak{a}'\}\subset U$。显然， $\mathfrak{a}'\cdot v$ 是一个 $\mathfrak{a}$-模。

- 情形 1： $\mathfrak{g}$ 在 K 上的作用是平凡的。

  假设 $\mathfrak{a}'\cdot v\neq\{0\}$。注意，对于 $g\in\mathfrak{g}$、 $\alpha\in\mathfrak{a}'$，我们有 $g\cdot(\alpha\cdot v)=\alpha\cdot(g\cdot v)+(g\cdot\alpha)\cdot v=(g\cdot\alpha)\cdot v\in\mathfrak{a}'\cdot v$。因此， $\mathfrak{a}'\cdot v$ 是一个 $\mathfrak{g}$- 模。由于

  $$\begin{aligned}&g\cdot(a\cdot(\alpha\cdot v))-a\cdot(g\cdot(\alpha\cdot v))\\&=(g\cdot a)\cdot(\alpha\cdot v)\end{aligned}$$

  and

  $$a\cdot(g\cdot(\alpha v))=(a\cdot g)\cdot(\alpha\cdot v)$$

  对于 $g\in\mathfrak{g}$、 $a\in\mathfrak{a}$、 $\alpha\in\mathfrak{a}'$，我们可以得出 $\mathfrak{a}'\cdot v$ 是一个李 $\mathfrak{a}$-锚模 $\mathfrak{g}$-模。由于 U 不可约， $\mathfrak{a}'\cdot v\neq\{0\}$，我们可以得出 $U=\mathfrak{a}'\cdot v$。这意味着 $v\in\mathfrak{a}'\cdot v$。因此，存在 $\lambda\in\mathfrak{a}'$ 使得 $v=\lambda v$。等价地，$(1_{\mathfrak{a}}-\lambda)v=0$。我们知道 λ 不可逆，因为 $\lambda\in\mathfrak{a}'$。由于 $\mathfrak{a}$ 是局部的，我们可以得出$1_{\mathfrak{a}}-\lambda$ 可逆。由于 $1_{\mathfrak{a}}-\lambda$ 可逆且 $(1_{\mathfrak{a}}-\lambda)v=0$，因此 $v=0$。这与 v 是一个特征向量矛盾。因此， $\mathfrak{a}'\cdot v=\{0\}$。此外， K 是李 $\mathfrak{a}$-锚模 $\mathfrak{g}$ 的一个模。这意味着 $U=K$。
- 情形 2： $\mathfrak{g}$在 K 上不平凡地作用。

  存在 $g'\in\mathfrak{g}$ 使得 $g'v=k_{g'}v\neq 0$。注意，对于所有 $a'\in\mathfrak{a}'$， $k_{g'}a'\cdot v=a'(g'\cdot v)=(a'\cdot g')\cdot v=0$ 。这意味着 K 在 $\mathfrak{a}$的作用下封闭，并且对于所有 $a'\in\mathfrak{a}'$， $a'\cdot v=0$ 。此外， K 是李 $\mathfrak{a}$-代数胚 $\mathfrak{g}$的一个模。由于 K 是 U 的李 $\mathfrak{a}$-代数胚子模，且 U 是不可约李 $\mathfrak{a}$-代数胚$\mathfrak{g}$-模，因此我们可以得出结论： $U=K$ 是一维的。

□

定理 31。设 B 是定理 14-定理 15、定理 17-定理 20 中的顶点 A-代数胚。若 U 是有限维不可约李 A-代数胚 $B/A\partial(A)$-模，则存在 $v \in U$ 使得 $U = \mathbb{C}v$， A 的唯一极大理想在 v 和$b \cdot v = \lambda v$上作用为零。这里， $\lambda \in \mathbb{C}$。此外，

$$\{\mathbb{C}v_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C},\ b \cdot v_\lambda = \lambda v_\lambda,\ A \text{ 的唯一极大理想在 } v_\lambda \text{ 上作用为零} \}$$

是有限维不可约 Lie A-代数胚 $B/A\partial(A)$-模的等价类的完备代表集，并且

$$\{L(\mathbb{C}v_\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{C},\ b \cdot v_\lambda = \lambda v_\lambda,\ A \text{ 的唯一极大理想在 } v_\lambda\} \text{ 上作用为零}$$

是零次子空间有限维的不可约 $\mathbb{N}$-分次 V_B-模的等价类的完备代表集。

证明。设 B 是定理 14–定理 15、定理 17–定理 20 中的一个顶点 A-代数胚。那么 A 是一个局部代数，其唯一极大理想为 A'，且 $A = \mathbb{C}1_A \oplus A'$（作为向量空间）。 $B/A\partial$（A）是一维阿贝尔李代数。此外， $B/A\partial$（A）是一个李 A-代数胚。对于 $u \in A'$， $w \in B/A\partial$（A）， $w_0 u \in A'$ 和 $u \cdot w = 0 + A\partial$（$A$）。由引理 30 可知，每个有限维不可约李 A-代数胚 $B/A\partial$（A）-模 $U \neq 0$ 都是一维的。此外， A' 在 U 上作用为零。此外，

$$\{\mathbb{C}v_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C},\ b \cdot v_\lambda = \lambda v_\lambda,\ A \text{ 的唯一极大理想在 } v_\lambda\} \text{ 上作用为零}$$

是有限维不可约李 A-代数 $B/A\partial(A)$-模的等价类的完整代表集。根据命题 27，我们可以进一步得出

$$\{L(\mathbb{C}v_\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{C},\ b \cdot v_\lambda = \lambda v_\lambda,\ A \text{ 的唯一极大理想在 } v_\lambda\} \text{ 上作用为零}$$

是零次子空间有限维的不可约 $\mathbb{N}$-分次 V_B-模的等价类的完整代表集。□

4.3. 关于顶点代数 V_B 与秩一 Heisenberg 代数相关顶点代数之间的联系。本节中，我们将所研究的顶点代数 V_B 与一个众所周知的、与秩一 Heisenberg 代数相关的顶点算子代数联系起来。首先，我们简要回顾与秩一 Heisenberg 代数相关的顶点代数的构造。接下来，我们展示如何从某些顶点代数 V_B 构造海森堡顶点算子代数。

我们将由 h 张成的一维阿贝尔李代数 $\mathfrak{h}$ 记为，其双线性形式为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，满足 $\langle h, h \rangle = 1$。令

$$\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}\mathbf{k}$$

$\mathfrak{h}$ 的仿射化，其括号关系为：对于 $a, b \in \mathfrak{h}, m, n \in \mathbb{Z}$,

$$[a(m), b(n)] = m\langle a, b \rangle \delta_{m+n,0}\mathbf{k},\ [\mathbf{k}, a(m)] = 0.$$

这里，对于 $a \in \mathfrak{h}, m \in \mathbb{Z}$，我们定义 $a(m) = a \otimes t^m$。令

$$\hat{\mathfrak{h}}^+ = \mathfrak{h} \otimes t\mathbb{C}[t] \text{ and } \hat{\mathfrak{h}}^- = \mathfrak{h} \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}].$$

$\hat{}\ \mathfrak{h}^+$ 和$\hat{}\ \mathfrak{h}^-$ 是$\hat{}\ \mathfrak{h}$的阿贝尔子代数。

ˆ 现在，我们考虑由下式给出的诱导 $\mathfrak{h}$-模

$$M(1) = \mathcal{U}(\hat{\mathfrak{h}}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathbb{C}[t]\otimes\mathfrak{h}\oplus\mathbb{C}\mathbf{k})} \mathbb{C}\mathbf{1} \cong S(\hat{\mathfrak{h}}^{-}).$$

这里， $\mathcal{U}(\cdot)$ 和 $S(\cdot)$ 分别表示包络代数和对称代数。此外， $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t]$ 在 $\mathbb{C}\mathbf{1}$ 上平凡作用，而 $\mathbf{k}$ 的作用是乘以 1。于是， $M(1)$ 是一个顶点代数，通常称为与秩一 Heisenberg 代数相关联的顶点算子代数，简称秩一海森堡顶点算子代数，也称为单自由玻色子顶点算子代数。

任意元 属于 $M(1)$ 的元素都可以表示为如下形式的元素的线性组合：

$$h(-k_1).....h(-k_j)\mathbf{1} \text{ with } k_1 \geq ... \geq k_j \geq 1, \text{ for } j \in \mathbb{N}.$$

已知 $M(1)$ 是单的，且有无穷多个两两不同构的不可约模（参见 [FrLMe1、Gu]）。此外，不可分解模已在 [Mil] 中得到完全确定。

定理32. 设 A 是含幺交换结合代数，单位元为 1_A。设 B 是一个满足以下条件之一的顶点 A-algebroid：当 $\alpha_2 \neq 0$ 时满足定理 15 中的假设；当 $\gamma_1+1 \neq 0$ 时满足定理18中的假设；当 $\gamma_1+1 \neq 0$ 时满足定理19中的假设；或当 $\gamma_0+\gamma_1+1 \neq 0$ 时满足定理 20 中的假设。若 $\mathfrak{a}'$ 是局部代数 A 的唯一极大理想，则理想 $(\mathfrak{a}')$ 是 V_B 的极大理想。此外， $V_B/(\mathfrak{a}')$ 与秩一海森堡顶点代数$M(1)$ 同构。

证明。假设 B 是一个顶点 A-代数，并且满足定理 15 中 $\alpha_2 \neq 0$ 成立时的假设，或定理18 中 $\gamma_1 + 1 \neq 0$ 成立时的假设，或定理19 中 $\gamma_1 + 1 \neq 0$ 成立时的假设，或定理 20 中 $\gamma_0 + \gamma_1 + 1 \neq 0$ 成立时的假设。

令 $\mathfrak{a}'$ 为 A 的唯一极大理想。回顾 $A = \mathbb{C}1_A \oplus \mathfrak{a}'$。此外，$B = \mathbb{C}b \oplus \partial(A)$。令 $b \in \mathbb{C}^{\times}b$ 满足 $b_1 b = 1_A + a'$，其中 $a' \in \mathfrak{a}'$。注意到 $(V_B/(\mathfrak{a}'))_0 = \mathbb{C}(1_A + (\mathfrak{a}')$，并且对于 $n \geq 1$ ($V_B/(\mathfrak{a}'))_n = Span_{\mathbb{C}}\{b(-n_1)...b(-n_k)\mathbf{1} + (\mathfrak{a}') \mid n_1 \geq .... \geq n_k \geq 1, \ n_1 + ... + n_k = n\}$。注意 $\mathbf{1} = 1_A$。

设 $\mathfrak{h}$ 是由 h 张成的一维阿贝尔李代数，配有线性形式 $\langle \cdot, \ \cdot \rangle$，满足 $\langle h, \ h \rangle = 1$。设 $f\colon M(1) \to V_B/(\mathfrak{a}')$ 是由下式定义的线性映射：

$$\begin{aligned} f(\mathbf{1}) &= 1_A + (\mathfrak{a}'), \\ f(h(-n_1)...h(-n_k)\mathbf{1}) &= \bar{b}(-n_1)...\bar{b}(-n_k)1_A + (\mathfrak{a}'), \text{ and} \\ fY(h(-1)\mathbf{1}, x) &= Y(f(h(-1)\mathbf{1}), x)f. \end{aligned}$$

注意到，我们有 $fY(\mathbf{1}, x) = Y(1_A, x)f$，且 f是满射。现在，我们将证明 f是顶点代数同态。令 $C(f) = \{v \in M(1) \mid Y(f(v)\ x)f = fY(v, x)\}$。为了证明 f是顶点代数同态，只需证明 $C(f) = M(1)$。显然，$\mathbf{1}, h(-1)\mathbf{1} \in C(f)$。设 $u, v \in C(f)$ 和 $n \in \mathbb{Z}$。利用以下事实： $Y(u_n v, x) =$

$\operatorname{Res}_{x_1}((x_1-x)^nY(u,x_1)Y(v,x)-(-x+x_1)^nY(v,x)Y(u,x_1))$，于是我们有

$$\begin{aligned} & fY(u_nv,x) \\ = \ & \operatorname{Res}_{x_1}((x_1-x)^nfY(u,x_1)Y(v,x)-(-x+x_1)^nfY(v,x)Y(u,x_1)) \\ = \ & \operatorname{Res}_{x_1}((x_1-x)^nY(f(u),x_1)fY(v,x)-(-x+x_1)^nY(f(v),x)fY(u,x_1)) \\ = \ & \operatorname{Res}_{x_1}((x_1-x)^nY(f(u),x_1)Y(f(v),x)f-(-x+x_1)^nY(f(v),x)Y(f(u),x_1)f) \\ = \ & Y(f(u)_nf(v),x)f. \end{aligned}$$

因此，$u_nv\in C(f)$。此外，$C(f)=M(1)$，且 f 是一个同态。由于 $M(1)$ 是简单的，我们可以进一步得出，f 是一个同构，并且 $(\mathfrak{a}')$ 是 V_B 的极大理想。□

References

[Br1] Bressler, P.，《顶点代数丛 I》，arXiv: math.AG/0202185。[Br2] Bressler, P.，《顶点代数丛 II》，arXiv: math.AG/0304115。[BuHLSS] Bugg, K., Hedges, A., Lee, M., Scofield, D. 和 Sullivan, S. M.，《循环 Leibniz 代数》，arxiv: 1402.5821。[BuY] Bui, T. 和 Yamskulna, G.，《与单莱布尼茨代数相关的顶点代数丛和共形顶点代数》，J. Alg. 586 (2021) 357-401。[DMS] Demir, I., Misra, K.C. 和 Stitzinger, E.，《莱布尼茨代数的某些结构》，Contemporary Math. 623 (2014), 41-54。[FM] Fialowski, A. 和 Mihalka, E. Z.，《莱布尼茨代数的表示》，Algebras and Representation Theory 18 (2015), 477-490。[FKRW] Frenkel, E., Kac, V., Ratiu 和 Wang, W.，$W_{1+\infty}$ and $W_{(gl_\infty)}$，中心荷为 N，Comm. Math. Phys. 170 (1995) 337-357。[FrLMe 1] Frenkel, I., Lepowsky, J. 和 Meurman, A.，《顶点算子代数与怪兽群》，Pure and Applied Math., Vol.134, Academic Press (1988)。[GMS] Gorbounov, V., Malikov, F. 和 Schechtman, V.，《手征微分算子丛 II：顶点代数丛》，Invent. Math. 155 (2004), 605-680。[Gu] H. Guo，《阿贝尔交织代数与模》，博士论文，罗格斯大学，1994。[JY1] Jitjankarn, P. 和 Yamskulna, G.，《关于不可分解的非单 $\mathbb{N}$-分次顶点代数》，J. Alg. 557 (2020) 181-210。[JY2] Jitjankarn, P. 和 Yamskulna, G.，《关于与顶点代数丛相关的不可分解顶点代数》，J. Alg. 560 (2020) 791-817。[LiY1] Li, H.-S. 和 Yamskulna, G.，《关于与顶点代数丛相关的某些顶点代数及其模》，J. Alg. 283 (2005) 367-398。[LiY2] Li, H.-S. 和 Yamskulna, G.，《与顶点代数丛相关的顶点代数的扭曲模》，Pac. J. Math., 220, No. 1, 1999-222 (2007)。[MS1] Malikov, F. 和 Schechtman, V.，《手征德拉姆复形 II》，载于《微分拓扑、无限维李代数及其应用》，Amer. Math. Soc. Transl. Ser 2, vol 194, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 149-188。[MS2] Malikov, F. 和 Schechtman, V.，《手征庞加莱对偶》，Math. Res. Lett. 6 (1999), 533-546。[MSV] Malikov, F., Schecthman, V. 和 Vaintrob, A.，《手征德拉姆复形》，Comm. Math. Phys. 204 (1999)439-473。[MeP] Meurman, A. 和 Primc, M.，《 $\tilde{sl}(2,\mathbb{C})$ 标准模的湮灭场与组合恒等式》，Mem. Amer. Math. Soc., vol 652, 1999。[Mil] Milas, A.，《对数交织算子与顶点算子》，Comm. Math. Phys. 277 (2008), 497-529。

Department of Mathematics, Illinois State University, Normal, IL, 61790, USA*Email address*: cnbarn1@ilstu.edu

Department of Mathematics、 Illinois State University、 Normal、 IL, 61790, USA *Email address*: ermart2@ilstu.edu

Department of Mathematics、 Illinois State University、 Normal、 IL, 61790, USA*Email address*: jbserv1@ilstu.edu

Department of Mathematics、 Illinois State University、 Normal、 IL, 61790, USA*Email address*: gyamsku@ilstu.edu