薄立方晶格中的狄利克雷拉普拉斯算子谱

Lucas Chesnel[1],Sergei A. Nazarov[2]

[1] Inria、Ensta Paris、巴黎综合理工学院，法国帕莱索，邮编 91762，Boulevard des Maréchaux 828号；[2] 俄罗斯科学院机械工程问题研究所，俄罗斯圣彼得堡，邮编 199178，V.O., Bolshoi pr. 61号；电子邮箱： lucas.chesnel@inria.fr, srgnazarov@yahoo.co.uk

（2023年1月18日）

arXiv:2301.05930v1 [math.SP] 14 Jan 2023

摘要。 本文描述由细杆构成的无界三维周期晶格中狄利克雷拉普拉斯算子谱的低端部分。细杆的宽度为 $\varepsilon \ll 1$，横截面为正方形。该谱由若干谱段的并集构成；由于狄利克雷边界条件，这些谱段在 ε 趋于零时都趋向于 $+\infty$ 。我们证明，第一个谱段极窄，长度为$O(e^{-\delta/\varepsilon})$， $\delta > 0$，而后续谱段的长度为 $O(\varepsilon)$。为确立这些结果，我们需要详细研究在几何区域 Ω 中的狄利克雷拉普拉斯算子的性质；该区域由对初始周期晶格的连接区域进行缩放得到。这个问题本身也颇有意义。通过结合对称性、极大极小论证以及恰当选取的弗里德里希不等式，我们证明 A^Ω 在其离散谱中有唯一一个特征值，该特征值生成第一个谱段。此外，我们证明 A^Ω不存在阈值共振，即在 A^Ω的阈值频率处不存在非平凡有界解。这意味着，对于后续谱段，描述该晶格的正确一维模型是一个在顶点处满足狄里克雷条件的图。我们还给出了数值计算，以补充分析结果。

关键词。 量子波导、薄周期晶格、阈值共振、陷获波。

1 引言

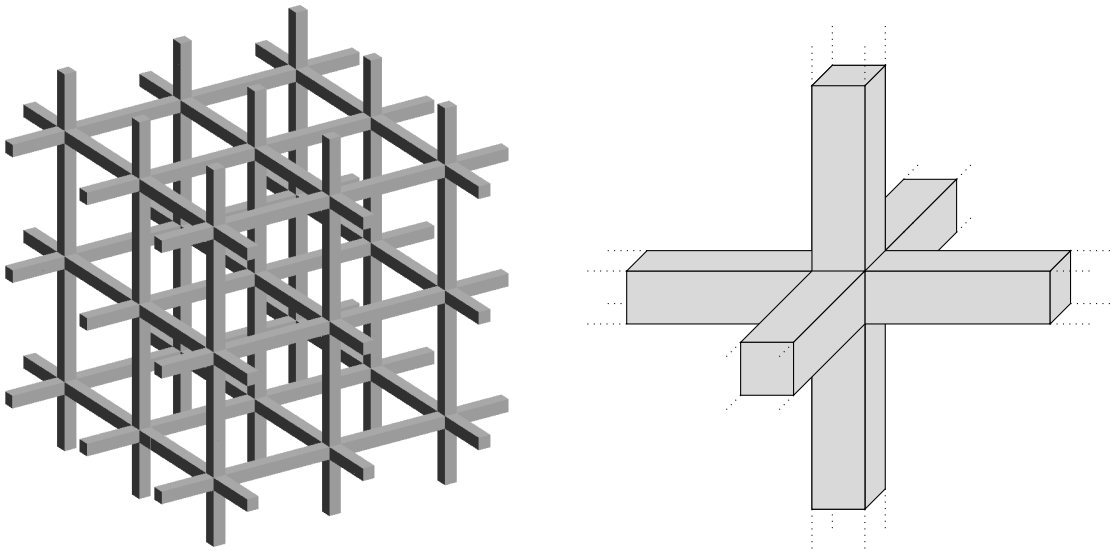

图 1：左：由宽度为 ε 、横截面为正方形的细杆构成的无界周期立方晶格。右：连接区域近场（亦称边界层）问题的几何形状 Ω。

随着物理学领域中与石墨烯相关的研究成果大量涌现，数学界投入了大量努力，以理解由宽度为 $\varepsilon \ll 1$ 的细窄连接段构成的量子波导中狄利克雷算子谱的渐近行为，这些连接段形成无界周期格子。人们已经研究了各种几何结构，关于综述文章请参阅 [17] 。为处理此类问题，通常可将总体方法概括如下。利用 Floquet-Bloch-Gelfand 理论 [12, 19, 40, 20], ，可以证明周期区域中算子的谱具有带隙结构，其中各谱带由定义在周期单胞上的谱问题的特征值生成，该谱问题带有涉及 Floquet-Bloch 参数的准周期边界条件。第一步是应用降维技术，为周期单胞上的这一谱问题推导出一个一维模型。随后，精确研究依赖于 Floquet-Bloch 参数的一维模型，以获得有关谱带的信息。

需要指出的是，过去对于一维模型问题曾有过草率而随意的结论。该模型由在取 $\varepsilon \to 0$ 后得到的细杆上的常微分方程组成，并在图的节点处补充传输条件。一些作者不恰当地采用了 L. Pauling 的模型 [37] ，并在节点处施加基尔霍夫传输条件。这些基尔霍夫条件归结为要求场连续且流出通量为零（即场沿节点处各流出方向的导数之和为零）。对于具有诺伊曼边界条件（BC）的拉普拉斯算子，这样做是正确的，并且已在 [18, 11, 38]中得到严格论证。然而，D. Grieser 在 [13] （另见 [22]）中证明，对于狄利克雷问题，一般而言，节点处应施加的正确条件是狄利克雷条件。更准确地说， [13] 已证明，应施加的传输条件取决于近场算子是否存在所谓的阈值共振。该近场算子定义为在将连接区域放大后所得几何中的拉普拉斯算子（下文记作Ω ，见图1 右图）。如果存在一个非零有界函数，在频率等于拉普拉斯算子的本质谱底部（即阈值）时满足齐次问题，我们就称存在阈值共振。对于诺伊曼问题，阈 $\Lambda_\dagger = 0$ 值为 $-\Delta u = 0$ ，并且存在阈值共振，因为常数函数满足Ω $+$中的诺伊曼边界条件。由于这一性质，必须在节点处施加基尔霍夫条件。对于狄利克雷问题，连续谱从一个正阈值 $\Lambda_\dagger > 0$ 开始，而问题

$$\left| \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \Lambda_\dagger u & \text{in } \Omega \\ u & = & 0 & \text{on } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{1}$$

在无穷远处仍有界的解为零，也就是说不存在阈值共振。由于这一特性，应在一维模型的节点处施加狄利克雷条件（见（44），下文分析中会在此处具体用到）。

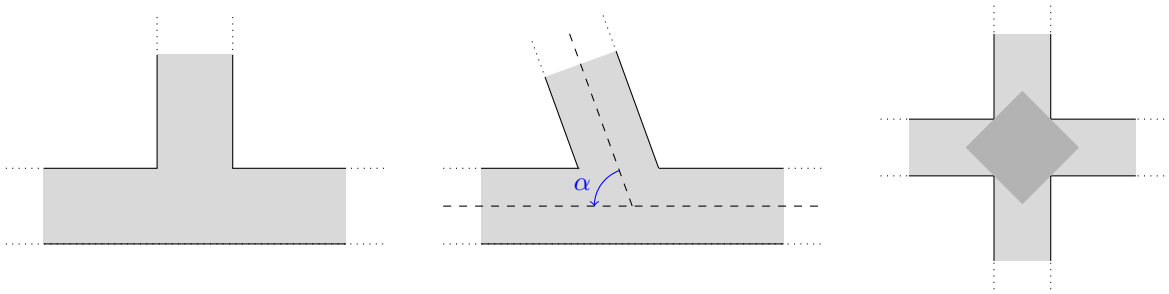

图2：T形和X形二维几何结构示例。

从此之后，研究者致力于建立严格的结果，以证明不存在满足（1）的非零有界解。首先，文献 [25, 28, 27, 34, 35, 31, 36] 考察了由细窄连接段构成的 T形、X形和Y形接头所组成的不同平面量子波导。这些文章还证明，Ω中的近场算子会因所考虑的几何形状不同而

具有离散谱（一个或多个低于连续谱的特征值）。当离散谱存在时，周期区域中的低频谱范围无法用上述在节点处满足狄利克雷条件的一维模型来描述。相反，前几个谱带（其数量等于离散谱的重数）由局域于连接区域的函数生成。值得一提的是，对于某些特殊几何，例如图 α 2中心区域中的一系列角度，（1）可能存在在无穷远处仍保持有界的非零解，即存在阈值共振。在这些情况下，至少当（1）的有界解空间维数为一时，用于描述Ω中那些与离散谱无关的谱带的合适一维模型，在节点处满足某些取决于几何形状的基尔霍夫传输条件。我们强调，这会使周期介质中算子的谱截然不同。更准确地说，当不存在阈值共振时，周期材料中的谱带会随着 $\varepsilon \to 0$ 变得非常狭窄，而谱隙则会扩大。换言之，谱变得相当稀疏；对于大多数谱参数，波无法传播，极限一维细梁在某种意义上彼此断开。这正是我们将在下文所研究的构型中得到的结果。另一方面，当问题（1）存在一维有界解空间时，周期材料中的谱带则宽得多。

此后，[4]（另请参阅相应的注释 [3]）。在这些文章中，作者研究了近场区域 Ω为两个圆柱体构成的十字形连接部、且其横截面与单位圆盘重合的量子波导。从平面情形过渡到空间情形，需要对相关方法进行不那么显而易见的改造。尤其是，近场算子的离散谱刻画以及阈值共振不存在的证明都复杂得多。在本文中，我们研究一种更为复杂的三维几何，其近场几何由三个波导的并集构成。要证明近场算子的离散谱恰好包含一个特征值，并说明在阈值处零是唯一的有界解，需要相当精细的弗里德里希估计。借助数值实验，本文也补充了对 [4] 的研究。还需指出，两个具有正方形横截面的三维圆柱体构成的十字形连接部可化为 X 形几何中的一个二维问题（另见图 2 右图），并且由于可以约去因子，因而并无研究价值。

本文结构如下。首先，我们描述问题、介绍记号并呈现主要结果。然后，我们研究近场算子的离散谱。在第4节中，我们证明近场算子不存在阈值共振。第5 节专门分析本文的主定理（定理 2.4），并推导原周期区域中谱带的渐近模型。最后，我们给出一些数值计算来补充这些结果，并以附录作结，其中包含第3、4节所需的两个引理的证明。

2 记号和主要结果

对于 $j = 1$，2，3，引入具有正方形横截面的圆柱体

$$L_j := \{x := (x_1, x_2, x_2) \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x_k| < 1/2 \text{ for } k \in \{1,2,3\} \setminus \{j\}\} \tag{2}$$

并且对于 $\varepsilon > 0$ 足够小、 m， $n \in \mathbb{Z} := \{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\}$，令

$$\begin{aligned} L_1^{mn\varepsilon} &:= \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x_2 - m| < \varepsilon/2,\ |x_3 - n| < \varepsilon/2\} \\ L_2^{mn\varepsilon} &:= \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x_1 - m| < \varepsilon/2,\ |x_3 - n| < \varepsilon/2\} \\ L_3^{mn\varepsilon} &:= \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x_1 - m| < \varepsilon/2,\ |x_2 - n| < \varepsilon/2\}. \end{aligned}$$

最后定义无界周期区域

$$\Pi^\varepsilon := \bigcup_{m,n \in \mathbb{Z}} L_1^{mn\varepsilon} \cup L_2^{mn\varepsilon} \cup L_3^{mn\varepsilon}$$

（见图1 左侧）。考虑拉普拉斯算子的狄利克雷谱问题

$$\left|\begin{array}{rcll} -\Delta u^\varepsilon &=& \lambda^\varepsilon\, u^\varepsilon & \text{in } \Pi^\varepsilon \\ u^\varepsilon &=& 0 & \text{on } \partial\Pi^\varepsilon. \end{array}\right. \tag{3}$$

与该问题相关的变分形式写作

$$\int_{\Pi^\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla v^\varepsilon \, dx = \lambda^\varepsilon \int_{\Pi^\varepsilon} u^\varepsilon v^\varepsilon \, dx, \qquad \forall v^\varepsilon \in \mathrm{H}_0^1(\Pi^\varepsilon). \tag{4}$$

这里，$\mathrm{H}_0^1(\Pi^\varepsilon)$ 表示 $\mathrm{H}^1(\Pi^\varepsilon)$ 中在边界$\partial\Pi^\varepsilon$上取零的函数所构成的索伯列夫空间。经典地（例如参见 [9, §10.1]），变分问题 (4) 在希尔伯特空间 $\mathrm{L}^2(\Pi^\varepsilon)$ 中导出一个无界、正定、自伴算子 A^ε，其定义域为 $\mathcal{D}(A^\varepsilon) \subset \mathrm{H}_0^1(\Pi^\varepsilon)$。注意，这个算子有时称为量子图拉普拉斯算子 [8, 38]。由于 Π^ε 无界，嵌入 $\mathrm{H}_0^1(\Pi^\varepsilon) \subset \mathrm{L}^2(\Pi^\varepsilon)$ 并非紧嵌入，因此 A^ε 具有非空的本质谱部分$\sigma_e(A^\varepsilon)$（[9, 定理 10.1.5]）。实际上，由于周期性，我们有 $\sigma_e(A^\varepsilon) = \sigma(A^\varepsilon)$。盖尔范德变换（参见综述 [19, 24]和著作 [40, 20]）

$$u^\varepsilon(x) \mapsto U^\varepsilon(x,\eta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\iota\in\mathbb{Z}^3} e^{i\eta\cdot\iota} u^\varepsilon(x+\iota), \quad \eta = (\eta_1,\eta_2,\eta_3),$$

将问题 (3) 变换为以下谱问题，其准周期条件施加在位于$x_1 = \pm 1/2$，$x_2 = \pm 1/2$，$x_3 = \pm 1/2$的面上，

$$\left|\begin{array}{rcll} -\Delta U^\varepsilon(x,\eta) &=& \Lambda^\varepsilon\, U^\varepsilon(x,\eta) & x \in \omega^\varepsilon \\ U^\varepsilon(x,\eta) &=& 0 & x \in \partial\omega^\varepsilon \cap \partial\Pi^\varepsilon \\ U^\varepsilon(-1/2,x_2,x_3,\eta) &=& e^{i\eta_1} U^\varepsilon(+1/2,x_2,x_3,\eta) & (x_2,x_3) \in (-\varepsilon/2;\varepsilon/2)^2 \\ \partial_{x_1} U^\varepsilon(-1/2,x_2,x_3,\eta) &=& e^{i\eta_1} \partial_{x_1} U^\varepsilon(+1/2,x_2,x_3,\eta) & (x_2,x_3) \in (-\varepsilon/2;\varepsilon/2)^2 \\ U^\varepsilon(x_1,-1/2,x_3,\eta) &=& e^{i\eta_2} U^\varepsilon(x_1,+1/2,x_3,\eta) & (x_1,x_3) \in (-\varepsilon/2;\varepsilon/2)^2 \\ \partial_{x_2} U^\varepsilon(x_1,-1/2,x_3,\eta) &=& e^{i\eta_2} \partial_{x_2} U^\varepsilon(x_1,+1/2,x_3,\eta) & (x_1,x_3) \in (-\varepsilon/2;\varepsilon/2)^2 \\ U^\varepsilon(x_1,x_2,-1/2,\eta) &=& e^{i\eta_3} U^\varepsilon(x_1,x_2,+1/2,\eta) & (x_1,x_2) \in (-\varepsilon/2;\varepsilon/2)^2 \\ \partial_{x_3} U^\varepsilon(x_1,x_2,-1/2,\eta) &=& e^{i\eta_3} \partial_{x_3} U^\varepsilon(x_1,x_2,+1/2,\eta) & (x_1,x_2) \in (-\varepsilon/2;\varepsilon/2)^2, \end{array}\right. \tag{5}$$

定义在周期单胞中

$$\omega^\varepsilon := \omega_1^\varepsilon \cup \omega_2^\varepsilon \cup \omega_3^\varepsilon \quad \text{with} \quad \left|\begin{array}{l} \omega_1^\varepsilon := (-1/2;1/2) \times (-\varepsilon/2;\varepsilon/2)^2 \\ \omega_2^\varepsilon := (-\varepsilon/2;\varepsilon/2) \times (-1/2;1/2) \times (-\varepsilon/2;\varepsilon/2) \\ \omega_3^\varepsilon := (-\varepsilon/2;\varepsilon/2)^2 \times (-1/2;1/2). \end{array}\right.$$

问题 (5) 对偶变量的任意取值下形式上都是自伴的 $\eta \in \mathbb{R}^3$。此外，它关于每个2π都是η_j -周期的，因为变换 $\eta_j \mapsto \eta_j + 2\pi$ 保持准周期条件不变。对于任意 $\eta \in [0;\ 2\pi)^3$, (5) 的谱是离散的，由一列单调递增的正特征值组成

$$0 < \Lambda_1^\varepsilon(\eta) \le \Lambda_2^\varepsilon(\eta) \le \cdots \le \Lambda_p^\varepsilon(\eta) \le \ldots$$

其中，$\Lambda_p^\varepsilon(\eta)$ 按其重数计数。函数

$$\eta \mapsto \Lambda_p^\varepsilon(\eta)$$

是连续的（[15,第 9]），因此这些集合

$$\Upsilon_p^\varepsilon = \{\Lambda_p^\varepsilon(\eta),\, \eta \in [0;2\pi)^3\} \tag{6}$$

是连通紧致线段。最后，根据理论（另见 [12, 19, 40, 24, 20]），算子 A^ε 的谱具有如下形式

$$\sigma(A^\varepsilon) = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \Upsilon_p^\varepsilon$$

其中 $\mathbb{N}^* := \{1, 2, ...\}$。此时可以看出，为了明确 A^ε 关于 $\varepsilon \to 0^+$ 的谱的行为，我们需要研究 Υ_p^ε 关于 ε 的依赖关系。

正如引言中所述，例如 [13, 23, 28] 中的分析表明，Υ_p^ε 关于 ε 的渐近行为取决于在周期单胞 ω^ε 的连接区域放大后所得几何中的狄利克雷拉普拉斯算子的性质。更准确地说，引入无界区域

$$\Omega := L_1 \cup L_2 \cup L_3 \tag{7}$$

（见图 1 右图），其中 L_j 是式（2）中出现的具有单位正方形横截面的圆柱体。在Ω中，考虑拉普拉斯算子的狄利克雷谱问题

$$\left|\begin{array}{rcll} -\Delta v & = & \mu\, v & \text{in } \Omega \\ v & = & 0 & \text{on } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{8}$$

此时该问题已不再依赖于 ε。记 A^Ω 为与该问题自然关联、定义在 $\mathrm{L}^2(\Omega)$ 中的无界正定自伴算子，其定义域为 $\mathcal{D}(A^\Omega) \subset \mathrm{H}_0^1(\Omega)$。其连续谱 $\sigma_c(A^\Omega)$ 占据射线 $[2\pi^2; +\infty)$，而阈值点 $\Lambda_\dagger := 2\pi^2$ 是 Ω 各分支横截面（均为单位正方形）上狄利克雷问题的第一特征值。本文的主要目标是展示以下结果。

定理 2.1。 算子 A^Ω 的离散谱恰好包含一个特征值 $\mu_1 \in (0;\ 2\pi^2)$。

注 2.2。 在第 6 节中，我们通过数值计算得到 $\mu_1 \approx 12.9 \approx 1.3\pi^2$。注意，与 μ_1 对应的特征函数在无穷远处按 $O(-\sqrt{2\pi^2 - \mu_1}\,|x_j|)$ 在 L_j、$j = 1、2、3$ 的速度衰减。

按照文献中的惯例，若存在一个非平凡函数，它以谱参数的阈值 $\mu = 2\pi^2$ 为取值并满足问题 (8)，则称问题 (8) 存在阈值共振。

定理 2.3。 问题 *(8)* 不存在阈值共振。

根据定理 2.1和 2.3，我们将推导出初始无界周期晶格中 A^ε 的谱的最终结果：

定理 2.4。 存在正值 $\varepsilon_p > 0$ 和 $c_p > 0$，使得对于（*6*）中引入的谱带，我们有如下估计

$$\Upsilon_1^\varepsilon \subset \varepsilon^{-2}\mu_1 + \varepsilon^{-2} e^{-\sqrt{2\pi^2-\mu_1}/\varepsilon}(-c_1; c_1), \qquad \varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$$
$$\Upsilon_{1+q+3(p-1)}^\varepsilon \subset \varepsilon^{-2}2\pi^2 + p^2\pi^2 + \varepsilon\,(-c_p; c_p), \quad \varepsilon \in (0; \varepsilon_p],\ q = 1, 2, 3,\ p \in \mathbb{N}^*.$$

我们来评论这一结果。首先，正如引言中所述，算子 A^ε 的谱趋于 $+\infty$ 当 $\varepsilon \to 0$时。此外，该谱变得非常稀疏。事实上，定理2.4 推出了以下结果。当 $\varepsilon \to 0$时，谱带的长度趋于无穷小。此外，在谱带 Υ_1^ε 与 Υ_2^ε之间存在一个谱隙，即一段波无法传播的谱参数区间，其宽度为 Λ，大小为 $O(\varepsilon^{-2}(2\pi^2 - \mu_1))$；而在 $\Upsilon_{1+q+3(p-1)}^\varepsilon$ 与 $\Upsilon_{1+q+3p}^\varepsilon$之间，谱隙的宽度为 $O(\pi^2(2p-1))$。因此，这里的核心结论是，在细晶格 Π^ε中，波的传播受到阻碍，且只能在非常狭窄的频率区间内发生。

3 A^{Ω}离散谱的性质

本节的目标是证明定理2.1。我们首先证明 A^{Ω} 的离散谱非空（有关相关多维问题，请参见 [26]）。

命题 3.1。 A^{Ω} 的离散谱至少有一个特征值。

证明。定义二维 X 形几何 $\Omega^{2D} := \Omega_1^{2D} \cup \Omega_2^{2D}$，其中 $\Omega_1^{2D} := \mathbb{R} \times (-1/2; 1/2)$，$\Omega_2^{2D} := (-1/2; 1/2) \times \mathbb{R}$（见右侧图2）。根据 [39, 2]（另见 [29, 定理 2.1] 以及本证明末尾的讨论），我们知道，Ω^{2D} 中的狄利克雷拉普拉斯算子恰好有一个特征值 μ^{2D} 低于连续谱，该特征值与 $[\pi^2; +\infty)$ 重合。令$\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega^{2D})$为相应的特征函数。在（7）中引入的区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 内，考虑函数 v，使得

$$v(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2) \cos(\pi x_3) \ \text{ in } L_1 \cup L_2, \qquad v(x_1, x_2, x_3) = 0 \ \text{ in } \Omega \setminus \overline{L_1 \cup L_2}.$$

我们有

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx = \int_{L_1 \cup L_2} |\nabla v|^2 \, dx = -\int_{L_1 \cup L_2} \Delta v v \, dx = (\mu^{2D} + \pi^2) \int_\Omega v^2 \, dx.$$

但是，根据极大极小原理（参见 [9, 定理 10.2。2]），我们知道

$$\inf \sigma(A^{\Omega}) = \inf_{w \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx}{\int_\Omega w^2 \, dx}. \tag{9}$$

将上述 v 代入（9）右侧，可推得 A^{Ω}的离散谱中存在一个小于 $\mu^{2D} + \pi^2$的特征值。

我们以描述 [39, 2] 提出的巧妙技巧作为本证明的结尾，该技巧用于证明 Ω^{2D}中狄利克雷拉普拉斯算子的离散谱存在一个特征值。考虑图 2 右侧深灰色的正方形，其边长为 $\sqrt{2}$。因此，该几何区域中狄利克雷拉普拉斯算子的第一个特征值等于 π^2。于是，对于任何严格包含该正方形且包含于 Ω^{2D}的区域，狄利克雷拉普拉斯算子的第一个特征值都严格小于 π^2。将相应的特征函数延拓为零至 Ω^{2D}，并应用极大极小原理，可推知 Ω^{2D} 中狄利克雷拉普拉斯算子的离散谱非空。

□

接下来需要证明 A^{Ω} 的离散谱至多有一个特征值。为此，我们首先证明一个关于对称性的结果。

引理 3.2. 设 $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ 是与特征值 $\mu < 2\pi^2$ 相对应的算子 A^{Ω} 的一个特征函数。那么，v 关于三个平面 (Ox_2x_3)、(Ox_3x_1)、(Ox_1x_2) 对称。

证明。我们证明函数关于平面（Ox_2x_3）的对称性。其余两种对称性也可类似证明。引入函数 φ，使得

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = v(x_1, x_2, x_3) - v(-x_1, x_2, x_3).$$

我们的目标是证明 $\varphi \equiv 0$。设 $\Omega_1^+ := \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega \mid x_1 > 0\}$。函数 φ satisfies $-\Delta\varphi = \mu\varphi$ in Ω_1^+ and $\varphi = 0$ on $\partial\Omega_1^+$。因此我们有

$$\int_{\Omega_1^+} |\nabla \varphi|^2 \, dx = \mu \int_{\Omega_1^+} \varphi^2 \, dx. \tag{10}$$

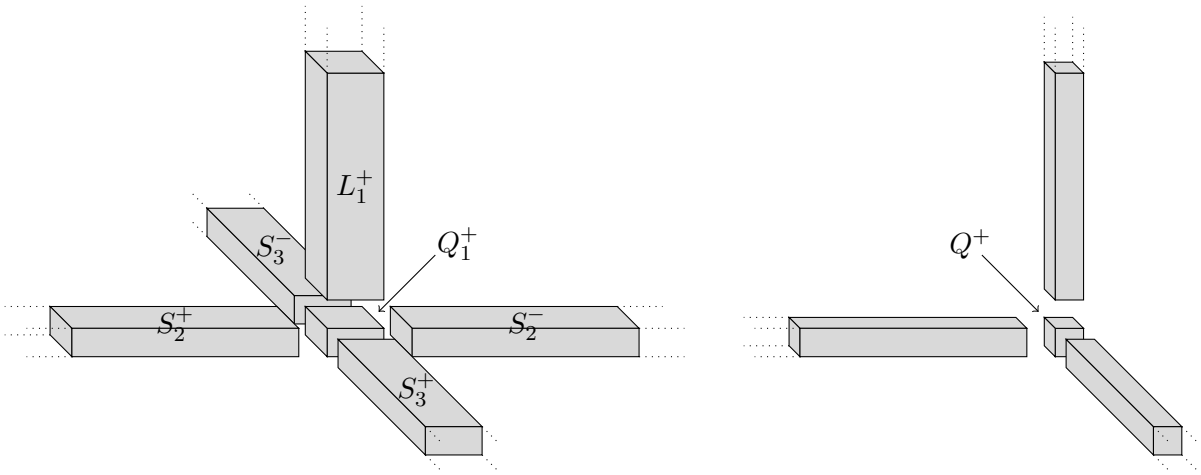

图3：左：Ω_1^+的展开分解。右：Ω的展开分解 $^+$.

定义这些区域

$$\begin{aligned} L_1^+ &:= \{x \in L_1 \,|\, x_1 > 1/2\} \\ S_2 &:= \{x \in L_2 \,|\, x_1 > 0\} = \Omega_1^+ \cap L_2 \\ S_3 &:= \{x \in L_3 \,|\, x_1 > 0\} = \Omega_1^+ \cap L_3 \\ S_2^\pm &:= \{x \in S_2 \,|\, \pm x_2 > 1/2\} \\ S_3^\pm &:= \{x \in S_3 \,|\, \pm x_3 > 1/2\} \\ Q_1^+ &:= \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < x_1 < 1/2,\, |x_2| < 1/2,\, |x_3| < 1/2\} = S_2 \cap S_3 \end{aligned}$$

（参见图3 左侧的展开图）。在 L_1^+的一个截面上使用庞加莱不等式（该截面是边长为1的正方形），然后对 x_1 变量积分，首先得到

$$2\pi^2 \int_{L_1^+} \varphi^2 \, dx \le \int_{L_1^+} |\nabla \varphi|^2 \, dx. \tag{11}$$

在 $S_2^\pm$, $S_3^\pm$中，由于横截面比 L_1^+中的更小，我们可以得到更好的估计，即

$$5\pi^2 \int_{S_2^\pm} \varphi^2 \, dx \le \int_{S_2^\pm} (\partial_{x_1}\varphi)^2 + (\partial_{x_3}\varphi)^2 \, dx, \qquad 5\pi^2 \int_{S_3^\pm} \varphi^2 \, dx \le \int_{S_3^\pm} (\partial_{x_1}\varphi)^2 + (\partial_{x_2}\varphi)^2 \, dx. \tag{12}$$

然而，完成证明的难点在于，在Q_1^+中，关于 x_1 变量使用一维庞加莱不等式，只能简单地得到

$$\pi^2 \int_{Q_1^+} \varphi^2 \, dx \le \int_{Q_1^+} (\partial_{x_1}\varphi)^2 \, dx. \tag{13}$$

这足以直接得出 $\varphi \equiv 0$ 当 $\mu \in (0; \pi^2)$ 但在我们希望处理的一般情形$\mu \in (0; 2\pi^2)$ 下则不够。因此，我们必须改进策略。我们将利用估计（12）中因估计精度而产生的“额外”项，来控制L^2范数φ 在 Q_1^+中的取值。更确切地说，文献 [4] 中的引理 5.1（我们在附录中回顾，见引理 6.1）保证，对于给定的 $a > 0$，我们有弗里德里希不等式

$$\kappa(a) \int_0^{1/2} \phi^2 \, dt \le \int_0^{+\infty} (\partial_t \phi)^2 \, dt + a^2 \int_{1/2}^{+\infty} \phi^2 \, dt, \qquad \forall \phi \in \mathrm{H}^1(0; +\infty), \tag{14}$$

其中， $\kappa(a)$ 是超越方程的最小正根

$$\sqrt{\kappa} \tan\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{2}\right) = a. \tag{15}$$

特别地，求解（15），并代入 $a=\pi\sqrt{5/2,}$ 可得 $\kappa\left(a\right)>\pi^2/2$。因此，利用（14），可以写成

$$\frac{\pi^2}{2}\int_{Q_1^+}\varphi^2\,dx\leq\int_{S_2}\left(\partial_{x_2}\varphi\right)^2dx+\frac{5\pi^2}{2}\int_{S_2^+\cup S_2^-}\varphi^2\,dx \tag{16}$$

以及

$$\frac{\pi^2}{2}\int_{Q_1^+}\varphi^2\,dx\leq\int_{S_3}\left(\partial_{x_3}\varphi\right)^2dx+\frac{5\pi^2}{2}\int_{S_3^+\cup S_3^-}\varphi^2\,dx. \tag{17}$$

将（12）代入（16）、（17），并对所得估计求和，可得

$$\begin{aligned}\pi^2\int_{Q_1^+}\varphi^2\,dx\quad\leq\quad&\int_{S_2}\left(\partial_{x_2}\varphi\right)^2dx+\frac{1}{2}\int_{S_2^+\cup S_2^-}\left(\partial_{x_3}\varphi\right)^2dx+\int_{S_3}\left(\partial_{x_3}\varphi\right)^2dx+\frac{1}{2}\int_{S_3^+\cup S_3^-}\left(\partial_{x_2}\varphi\right)^2dx\\&+\frac{1}{2}\int_{S_2^+\cup S_2^-\cup S_3^+\cup S_3^-}\left(\partial_{x_1}\varphi\right)^2dx.\end{aligned} \tag{18}$$

另一方面，（12）还可推出

$$2\pi^2\int_{S_2^+\cup S_2^-\cup S_3^+\cup S_3^-}\varphi^2\,dx\leq\frac{1}{2}\int_{S_2^+\cup S_2^-\cup S_3^+\cup S_3^-}\left(\partial_{x_1}\varphi\right)^2dx+\frac{1}{2}\int_{S_2^+\cup S_2^-}\left(\partial_{x_3}\varphi\right)^2dx+\frac{1}{2}\int_{S_3^+\cup S_3^-}\left(\partial_{x_2}\varphi\right)^2dx. \tag{19}$$

最后，对（11）、（13）、（18）和（19）求和，得到

$$2\pi^2\int_{\Omega_1^+}\varphi^2\,dx\leq\int_{\Omega_1^+}\left|\nabla\varphi\right|^2dx.$$

此估计结合恒等式（10）可推出 $\varphi\equiv0$。 □

现在可以证明本节的主要结果。

定理 *2.1* 的证明。根据命题 3.1，我们知道至少存在一个特征值 μ_1 属于A^Ω，且小于 $2\pi^2$。假设 A^Ω 有一个第二特征值 μ_2 满足 $\mu_2<2\pi^2$。令 $\Omega^+:=\{x\in\Omega\mid x_1>0,\quad x_2>0,\quad x_3>0\}$ (见图 3 右图）。那么，根据引理中关于对称性的结果 3.2，问题

$$\left|\begin{array}{rcll}-\Delta v&=&\mu v&\text{in }\Omega^+\\v&=&0&\text{on }\Sigma_0:=\partial\Omega\cap\partial\Omega^+\\\partial_n v&=&0&\text{on }\partial\Omega^+\setminus\Sigma_0\end{array}\right.$$

有两个 特征值 μ_1，μ_2。此外，根据极大极小原理（[9, 定理 10.2。2]），我们有 e

$$\mu_2=\max_{E\subset\mathscr{E}_1}\inf_{w\in E\setminus\{0\}}\frac{\displaystyle\int_{\Omega^+}\left|\nabla w\right|^2dx}{\displaystyle\int_{\Omega^+}w^2\,dx}$$

其中 $\mathscr{E}_1$ 表示 $\mathrm{H}_0^1(\Omega^+;\,\Sigma_0)$ 的子空间集合：$=\{\varphi\in\mathrm{H}^1(\Omega^+)\mid\varphi=0\text{ 上 }\Sigma_0\}$ 的余维一子空间。特别地，我们有

$$\mu_2\geq\inf_{w\in E\setminus\{0\}}\frac{\displaystyle\int_{\Omega^+}\left|\nabla w\right|^2dx}{\displaystyle\int_{\Omega^+}w^2\,dx} \tag{20}$$

其中 $E=\{\varphi\in\mathrm{H}_0^1(\Omega^+;\,\Sigma_0)\mid\int_{Q^+}\varphi\,dx=0\}$，$Q^+:=(0;1/2)^3$。然而，根据庞加莱不等式，对于 $w\in E\setminus\{0\}$，我们可以写出，

$$2\pi^2\int_{\Omega^+\setminus\overline{Q^+}}w^2\,dx\leq\int_{\Omega^+\setminus\overline{Q^+}}\left|\nabla w\right|^2dx \tag{21}$$

并且根据极大极小原理，有

$$\inf_{w\in E\setminus\{0\}} \frac{\int_{Q^+} |\nabla w|^2\,dx}{\int_{Q^+} w^2\,dx} = 4\pi^2 \tag{22}$$

因为诺伊曼拉普拉斯算子的第一个正特征值在 Q^+ 中等于 $4\pi^2$。将（21）和（22）代入（20），得到 $\mu_2 \geq 2\pi$ 这与初始假设矛盾。因此， A^Ω 在连续谱以下不可能有两个特征值。□

4 阈值共振的缺失

本节将证明定理2.3。为此，我们将运用 [36, 5]中的工具，现回顾如下。对于 $R \geq 1/2$ 和 $j = 1$，2、3，定义截断圆柱体

$$L_j^R := \{x \in L_j \,|\, |x_j| < R\}$$

并令 $\Omega^R := L_1^R \cup L_2^R \cup L_3^R$。在 Ω^R 中，考虑具有混合边界条件的谱问题

$$\left|\begin{array}{rcll} -\Delta v &=& \mu v & \text{in } \Omega^R \\ v &=& 0 & \text{on } \partial\Omega^R \cap \partial\Omega \\ \partial_n v &=& 0 & \text{on } \partial\Omega^R \setminus \partial\Omega \end{array}\right. \tag{23}$$

其中 n 表示指向 Ω^R 外部的 Ω $\partial\Omega^R$ 的单位法向量。令 $\mathrm{H}_0^1(\Omega^R;\partial\Omega^R\cap\partial\Omega) := \{\varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega^R) \,|\, \varphi = 0$ 在 $\partial\Omega^R \cap \partial\Omega\}$，最后将与（23）对应、定义域为 $\mathfrak{D}(B^R) \subset \mathrm{H}_0^1(\Omega^R;\partial\Omega^R \cap \partial\Omega)$ 的无界算子记为 B^R。

定理 3 [36]（另见 [5, 定理 1]的必要充分条件）保证：若存在某个 $R \geq 0$ 使得 μ_2^R 的第二特征值 B_R 满足 $\mu_2^R > 2\pi^2$，则问题（8）不存在阈值共振。

因此，从现在起，我们的目标是证明 B_R 的第二特征值大于 $2\pi^2$ （下文的命题 4.2 ）。我们先给出一个与引理 3.2 类似的对称性结果。

引理 4.1。 当 R 充分大时，若 $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega^R;\partial\Omega^R \cap \partial\Omega)$ 是与特征值 $\mu \leq 2\pi^2$对应的算子B^R 的特征函数，则 v 关于平面 (Ox_2x_3)、(Ox_3x_1)、(Ox_1x_2)对称。

证明。 证明过程与引理 3.2 的证明类似。不过，为了清晰起见，我们写出详细过程。我们着重考察关于平面 (Ox_2x_3) 的对称性，另外两个情形类似。引入函数 φ 使得

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = v(x_1,x_2,x_3) - v(-x_1,x_2,x_3).$$

我们希望证明 $\varphi \equiv 0$。令 $\Omega_1^{R+} := \{x \in \Omega^R \,|\, x_1 > 0\}$。我们有

$$\int_{\Omega_1^{R+}} |\nabla\varphi|^2\,dx = \mu \int_{\Omega_1^{R+}} \varphi^2\,dx. \tag{24}$$

定义这些域

$$\begin{array}{rcl} L_1^{R+} &:=& \{x \in L_1^R \,|\, x_1 > 1/2\} \\ S_2^R &:=& \{x \in L_2^R \,|\, x_1 > 0\} = \Omega_1^{R+} \cap L_2^R \\ S_3^R &:=& \{x \in L_3^R \,|\, x_1 > 0\} = \Omega_1^{R+} \cap L_3^R \\ S_2^{R\pm} &:=& \{x \in S_2^R \,|\, \pm x_2 > 1/2\} \\ S_3^{R\pm} &:=& \{x \in S_3^R \,|\, \pm x_3 > 1/2\}. \end{array}$$

在 L_1^{R+}中，庞加莱不等式给出

$$2\pi^2 \int_{L_1^{R+}} \varphi^2 \, dx \le \int_{L_1^{R+}} |\nabla \varphi|^2 \, dx. \tag{25}$$

另一方面，在 $Q_1^+ = (0;1/2) \times (-1/2;\ 1/2)^2$ 中，有

$$\pi^2 \int_{Q_1^+} \varphi^2 \, dx \le \int_{Q_1^+} (\partial_{x_1} \varphi)^2 \, dx. \tag{26}$$

引理6. 附录中的 2 （另见 [4]中的引理 5.1）保证了对于 $R > 1/2$ 和 $a > 0$ ，我们有

$$\kappa(a,R) \int_0^{1/2} \phi^2 \, dt \le \int_0^R (\partial_t \phi)^2 \, dt + a^2 \int_{1/2}^R \phi^2 \, dt, \qquad \forall \phi \in \mathrm{H}^1(0;R), \tag{27}$$

其中 $\kappa(a,R) > 0$ 收敛到式 (15) 中出现的常数 $\kappa(a)$，当 $R \to +\infty$时如此。对于 $a = \pi\sqrt{5}/2$，如前所述，可得 $\kappa(a) > \pi^2/2$。引入 $\delta > 0$ 使得 $\kappa(\pi\sqrt{5}/2) \ge \pi^2/2 + \delta$。我们知道，存在足够大的 R_0，使得对于所有 $R \ge R_0$，都有 $\kappa(\pi\sqrt{5}/2, R) > \pi^2/2 + \delta/2$。由此可推得

$$\frac{\pi^2+\delta}{2} \int_{Q_1^+} \varphi^2 \, dx \le \int_{S_2^R} (\partial_{x_2} \varphi)^2 \, dx + \frac{5\pi^2}{2} \int_{S_2^{R+} \cup S_2^{R-}} \varphi^2 \, dx \tag{28}$$

and

$$\frac{\pi^2+\delta}{2} \int_{Q_1^+} \varphi^2 \, dx \le \int_{S_3^R} (\partial_{x_3} \varphi)^2 \, dx + \frac{5\pi^2}{2} \int_{S_3^{R+} \cup S_3^{R-}} \varphi^2 \, dx. \tag{29}$$

但是，根据 $S_2^{R\pm}$, $S_3^{R\pm}$ 的横截面上的庞加莱不等式，我们知道

$$5\pi^2 \int_{S_2^{R\pm}} \varphi^2 \, dx \le \int_{S_2^{R\pm}} (\partial_{x_1} \varphi)^2 + (\partial_{x_3} \varphi)^2 \, dx, \qquad 5\pi^2 \int_{S_3^{R\pm}} \varphi^2 \, dx \le \int_{S_3^{R\pm}} (\partial_{x_1} \varphi)^2 + (\partial_{x_2} \varphi)^2 \, dx. \tag{30}$$

将（30）代入（28）、（29），并将所得估计相加，得到

$$\begin{aligned} (\pi^2+\delta) \int_{Q_1^+} \varphi^2 \, dx \quad \le \quad & \int_{S_2^R} (\partial_{x_2} \varphi)^2 \, dx + \int_{S_3^R} (\partial_{x_3} \varphi)^2 \, dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{S_2^{R+} \cup S_2^{R-}} (\partial_{x_3} \varphi)^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{S_3^{R+} \cup S_3^{R-}} (\partial_{x_2} \varphi)^2 \, dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{S_2^{R+} \cup S_2^{R-} \cup S_3^{R+} \cup S_3^{R-}} (\partial_{x_1} \varphi)^2 \, dx. \end{aligned} \tag{31}$$

另一方面，（30）还给出

$$\begin{aligned} & 2\pi^2 \int_{S_2^{R+} \cup S_2^{R-} \cup S_3^{R+} \cup S_3^{R-}} \varphi^2 \, dx \\ & \le \frac{1}{2} \int_{S_2^{R+} \cup S_2^{R-} \cup S_3^{R+} \cup S_3^{R-}} (\partial_{x_1} \varphi)^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{S_2^{R+} \cup S_2^{R-}} (\partial_{x_3} \varphi)^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{S_3^{R+} \cup S_3^{R-}} (\partial_{x_2} \varphi)^2 \, dx. \end{aligned} \tag{32}$$

最后，将（25）、（26）、（31）和（32）相加，得到

$$\delta \int_{Q_1^+} \varphi^2 \, dx + 2\pi^2 \int_{\Omega_1^{R+}} \varphi^2 \, dx \le \int_{\Omega_1^{R+}} |\nabla \varphi|^2 \, dx.$$

此估计结合恒等式（24）可推出 $\int_{Q_1^+} \varphi^2 \, dx = 0$，因此 $\varphi \equiv 0$ 在 Q_1^+中成立。由唯一延拓原理可得 $\varphi \equiv 0$ 在 Ω_1^{R+}中成立。

□

命题 4.2。当 R 足够大时，B^R 的第二特征值 μ_2^R 满足 $\mu_2^R > 2\pi^2$。

证明。应用引理 4.1 可将分析归约为 $\Omega^{R+} := \{x \in \Omega^R \,|\, x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0\}$。在此特别使用了 R 足够大的假设。证明的其余部分与定理 2.1的证明完全类似。

□

5 谱带的模型问题

本节中，我们证明定理 2.4 并为出现在（6）中的谱带 Υ_p^ε 建立模型。我们回顾一下， A^ε 的谱满足 $\sigma(A^\varepsilon) = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \Upsilon_p^\varepsilon$。

5.1 对 Yε1 的研究

根据定义，我们有

$$\Upsilon_1^\varepsilon = \{\Lambda_1^\varepsilon(\eta),\, \eta \in [0;2\pi)^3\} \tag{33}$$

其中 $\Lambda_1^\varepsilon(\eta)$ 是问题 (5) 的第一特征值。因此，我们的目标是得到 $\Lambda_1^\varepsilon(\eta)$ 关于 ε 当 $\varepsilon \to 0^+$时的渐近展开。

取 $\eta \in [0;2\pi)^3$。令 $u^\varepsilon(\cdot\ \eta)$ 为与 $\Lambda_1^\varepsilon(\eta)$ 相关联的特征函数。当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，作为一阶近似，自然可以考虑如下展开

$$\Lambda_1^\varepsilon(\eta) = \varepsilon^{-2}\mu_1 + \ldots, \qquad u^\varepsilon(x,\eta) = v_1(x_1/\varepsilon) + \ldots \tag{34}$$

其中 $\mu_1 \in (0;2\pi^2)$ 表示定理 2.1 中引入的算子 A^Ω 的离散谱的特征值，而 $v_1 \in H_0^1(\Omega)$ 是相应的特征函数，我们选取它使得 $\|v_1\|_{L^2(\Omega)} = 1$。事实上，将 $(\varepsilon^{-2}\mu_1, v_1(\cdot/\varepsilon))$ 代入问题 (5)，只会在 $\partial\omega^\varepsilon$ 的正方形面上留下微小误差，因为 v_1 在无穷远处呈指数衰减。更精确地写出 v_1 在无穷远处的分解，这将在后文中有所帮助。为了继续讨论并使记号简洁，我们将使用坐标 (z_j, y_j)， $j = 1$，... ...，6，使得

$$\left|\begin{array}{lll} z_1 = x_1, & y_1 = (x_2, x_3); \\ z_2 = x_2, & y_2 = (x_3, x_1); \\ z_3 = x_3, & y_3 = (x_1, x_2); \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{lll} z_4 = -x_1, & y_4 = (x_2, -x_3); \\ z_5 = -x_2, & y_5 = (x_3, -x_1); \\ z_6 = -x_3, & y_6 = (x_1, -x_2). \end{array}\right. \tag{35}$$

我们还定义了对于 $j = 1, \ldots, 6$ 的分支

$$\mathcal{L}_j := \{x \in \Omega \,|\, z_j > 1/2\}.$$

根据傅里叶分解以及引理 3.2 中的对称性结论μ_1 是单特征值这一事实[1] 可保证对于 $j = 1, \ldots, 6$，我们有

$$v_1(x) = K\, e^{-\beta_1 z_j}\, U_\dagger(y_j) + O(e^{-\beta_2 z_j}) \quad \text{in } \mathcal{L}_j \quad \text{as } z_j \to +\infty.$$

这里 $K \in \mathbb{R}^*$ 与 j、 $\beta_1 := \sqrt{2\pi^2 - \mu_1}$、 $\beta_2 := \sqrt{5\pi^2 - \mu_1}$ 以及无关

$$U_\dagger(s_1, s_2) = 2\cos(\pi s_1)\cos(\pi s_2). \tag{36}$$

第一个模型（34）很有意思，但未能体现相对于 η的依赖关系。为了改进它，考虑更精细的试探形式

$$\Lambda_1^\varepsilon(\eta) = \varepsilon^{-2}\mu_1 + \varepsilon^{-2}e^{-\beta_1/\varepsilon}M(\eta) + \ldots, \qquad u^\varepsilon(x,\eta) = v_1(x_1/\varepsilon) + e^{-\beta_1/\varepsilon}V(x_1/\varepsilon, \eta) + \ldots \tag{37}$$

其中待确定的量 $M(\eta)$、 $V(\cdot\ \eta)$。将 (37) 代入 (5)，首先得到$V(\cdot\ \eta)$ 必须满足

$$\left|\begin{array}{rcll} -\Delta V(\cdot,\eta) - \mu_1 V(\cdot,\eta) & = & M(\eta)v_1 & \text{in } \Omega \\ V(\cdot,\eta) & = & 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{38}$$

为了使 (38) 存在非零解，我们必须寻找一个 $V(\cdot\ \eta)$ 在无穷远处增长的函数。根据 (38)，我们允许的最简单增长形式是

$$V(x,\eta) = B_j\, e^{\beta_1 z_j}\, U_\dagger(y_j) + O(e^{-\beta_1 z_j}) \quad \text{in } \mathcal{L}_j \quad \text{as } z_j \to +\infty$$

[1]这对于说明 K在分支 $\mathcal{L}_j$、 $j = 1$、.....、6中相同是必要的。

其中 B_j 是一些常数。于是， $u^\varepsilon(\cdot\ \eta)$ 在位于 $x_1 = \pm 1/2$、 $x_2 = \pm 1/2$、 $x_3 = \pm 1/2$ 处的面上所满足的准周期条件（见（5））使我们选择 B_j 使得

$$\left|\begin{array}{l} K + B_4 = e^{i\eta_1}(K + B_1) \\ K - B_4 = e^{i\eta_1}(-K + B_1) \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} K + B_5 = e^{i\eta_2}(K + B_2) \\ K - B_5 = e^{i\eta_2}(-K + B_2) \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} K + B_6 = e^{i\eta_3}(K + B_3) \\ K - B_6 = e^{i\eta_3}(-K + B_3). \end{array}\right.$$

求解这些方程组，得到 $B_j = K\, e^{-i\eta_j}$， $B_{j+3} = K\, e^{+i\eta_j}$ 其中 $j = 1,\ 2,\ 3$。现在，由于 μ_1 是 A^Ω的单特征值，将（38）乘以 v_1，在 Ω^R 上分部积分并取极限$R \to +\infty$，可知存在解当且仅当满足以下相容条件

$$M(\eta)\|v_1\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = -2\beta_1 K^2 \sum_{j=1}^{3} e^{i\eta_j} + e^{-i\eta_j} \qquad \Leftrightarrow \qquad M(\eta) = -4\beta_1 K^2 \sum_{j=1}^{3} \cos(\eta_j)$$

。这确定了展开式（ $M(\eta)$ （37）中的值。由（33），可得包含关系 $\Upsilon_1^\varepsilon \subset \varepsilon^{-2}\mu_1 + \varepsilon^{-2} e^{-\sqrt{2\pi^2 - \mu_1}/\varepsilon}(-c_1;\ c_1)$ 当 ε 充分小时，定理 2.4成立。对于 c_1，我们可以取任何大于 $12\beta_1 K^2$的常数。请注意，为了简洁起见，上文采用了较为形式化的表述。我们强调，所有这些结果都可以通过严格证明误差估计得到完全论证。对于类似问题， [31, 32] 已对此作了详细阐述，只需作显而易见的修改即可重复这一过程。

5.2 研究 Υ_k^ε, $k \geq 2$

我们转而关注高频谱带的渐近行为

$$\Upsilon_k^\varepsilon = \{\Lambda_k^\varepsilon(\eta),\, \eta \in [0; 2\pi)^3\}, \qquad k \geq 2, \tag{39}$$

当 $\varepsilon \to 0^+$时。取 $\eta \in [0;\ 2\pi)^3$并引入 $u^\varepsilon(\cdot\ \eta)$，它是与 $\Lambda_k^\varepsilon(\eta)$对应的特征函数。下文中，为简化表达，我们省去下标 $_k$，且不注明对 η的依赖。当 $\varepsilon \to 0^+$时，作为一阶近似，我们考虑如下展开

$$\Lambda^\varepsilon = \varepsilon^{-2} 2\pi^2 + \nu + \ldots, \qquad u^\varepsilon(x) = v^\varepsilon(x) + \ldots \tag{40}$$

其中 v^ε 的形式为

$$v^\varepsilon(x) = \left|\begin{array}{ll} \gamma_1^\pm(x_1)\, U_\dagger(x_2/\varepsilon, x_3/\varepsilon) & \text{in } \omega_1^{\varepsilon\pm} := \{x \in \omega_1^\varepsilon \,|\, \pm x_1 > \varepsilon/2\}, \\ \gamma_2^\pm(x_2)\, U_\dagger(x_3/\varepsilon, x_1/\varepsilon) & \text{in } \omega_2^{\varepsilon\pm} := \{x \in \omega_2^\varepsilon \,|\, \pm x_2 > \varepsilon/2\}, \\ \gamma_3^\pm(x_3)\, U_\dagger(x_1/\varepsilon, x_2/\varepsilon) & \text{in } \omega_3^{\varepsilon\pm} := \{x \in \omega_3^\varepsilon \,|\, \pm x_3 > \varepsilon/2\}, \end{array}\right.$$

其中，函数 $\gamma_j^\pm$、 $j = 1$、2、3，待求（$U_\dagger$ 定义见（36））。将（40）代入问题（5），可得 $j = 1$、2、3，

$$\left|\begin{array}{rcll} \partial_s^2 \gamma_j^+ + \nu\gamma_j^+ & = & 0 & \text{in } (0; 1/2) \\ \partial_s^2 \gamma_j^- + \nu\gamma_j^- & = & 0 & \text{in } (-1/2; 0) \\ \gamma_j^-(-1/2) & = & e^{i\eta_j}\gamma_j^+(+1/2) & \\ \partial_s\gamma_j^-(-1/2) & = & e^{i\eta_j}\partial_s\gamma_j^+(+1/2). & \end{array}\right. \tag{41}$$

为了唯一确定$\gamma_j^\pm$，我们需要为（41）补充一些原点处的条件。接下来，我们将$\gamma_j^\pm$的行为与 u^ε的某个内场展开相匹配。更准确地说，在原点邻域内，我们寻求 u^ε 具有如下形式的展开

$$u^\varepsilon(x) = W(x_1/\varepsilon) + \ldots \tag{42}$$

以 W 来确定。将（42）和（40）代入（5），我们发现 W 必须满足

$$\left|\begin{array}{rcll} \Delta W + 2\pi^2 W & = & 0 & \text{in } \Omega \\ W & = & 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{43}$$

现在我们谈到定理2.3 在分析中发挥作用的关键之处。事实上，它保证（43）的唯一有界于无穷远处的解是零函数。因此我们取 $W \equiv 0$并施加条件

$$\gamma_j^{\pm}(0) = 0. \tag{44}$$

接着求解谱问题 (41), (44)，可得

$$\nu = p^2\pi^2 \text{ for } p \in \mathbb{N}^*, \qquad \left| \begin{array}{l} \gamma_j^+(s) = \sin(p\pi s) \\ \gamma_j^-(s) = -e^{i\eta_j}\sin(p\pi s). \end{array} \right. \tag{45}$$

注意， ν 是一个三重特征值（几何重数等于三），因为对于 $j = 1,2,3$，问题 (41),(44)彼此独立。此外， ν与 $\eta \in [0$无关； $2\pi)^3$。后一事实并不完全令人满意，接下来我们希望改进上述模型。让我们细化式 (40)中提出的展开，并采用

$$\Lambda^\varepsilon = \frac{2\pi^2}{\varepsilon^2} + p^2\pi^2 + \varepsilon\tilde{\nu} + \ldots, \quad u^\varepsilon(x) = \left| \begin{array}{ll} (a_1\gamma_1^{\pm}(x_1) + \varepsilon\tilde{\gamma}_1^{\pm}(x_1))\, U_\dagger(x_2/\varepsilon, x_3/\varepsilon) & \text{in } \omega_1^{\varepsilon\pm} \\ (a_2\gamma_2^{\pm}(x_2) + \varepsilon\tilde{\gamma}_2^{\pm}(x_2))\, U_\dagger(x_3/\varepsilon, x_1/\varepsilon) & \text{in } \omega_2^{\varepsilon\pm} \\ (a_3\gamma_3^{\pm}(x_3) + \varepsilon\tilde{\gamma}_3^{\pm}(x_3))\, U_\dagger(x_1/\varepsilon, x_2/\varepsilon) & \text{in } \omega_3^{\varepsilon\pm} \end{array} \right. + \ldots. \tag{46}$$

这里， $a := (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, $\tilde{\nu}$，以及 $\tilde{\gamma}_j^{\pm}$, $j = 1,2,3$均待确定。由于我们处理的是特征函数，可以施加归一化条件 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$。将 (46) 代入问题 (5)，并提取关于 ε的项，对于 $j = 1,2,3$，得到

$$\left| \begin{array}{rcll} \partial_s^2\tilde{\gamma}_j^+ + p^2\pi^2\tilde{\gamma}_j^+ &=& -\tilde{\nu}a_j\gamma_j^+ & \text{in } (0;1/2) \\ \partial_s^2\tilde{\gamma}_j^- + p^2\pi^2\tilde{\gamma}_j^- &=& -\tilde{\nu}a_j\gamma_j^- & \text{in } (-1/2;0) \\ \tilde{\gamma}_j^-(-1/2) &=& e^{i\eta_j}\tilde{\gamma}_j^+(+1/2) & \\ \partial_s\tilde{\gamma}_j^-(-1/2) &=& e^{i\eta_j}\partial_s\tilde{\gamma}_j^+(+1/2). & \end{array} \right. \tag{47}$$

为了正确定义 $\tilde{\gamma}_j^{\pm}$，我们需要在原点处为（47）添加条件。为了确定这些条件，我们再次将 u^ε 的内场表示在原点邻域中的行为与之匹配。在原点邻域内，我们寻求 u^ε 具有如下形式的展开式

$$u^\varepsilon(x) = \varepsilon\tilde{W}(x_1/\varepsilon) + \ldots. \tag{48}$$

˜将（48）和（46）代入（5），我们发现 W 必须满足

$$\left| \begin{array}{rcll} \Delta\tilde{W} + 2\pi^2\tilde{W} &=& 0 & \text{in } \Omega \\ \tilde{W} &=& 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{49}$$

˜此问题存在解 W_j, $j = 1$, ..., 6，其展开式为

$$\tilde{W}_j(x) = \left| \begin{array}{ll} (z_j + M_{jj})\, U_\dagger(y_j) + \ldots & \text{in } \mathcal{L}_j \text{ as } z_j \to +\infty \\ M_{jk}\, U_\dagger(y_k) + \ldots & \text{in } \mathcal{L}_k \text{ as } z_k \to +\infty, \quad k \neq j. \end{array} \right. \tag{50}$$

˜这里我们使用（35）中引入的坐标（z_j,y_j）。注意，在无穷远处， W_j 仅在分支 $\mathcal{L}_j$中增长。下面说明如何证明这些函数的存在（更多细节见 [33, 第 4 章，命题 4.13] ）。引入一些 $\psi \in \mathscr{C}^\infty($ $\mathbb{R})$，使得 $\psi(s) = 1$ 对于 $s > 1$ 成立，且 $\psi(s) = 0$ 对于$s \leq 1/2$成立。然后对于 $j = 1, \ldots, 6$，定义 f_j，使得 $f_j(x) = (\Delta + 2\pi^2)(\psi(z_j)\ z_j U_\dagger(y_j))$。注意， f_j 是紧支撑的。随后，第 [33, 章中的理论与上述定理 2.3 一起保证问题存在一个解

$$\left| \begin{array}{rcll} \Delta\hat{W}_j + 2\pi^2\hat{W}_j &=& -f_j & \text{in } \Omega \\ \hat{W}_j &=& 0 & \text{on } \partial\Omega \end{array} \right.$$

该解在无穷远处有界。最后，我们取 $\tilde{W}_j$，使得 $\tilde{W}_j(x) = \psi(z_j)\, z_j U_\dagger(y_j) + \hat{W}_j(x)$。系数 M_{jk} 构成所谓的极化矩阵

$$\mathbb{M} := (M_{jk})_{1\le j,k\le 6} \tag{51}$$

这是实　　且即使在非对称几何结构中也为对称偶函数（参见 [33,第 5 章，命题 4。13]）。

对于函数 $\gamma_j^{\pm}$（45）中的函数，我们有如下泰勒展开，当 $s \to 0$时，

$$\gamma_j^+(s) = 0 + p\pi s + \cdots = \varepsilon p\pi \frac{s}{\varepsilon} + \ldots, \qquad \gamma_j^-(s) = 0 - e^{i\eta_j} p\pi s + \cdots = -\varepsilon e^{i\eta_j} p\pi \frac{s}{\varepsilon} + \ldots. \tag{52}$$

˜　　˜比较（52）与（50可知，我们应在展开式 W中取 u^ε（x）$= \varepsilon W$（x_1/ε）$+\ldots$（参见.....使得 (48))

$$\tilde{W} = p\pi \sum_{j=1}^{3} a_j\, (\tilde{W}_j + e^{i\eta_j} \tilde{W}_{3+j}).$$

˜这确定了 W 在无穷远处的常数行为。现在，我们将后者与 $\tilde{\gamma}_j^{\pm}$在原点处的行为相匹配，以闭合系统（47）。这一步要求

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_1^+(0) &= p\pi \sum_{j=1}^{3} a_j\, (M_{j1} + e^{i\eta_j} M_{3+j1}); & \tilde{\gamma}_1^-(0) &= p\pi \sum_{j=1}^{3} a_j\, M_{j4} + e^{i\eta_j} M_{3+j4});\\
\tilde{\gamma}_2^+(0) &= p\pi \sum_{j=1}^{3} a_j\, (M_{j2} + e^{i\eta_j} M_{3+j2}); & \tilde{\gamma}_2^-(0) &= p\pi \sum_{j=1}^{3} a_j\, (M_{j5} + e^{i\eta_j} M_{3+j5}); \\
\tilde{\gamma}_3^+(0) &= p\pi \sum_{j=1}^{3} a_j\, (M_{j3} + e^{i\eta_j} M_{3+j3}); & \tilde{\gamma}_3^-(0) &= p\pi \sum_{j=1}^{3} a_j\, (M_{j6} + e^{i\eta_j} M_{3+j6}).
\end{aligned} \tag{53}$$

方程（47）、（53）构成一个常微分方程组的边值问题。对于这个问题，存在核和余核。为使解存在，必须满足以下相容条件：将（47）乘以$\gamma_j^{\pm}$并分部积分后得到

$$\overline{\partial_s \gamma_j^+(0)}\, \tilde{\gamma}_j^+(0) - \overline{\partial_s \gamma_j^-(0)}\, \tilde{\gamma}_j^-(0) = -\tilde{\nu} a_j \left(\int_{-1/2}^{0} |\gamma_j^-|^2\, ds + \int_0^{1/2} |\gamma_j^+|^2\, ds \right)$$

必须满足 $j = 1,\ 2,\ 3$（注意，我们利用了 $\gamma_j^{\pm}(0) = 0$ 根据（44））。由于$\partial_s \gamma_j^+(0) = p\pi$ 且 $\overline{\partial_s \gamma_j^-(0)} = -p\pi e^{-i\eta_j}$，因此得到

$$2(p\pi)^2 \left(\sum_{k=1}^{3} a_k\, (M_{kj} + e^{i\eta_k} M_{3+kj}) + e^{-i\eta_j} \sum_{k=1}^{3} a_k\, (M_{k3+j} + e^{i\eta_k} M_{3+k3+j}) \right) = -\tilde{\nu} a_j.$$

通过更紧凑的形式，并将对 η的依赖关系重新表示，我们得到

$$\mathbb{A}(\eta) a^\top = -\tilde{\nu}(\eta) a^\top, \tag{54}$$

with

$$\mathbb{A}(\eta) := \Theta(\eta) \mathbb{M} \Theta^*(\eta) \in \mathbb{C}^{3\times 3}, \quad \Theta(\eta) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & e^{-i\eta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & e^{-i\eta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & e^{-i\eta_3} \end{pmatrix}, \quad \Theta^*(\eta) = \overline{\Theta(\eta)}^\top.$$

上文利用了极化矩阵 $\mathbb{M}$（定义见式（51））是对称的。通过求解谱问题（54），我们得到 $\tilde{\nu}$（η）和 a 的取值。一旦已知 $\tilde{\nu}$（η）和 a，便可求解方程组（47）、（53），从而得到 $\tilde{\gamma}_j$（η）的表达式。至此，

式（46）展开式中各项的定义便完成了。下面我们来分析并讨论这些结果。

⋆ 首先，注意到 $\tilde{\nu}(\eta)$ 是实数。事实上，由于 $\mathbb{M}$ 是实数且对称的，我们可以推知$\mathbb{A}(\eta)$ 是厄米的。

⋆ 我们得到

$$\Lambda^{\varepsilon}(\eta) = \varepsilon^{-2}2\pi^2 + p^2\pi^2 + \varepsilon\tilde{\nu}(\eta) + \dots . \tag{55}$$

注意，在这个展开式中，与前两项不同，第三项依赖于 η。对于$\eta \in [0;\ 2\pi)^3$, 记 $\tilde{\nu}_1(\eta)$、 $\tilde{\nu}_2(\eta)$、 $\tilde{\nu}_3(\eta)$ 为式 (54) 的三个特征值，并按如下方式编号

$$\tilde{\nu}_1(\eta) \le \tilde{\nu}_2(\eta) \le \tilde{\nu}_3(\eta).$$

定义量

$$\aleph := \bigcup_{j=1}^{3} \{\tilde{\nu}_j(\eta),\, \eta \in [0; 2\pi)^3\}. \tag{56}$$

由于 $\Upsilon^{\varepsilon}_{1+q+3(p^{-1})} = \{\Lambda^{\varepsilon}_{1+q+3(p-1)}(\eta)\ \ \eta \in [0; 2\pi)^3\}$，此分析表明我们有包含关系

$$\Upsilon^{\varepsilon}_{1+q+3(p-1)} \subset \varepsilon^{-2}2\pi^2 + p^2\pi^2 + \varepsilon\,(-c_p; c_p) \tag{57}$$

当 ε 足够小 与定理 2.4中所述类似。对于 c_p，我们可以取任意满足以下条件的值 $\aleph^{-} \subset (-c_p; c_p)$.

⋆ 由于 Ω 的对称性， $\mathbb{M}$ 具有如下形式

$$\begin{pmatrix} r_m & t_m^{\perp} & t_m^{\perp} & t_m & t_m^{\perp} & t_m^{\perp} \\ t_m^{\perp} & r_m & t_m^{\perp} & t_m^{\perp} & t_m & t_m^{\perp} \\ t_m^{\perp} & t_m^{\perp} & r_m & t_m^{\perp} & t_m^{\perp} & t_m \\ t_m & t_m^{\perp} & t_m^{\perp} & r_m & t_m^{\perp} & t_m^{\perp} \\ t_m^{\perp} & t_m & t_m^{\perp} & t_m^{\perp} & r_m & t_m^{\perp} \\ t_m^{\perp} & t_m^{\perp} & t_m & t_m^{\perp} & t_m^{\perp} & r_m \end{pmatrix} \tag{58}$$

其中 r_m、 t_m， $t_m^{\perp}$ 是实系数。对于 $\eta = (0,\ 0,\ 0)$，我们发现（54）的特征值为

$$2r_m + 2t_m + 8t_m^{\perp}, \qquad 2r_m + 2t_m - 4t_m^{\perp}, \qquad 2r_m + 2t_m - 4t_m^{\perp}.$$

对于 $\eta = (\pi,\ \pi,\ \pi)$，我们得到

$$2r_m - 2t_m, \qquad 2r_m - 2t_m, \qquad 2r_m - 2t_m.$$

在第 §6.2节的数值计算中，我们计算 $\mathbb{M}$。根据 r_m、 t_m、 $t_m^{\perp}$ 在式（68）中得到的值，我们例如得到

$$2r_m + 2t_m + 8t_m^{\perp} \neq 2r_m - 2t_m.$$

这表明，式（ℵ （56）中出现的集合具有非空内点。此外，由于 $\nu_1(\pi) = \nu_2(\pi) = \nu_3(\pi)$ 且 ν_j 关于 η 连续变化，我们推知 ℵ 是一个连通线段。这一结果由第 §6.2 节的数值计算得到（见式（69））， 并且由于 ω^{ε}的对称性，这在某种程度上是可以预料的。

最后，我们再次指出，上述所有形式化论述均可通过直接改编 [31, 32]中提出的误差估计证明而得到严格论证。

6 数值计算

6.1 A^Ω的谱

我们首先通过计算算子 A^Ω （在（8）之后定义）的谱来进行数值计算。更准确地说，为了也近似求出嵌入 A^Ω 连续谱中的特征值，并揭示可能位于实轴附近的复共振，我们采用完美匹配层 [7, 16, 10] （另请参见解析伸缩技术 [1, 6, 21]）。对于$\theta \in (0;\pi/2)$ 以及 $L > 1/2$，定义复值参数

$$\alpha_1^\theta = \begin{vmatrix} 1 & \text{for } |x_1| \le L \\ e^{-i\theta} & \text{for } |x_1| > L \end{vmatrix}, \qquad \alpha_2^\theta = \begin{vmatrix} 1 & \text{for } |x_2| \le L \\ e^{-i\theta} & \text{for } |x_2| > L \end{vmatrix}, \qquad \alpha_3^\theta = \begin{vmatrix} 1 & \text{for } |x_3| \le L \\ e^{-i\theta} & \text{for } |x_3| > L. \end{vmatrix}$$

这里，系数 θ 将驱动连续谱的旋转，而 L 标记完美匹配层区域的起始位置。接下来考虑谱问题

$$\left| \begin{array}{rcll} -\alpha_1^\theta \dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big(\alpha_1^\theta \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\Big) + \alpha_2^\theta \dfrac{\partial}{\partial x_2}\Big(\alpha_2^\theta \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\Big) + \alpha_3^\theta \dfrac{\partial}{\partial x_3}\Big(\alpha_3^\theta \dfrac{\partial u}{\partial x_3}\Big) & = & \Lambda u & \text{in } \Omega \\ u & = & 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{59}$$

记 A_θ^Ω 为与（59）相关联的无界算子。注意到 A_θ^Ω 由于复参数 α_j^θ而不是自伴的。然而，理论保证 A_θ^Ω的实特征值与 A^Ω的实特征值完全一致。有趣的是，可以证明 A_θ^Ω的本质谱，也就是满足以下条件的 Λ： $A_\theta^\Omega - \Lambda\mathrm{Id} : \mathcal{D}(A_\theta^\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$ 不是弗雷德霍尔姆算子的那些取值，对应于集合

$$\bigcup_{m,n\in\mathbb{N}^*} \{\pi^2(m^2+n^2) + t\,e^{-2i\theta},\, t \ge 0\},$$

因此， A_θ^Ω的实特征值是谱中的孤立点。由此，我们可以在某个距离处截断 Ω 的分支来计算这些特征值，而不会产生谱污染。然后，我们使用经典的P1有限元方法来近似这一有界几何中的谱。我们使用库 `Freefem++` [14] 构造矩阵，并使用 `Matlab`[2]计算谱。

在图4中，我们在复平面上展示了通过该方法得到的 A_θ^Ω的谱的近似。我们观察到 A_θ^Ω的本质谱分支在某种程度上被离散化了。这是因为近似问题是在有限维空间中定义的。此外，我们注意到 A_θ^Ω，因此 A^Ω在实数轴上有特征值。根据定理2.1，我们恰好在区间 $\mu_1 \approx 12.9 \approx 1.3\pi^2$ 上找到一个特征值$(0;\pi^2)$。我们还注意到，算子 A^Ω的连续谱中嵌入了特征值。对于第一个特征值，我们得到 $\mu_2 \approx 46.7 \approx 4.7\pi^2$。

在图5中，我们展示了与 μ_1 相关的特征函数（陷获模），它对应于 A^Ω的离散谱。正如引理3.2所保证的，我们观察到它确实关于平面(Ox_2x_3)、(Ox_3x_1)、(Ox_1x_2)对称。

6.2 Pola算子 A^Ω的矩阵和阈值散射矩阵

本节说明如何计算极化矩阵 $\mathbb{M}$，该矩阵在式（54）之后引入，其性质可用于评估展开式中的第二修正项 $\Lambda^\varepsilon = \varepsilon^{-2}2\pi^2 + p^2\pi^2 + \varepsilon\tilde{\nu} + \ldots$，该展开式给出了生成谱带的特征值 Υ_k^ε， $k \ge 2$。我们在几何区域Ω （见式（7））中研究阈值处的问题（8），即

$$\left| \begin{array}{rcll} \Delta v + 2\pi^2 v & = & 0 & \text{on } \Omega \\ v & = & 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{60}$$

[2] *Matlab*, http://www.mathworks.com/。

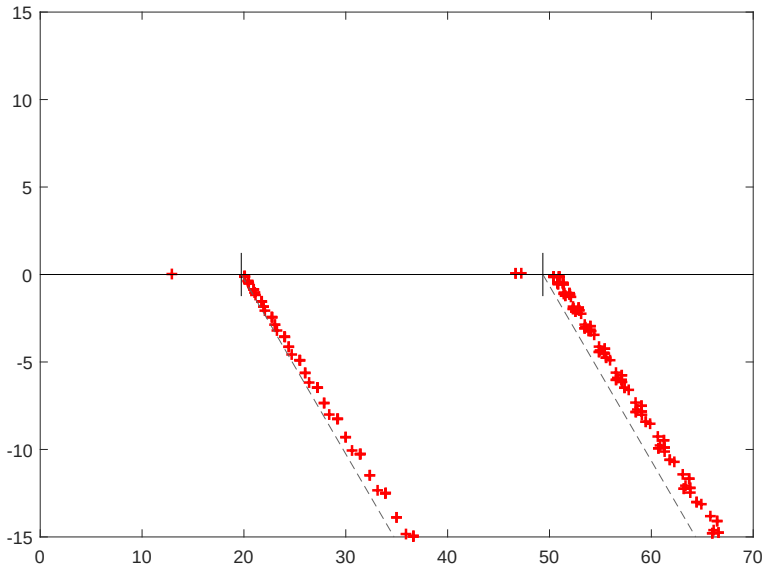

图4：A_θ^Ω的谱近似，适用于 $\theta = \pi/4$ $(L = 1/2)$。

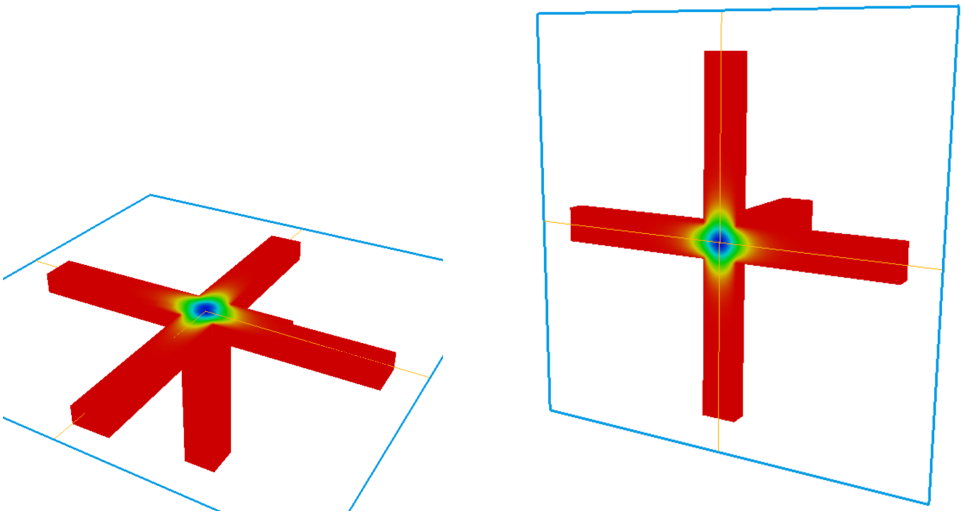

图5： 与特征值 μ_1相关的特征函数：截面 $x_1 = 0$ （左）和 $x_2 = 0$ （右） t).

为得到 $\mathbb{M}$，我们将首先计算所谓的阈值散射矩阵，现定义如下。在$\mathcal{L}_j$, $j = 1$, ..., 6 中，令

$$w_j^{\pm}(x) = \frac{z_j \mp i}{\sqrt{2}} U_\dagger(y_j).$$

我们再次使用在（50）之后引入的函数 $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$，使得 $\psi(s) = 1$ 适用于 $s > 1$，且 $\psi(s) = 0$ 适用于 $s \leq 1/2$。对于 $j = 1, \ldots, 6$，定义 ψ_j，使得 $\psi_j(x) = \psi(z_j, y_j)$（注意， ψ_j仅在分支 $\mathcal{L}_j$上非零）。对于 $j = 1, .., 6$， [33, 第 5] 章中的理论保证问题（60）有一个如下分解的解

$$v_j = \psi_j \, w_j^- + \sum_{k=1}^{6} \psi_k \, s_{jk} \, w_k^+ + \tilde{u}_j, \tag{61}$$

其中 s_{jk} 为复数，且 $\tilde{u}_j$ 在无穷远处呈指数衰减。矩阵 x

$$\mathbb{S} := (s_{jk})_{1 \leq j,k \leq 6}$$

称为阈值散射矩阵。它是对称的（$\mathbb{S} = \mathbb{S}^\top$），但不一定是厄米且酉的（$\mathbb{S}\mathbb{S}^\top = \mathrm{Id}$）。已知（参见 [30]中的关系式(7.9)） $\mathbb{M}$ 与凯莱

变换 $\mathbb{S}$ 相同，即我们有

$$\mathbb{M} = i(\mathrm{Id} + \mathbb{S})^{-1}(\mathrm{Id} - \mathbb{S}). \tag{62}$$

注意到，可以证明$\dim \ker(\mathrm{Id} + \mathbb{S}) = \dim(\mathscr{B}/\mathscr{B}_{\mathrm{tr}})$(商空间)，其中$\mathscr{B}$ 表示（60）的有界解空间，而 $\mathscr{B}_{\mathrm{tr}}$ 表示（60）的陷获模空间。关于证明，读者可参阅例如 [28]中的定理 2.3。由于定理 2.3 保证 $\mathscr{B}$ 退化为零函数，我们推知 $\mathrm{Id} + \mathbb{S}$ 可逆，从而保证 $\mathbb{M}$ 可由公式（62）定义良好。此外，由于Ω的对称性， $\mathbb{S}$ 具有如下形式

$$\begin{pmatrix} r & t^\perp & t^\perp & t & t^\perp & t^\perp \\ t^\perp & r & t^\perp & t^\perp & t & t^\perp \\ t^\perp & t^\perp & r & t^\perp & t^\perp & t \\ t & t^\perp & t^\perp & r & t^\perp & t^\perp \\ t^\perp & t & t^\perp & t^\perp & r & t^\perp \\ t^\perp & t^\perp & t & t^\perp & t^\perp & r \end{pmatrix} \tag{63}$$

其中 r， t， $t^\perp$ 为复反射系数和透射系数。因此，只需计算 v_1。为此，我们将在有界区域Ω^R（见（23）之前）内进行讨论，并在人工截断边界上施加近似辐射条件。记 n 为 $\partial\Omega^R$的外向Ω^R单位法向量，令

$$\Gamma_1 := \{R\} \times (-1/2;1/2)^2, \quad \Gamma_2 := (-1/2;1/2) \times \{R\} \times (-1/2;1/2), \quad \Gamma_3 := (-1/2;1/2)^2 \times \{R\}$$
$$\Gamma_4 := \{-R\} \times (-1/2;1/2)^2, \ \Gamma_5 := (-1/2;1/2) \times \{-R\} \times (-1/2;1/2), \ \Gamma_6 := (-1/2;1/2)^2 \times \{-R\}$$

并且 $\Gamma := \cup_{j=1}^6 \Gamma_j$。在 Γ_1上，根据（61），有

$$\partial_n(v_1 - \psi_1 w_1^-) = \partial_{z_1}(v_1 - w_1^-) = 2^{-1/2} r\, U_\dagger + \dots$$

其中省略号表示当 R 取较大值时较小的项。另一方面，在 Γ_1 上，有

$$v_1 - w_1^- = 2^{-1/2} r\,(R - i)\, U_\dagger + \dots.$$

因此，在 Γ_1 上仍有

$$\partial_n v_1 = \frac{v_1 - w_1^-}{R - i} + \partial_{z_1} w_1^- + \dots = \frac{v_1}{R - i} + w_1^- \left(\frac{1}{R + i} - \frac{1}{R - i} \right) + \dots = \frac{v_1}{R - i} - \frac{2i}{R^2 + 1} w_1^- + \dots. \tag{64}$$

在 Γ_j、 $j \neq 1$ 上，情况较为简单，因为 v_1 在相应分支中是出射的，并且有

$$\partial_n v_1 = \frac{v_1}{R - i} + \dots. \tag{65}$$

最后，将罗宾条件（64）、（65）作为近似辐射条件，我们考虑变分形式

$$\left| \begin{array}{l} \text{Find } \hat{v}_1 \in \mathrm{H}_0^1(\Omega^R; \partial\Omega^R \cap \partial\Omega) \text{ such that for all } v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega^R; \partial\Omega^R \cap \partial\Omega) \\ \displaystyle\int_{\Omega^R} \nabla\hat{v}_1 \cdot \nabla v \, dx - \frac{1}{R - i} \int_\Gamma \hat{v}_1 v \, d\sigma - (2\pi)^2 \int_{\Omega^R} \hat{v}_1 v \, dx = -\frac{2i}{R^2 + 1} \int_{\Gamma_1} w_1^- v \, d\sigma. \end{array} \right. \tag{66}$$

可以证明，$\hat{}v_1$ 能够很好地近似 v_1 ，其误差随 R呈指数衰减。实际中，我们借助`Freefem++`，采用 P1有限元方法求解问题（66）。随后，在精确公式中用$\hat{}v_1$ 替换 v_1 ，

$$r = \frac{2}{R^2 + 1} \int_{\Gamma_1} (v_1 - w_1^-)\, w_1^- \, d\sigma, \quad t = \frac{2}{R^2 + 1} \int_{\Gamma_4} v_1\, w_4^- \, d\sigma, \quad t^\perp = \frac{2}{R^2 + 1} \int_{\Gamma_2} v_1\, w_2^- \, d\sigma, \tag{67}$$

便得到由（ $\mathbb{S}$ 给出的阈值散射矩阵63）。最后结合（62，可得极化矩阵 $\mathbb{M}$，它出现在 3×3 谱问题（54）中。

我们的计算结果为

$$r \approx 0.66 + 0.11i, \qquad t \approx 0.08 - 0.70i, \qquad t^{\perp} \approx -0.08 - 0.08i.$$

$\mathbb{S} \in \mathbb{C}^{6\times6}$ 的特征值约等于

$$0.44 - 0.9i \text{ (simple)}, \quad 0.9 - 0.44i \text{ (double)} \quad \text{and} \quad 0.58 + 0.81i \text{ (triple)}.$$

它们的模为 1，这与以下事实一致： $\mathbb{S}$是酉的。此外，我们确实观察到它们不同于 -1 ，这与 (62) 后的讨论（不存在阈值共振）相符。另一方面，对于 $\mathbb{M}$ 的系数（见 (58)），我们得到

$$r_m \approx 0.08, \qquad t_m \approx -0.44, \qquad t_m^{\perp} \approx -0.06. \tag{68}$$

取这些值，求解 3×3 特征值问题 (54)，其中 $\eta \in [0;\ 2\pi)^3$, 我们发现，式 (56) 定义的线段 $\aleph$ 满足

$$\aleph \approx (-1.24; 1.04). \tag{69}$$

需要指出的是，罗宾条件 (64)、(65) 是对精确辐射条件相当粗略的近似。若要获得良好的误差估计，我们应取相当大的 R值。然而在实践中，较大的 R 不太容易处理，而且可能造成显著的数值误差。因此必须有所折中，我们取 $R = 2.5$。诚然，这一点还需要进一步研究。

附录

6.3 弗里德里希不等式

我们在此重述 [4]中的引理 5.1。

引理6.1. 假设 $a > 0$。则有弗里德里希不等式

$$\kappa(a)\int_0^{1/2}\phi^2\,dt \le \int_0^{+\infty}(\partial_t\phi)^2\,dt + a^2\int_{1/2}^{+\infty}\phi^2\,dt, \qquad \forall\phi\in \mathrm{H}^1(0;+\infty), \tag{70}$$

其中 $\kappa(a)$ 是超越方程的最小正根

$$\sqrt{\kappa}\tan\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{2}\right) = a. \tag{71}$$

证明。 对于 $a > 0$，考虑谱问题

$$\left|\begin{array}{rcl} -\partial_t^2\phi + a^2\mathbb{1}_{(1/2;+\infty)}\phi &=& \lambda(a)\,\mathbb{1}_{(0;1/2)}\phi \quad \text{in } (0;+\infty) \\ \partial_t\phi(0) &=& 0 \end{array}\right. \tag{72}$$

其中，$\mathbb{1}_{(1/2;+\infty)}$、$\mathbb{1}_{(0;1/2)}$ 分别表示集合（$1/2$；$+\infty$）、（0；$1/2$）的示性函数。令 $\mathrm{H}^1(0;\ +\infty)$ 配备内积

$$(\phi,\phi')_a = \int_0^{+\infty}\partial_t\phi\,\partial_t\phi'\,dt + a^2\phi\,\phi'\,dt.$$

根据Riesz表示定理，定义线性连续算子 $T\colon \mathrm{H}^1(0;+\infty) \to \mathrm{H}^1(0;+\infty)$，使得

$$(T\phi,\phi')_a = \int_0^{1/2}\phi\,\phi'\,dt.$$

根据此定义，我们发现 $(\lambda(a)\ \phi)$ 是（72）的一个特征对，当且仅当满足

$$T\phi = (\lambda(a) + a^2)^{-1}\phi.$$

由于 T 有界且对称，因此它是自伴的。此外，Rellich 定理保证T 是紧的。这保证了（72）的谱由一列正特征值组成，且其唯一的聚点是 $+\infty$。记 κ（a）为（72）的最小特征值。根据关于紧自伴算子的经典结果（参见例如 [9, 定理 2.7。2]），我们知道

$$(\kappa(a) + a^2)^{-1} = \sup_{\phi\in \mathrm{H}^1(0;+\infty),\,(\phi,\phi)_a=1} (T\phi,\phi)_a. \tag{73}$$

重新整理各项后，我们发现（73）给出了所需的估计（70）。现在我们计算 κ（a）。求解满足 λ（a）$=\kappa$（a）的常微分方程（72），得到（相差一个乘法常数）

$$\phi(t) = \left| \begin{array}{ll} \cos(\sqrt{\kappa(a)}t) & \text{for } t\in(0;1/2) \\ c\,e^{-at} & \text{for } t\geq 1/2 \end{array} \right.$$

其中 c 是待定常数。在 $t = 1/2$处写出传输条件后，我们发现，当且仅当 κ（a）>0 满足关系式（71）时，存在非零解。 □

引理 6.2。 假设 $a > 0$ 和 $R > 1/2$。那么我们有弗里德里希不等式

$$\kappa(a,R)\int_0^{1/2}\phi^2\,dt \leq \int_0^R(\partial_t\phi)^2\,dt + a^2\int_{1/2}^R\phi^2\,dt, \qquad \forall\phi\in \mathrm{H}^1(0;R), \tag{74}$$

其中，$\kappa(a, R)$ 是超越方程的最小正根

$$\sqrt{\kappa}\tan\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{2}\right) = a\,\tanh(a(R-1/2)). \tag{75}$$

因此，我们有 $\lim_{R\to+\infty}\kappa(a,R) = \kappa(a)$ 其中 $\kappa(a)$ 是引理 *6.1*中出现的常数。

证明。 证明过程与上面的引理 6.1完全类似。我们发现，使（74）成立的最大常数 $\kappa(a, R)$ 与问题的最小特征值相同

$$\left| \begin{array}{rcll} -\partial_t^2\phi + a^2\mathbb{1}_{(1/2;R)}\phi & = & \kappa(a,R)\mathbb{1}_{(0;1/2)}\phi & \text{in } (0;R) \\ \partial_t\phi(0) = \partial_t\phi(R) & = & 0. & \end{array} \right.$$

求解可得，若 ϕ 是相应的特征函数，则除一个乘法常数外，有

$$\phi(t) = \left| \begin{array}{ll} \cos(\sqrt{\kappa(a,R)}t) & \text{for } t\in(0;1/2) \\ c\,\cosh(a(t-R)) & \text{for } t\in(1/2;R) \end{array} \right.$$

对某个常数 c而言。此时，在 $t = 1/2$处写下传输条件，我们发现当 $\kappa(a, R)$ 满足（75）时，存在非零解。最后我们得到 $\kappa(a, R) \to \kappa(a)$，因为$\tanh(a(R - 1/2))$ 在（75）中当 趋于 $R \to +\infty$时趋于 1 。 □

7 致谢

第二作者的工作得到俄罗斯科学基金会项目 22-11- 00046 的资助。

参考文献

[1] J. Aguilar 和 J.-M. Combes。单体薛定谔哈密顿量的一类解析扰动。《数学物理通讯》，22(4)：269–279，1971。[2] Y. Avishai、D. Bessis、B.G. Giraud 和 G. Mantica。开放几何结构中的量子束缚态。《物理评论B辑》，15(15)：8028–8034，1991。[3] F.L. Bakharev、S.G. Matveenko 和 S.A. Nazarov。三维十字形和晶格量子波导的谱。《数学文献汇编》，92(1)：514–518，2015。[4] F.L. Bakharev、S.G. Matveenko 和 S.A. Nazarov。十字形波导的离散谱。《圣彼得堡数学杂志》，28(2)：171–180，2017。[5] F.L. Bakharev 和 S.A. Nazarov。量子波导接头处阈值频率下有界解不存在与存在的判据。《圣彼得堡数学杂志》，32(6)：955–973，2021。[6] E. Balslev 和 J.-M. Combes。具有伸缩解析相互作用的多体薛定谔算子的谱性质。《数学物理通讯》，22(4)：280–294，1971。[7] J.-P. Berenger。用于吸收电磁波的完美匹配层。《计算物理学杂志》，114(2)：185–200，1994。[8] G. Berkolaiko 和 P. Kuchment。量子图导论，第186卷。罗德岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2013。[9] M.Sh. Birman 和 M.Z. Solomjak。希尔伯特空间中自伴算子的谱理论。《数学及其应用》（苏联丛书）。D. Reidel 出版公司，多德雷赫特，1987。[10] A.-S. Bonnet-Ben Dhia、L. Chesnel 和 V. Pagneux。陷获模和无反射模作为同一谱问题的特征函数。《英国皇家学会会刊 A辑》，474(2213)：20180050，2018。[11] P. Exner 和 O. Post。类图薄流形的谱收敛。《几何与物理杂志》，54(1)：77–115，2005。[12] I.M. Gelfand。具有周期系数的方程的特征函数展开。载于《苏联科学院通报》，第73卷，第1117–1120页，1950。[13] D. Grieser。图邻域的谱与散射。《伦敦数学会会刊》，97(3)：718–752，2008。[14] F. Hecht。FreeFem++ 的新发展。《数值数学杂志》，20(3-4)：251–265，2012。 http://www3.freefem.org/。[15] T. Kato。线性算子的扰动理论。施普林格出版社，柏林，1980年第2版勘误印刷本的重印版，1995年版。[16] S. Kim 和 J.E. Pasciak。笛卡尔完美匹配层（pml）声散射问题近似的谱分析。《数学分析及其应用杂志》，361(2)：420–430，2010。[17] P. Kuchment。薄结构中波的图模型。《随机介质中的波》，12(4)：R1，2002。[18] P. Kuchment 和 H. Zeng。薄区域中诺伊曼拉普拉斯算子的谱的渐近性。《当代数学》，327：199–214，2003。[19] P.A. Kuchment。偏微分方程的弗洛凯理论。《俄罗斯数学调查》，37(4)：1，1982。[20] P.A. Kuchment。偏微分方程的弗洛凯理论，第60卷。施普林格科学与商业媒体，1993。[21] N. Moiseyev。共振量子理论：通过复伸缩计算能量、宽度和截面。《物理报告》，302(5)：212–293，1998。[22] S. Molchanov 和 B. Vainberg。细纤维网络中的散射解：小直径渐近分析。《数学物理通讯》，273(2)：533–559，2007。[23] S.A. Nazarov。刚体与细杆连接的渐近分析与建模。《数学科学杂志》，127(5)：2192–2262，2005。[24] S.A. Nazarov。圆柱形和准圆柱形区域中边值问题的谱性质。载于《数学中的索伯列夫空间 II》，第261–309页。施普林格出版社，2009。[25] S.A. Nazarov。T形波导中的陷获模。《声学物理》，56(6)：1004–1015，2010。[26] S.A. Nazarov。曲折、分支和周期波导的离散谱。《圣彼得堡

数学杂志, 23(2):351–379, 2012. 译自《代数与分析》, 23, 2:206–247, 2011.[27] S.A. Nazarov. 斜置T形波导中狄利克雷问题特征值的渐近行为。计算数学与数学物理杂志, 54(5):793–814, 2014.[28] S.A. Nazarov. T形波导中的有界解与狄利克雷梯的谱性质。计算数学与数学物理, 54(8):1261–1279, 2014.[29]S.A. Nazarov. 十字形量子波导的离散谱。《数学科学杂志》, 196(3):346–376, 2014.[30] S.A. Nazarov. 薄量子波导矩形晶格一维模型中的传输条件。《数学科学杂志》, 219(6):994–1015, 2016.[31] S.A. Nazarov. 量子波导矩形晶格的谱。数学汇刊, 81(1):29, 2017.[32] S.A. Nazarov. 环路断裂与薄声学波导方形晶格中开启谱隙的可能性。数学汇刊, 82(6):1148–1195, 2018. 译自 Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat. 82,6:78–127, 2018.[33] S.A. Nazarov and B.A. Plamenevskiĭ. 分段光滑边界区域中的椭圆问题，数学论述丛书第13卷。德古意特，德国柏林，1994年。[34] S.A. Nazarov, K. Ruotsalainen, and P. Uusitalo. 量子波导的Y形接头。应用数学与力学杂志, 94(6):477–486, 2014.[35] S.A. Nazarov, K. Ruotsalainen, and P. Uusitalo. 薄碳纳米结构上狄利克雷拉普拉斯算子谱的渐近行为。法国科学院报告：力学, 343(5-6):360–364, 2015.[36] K. Pankrashkin. 波导接头的特征值不等式与阈值共振的不存在。《数学分析及其应用杂志》, 449(1):907–925, 2017.[37] L. Pauling. 芳香分子的抗磁各向异性。化学物理学杂志, 4(10):673–677, 1936.[38] O. Post. 类图空间上的谱分析，第2039卷。施普林格科学与商业媒体，2012年。[39] R.L. Schult, D.G. Ravenhall, and H.W. Wyld. 经典上不束缚的交叉导线系统中的量子束缚态。《物理评论*B*辑》, 39(8):5476, 1989.[40] M.M. Skriganov. 多维周期算子谱理论中的几何与算术方法，第171卷，1987年。