arXiv:2301.05933v1 [math.DS] 14 Jan 2023

凯勒流形上酉标架流的遍历性

´Mihajlo Cekic、Thibault Lefeuvre、Andrei Moroianu 和 Uwe Semmelmann

Abstract. 设 (M, g, J) 是一个具有负截面曲率、复维数为 $m := \dim_{\mathbb{C}} M \geq 2$ 的闭凯勒流形。本文研究酉标架流，即标架流在由酉标架构成的主 $\mathrm{U}(m)$-丛 $F_{\mathbb{C}}M$ 上的限制。我们证明，若 $m \geq 6$ 为偶数，且$m \neq 28$，则存在 $\lambda(m) \in (0, 1)$，使得当 (M, g) 的全纯截面曲率为负的 $\lambda(m)$-针状时，酉标架流是遍历的且混合的。常数函数 $\lambda(m)$ 满足 $\lambda(6) = 0.9330...$，$\lim_{m\to+\infty} \lambda(m) = \frac{11}{12} = 0.9166...$，且 $m \mapsto \lambda(m)$ 单调递减。这将 Brin-Gromov[BG80] 关于负曲率奇复维紧凯勒流形上酉标架流遍历性的结果推广到了偶维情形。

1. Introduction

1.1. 酉标架流的遍历性与混合性。设 (M, g, J) 是一个具有负截面曲率且复维数为 $m \geq 2$ 的光滑闭（紧致、无边界）K¨ahler 流形。设 $SM \to M$ 为单位切丛，$F_{\mathbb{C}}M \to M$ 为 M 上以酉基为纤维的主 $\mathrm{U}(m)$- 丛。位于 $x \in M$ 上方的点 $w \in F_{\mathbb{C}}M$ 是一个正交基 $(v, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_m)$ 的数据，其中该基属于 (T_xM, h_x)，而 $h_x(\cdot,\cdot) = g_x(\cdot,\cdot) + ig_x(\cdot, J_x\cdot)$ 是 TM 的纤维上的典范厄米内积。等价地，我们将看到 $F_{\mathbb{C}}M$ 是一个位于 SM 上方的主 $\mathrm{U}(m-1)$-丛，其投影映射 $p\colon F_{\mathbb{C}}M \to SM$ 定义为 $p(v, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_m) = v$。

测地流 $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 在 SM 上的定义为 $\varphi_t(v) := \dot{\gamma}_v(t)$，其中 $t \mapsto \gamma_v(t) \in M$是由 $v \in SM$生成的测地线。接着，定义 $F_{\mathbb{C}}M$ 上的酉标架流为

$$\Phi_t(v, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_m) := (\varphi_t(v), P_{\gamma_v(t)}\,\mathbf{e}_2, ..., P_{\gamma_v(t)}\,\mathbf{e}_m), \tag{1.1}$$

其中 $P_{\gamma_v(t)} : T_xM \to T_{\gamma_v(t)}M$ 是相对于 Levi-Civita 联络沿着 γ_v 的平行移动。

回顾一下，紧致度量空间 $\mathcal{M}$ 上的流 $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 称为关于不变概率测度 μ 遍历的，如果任意流不变函数$f \in L^2(\mu)$都是常数。若对于所有 $f_1, f_2 \in L^2(\mathcal{M}, \mu)$,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{\mathcal{M}} f_1 \cdot (f_2 \circ \Phi_t)\, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathcal{M}} f_1\, \mathrm{d}\mu \cdot \int_{\mathcal{M}} f_2\, \mathrm{d}\mu.$$

众所周知，任意负曲率紧致黎曼流形的测地流 $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 关于其上[Hop36, Ano67] 的刘维尔测度是遍历的；SM而在负曲率紧致凯¨勒流形上，酉标架流 $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 关于由刘维尔测度以及群 $\mathrm{U}(m-1)$ 上的哈尔测度诱导的自然的流不变光滑测度是否遍历，则是一个困难得多的问题，因为它缺乏一致双曲性。Brin-Gromov [BG80] 证明了，当 $m :=$ 维数$_{\mathbb{C}}\, M$

为奇数时，该流是遍历的； $m = 2$ 但偶数维的情形 $m \geq 4$ 迄今仍悬而未决。本文旨在首次给出肯定答案：当 $m \geq 6$为偶数且$m \neq 28$时，在截面曲率满足某种夹持条件的假设下，

回顾一下，(M, g, J) 的全纯截面曲率定义为

$$H(X) := R(X, JX, JX, X), \tag{1.2}$$

对所有单位向量 $X \in TM$，其中 R 是 (M, g) 的黎曼曲率张量。若存在常数 $C > 0$ 使得，对于某个 $\lambda \in (0, 1],)$，则称该流形是全纯 λ-针状的。

$$-C \leq H \leq -C\lambda. \tag{1.3}$$

称该流形为严格全纯 λ-针状，如果 (1.3) 中的不等式为严格不等式。

为了陈述我们的主要结果，我们引入函数 $m \mapsto \lambda(m)$，它对偶数 $m \geq 6$ 的定义为

$$\lambda(m) := \frac{308m + 131}{336m + 105}. \tag{1.4}$$

函数 $m \mapsto \lambda(m)$ 是递减的， $\lambda(6) = 0.9330...$ 且 $\lim_{m\to+\infty} \lambda(m) = \frac{11}{12}$ =0.9166....

我们将证明以下结论：

定理 1.1. 设 (M, g, J) 是一个复维数为 $m \geq 2$、具有负截面曲率的闭连通 K¨ahler 流形。酉标架流 $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$在 $F_{\mathbb{C}}M$ 上相对于光滑测度 ω 是遍历且混合的，条件是：

(i) 复维数 m 为奇数，或$m = 2$ [BG80],(ii) 复维数 $m \geq 6$ 为偶数， $m \neq 28$, 且该流形满足严格的全纯 $\lambda(m)$夹挤条件。

我们实际上将证明，酉标架流遍历当且仅当它具有混合性。我们认为，即使没有任何夹挤条件，遍历性也应当成立；但从证明中可以清楚看出，我们的方法仅适用于夹挤程度接近 1 的情形。

在常全纯曲率 $H = -1$ 的情形下（即在 $\Gamma\backslash\mathbb{CH}^m$ 复双曲空间的紧致商空间上），酉标架流的遍历性由 Howe-Moore 证明[HM79]。在全纯截面曲率非恒定的情形下，除了[BG80] 在复维数为奇数时的结果以及 $m = 2$定理1.1 似乎是首个证明负曲率 K¨ahler 流形上复维数为偶数时酉标架流遍历性的结果 $m \geq 6$。

如定理 1.1所示，我们的方法似乎也不适用于复维数 $m = 4$ 和 $m = 28$的情形。前一种情形与 S^7 可平行化这一事实有关，而后一种情形则关联到代数拓扑中的一个开放问题：分类球面 $F_{\mathbb{C}}S^{55}$ 上的酉标架丛 S^{55}的结构群的约化。更确切地说，我们无法排除 $_6$上存在特殊 E S^{55} -结构的可能性，而这最终会妨碍我们运用论证，详见 §3 中的进一步讨论。

论证的结构将在 §1.2中作更详细的说明，与我们先前的论文 [CLMS21] 有些相似。该文证明了实标架流[1]在实维数为偶数、截面曲率接近 0.25-压缩的负曲率紧黎曼流形上具有遍历性，从而几乎解决了 Brin 提出的一个长期猜想，见 [Bri82，猜想 2。9]。不过，本文并非对 [CLMS21] 的简单改编，因为我们必须发展新技术，以考虑 K¨ahler 情形的特殊性，例如见定理 3.1、§3.2 或§5.3 。尽管本文力求自成一体，我们仍建议读者参阅 [Lef21、CLMS21、CLMS22] ，因为本文的框架正是在这些论文所发展的基础上构建的。

在 [CLMS21], 之前，Brin-Gromov 已证明，实标架流在奇数维负曲率黎曼流形（维数为 $\neq 7$）上是遍历的 [Bri75b、BG80] ；而对于曲率接近 1 的流形，Brin-Karcher [BK84] 和 Burns-Pollicott [BP03]已证明，在偶数维（以及 7 维）情形下，实标架流也是遍历的。

实标架流是 部分双曲流 早期的研究实例，研究始于 Brin 和 Pesin 对 Anosov 关于双曲流的开创性工作的后续探索 [Ano67] Brin 和 Pesin [BP74、Bri75b、Bri75a]。部分双曲动力系统如今已成为动力系统领域中成熟且活跃的研究方向；关于这一主题的介绍，参见 [HP06]。

最后提及一点：与实情形类似，实标架流的遍历性已被证明能够决定狄拉克型算子特征函数在高能区的行为 [JS07], ；K¨ahler 流形上的酉标架流的遍历性决定了 Dolbeault 拉普拉斯算子和 Spin^c Dirac 算子的特征函数在高能区的行为 [JSZ08]。

1.2. 证明思路。 下面概述这一论证。正如上文所述，它与 [CLMS21] 中提出的方法类似，包含以下三个步骤：

(i)双曲动力学： 沿用 Brin 的思路 [Bri75b] (另见 [Lef21]中较新的方法），通过一个子群 $H \lneq \mathrm{U}(m-1)$ 来描述酉标架流的非遍历性，该子群称为 传递群，见 §2.3。特别地，存在一个光滑的流不变主H-子丛 $Q \subset F_{\mathbb{C}}M$ ，位于 SM上，使得将 $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 限制到 Q上后是遍历的。

(ii) 代数拓扑： 群 H 因此使 $F_{\mathbb{C}}M$ 的结构$m-1$群从 U(H) 约化为 $x_0 \in M$ 。特别地，限制到一点 $S_{x_0}M \simeq S^{2m-1}$并将 $F_{\mathbb{C}}S^{2m-1} \to S^{2m-1}$ 识别起来，酉标架丛 H的结构群必然可以约化为 。在§3 $m \neq 4$中，我们对这类约化进行分类，并证明当 28， H 必定在 $\mathbb{C}^{m-1}$上可约作用。

(iii) 黎曼几何： 利用 [CL21],的非阿贝尔 Liv˘sic 定理，我们进而推得存在一个光滑、流不变的复向量丛 $\mathcal{V} \to SM$ ，它是一个子丛 $\mathcal{V} \subset \pi^*TM$ （其中 π ： $SM \to M$是投影），并满足某些代数性质。接着，利用

[1]在文献中，“标架流”一词通常指我们在此称为“实标架流”的对象，也就是对所有基进行平行移动，而不论其是否具有近复结构。为作区分，在 K¨ahler 情形中，我们加上“酉”一词；在黎曼情形中，则加上“实”一词。

扭曲 Pestov 恒等式（见引理 2.1），我们证明在某个夹挤条件 $\lambda > \lambda(m)$ 下，此类对象不存在，详见 §4 和 §5。

1.3. 文章结构。 在 §2中，我们回顾黎曼几何、复几何以及（部分）双曲动力系统中的标准事实，这些内容是本文其余部分所需的。在 §3中，我们研究球面上酉标架丛的结构群可能发生的约化，并由此推出：只要标架流不是遍历的，就存在非零的流不变投影算子。在 §4中，我们利用扭曲 Pestov 恒等式推导出一个不等式，而此类不变对象必须满足该不等式。在 §5中，我们完成定理 1.1的证明。

致谢。我们感谢 Maxime Zavidovique（Jussieu 几何与拓扑研讨会的一位参与者）指出这个问题值得研究（尽管我们起初以为这个问题早已得到解决）！
M.C. 获得了瑞士国家科学基金会提供的 Ambizione 资助（项目编号 201806）。

2. Preliminaries

2.1. 单位切丛的黎曼几何。设 (M, g) 是一个实维数为 n 的闭连通黎曼流形。记

$$SM := \{v \in TM \mid |v|_g = 1\}$$

为 (M) 的单位切丛，并以 $\pi : SM \to M$ 表示投影映射。

2.1.1. SM 的切丛。设 $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是 SM 上的测地流，其生成向量场为 $X \in C^\infty(SM, T(SM))$。切丛 $T(SM)$ 分解为

$$T(SM) = \mathbb{V} \oplus \mathbb{H} \oplus \mathbb{R}X, \tag{2.1}$$

其中 $\mathbb{V} := \ker d\pi$ 是垂直丛，而 $\mathbb{H}$ 是水平丛，由 Levi-Civita 联络定义，参见 [Pat99, 第 1]章。度量 g 在 $T(SM$ 上诱导出一个称为 Sasaki 度量的典范度量，使得分解（2.1）是正交的。

若 $f \in C^\infty(SM)$ 是一个光滑函数，则相对于 Sasaki 度量计算的其梯度 $\nabla f \in C^\infty(SM, T(SM))$ 按照（2.1）分解为

$$\nabla f = \nabla_{\mathbb{V}} f + \nabla_{\mathbb{H}} f + (Xf)X,$$

其中 $\nabla_{\mathbb{V}} f \in C^\infty(SM, \mathbb{V})$ 是垂直梯度，$\nabla_{\mathbb{H}} f \in C^\infty(SM, \mathbb{H})$ 是水平梯度。SM 上的 L^2-范数由 SM 上的刘维尔测度 μ 定义，而该测度是由 Sasaki 度量诱导的黎曼测度。注意，刘维尔测度在测地流下是不变的。

垂直拉普拉斯算子 $\Delta_{\mathbb{V}}$ 定义为 $\Delta_{\mathbb{V}} := \nabla^*_{\mathbb{V}} \nabla_{\mathbb{V}}$，其中 $\nabla^*_{\mathbb{V}}$ 表示L^2伴随算子。等价地，给定 $f \in C^\infty(SM)$ 和 $x \in M$，记 g_x 在 S_xM 上的限制的拉普拉斯算子为 Δ_{S_xM}，则有

$$\Delta_{\mathbb{V}} f(v) = \Delta_{S_xM}(f|_{S_xM})(v), \qquad \forall v \in S_xM. \tag{2.2}$$

2.1.2. 纤维上的傅里叶分解。由于 $\pi : SM \to M$ 是一个球面丛，任意光滑函数 $f \in C^\infty(SM)$都可以分解为球面 $S_xM \simeq S^{n-1}$ 上球谐函数的和，其中该球面位于每个点 $x \in M$之上。换言之，我们可以写成

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k,$$

其中， $f_k \in C^\infty(SM)$ 是次数为 $k \geq 0$ 的球谐函数，也就是说，它满足特征值方程

$$\Delta_{\mathbb{V}} f_k = k(n+k-2) f_k,$$

其中 $\Delta_{\mathbb{V}}$ 是每个球面 S_xM 上的垂直拉普拉斯算子（ $x \in M$对应于（2.2）中引入的 k 。次数为 M 的球谐函数空间定义了向量丛 $\Omega_k \to M$ ，它可通过下述映射自然地识别为无迹对称 k-张量丛 $S_0^k TM \to M$（这里我们利用度量 T^*M将 TM与 g识别）

$$\pi_k^* : S_0^k TM \xrightarrow{\sim} \Omega_k, \qquad \pi_k^* f(v) := f_x(v, ..., v), \qquad \forall v \in S_xM. \tag{2.3}$$

更一般地，设 $(E, h) \to M$ 是M 上的 Hermitian（或 Euclidean）向量丛，配备了酉（或正交）联络 ∇^E，这意味着

$$Yh(e, f) = h(\nabla_Y^E e, f) + h(e, \nabla_Y^E f), \quad \forall e, f \in C^\infty(M, E), \quad \forall Y \in C^\infty(M, TM).$$

记 $(\mathcal{E}, \nabla^{\mathcal{E}}) := (\pi^* E, \pi^* \nabla^E)$ 为其在 SM 上的拉回，则任意截面 $f \in C^\infty(SM, \mathcal{E})$ 都可以唯一地分解为每个点 $x \in M$ 上扭曲球谐函数之和，即，

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k, \tag{2.4}$$

其中， $f_k \in C^\infty(SM, \mathcal{E})$ 是一个次数为 k（取值于 $\mathcal{E}$ 的）球谐函数。注意，对于 E 上在 $U \subset M$ 局部定义的标准正交基 $(\mathbf{e}_\alpha)$，任意截面 $f \in C^\infty(SM, \mathcal{E})$ 均可写为 $f|_U = \sum_\alpha f_\alpha \mathbf{e}_\alpha$，其中 $f_\alpha \in C^\infty(SM|_U)$。于是，垂直拉普拉斯算子定义为

$$\Delta_{\mathbb{V}}^E f = \sum_\alpha (\Delta_{\mathbb{V}} f_\alpha)\, \mathbf{e}_\alpha,$$

其中 $\Delta_{\mathbb{V}}$ 在（2.2）中引入。截面 $f_k \in C^\infty(SM, \mathcal{E})$ 因而满足特征值方程

$$\Delta_{\mathbb{V}}^E f_k = k(n+k-2) f_k.$$

等价地， f_k 是丛 $\Omega_k \otimes E$ 在 M 上的光滑截面，并且可通过（2.3）将其识别为元素 $S_0^k TM \otimes E$。若截面 $f \in C^\infty(SM, \mathcal{E})$ 的傅里叶次数为 偶（相应地，奇），则称其具有此性质；也就是说，分解（2.4）仅包含次数为偶数（相应地，奇数）的球谐函数。

我们定义算子 $\mathbf{X} := \nabla_X^{\mathcal{E}}$，其中 X是 SM上的测地向量场。这是沿测地流线平行移动 E 的截面的无穷小生成元。它具有如下映射性质

$$\mathbf{X} : C^\infty(M, \Omega_k \otimes E) \to C^\infty(M, \Omega_{k-1} \otimes E) \oplus C^\infty(M, \Omega_{k+1} \otimes E), \tag{2.5}$$

因此可分解为如下直和 $\mathbf{X} := \mathbf{X}_- + \mathbf{X}_+$，其中每一项对应于式（2.5）中的两个直和项。

截面上存在自然的 L^2标量积 $f, f' \in C^\infty(SM, \mathcal{E})$，定义如下：

$$\langle f, f' \rangle_{L^2} := \int_{SM} h_{\pi(v)}(f(v), f'(v))\, \mathrm{d}\mu, \tag{2.6}$$

其中， μ 是 SM上的刘维尔测度， h 是 E上的厄米（或欧几里得）度量。

2.1.3. 扭曲 Pestov 恒等式。 这一恒等式在我们证明定理 1.1中起着根本作用。在非扭曲情形下，Mukhometov [Muk75、Muk81]和 Amirov [Ami86], 首先在一些特殊情形下发现了它，随后 Pestov 和 Sharafutdinov [PS88、Sha94]给出了它的经典形式。最终，文献中以一般的无坐标方式重新表述并描述了这一恒等式[PSU15、GPSU16]。它具有以下形式：

引理 2.1（局部化佩斯托夫恒等式）。设 (M, g) 是一个闭的 n 维黎曼流形，且 (E, h) 是M 上的一个厄米（或欧几里得）向量丛，配备了酉（或正交）联络 ∇^E。对于所有 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $u \in C^\infty(M, \Omega_k \otimes E)$，下列恒等式成立：

$$\begin{aligned} &\tfrac{(n+k-2)(n+2k-4)}{n+k-3} \|\mathbf{X}_- u\|_{L^2}^2 - \tfrac{k(n+2k)}{k+1} \|\mathbf{X}_+ u\|_{L^2}^2 + \|Z(u)\|_{L^2}^2 \\ &\qquad = \langle R \nabla_{\mathbb{V}}^E u, \nabla_{\mathbb{V}}^E u \rangle_{L^2} + \langle \mathcal{F}^E u, \nabla_{\mathbb{V}}^E u \rangle_{L^2}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

其中：

- Z 是一个未明确写出的 一阶微分算子，
- 含 R 的项具有如下形式

$$\langle R \nabla_{\mathbb{V}}^E u, \nabla_{\mathbb{V}}^E u \rangle_{L^2} = \int_M \int_{S_x M} \sum_\alpha R(v, \nabla_{\mathbb{V}} u_\alpha, \nabla_{\mathbb{V}} u_\alpha, v)\ |\mathrm{d}v| |\mathrm{d}x|,$$

其中， R 是黎曼曲率张量， $|dv|$ 是球面 $S_x M$ 上的勒贝格测度（由 g_x诱导）， $|dx|$ 是黎曼测度， $u = \sum_\alpha u_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ ，其中 $(\mathbf{e}_\alpha)_{\alpha \in I}$ 是 E_x上点 $x \in M$ 处的标准正交标架，

- 含 $\mathcal{F}^E$ 的项具有如下形式

$$\langle \mathcal{F}^E u, \nabla_{\mathbb{V}}^E u \rangle_{L^2} = \int_M \int_{S_x M} \sum_\alpha R_E(v, \nabla_{\mathbb{V}} u_\alpha, u, \mathbf{e}_\alpha)\ |\mathrm{d}v| |\mathrm{d}x|, \tag{2.8}$$

其中， R_E 是 E 的曲率张量，我们采用如下约定：

$$R_E(X, Y, \omega, \eta) := h(R_E(X, Y)\omega, \eta), \quad \forall X, Y \in TM,\ \forall \omega, \eta \in E,$$

且 h 是丛 E 上的欧几里得度量（或 Hermitian 度量）。

我们参见 [GPSU16，命题 3，5]其中给出了证明。

2.2. 复几何。 我们以 [KN96，第九章] 作为复几何的基础参考文献。

2.2.1. 曲率张量。设 (V, g) 是一个维数为 n 的欧几里得向量空间。通常，我们利用度量 g 将 V 与其对偶空间 V^* 等同，并将 $\Lambda^2 V$ 与 V 上反对称自同态的空间等同。记 $S^p V$ 为 V 上的对称 p 阶张量， $S_0^p V$ 为无迹对称张量， $\Lambda^p V$ 为 p 阶外幂。空间 $V^{\otimes 2}$ 分解为

$$V^{\otimes 2} = \mathbb{R} g \oplus S_0^2 V \oplus \Lambda^2 V, \tag{2.9}$$

其中每个直和项在 O(n)-作用下保持不变，且 $S^2V = \mathbb{R}g \oplus S_0^2V$。空间 $V^{\otimes 2} \simeq \mathrm{End}\, V$ 配备范数

$$\langle u, v\rangle = \mathrm{Tr}(u^\top v), \tag{2.10}$$

其中 $^\top$ 表示转置算子，且（2.9）相对于（2.10）是正交的，因此 S^2V 和 Λ^2V 都继承了度量（2.10）。

曲率张量 R 是满足比安基恒等式的一个元素 $R \in S^2(\Lambda^2V)$

$$R(X,Y,Z,W) + R(Z,X,Y,W) + R(Y,Z,X,W) = 0, \quad \forall X,Y,Z,W \in V. \tag{2.11}$$

与 R 相关的截面曲率是由下式定义的二次映射 $\overline{R} : S^2V \to \mathbb{R}$

$$\overline{R}(X,Y) := R(X,Y,Y,X), \quad X,Y \in V.$$

给定 $X,Y \in V$，我们可以将 $R(X,Y,\cdot,\cdot)$视为一个反对称端omorphism $R(X,Y)$，如下所示:

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle := R(X,Y,Z,W). \tag{2.12}$$

这个反对称端omorphism可扩展为 V的外代数、对称代数和张量代数上反对称端omorphism的导子，分别记为 $R_{\Lambda^p}(X,Y)$、 $R_{S^p}(X,Y)$和 $R_{V^{\otimes p}}(X,Y)$。特别地，容易验证:

$$R_{V^{\otimes 2}}(X,Y)u = [R(X,Y), u] \tag{2.13}$$

对每个 $u \in V^{\otimes 2} = \mathrm{End}(V)$。作用（2.13）相对于分解 $V^{\otimes 2} = S^2V \oplus \Lambda^2V$是对角的。对于 X， $Y \in V$和 ω， $\eta \in \Lambda^pV$，我们定义

$$R_{\Lambda^pV}(X,Y,\omega,\eta) := \langle R_{\Lambda^pV}(X,Y)\omega, \eta\rangle,$$

其中， Λ^pV 配备典范内积。对于 S^pV，我们采用类似的记号。

2.2.2. 曲率与针状性。如果（M， g）是一个黎曼流形，我们定义其 (4,0)型张量 $g \owedge g$ 如下:

$$g \owedge g(X,Y,Z,W) := g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z), \tag{2.14}$$

对所有 $X,Y,Z,W \in TM.$，当（M， g）为实双曲空间 $\mathbb{H}^n$时，这恰好是曲率张量；而当（M， g， J）为复双曲空间 $\mathbb{CH}^m$时，其曲率张量 G 的形式为:

$$\begin{aligned} 4G(X,Y,Z,W) =& g \owedge g(X,Y,Z,W) + g \owedge g(X,Y,JZ,JW) \\ &+ 2g(X,JY)g(Z,JW), \end{aligned} \tag{2.15}$$

参见 [KN96，第九章第 7 节]。等价地， （2.15）可利用（2.12）改写为

$$4G(X,Y) = X \wedge Y + JX \wedge JY - 2\langle X, JY\rangle J, \tag{2.16}$$

其中 $X \wedge Y$ 是由 $(X \wedge Y)(Z) := g(X,Z)Y - g(Y,Z)X$ 定义的 TM 的反对称端omorphism，适用于所有 $Z \in TM$。

若 (M,g,J) 是任意 K¨ahler 流形，则单位向量 $X \in TM$ 的全纯截面曲率定义为:

$$H(X) := \overline{R}(X,JX) = R(X,JX,JX,X). \tag{2.17}$$

容易验证，复双曲空间的全纯截面曲率为 -1，即

$$H_{\mathbb{CH}^m}(X) = G(X, JX, JX, X) = -1,$$

对于 $|X| = 1$。类比实数情形，我们引入全纯曲率钳制的概念：

定义 2.2（全纯截面曲率钳制）。若存在常数 $C > 0$，使得对于所有单位向量 $X \in TM$，均有.....，则称凯勒流形 (M^{2m}, g, J) 是负全纯 λ-钳制的（对某个 $\lambda \in (0, 1]$）。

$$-C \leq H(X) \leq -C\lambda. \tag{2.18}$$

若上述不等式均为严格不等式，则称该流形是严格负全纯 λ-钳制的。

类似地，也可以讨论流形的实（或截面） δ-钳制，即对流形 (M^{2m}, g) 要求（2.18）成立，其中 λ 替换为 δ，而 $H(X)$ 替换为截面曲率 $\overline{R}(X, Y)$（对所有正交单位向量对$X, Y \in TM$）。全纯曲率钳制与实曲率钳制之间存在关系，参见[Ber60a、Ber60b、BG63]。

与实数情形一样，一个众所周知的结果是，负的全纯 1-钳制意味着 (M^{2m}, g, J) 全纯等距于一个紧致商空间 $\Gamma\backslash\mathbb{CH}^m$，其中 Γ是 $\mathrm{Isom}(\mathbb{CH}^m)$ 的离散子群。下文中，我们总是假设 (M^{2m}, g, J) 是负 λ-全纯钳制的，并且不失一般性地对度量进行缩放，使得 $C = 1$。

以下引理由 [BG63，命题 42]证明，将会用到：

引理 2.3（Bishop-Goldberg ’63）。假设 (M^{2m}, g, J) 是一个闭的 K ¨ahler 流形，且具有负的全纯 λ-钳制。考虑满足 $g(X, Y) = 0$ 且 $g(X, JY) = \cos\theta$ 的单位向量 $X, Y \in TM$。那么：

$$-\left(1 - \tfrac{3}{4}\lambda \sin^2\theta\right) \leq \overline{R}(X, Y) \leq -\tfrac{1}{4}\left(3(1 + \cos^2\theta)\lambda - 2\right). \tag{2.19}$$

特别是：

$$-1 \leq \overline{R}(X, Y) \leq -\tfrac{3\lambda - 2}{4}, \tag{2.20}$$

对所有正交的单位向量 $X, Y \in TM$ 均成立。若 $\lambda \geq 2/3$，则 (M^{2m}, g) 关于截面曲率是负δ-挤压的，其中 $\delta = \frac{3\lambda-2}{4}$。

现在令

$$R = R_0 + \tfrac{1+\lambda}{2}G, \tag{2.21}$$

其中 G 是式（2.15）中定义的曲率张量。以下结论成立：

引理 2.4. 假设对所有单位向量 $X \in TM$，$-1 \leq H(X) \leq -\lambda$。那么，对于任意单位向量 $X, Y, Z, W \in TM$，有：

$$|R_0(X, Y, Z, W)| \leq \tfrac{4}{3}(1 - \lambda). \tag{2.22}$$

更一般地，对于所有单位向量 X、$Y \in TM$，以及所有单位 ω、$\eta \in \Lambda^p TM \,\mathrm{or}\, S^p TM$，有：

$$|(R_0)_{\Lambda^p TM}(X, Y, \omega, \eta)|, |(R_0)_{S^p TM}(X, Y, \omega, \eta)| \leq \tfrac{4p}{3}(1 - \lambda). \tag{2.23}$$

证明。设 X、Y 为单位向量，使得 $g(X,Y)=0$ 且 $g(X,JY)=\cos\theta$。我们有：

$$\overline{R_0}(X,Y)=\overline{R}(X,Y)-\tfrac{1+\lambda}{2}\overline{G}(X,Y)=\overline{R}(X,Y)+\tfrac{1+\lambda}{2}(1-\tfrac{3}{4}\sin^2\theta).$$

将（2.19）代入前一个方程，得到：

$$-\tfrac{1-\lambda}{2}(1+\tfrac{3}{4}\sin^2\theta)\le\overline{R_0}(X,Y)\le\tfrac{1-\lambda}{2}(2-\tfrac{3}{4}\sin^2\theta).$$

特别地，前述不等式推出：

$$|\overline{R_0}(X,Y)|\le 1-\lambda. \tag{2.24}$$

与 [BK78引理 3 的证明7]，（2.24）一样，将（2.22）中的R_0（X，Y，Z，W）写成只涉及两个参数向量的项之和，即可推出（2.23）。将（2.22）在 $\mathbb{C}$反对称端omorphism R_0（X，Y）上对角化，便可立即得到一般界。□

2.3. 测地流的等距扩张。酉标架丛 $\hat{\pi}:F_{\mathbb{C}}M\to SM$ 是底空间 SM 上的主 $\mathrm{U}(m-1)$-丛。给定 $a\in\mathrm{U}(m-1)$，我们用 $R_a:F_{\mathbb{C}}M\to F_{\mathbb{C}}M$ 表示由 a给出的纤维逐点右作用。酉标架流 $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是测地流到主丛的扩张，其意义是它满足

$$\pi\circ\Phi_t=\varphi_t\circ\pi,\qquad R_a\circ\Phi_t=\Phi_t\circ R_a,$$

f对于所有 $t\in\mathbb{R},a\in\mathrm{U}(m-1)$。我们将其无穷小生成元记为 $X_{F_{\mathbb{C}}M}$.

由 Brin 的工作[Bri75b、Bri75a], 开创，如今已有成熟的理论描述此类扩张流的遍历分量（Φ_t）$_{t\in\mathbb{R}}$。该理论通过引入一个闭子群 $H\leqslant\mathrm{U}(m-1)$ 来实现，此子群称为传递群，并通过动力学全纯来定义。关于传递群的一种现代构造，请参见 [Lef21] H。它具有以下性质：

定理 2.5 (Brin '75, [Lef21])。 以下结论成立：

(i) 存在一个自然同构

$$\mathrm{ev}:\ker{}_{L^2(\omega)}X_{F_{\mathbb{C}}M}\xrightarrow{\sim}L^2(H\backslash\mathrm{U}(m-1)). \tag{2.25}$$

(ii) 存在一个主 H-子丛 $Q\subset F_{\mathbb{C}}M$，位于 SM 上，且在 $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 作用下保持不变，使得 $(\Phi_t|_Q)_{t\in\mathbb{R}}$ 是遍历的（相对于 Q 上的诱导测度）。

特别地，酉标架流是遍历的，当且仅当 $H=\mathrm{U}(m-1)$.

进一步的细节请参见[Lef21，推论 3。10]显然，由第一项可知，$\ker_{L^2}X_{F_{\mathbb{C}}M}$ 要化为常数函数，唯一的可能性是$H=\mathrm{U}(m-1)$。式（2.25）中的同构定义如下：任取一点 $z_\star\in SM$，并令 $f\in\ker_{L^2}X_{F_{\mathbb{C}}M}$,

$$\mathrm{ev}(f):=f|_{F_{\mathbb{C}}M_{z_\star}}.$$

事实证明，这样的函数属于 $L^2(F_{\mathbb{C}}M_{z_\star})\simeq L^2(\mathrm{U}(m-1))$[2]，并且在 H 的作用下保持不变，因此它给出 $L^2(H\backslash\mathrm{U}(m-1))$中的一个元素。定理 2.5 中的第二项已经对丛 $F_{\mathbb{C}}M$ 施加了一个很强的拓扑约束，称为 结构群约化，详见 §3，其中将对此作进一步讨论。

[2]尚不清楚先验地，这样的求值映射是否定义良好，因此其定义也是定理2.5的一部分。

我们将 $\mathcal{N} \to SM$（法丛）定义为 SM 上的欧几里得丛，其在 $v \in S_xM$ 上定义如下：

$$\mathcal{N}(v) := \mathrm{Span}(v, Jv)^{\perp},$$

其中， $\perp$ 表示相对于欧几里得度量g_x的正交补。注意， $\mathcal{N}$ 带有复结构 J。观察到

$$\pi^*TM = \mathcal{N} \oplus \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}Jv, \tag{2.26}$$

因此， $\mathcal{N}$可视为拉回丛 π^*TM的一个子丛。沿测地流线对 $\mathcal{N}$ 的截面作相对于 Levi-Civita 联络 ∇^{LC} 的平行移动是良定义的，其生成元为一阶微分算子

$$\mathbf{X} := (\pi^*\nabla^{\mathrm{LC}})_X : C^\infty(SM, \mathcal{N}) \to C^\infty(SM, \mathcal{N}),$$

该算子在形式上是斜伴随的，并且与 J可交换。

除了描述酉标架流的遍历分量外，群 H 还可用于构造光滑的流不变对象。下文中，我们用 Vect 表示有限维欧几里得向量空间范畴；若$\mathfrak{o} : \mathrm{Vect} \to \mathrm{Vect}$ 是该范畴上的一个运算，且 $\mathfrak{o}$由以下基本运算有限次复合得到，则称其为该范畴上的运算：向量空间 V的张量幂 $V^{\otimes m}$、对称幂S^mV和外幂 Λ^mV。显然，对任意此类运算 $\mathfrak{o}$， $\mathfrak{o}(\mathcal{N}) \to SM$都是一个良定义的欧几里得丛，并且仍带有一个诱导的生成元 X（为简便起见，我们不为该丛上的生成元引入任何新记号）。

以下结论成立：

定理 2.6. (非阿贝尔 Livˇsic 定理，[CL21，定理 3。5])。设

$$\mathfrak{o} : \mathrm{Vect} \to \mathrm{Vect},$$

是 Vect 上的任意运算。那么，存在一个同构

$$\ker \mathbf{X} \cap C^\infty(SM, \mathfrak{o}(\mathcal{N})) \xrightarrow{\sim} \left\{ f \in \mathfrak{o}(\mathbb{R}^{2(m-1)}) \mid hf = f, \forall h \in H \right\}.$$

同构映射不过是在 SM 任意一点处取值（与定理 2.5 (i) 类似）。换言之，法丛张量积的流不变光滑截面，恰好对应于 $\mathbb{R}^{2(m-1)}$ 上代数上 H-不变的对象。当酉标架流不遍历时，定理 2.6 将使我们能够构造光滑的流不变截面。例如，若能证明 $H \leqslant \mathrm{U}(m-1-p) \times \mathrm{U}(p) \lneqq \mathrm{U}(m-1)$，也就是说， H 在 $\mathbb{R}^{2(m-1)} \simeq \mathbb{C}^{m-1}$ 上可约地作用，那么 H 便固定一个正交投影算子 $\pi \in S^2\mathbb{R}^{2(m-1)}$ ，其像空间为复（即 J-不变）空间 $V \subset \mathbb{R}^{2(m-1)}$。进而，定理 2.6 意味着存在一个流不变的复向量丛 $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}$ ，这等价于存在一个正交投影算子 $\pi_{\mathcal{V}} \in C^\infty(SM, S^2\mathcal{N}) \cap \ker \mathbf{X}$, 且它与 J 交换。

3. Topological reductions and flow-invariant sections

下文中，我们假设 M 的复维数为大于 2 的偶数，并记为 $\dim_{\mathbb{C}} M = m =: 2p + 2$, 其中 $p \geq 1$。

3.1. 拓扑约化。 根据定理 2.5，若 $F_{\mathbb{C}}M$上的酉标架流不是遍历的，则其传递群是一个真子群 $H \lneqq \mathrm{U}(2p+1)$，且存在一个真主 H-子丛 $Q \subset F_{\mathbb{C}}M$。这称为结构群约化，即将 $F_{\mathbb{C}}M$ 约化到 H。由于 $F_{\mathbb{C}}M$ 可约化到 H，因此将酉标架丛限制在任意球面 $S_{x_0}M$上时，同样成立，其中$x_0 \in M$。进而，由于 $S_{x_0}M \simeq S^{4p+3}$，这意味着酉标架丛$F_{\mathbb{C}}S^{4p+3}$的结构群可从 $\mathrm{U}(2p+1)$ 约化到 H。

注意，$\mathrm{U}(2p+2)$ 和 $\mathrm{SU}(2p+2)$ 在 S^{4p+3} 上传递作用，其各向同性群分别为 $\mathrm{U}(2p+1)$ 和 $\mathrm{SU}(2p+1)$，因此我们可以写为：

$$S^{4p+3} = \mathrm{SU}(2p+2)/\mathrm{SU}(2p+1) = \mathrm{U}(2p+2)/\mathrm{U}(2p+1). \tag{3.1}$$

酉标架丛 $F_{\mathbb{C}}S^{4p+3}$ 可识别为 $\mathrm{U}(2p+2)$。因此，$\mathrm{U}(2p+2)$ 的子群 $\mathrm{SU}(2p+2)$，视为以 S^{4p+3} 为底空间的主 $\mathrm{SU}(2p+1)$ 丛 $F_{\mathbb{C},\ \mathrm{SU}}S^{4p+3}$，是 $F_{\mathbb{C}}S^{4p+3}$ 到 $\mathrm{SU}(2p+1)$ 的一个约化。

本节旨在考察 $F_{\mathbb{C},\ \mathrm{SU}}S^{4p+3}$ 可能存在的进一步约化。需要注意的是，对于球面 S^{4p+1} （当 $p \geq 1$ 时），[Leo71] 已证明，其特殊酉标架丛 $F_{\mathbb{C},\ \mathrm{SU}}S^{4p+1} \to S^{4p+1}$ 不存在任何约化。

定理 3.1. 设 $p \geq 1$。假设主 $\mathrm{SU}(2p+1)$-丛 $F_{\mathbb{C},\ \mathrm{SU}}S^{4p+3}$ 在 S^{4p+3} 上的结构群可约化为一个真连通子群 $H_0 \lneqq \mathrm{SU}(2p+1)$。则以下情况之一成立：

(i) H_0 在 $\mathbb{C}^{2p+1}$ 上的表示可约；(ii) 或者，$p = 1$ 和 H_0 包含于 $\mathrm{SO}(3) \lneqq \mathrm{SU}(3)$；(iii) 或者，$p = 13$ 和 H_0 包含于 $\mathrm{E}_6 \lneqq \mathrm{SU}(27)$。

ˆ证明。 设 H_0 是包含 H_0 的 $\mathrm{SU}(2p+1)$ 的极大真子群 $H_{0\circ}$。显然，主丛 $P_0 = \mathrm{SU}(2p+2) \to S^{4p+3}$ 也约化为 ˆ $H_{0\circ}$ 于是，[Leo71，定理 3] 应用于（采用 [Leo71] 的记号） $G_{2p+1} := \mathrm{SU}(2p+1)$，表明 ˆ H_0 是一个单李群。

若 H_0 是一个经典单李群，且 $p \geq 2$，根据[˘CC06，定理 2.1，(D) 和 ˆ ˆ (E)] 应用于 $G = H_0$，我们立即得到 H_0 （因此 H的表示也是如此）在 $\mathbb{C}^{2p+1}$ 上的表示是可约的。上述结果不适用于$p = 1$ （此时对应的球面 S^7 可平行化），但很容易验证，严格包含于 $\mathrm{SU}(3)$ 且在 $\mathbb{C}^3$ 上的表示不可约的单李群只有 $\mathrm{SO}(3)$；它通过其在 $\mathbb{R}^3$上的标准表示的复化嵌入 $\mathrm{SU}(3)$。这对应于定理(ii) 的情形3.1。

ˆ 还需研究这样的情形： H_0 是 5 个例外紧单李群之一（或其有限商）。

首先，只需考察奇数维例外李群的复不可约表示 $2p+1$。此外，根据[˘CC06，命题 3.1],ˆ 令 $4p+3 =$维数为 $H_0 + k + 1$，其中 k是某个整数，则球面 k上至少存在 S^{4p+3}个向量场，因此 Radon-Hurwitz 数 $\rho(n)$（由以下事实定义： $\rho(n) - 1$ 是 S^{n-1}上的线性无关向量场的最大数目）满足

$$\rho(4p+4) \geq 4p + 3 - \dim \hat{H}_0. \tag{3.2}$$

对于所有 $p \geq 3$，我们有 $\rho(4p+4) \leq 2p+3$。由于没有例外李群具有维数小于 7 的不可约复表示，因此可得 $2p+1$

必定是某个例外李群 H_0的不可约复表示的维数，其中

$$7 \leq 2p+1 \leq \dim \hat{H}_0 + 1. \tag{3.3}$$

ˆ ˆ记 $\mathfrak{h}$ 为 H_0的李代数，结果表明，例外李群 H_0 满足（3.3）的复奇数维不可约表示只有以下两种情况：

ˆ ˆ**1.** $\mathfrak{h} = \mathfrak{e}_6$，维数 $\mathfrak{h} = 78$。有两个 27 维不可约表示 $\mathfrak{e}_6$ 满足（3.3）。这种情况对应于将 $F_{\mathbb{C}}$ 的结构群 SU(27)（理论上）约化为 E 的一个子群SU S^{55} E 的一个子群$_6$ （情况(iii)，定理3.1中的）。

ˆ ˆ**2.** $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_2$，维数 $\mathfrak{h} = 14$。 $\mathfrak{g}_2$ 满足（3.3）的唯一复奇数维不可约表示，是实 7 维表示 ρ_7 的复化：嵌入 $\mathsf{G}_2 \to \mathsf{SO}(7)$，其中 $\mathsf{G}_2 \subset \mathsf{SO}(7)$，对于 $p = 3$。不过，我们将证明$F_{\mathbb{C},\ \mathrm{SU}} S^{15}$ 不能约化为 G_2。

确实，如果存在这样的约化 P_{G_2}，那么切丛 TS^{15} 同构于直和 $\mathbb{R} \oplus (\mathbb{C} \otimes F_7)$，其中 $F_7 := P_{\mathrm{G}_2} \times_{\rho_7} \mathbb{R}^7$ 是 S^{15}上的秩为 7 的实向量丛。

现在，对于 S^{15} 上的每个秩为 k 的实向量丛 E，都可以将同伦群 $\pi_{14}(\mathsf{SO}(k))$中的一个元素$\alpha(E)$与之对应，即其在赤道 $S^{14} \hookrightarrow S^{15}$处的粘接函数的同伦类。对于 $k < l$，令$f_{k,l} : \mathsf{SO}(k) \to \mathsf{SO}(l)$为标准嵌入，并记$g_{k,l} : \pi_{14}(\mathsf{SO}(k)) \to \pi_{14}(\mathsf{SO}(l))$为由$f_{k,l}$ 在同伦群上诱导的群同态。如果 E 和 F 的秩分别为 k 和 l，显然有

$$\alpha(E \oplus F) = g_{k,k+l}(\alpha(E)) + g_{l,k+l}(\alpha(F)).$$

在我们的情形中，由于 $\mathbb{C} \otimes F_7$ 与 $F_7 \oplus F_7$拓扑同构， TS^{15} 与 $\mathbb{R} \oplus F_7 \oplus F_7$也同构，因此可以写成

$$\begin{aligned} \alpha(TS^{15}) &= g_{14,15}(\alpha(F_7 \oplus F_7)) \\ &= g_{14,15}(2g_{7,14}(\alpha(F_7))) = 2g_{14,15}(g_{7,14}(\alpha(F_7))) = 0, \end{aligned}$$

因为 $\pi_{14}(\mathsf{SO}(15)) = \mathbb{Z}_2$。这与 S^{15}ˆ 的切丛非平凡相矛盾。因此， $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_2$ 这一情形不可能成立，证明至此完成。□

结合定理 2.5 和2.6，定理 3.1 给出以下结论：

推论 3.2. 设 (M, g, J) 是一个闭连通的 K ¨ahler 流形，其复维数为偶数 m，且酉标架流非遍历。那么，若 $m \neq 4$，28，则存在 ˆ ˆ一个有限覆盖 $(M, \hat{g}, J) \to (M, g, J)$，以及一个流不变正交投影算子 $\pi_{\mathcal{V}} \in C^\infty(S\widehat{M}, S^2\mathcal{N})$，其像为一个秩为 $1 \leq r \leq m/2 - 1$、傅里叶次数为偶数的复子丛 $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}$。

注意，根据（2.26）， $\mathcal{N}$ 是拉回丛 π^*TM 的子丛，因此可以讨论截面 $f \in C^\infty(SM,\ S^2\mathcal{N})$ 像（2.4）中那样分解为球谐函数之和。关于 $\mathcal{V}$ 是复的这一事实，等价于交换关系 $[\pi_{\mathcal{V}}, J] = 0$。

推论的证明*3.2.* 必要时，通过替换 M 为有限覆盖，我们可以假设传递群 $H \leqslant \mathrm{U}(m-1)$ 是连通的，参见 [CLMS21，引理

3.3]. 下文中，为了简化记号，我们仍将这个有限覆盖记为 M。

表示 $\rho\colon\ H\to \mathrm{U}(m-1)$ 诱导出一个表示 $\det\rho\colon\ H\to \mathrm{U}(1)$，其像要么是 $\mathrm{U}(1)$，要么是 $\{1\}$（由 H 的连通性可知）。遵循 Brin-Gromov [BG80]，的论证，我们首先证明 $(\det\rho)(H)=\mathrm{U}(1)$。

事实上，假设 $(\det\rho)(H)=\{1\}$。由于 $(\det\rho)(H)$ 是复线丛 $\Lambda^{m-1,0}\mathcal{N}$ 的标架流的传递群，$\Lambda^{m-1,0}\mathcal{N}$ 由非阿贝尔 Livˇsic 定理 2.6 可得 $\Lambda^{m-1,0}\mathcal{N}$ 是平凡的。现在，利用

$$\Lambda^{m-1,0}\mathcal{N}\to\Lambda^{m,0}\pi^*TM,\qquad \omega\mapsto\omega\wedge(v-iJv)$$

是一个同构，$\Lambda^{m-1,0}\mathcal{N}$ 的平凡性意味着

$$c_1(\Lambda^{m,0}\pi^*TM)=\pi^*c_1(\Lambda^{m,0}TM)=0\in H^2(SM,\mathbb{Z}).$$

然而，利用 Gysin 正合列 [BT82，命题 14。33]（以及 M 的维数为 $n\geq 4$ 这一事实）可以很容易地验证

$$\pi^*:H^2(M,\mathbb{Z})\to H^2(SM,\mathbb{Z})$$

是单射，因此 $c_1(\Lambda^{m,0}TM)=0=-c_1(K_M)$，其中 $K_M=\Lambda^{m,0}T^*M$ 是典范线丛。这不可能，因为 (M,g) 具有负截面曲率。因此，$(\det\rho)(H)=\mathrm{U}(1)$。

现在我们将证明 H 在 $\mathbb{C}^{m-1}$ 上的 ρ-表示是可约的。反设 ρ 不可约。根据舒尔引理，H 的中心 $C(H)$ 包含于数量矩阵构成的集合 $\mathrm{U}(1)$ 中。另一方面，$(\det\rho)(H)=\mathrm{U}(1)$ 这一事实表明 H 不是半单的，因此其中心至少是一维的。由此可得等式 $C(H)=\mathrm{U}(1)$，即 H 包含数量矩阵构成的集合。

现在固定任意一点 $x_0\in M$，将酉标架丛 $F_{\mathbb{C}}M$ 限制为 $S_{x_0}M$ 上的丛，并将 $S_{x_0}M\simeq S^{4p+3}$ 识别起来。根据定理 2.5，$F_{\mathbb{C}}M$ 的结构群约化为 H；因此，将其限制到 $SM\to M$ 的任意纤维上，可得 $F_{\mathbb{C}}S^{4p+3}$ 的结构群也约化为 H，即存在一个主H-丛 $P_H\subset F_{\mathbb{C}}S^{4p+3}$。我们断言，$F_{\mathbb{C}}S^{4p+3}$ 还可进一步约化为 $H_0:=H\cap\mathrm{SU}(2p+1)$。事实上，主 $\mathrm{SU}(2p+1)$-丛 $F_{\mathbb{C},\mathrm{SU}}S^{4p+3}$ 已经是将 $F_{\mathbb{C}}S^{4p+3}$ 约化到 $\mathrm{SU}(2p+1)$ 的约化；并且对于每个 $v\in S^{4p+3}$，纤维 $F_{\mathbb{C}}$ 与 $_{\mathrm{SU}}S^{4p+3}(v)$ 的交集 $\cap P_H(v)$ 非空：若 $u\in P_H(v)\subset F_{\mathbb{C}}S^{4p+3}(v)$，则存在 $z\in\mathrm{U}(1)$，使得 $uz\in F_{\mathbb{C},\mathrm{SU}}S^{4p+3}(v)$；又由于 $\mathrm{U}(1)\subset H$（也就是说，H 包含数量矩阵），我们也有 $uz\in P_H(v)$，因此 $uz\in F_{\mathbb{C},\mathrm{SU}}S^{4p+3}(v)\cap P_H(v)$。接下来不难验证，$F_{\mathbb{C},\mathrm{SU}}S^{4p+3}\cap P_H$ 是一个以 S^{4p+3} 为底空间、群为 H_0 的主丛。

由于 $m\neq 4$，根据假设 28，我们可以应用定理 (i) 3.1 中的情形，从而推出 $H_0\lneq\mathrm{SU}(m-1)$ 在 $\mathbb{C}^{m-1}$ 上的作用可约。然而，假设 H 在 $\mathbb{C}^{m-1}$ 上的作用不可约，$H_0=H\cap\mathrm{SU}(m-1)$ 在 $\mathbb{C}^{m-1}$ 上的作用也不可约，这就产生了矛盾。因此，H 在 $\mathbb{C}^{m-1}$上的作用可约。

于是，利用非阿贝尔 Livˇsic 定理 2.6，根据定理 2.6后的注记，可知存在一个光滑的（非零）流不变正交投影算子 $\pi_{\mathcal{V}'}\in C^\infty(SM,S^2\mathcal{N})$，其像是一个流不变的光滑复向量丛$\mathcal{V}'\subset\mathcal{N}$。根据 [CLMS21 引理 3.10]，，可以找到另一个（可能不同的）光滑非零流不变正交投影算子 $\pi_{\mathcal{V}}\in C^\infty(SM,S^2\mathcal{N})$，其偶傅里叶次数的像是一个流不变的光滑复向量丛 $\mathcal{V}\subset\mathcal{N}$，其复秩为$1\leq r\leq m/2-1$。□

3.2. 复正规扭曲共形 Killing 张量。若 $m \neq 4$，28 且酉标架流不是遍历的，那么由推论 3.2 可知存在一个偶傅里叶次数的流不变正交投影算子 $\pi_{\mathcal{V}} \in C^\infty(SM, S^2\mathcal{N})$，并且与 J对易。流不变条件等价于 $\mathbf{X}\pi_{\mathcal{V}} = 0$。接下来，关键的一步是证明这样的流不变截面具有有限傅里叶次数，也就是说，分解式（2.4）只包含有限项。以下内容将阐述这一点：

引理 3.3. 对于任意运算 $\mathfrak{o}: \mathrm{Vect} \to \mathrm{Vect}$，满足 $\mathbf{X}f = 0$ 的截面 $f \in C^\infty(SM, \mathfrak{o}(\mathcal{N}))$ 具有有限的傅里叶次数。

引理 3.3 的证明利用了 (M, g) 的截面曲率为负这一事实，并依赖于扭曲 Pestov 恒等式 (2.7)。引理 3.3 最初由 [GPSU16，定理 4 得出。1], 另见 [CLMS22，推论 4。2] 可参见其中简短且自足的证明。因此，我们可以将其分解为

$$\pi_{\mathcal{V}} = u_k + u_{k-2} + \ldots + u_2 + u_0, \tag{3.4}$$

其中 $k \geq 0$ 为偶函数，$u_i \in C^\infty(M, \Omega_i \otimes S^2TM)$，且 $u_k \neq 0$。此外，由于 J 的次数为 0（也就是说，它不依赖于速度变量 v），交换关系 $[\pi_{\mathcal{V}}, J] = 0$ 得出，对于所有 $i \in \{0, \ldots, k\}$，均有 $[u_i, J] = 0$。

我们现在设立

$$u := u_k \in C^\infty(M, \Omega_k \otimes S^2TM),$$

分解（3.4）中次数较高的球谐函数 $\pi_{\mathcal{V}}$。利用 $\mathbf{X}$ 的映射性质（2.5），方程 $\mathbf{X}\pi_{\mathcal{V}} = 0$ 便得到 $\mathbf{X}_+u = 0$。文献中称这样的截面 u为 扭曲共形 Killing 张量 。此外，由于 $\iota_v\pi_{\mathcal{V}} := \pi_{\mathcal{V}}v = 0$（因为 $\mathcal{V}$与 v和 Jv所张成的空间正交）并且 ι_v具有映射性质

$$\iota_v : \Omega_k \otimes S^2TM \to (\Omega_{k-1} \otimes TM) \oplus (\Omega_{k+1} \otimes TM),$$

我们得到 $\iota_v u \in C^\infty(M, \Omega_{k-1} \otimes TM)$ 的次数为 $k-1$。同样的论证还表明 $\iota_{Jv}u \in C^\infty(M, \Omega_{k-1} \otimes TM)$。

类似地利用 $\iota_v\iota_v\pi_{\mathcal{V}} = \langle \pi_{\mathcal{V}}v, \ v\rangle = 0$，经过精细的代数论证可证明 $\iota_v\iota_v u = \iota_{Jv}\iota_{Jv}u \in C^\infty(M, \ \Omega_{k-2})$ 的次数为 $k-2$，参见 [CLMS21，引理 4。2]以获取证明。此外，我们有 $\iota_v\iota_{Jv}u = \iota_{Jv}\iota_v u = 0$，利用 u 是对称的，且 J是反对称的，并且 $[u, J] = 0$。

满足以下条件的截面 $u \in C^\infty(M, \Omega_k \otimes S^2TM)$

$$\mathbf{X}_+u = 0, \quad \iota_v u \text{ has degree } k-1, \quad \iota_v\iota_v u \text{ has degree } k-2, \tag{3.5}$$

在 [CLMS21第 4 节中被称为1]正规扭曲共形 Killing 张量。（形容词正规指的是对 $\iota_v u$ 和 $\iota_v\iota_v u$ 的条件。）这里，截面 u 满足额外条件 $[u, J] = 0$。因此，值得引入以下术语：

定义3.4。 满足（ $u \in C^\infty M$、$\Omega_k \otimes S^2TM$）以及（3.5）的截面 $[u, J] = 0$称为复正规扭曲共形 Killing 张量。

根据推论 3.2以及上文的讨论，我们得到：

推论 3.5. 设 (M, g, J) 是一个闭的连通 K ¨ahler 流形，其复维数为偶数 m ，且具有非遍历酉标架流。那么，若 $m \neq 4, 28$，则存在一个非零的偶数次复正规扭曲共形 Killing 张量 u $k \geq 2$。

证明。 推论 3.5 可由推论 3.2 及上述讨论立即得出，唯有 $k \geq 2$ 这一点尚需证明。若 $k = 0$，则 $\pi_{\mathcal{V}} = u = u_0$的次数为 0，因此 $\pi_{\mathcal{V}}$可视为 $C^\infty(M, S^2TM)$ 中的一个截面。然而，我们还必须有 $\iota_v \pi_{\mathcal{V}} = 0$ 对所有 $v \in TM$ 均成立，由（3.5）可知 $\pi_{\mathcal{V}} = 0$，这与 $\pi_{\mathcal{V}}$非零矛盾。 □

接下来的各节旨在证明，在全纯夹挤条件 $\lambda > \lambda(m)$ 下，不存在这样的非零偶数阶复扭曲共形 Killing 张量 $k \geq 2$ 。

4. Bounding the terms in the twisted Pestov identity

在本节中，(M, g, J) 表示一个实维数为 $n = 2m$ 、具有 λ-夹挤全纯截面曲率的负曲率紧致 K¨ahler 流形，且 $u \in C^\infty(M, \Omega_k \otimes S^2TM)$ 是一个偶数阶复正规扭曲共形 Killing 张量 $k \geq 2$。我们的目标是对扭曲 Pestov 恒等式 (2.7) 右侧出现的各项给出上界，即第一项 $\langle R\nabla^{S^2TM}_{\mathbb{V}} u, \nabla^{S^2TM}_{\mathbb{V}} u\rangle_{L^2}$和第二项 $\langle \mathcal{F}^{S^2TM} u, \nabla^{S^2TM}_{\mathbb{V}} u\rangle_{L^2}$，并对左侧的项$\|\mathbf{X}_- u\|^2_{L^2}$ 给出下界。有时，考虑一般的向量丛 $E \to M$ 会比考虑特定的向量丛 S^2TM更为方便。

为简化记号，我们省略被积函数中的体积形式。读者应注意，球面 S_xM（对于 $x \in M$）上的积分总是相对于球面上的圆测度 $|dv|$计算，而M 上的积分则是相对于由度量g诱导的黎曼测度 $|dx|$计算。此外，我们经常处理涉及向量丛 E 的局部标准正交基的表达式，通常记作 $(\mathsf{e}_\alpha)_\alpha$；为简化记号，当我们对 α 求和时，表示逐点求和（基可能随点而变化）。我们还引入以下常数函数：

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{n,k} := k(n+k-2), && \beta_{n,k} := (k(n+k-2)(n-1))^{1/2},\\
&\gamma_{n,k} := \frac{(n+k-2)(n+2k-4)k}{(n+k-3)(n+2k-2)(k-1)}, && \delta_{n,k} := n+2k-4.
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

4.1. 右侧第一项的界。设 $E \to M$ 是一个配备正交联络 ∇^E的欧几里得向量丛。那么，有如下结论：

引理 **4.1.** 对所有的 $f \in C^\infty（M，\Omega_k \otimes E）$，都有：

$$
\langle R\nabla^E_{\mathbb{V}} f, \nabla^E_{\mathbb{V}} f\rangle_{L^2} \leq -\tfrac{3\lambda-2}{4}\alpha_{n,k}\|f\|^2_{L^2} - \tfrac{3\lambda}{4}\int_M \int_{S_xM} \sum_\alpha \langle v, J\nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha\rangle^2,
$$

其中我们在局部记 $f = \sum_\alpha f_\alpha \,\mathsf{e}_\alpha$，其中 $(\mathsf{e}_\alpha)_{\alpha\in I}$ a 是 E 的局部标准正交基。

证明。利用引理 2.3给出的截面曲率上界 (2.19)，我们有：

$$\begin{aligned}\langle R\nabla^E_{\mathbb{V}} f, \nabla^E_{\mathbb{V}} f\rangle_{L^2} &= \int_M \int_{S_xM} \sum_\alpha R(v, \nabla^E_{\mathbb{V}} f_\alpha, \nabla^E_{\mathbb{V}} f_\alpha, v)\\ &\le -\tfrac{3\lambda-2}{4}\|\nabla^E_{\mathbb{V}} f\|^2_{L^2} - \tfrac{3\lambda}{4}\int_M \int_{S_xM} \sum_\alpha \langle v, J\nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha\rangle^2\\ &= -\tfrac{3\lambda-2}{4}\langle \Delta^E_{\mathbb{V}} f, f\rangle_{L^2} - \tfrac{3\lambda}{4}\int_M \int_{S_xM} \sum_\alpha \langle v, J\nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha\rangle^2\\ &= -\tfrac{3\lambda-2}{4}k(n+k-2)\|f\|^2_{L^2} - \tfrac{3\lambda}{4}\int_M \int_{S_xM} \sum_\alpha \langle v, J\nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha\rangle^2.\end{aligned}$$

由于 $\alpha_{n,\ k} := k(n+k-2)$，故证明完成。 □

4.2. 估计右侧的第二项。 现在假设$E = \Lambda^p TM$或 $E = S^p TM$对于某个 $p \ge 1$。利用黎曼曲率张量 $R = R_0 + \frac{1+\lambda}{2}G$ 在（2.21）中的分解，可以将佩斯托夫恒等式（2.7）右侧的第二项写为：

$$\langle \mathcal{F}^E f, \nabla^E_{\mathbb{V}} f\rangle_{L^2} = \langle \mathcal{F}^E_0 f, \nabla^E_{\mathbb{V}} f\rangle_{L^2} + \tfrac{1+\lambda}{2}\langle \mathcal{G}^E f, \nabla^E_{\mathbb{V}} f\rangle_{L^2}. \tag{4.2}$$

更准确地说， $\mathcal{F}^E_0$和 $\mathcal{G}^E$ 分别由 R_0 和 G通过将后者延拓到 E 而定义，如 §§2.2.1 并使用公式（2.8）所示。现在我们分别研究（4.2）中的两项。先从以下结果开始：

引理 4.2. 若 $E = \Lambda^p TM$或 $E = S^p TM$，则对于所有 $f \in C^\infty(M, \Omega_k \otimes E)$，

$$|\langle \mathcal{F}^E_0 f, \nabla^E_{\mathbb{V}} f\rangle_{L^2}| \le \tfrac{4p}{3}(1-\lambda)\beta_{n,k}\|f\|^2_{L^2}.$$

引理 4.2 将与 $E = TM$和 $E = S^2TM$一同应用。

证明。证明与 [CLMS21，引理 4。5] 相同，只需插入界（2.23）。 □

现在我们研究（4.2）中的第二项。

引理 4.3。设 $f \in C^\infty(M, \Omega_k \otimes E)$，且 $\iota_v f, \iota_{Jv} f$的次数为 $k-1$。那么，下列结论成立：

(i) 若 $E = TM$，则有：

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{G}^{TM} f, \nabla^{TM}_{\mathbb{V}} f\rangle_{L^2} = \tfrac{1}{4}\delta_{n,k}\left(\|\iota_v f\|^2_{L^2} + \|\iota_{Jv} f\|^2_{L^2}\right) + \tfrac{1}{2}\|f\|^2_{L^2}\\ + \tfrac{1}{2}\int_M \int_{S_xM} \sum_\alpha \langle v, J\nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha\rangle\langle f, J\,\mathbf{e}_\alpha\rangle.\end{aligned}$$

(ii) 若 $E = S^2TM$，且 $[J, f] = 0$，则有：

$$\langle \mathcal{G}^{S^2TM} f, \nabla^{S^2TM}_{\mathbb{V}} f\rangle_{L^2} = \delta_{n,k}\|\iota_v f\|^2_{L^2} + \|f\|^2_{L^2}.$$

证明。我们先证明 $E = TM$ 的情形。注意，这个等式是关于 SM 的积分等式。实际上，我们将证明对于每个

$x \in M$，然后只需对 $x \in M$ 积分即可得到结果。回想一下， G 定义见（2.15）。利用表达式（2.8）和（2.16），我们有：

$$4\sum_\alpha G(v,\nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha, f, \mathbf{e}_\alpha) = \sum_\alpha \big(\langle (v\wedge \nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha) f, \mathbf{e}_\alpha\rangle + \langle (Jv \wedge J\nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha) f, \mathbf{e}_\alpha\rangle + 2\langle v, J\nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha\rangle\langle f, J\,\mathbf{e}_\alpha\rangle\big). \tag{4.3}$$

第一项右侧在 S_xM 上的积分可立即利用 [CLMS21，引理 46]（在 Λ^p 情形下，其中 $p=1$）[3] 计算，因为 $\iota_v f$ 的次数为 $k-1$，于是得到：

$$\begin{aligned}\int_{S_xM}\sum_\alpha \langle (v\wedge\nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha) f, \mathbf{e}_\alpha\rangle &= \int_{S_xM}\left(\sum_\alpha \langle v, f\rangle\langle \nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha, \mathbf{e}_\alpha\rangle - \langle v, \mathbf{e}_\alpha\rangle\langle \nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha, f\rangle\right)\\ &= (n+2k-4)\|\iota_v f\|^2_{L^2(S_xM)} + \|f\|^2_{L^2(S_xM)},\end{aligned}$$

这里我们采用如下记号

$$\|f\|^2_{L^2(S_xM)} = \int_{S_xM} g_x(f(v), f(v)), \qquad \|\iota_v f\|^2_{L^2(S_xM)} = \int_{S_xM} |(\iota_v f)(v)|^2.$$

我们断言，第二项在 S_xM 上的积分等于 $(n+2k-4)\|\iota_{Jv} f\|^2_{L^2(S_xM)} + \|f\|^2_{L^2(S_xM)}$。事实上，首先注意到，对每个 α，都有

$$\langle (Jv\wedge J\nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha) f, \mathbf{e}_\alpha\rangle = \langle (v\wedge\nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha) Jf, J\,\mathbf{e}_\alpha\rangle.$$

现在，由于 $f_\alpha = \langle f, \mathbf{e}_\alpha\rangle = \langle Jf, J\mathbf{e}_\alpha\rangle$，将基底 $(\mathbf{e}_\alpha)$ 替换为 $(J\mathbf{e}_\alpha)$，可知 (4.3) 中的第二项与第一项相同，只需将 f 替换为 Jf。利用$\iota_v Jf = -\iota_{Jv} f$，结论便由前面的计算得出。将前述等式代入 (4.3)，即可得到所需结果（在 M 上积分之后），因为$\delta_{n,\,k} = n+2k-4$。

现在我们来处理 $E = S^2TM$这一情形。和之前一样，利用表达式（2.8）、（2.13）和（2.16），可得：

$$4\sum_\alpha G_{S^2TM}(v,\nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha, f, \mathbf{e}_\alpha) = \sum_\alpha \big(\langle [(v\wedge\nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha), f], \mathbf{e}_\alpha\rangle + \langle [(Jv\wedge J\nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha), f], \mathbf{e}_\alpha\rangle - 2\langle v, J\nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha\rangle.\langle [J,f], \mathbf{e}_\alpha\rangle\big), \tag{4.4}$$

其中（$\mathbf{e}_\alpha$）$_\alpha$是 S^2TM的局部标准正交基。第一项在 S_xM上的积分可利用[CLMS21引理 46]（对称二阶张量的情形）计算，因为 $\iota_v f$ 的次数为 $k-1$，从而得到：

$$\int_{S_xM}\sum_\alpha \langle [(v\wedge\nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha), f], \mathbf{e}_\alpha\rangle = 2(n+2k-4)\|\iota_v f\|^2_{L^2(S_xM)} + 2\|f\|^2_{L^2(S_xM)}. \tag{4.5}$$

（4.4）中的第三项为零，因为根据假设， $[J,f]=0$。

现在我们断言，(4.4)中第二项在 S_xM 上的积分也等于 $2(n+2k-4)\|\iota_v f\|^2_{L^2(S_xM)} + 2\|f\|^2_{L^2(S_xM)}$，从而完成证明。事实上，注意到对于任意 X、$Y \in TM$，都有 $JX\wedge JY = -J\circ(X\wedge Y)\circ J$，因此再利用 $[J,f]=0$，对每个 α，我们得到

$$[Jv\wedge J\nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha, f] = -J\circ[v\wedge\nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha, f]\circ J.$$

[3]提醒读者注意，在 [CLMS21]的记号中， G 表示实双曲空间的曲率张量，即 $G = g \owedge g$。因此，$\sum_\alpha \int_{S_xM}\langle v, f\rangle\langle \nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha, \mathbf{e}_\alpha\rangle - \langle v, \mathbf{e}_\alpha\rangle\langle \nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha, f\rangle$ 恰好对应于 [CLMS21中（4.14）之后的方程所计算的项]，其中 $p=1$。

因此，我们可以改写为

$$\langle [Jv\wedge J\nabla_{\mathbb{V}}f_\alpha, f], \mathbf{e}_\alpha\rangle = \langle -J\circ[v\wedge\nabla_{\mathbb{V}}f_\alpha, f]\circ J, \mathbf{e}_\alpha\rangle = \langle [v\wedge\nabla_{\mathbb{V}}f_\alpha, f], -J\circ\mathbf{e}_\alpha\circ J\rangle.$$

注意到，$(-J\circ\mathbf{e}_\alpha\circ J)_\alpha$也是 S^2TM的一个标准正交基，并且由于 $f = -J\circ f\circ J = -\sum_\alpha f_\alpha J\circ\mathbf{e}_\alpha\circ J$，我们得到

$$f_\alpha = \langle f, \mathbf{e}_\alpha\rangle = \langle f, -J\circ\mathbf{e}_\alpha\circ J\rangle.$$

因此，由（4.5）即可得证。 □

4.3. 对左侧进行下界估计。 回到 $E = S^2TM$ 的情形，我们现在对扭曲 Pestov 恒等式（2.7）左侧出现的项 $\|\mathbf{X}_-u\|^2_{L^2}$ 进行下界估计：

引理4.4。 设 $u\in C^\infty(M,\ \Omega_k\otimes S^2TM)$ 是定义 3.4意义下的复正规扭曲共形 Killing 张量。则对于 $k>0$ 有以下不等式成立：

$$\tfrac{(k-1)(n+2k-2)}{k}\|\mathbf{X}_-u\|^2_{L^2}\geq\big(\tfrac{3\lambda-2}{2}\alpha_{n,k-1}-\tfrac{8(1-\lambda)}{3}\beta_{n,k-1}-\tfrac{29(1+\lambda)}{48}-\tfrac{1+\lambda}{4}\delta_{n,k-1}\big)\|\iota_v u\|^2_{L^2}.$$

引理 4.4 的证明需要额外的一步，将推迟到本段末尾。

引理 4.5。设 $f\in C^\infty(M,\ \Omega_k\otimes TM)$，其中 $\iota_v f$、$\iota_{Jv}f$的次数为 $k-1$，并假设 $\lambda\in[\frac{2}{3},1]$。则有：

$$\begin{aligned}\tfrac{k(n+2k)}{k+1}\|\mathbf{X}_+f\|^2_{L^2}\geq&\left(\tfrac{3\lambda-2}{4}\alpha_{n,k}-\tfrac{4(1-\lambda)}{3}\beta_{n,k}-\tfrac{29(1+\lambda)}{96}\right)\|f\|^2_{L^2}\\&-\tfrac{1+\lambda}{8}\delta_{n,k}(\|\iota_v f\|^2_{L^2}+\|\iota_{Jv}f\|^2_{L^2}).\end{aligned}$$

证明。 利用扭曲 Pestov 恒等式（2.7），取 $E=TM$，并应用引理 4.1、 4.2 和4.3所给出的界，我们得到：

$$\begin{aligned}\tfrac{k(n+2k)}{k+1}\|\mathbf{X}_+f\|^2_{L^2}&\geq-\langle R\nabla^{TM}_{\mathbb{V}}f,\nabla^{TM}_{\mathbb{V}}f\rangle_{L^2}-\langle\mathcal{F}^{TM}f,\nabla^{TM}_{\mathbb{V}}f\rangle_{L^2}\\&\geq\tfrac{3\lambda-2}{4}\alpha_{n,k}\|f\|^2_{L^2}+\tfrac{3\lambda}{4}\int_M\int_{S_xM}\sum_\alpha\langle v,J\nabla_{\mathbb{V}}f_\alpha\rangle^2-\tfrac{4(1-\lambda)}{3}\beta_{n,k}\|f\|^2_{L^2}\\&\quad-\tfrac{1+\lambda}{2}\Big(\frac{1}{4}\delta_{n,k}(\|\iota_v f\|^2_{L^2}+\|\iota_{Jv}f\|^2_{L^2})+\tfrac{1}{2}\|f\|^2_{L^2}\\&\qquad+\tfrac{1}{2}\int_M\int_{S_xM}\sum_\alpha|\langle v,J\nabla_{\mathbb{V}}f_\alpha\rangle||\langle f,J\,\mathbf{e}_\alpha\rangle|\Big).\end{aligned}$$

现在我们使用估计式

$$\tfrac{1}{2}\int_M\int_{S_xM}\sum_\alpha\langle v,J\nabla_{\mathbb{V}}f_\alpha\rangle\langle f,J\,\mathbf{e}_\alpha\rangle\leq\tfrac{1}{4\varepsilon}\|f\|^2_{L^2}+\tfrac{\varepsilon}{4}\int_M\int_{S_xM}\sum_\alpha\langle v,J\nabla_{\mathbb{V}}f_\alpha\rangle^2,$$

这对所有 $\varepsilon>0$ 都成立，从而可推出

$$\begin{aligned}\tfrac{k(n+2k)}{k+1}\|\mathbf{X}_+f\|^2_{L^2}\geq&\tfrac{3\lambda-2}{4}\alpha_{n,k}\|f\|^2_{L^2}+\tfrac{3\lambda}{4}\int_M\int_{S_xM}\sum_\alpha\langle v,J\nabla_{\mathbb{V}}f_\alpha\rangle^2-\tfrac{4(1-\lambda)}{3}\beta_{n,k}\|f\|^2_{L^2}\\&-\tfrac{1+\lambda}{2}\Big(\tfrac{1}{4}\delta_{n,k}(\|\iota_v f\|^2_{L^2}+\|\iota_{Jv}f\|^2_{L^2})+\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4\varepsilon}\right)\|f\|^2_{L^2}\\&+\tfrac{\varepsilon}{4}\int_M\int_{S_xM}\sum_\alpha\langle v,J\nabla_{\mathbb{V}}f_\alpha\rangle^2\Big).\end{aligned}$$

取特定值 $\varepsilon := 6\lambda/(1+\lambda)$，可见项 $\int_M \sum_\alpha \int_{S_xM} \langle v, J\nabla_{\mathbb{V}} f_\alpha\rangle^2$ 前的系数相互抵消。此外，由于根据假设$\lambda \in [2/3, 1]$，我们有下界 $\varepsilon = \frac{6\lambda}{1+\lambda} \geq \frac{12}{5}$，最终便可得出结果。□

备注 4.6。 在引理 4.5证明的最后一段中，也可以选择继续在估计中使用精确值 $\varepsilon = \frac{6\lambda}{1+\lambda}$。不过，这样做对最终结果的好处不大，因此为简便起见，我们决定采用平凡下界 $\varepsilon \geq \frac{12}{5}$。

现在我们可以证明引理 4.4。

引理 *4.4*的证明。 利用等式 $\mathbf{X}(\iota_v u) = \iota_v \mathbf{X} u = \iota_v \mathbf{X}_- u$，并注意到$\iota_{Jv}\mathbf{X}_- u = J(\iota_v \mathbf{X}_- u)$，我们得到：

$$\begin{aligned}\|\mathbf{X}_- u\|_{L^2}^2 &\geq \|\iota_v \mathbf{X}_- u\|_{L^2}^2 + \|\iota_{Jv}\mathbf{X}_- u\|_{L^2}^2 = 2\|\iota_v \mathbf{X}_- u\|_{L^2}^2 \\ &= 2\|\mathbf{X}(\iota_v u)\|_{L^2}^2 = 2\|\mathbf{X}_+(\iota_v u)\|_{L^2}^2 + 2\|\mathbf{X}_-(\iota_v u)\|_{L^2}^2 \\ &\geq 2\|\mathbf{X}_+(\iota_v u)\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

其中第二行用到了 $\iota_v u$ 和 $\iota_{Jv} u$ 的次数为 $k-1$，以及映射性质（2.5）。根据假设， u 是一个复正规扭曲共形 Killing 张量，因此这意味着 $\iota_v \iota_{Jv} u = \iota_{Jv}\iota_v u = 0$ 并且 $\iota_v \iota_v u = \iota_{Jv}\iota_{Jv} u$ 的次数为 $k-2$。因此，我们可以将引理 4.5 应用于 $f := \iota_v u$ （其次数为 $k-1$）。利用 $\iota_{Jv} f = 0$这一事实，以及

$$\|\iota_v f\|_{L^2}^2 = \|\iota_v \iota_v u\|_{L^2}^2 \leq \|\iota_v u\|_{L^2}^2,$$

由此得到所述结果。 □

5. Pinching estimates

5.1. 计算。我们从以下内容开始：

引理 **5.1.** 若 $u \in C^\infty(M, \Omega_k \otimes S^2 TM)$ 是复正规扭曲共形 Killing 张量，则下列不等式成立：

$$B_{n,k}(\lambda)\|u\|_{L^2}^2 + C_{n,k}(\lambda)\|\iota_v u\|_{L^2}^2 \leq 0, \tag{5.1}$$

其中

$$B_{n,k}(\lambda) := \tfrac{3\lambda-2}{4}\alpha_{n,k} - \tfrac{8}{3}(1-\lambda)\beta_{n,k} - \tfrac{1+\lambda}{2}, \tag{5.2}$$

and

$$C_{n,k}(\lambda) := \gamma_{n,k}\left(\tfrac{3\lambda-2}{2}\alpha_{n,k-1} - \tfrac{8(1-\lambda)}{3}\beta_{n,k-1} - \tfrac{29(1+\lambda)}{48} - \tfrac{1+\lambda}{4}\delta_{n,k-1}\right) - \tfrac{1+\lambda}{2}\delta_{n,k}. \tag{5.3}$$

证明。 直接计算，将 2.7 中的扭曲 Pestov 恒等式代入 $\|\mathbf{X}_- u\|^2$ （引理 4.4），并对右端各项使用下界（引理 4.1 和 4.2 应用于 $f = u$，以及引理 4.3 （ii））即可。□

回顾一下， $n = 2m$ 是 M的实维数。定理1.1 证明的最后一步是找出一个夹挤条件 $\lambda > \lambda(m)$，使得 (5.1) 的左端非负，从而迫使复正规扭曲共形 Killing 张量 u 为零，这与推论 3.2矛盾。更确切地说，有如下结论：

引理 5.2. 若不等式

$$B_{n,k}(\lambda) > 0 \quad and \quad B_{n,k}(\lambda) + \frac{1}{2}C_{n,k}(\lambda) > 0 \tag{5.4}$$

保持不变，则 (5.1) 意味着 $u \equiv 0$。

证明。 如果 $C_{n,\ k}(\lambda) \geq 0$，则由（5.4）的第一部分可立即得到。如果 $C_{n,\ k}(\lambda) < 0$，利用 $\|u\|^2_{L^2} \geq \|\iota_v u\|^2_{L^2} + \|\iota_{Jv} u\|^2_{L^2} = 2\|\iota_v u\|^2_{L^2}$，由（5.1）可得:

$$(B_{n,k}(\lambda) + \frac{1}{2}C_{n,k}(\lambda))\|u\|^2_{L^2} \leq 0,$$

因此 $u \equiv 0$ 由（5.4）的第二部分可得。 □

此外，下面的结论成立:

引理 5.3。有: $B_{n,\ k} > 0 \iff \lambda > \lambda_1(n,k)$，其中

$$\lambda_1(n,k) := \frac{6\alpha_{n,k} + 32\beta_{n,k} + 6}{9\alpha_{n,k} + 32\beta_{n,k} - 6},$$

以及 $B_{n,\ k} + \frac{1}{2}C_{n,\ k} > 0 \iff \lambda > \lambda_2(n,k)$，其中

$$\lambda_2(n,k) := \frac{6\alpha_{n,k} + 32\beta_{n,k} + 6 + \gamma_{n,k}\left(6\alpha_{n,k-1} + 16\beta_{n,k-1} + \frac{29}{8} + \frac{3}{2}\delta_{n,k-1}\right) + 3\delta_{n,k}}{9\alpha_{n,k} + 32\beta_{n,k} - 6 + \gamma_{n,k}\left(9\alpha_{n,k-1} + 16\beta_{n,k-1} - \frac{29}{8} - \frac{3}{2}\delta_{n,k-1}\right) - 3\delta_{n,k}}.$$

证明。由（5.2）和（5.3）立即可得，因为 $B_{n,\ k}$ 和 $C_{n,\ k}$的表达式都是关于 λ 的仿射函数。□

在证明定理 1.1之前，我们需要研究数列$k \mapsto \lambda_1(n,\ k)$ 和 $k \mapsto \lambda_2(n,\ k)$ 的变化。

引理 5.4。对于 $n \geq 4$，数列 $k \mapsto \lambda_1(n,k)$ 和 $k \mapsto \lambda_2(n,k)$ 关于 $k \geq 2$ 递减。

证明。容易验证，对于 $k \geq 2$ 和 $n \geq 4$，这两个数列均为正。利用 $\alpha_{n,\ k} = {}^{\beta^2_n}_{,}$ $\frac{k}{n-1}$，可将其写为

$$\frac{1}{\lambda_1(n,k)} - 1 = \frac{3\alpha_{n,k} - 12}{6\alpha_{n,k} + 32\beta_{n,k} + 6} = \frac{3 - \frac{12}{\alpha_{n,k}}}{6 + \frac{32(n-1)}{\beta_{n,k}} + \frac{6}{\alpha_{n,k}}}.$$

由于 $\alpha_{n,\ k}$ 和 $\beta_{n,\ k}$ 关于 k 均为正且递增，右侧项的分子关于 k 递增，而分母为正且关于 k 递减。因此 $k \mapsto \lambda_1(n,k)$ 递减。

现在考虑表达式 $\lambda_2(n,k)$。同样容易验证，对于 $k \geq 2$ 和 $n \geq 4$，$\lambda_2(n,k) > 0$，并且

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_2(n,k)} - 1 &= \frac{3\alpha_{n,k} - 12 + \gamma_{n,k}\left(3\alpha_{n,k-1} - \frac{29}{4} - 3\delta_{n,k-1}\right) - 6\delta_{n,k}}{6\alpha_{n,k} + 32\beta_{n,k} + 6 + \gamma_{n,k}\left(6\alpha_{n,k-1} + 16\beta_{n,k-1} + \frac{29}{8} + \frac{3}{2}\delta_{n,k-1}\right) + 3\delta_{n,k}} \\
&= \frac{3 - \frac{12}{\alpha_{n,k}} + \frac{\gamma_{n,k}}{\alpha_{n,k}}\left(3\alpha_{n,k-1} - \frac{29}{4} - 3\delta_{n,k-1}\right) - \frac{6\delta_{n,k}}{\alpha_{n,k}}}{6 + \frac{32\beta_{n,k}}{\alpha_{n,k}} + \frac{6}{\alpha_{n,k}} + \frac{\gamma_{n,k}}{\alpha_{n,k}}\left(6\alpha_{n,k-1} + 16\beta_{n,k-1} + \frac{29}{8} + \frac{3}{2}\delta_{n,k-1}\right) + \frac{3\delta_{n,k}}{\alpha_{n,k}}}.
\end{aligned}$$

我们将最后这个表达式记为 ${}^{E_n}_{,F_n}{}^{\frac{k}{k}}_{,}$。我们断言，$E_{n,k}$ 关于 k 单调递增，而 $F_{n,k}$ 关于 k单调递减。

利用这一事实：$\frac{\gamma_{n,k}}{\alpha_{n,k}} = \frac{n+2k-4}{n+2k-2}\frac{\alpha_{n,k-1}}{\alpha_{n,k}}$，我们得到

$$\begin{aligned} E_{n,k} &= 3 + 3\frac{\gamma_{n,k}}{\alpha_{n,k}}\alpha_{n,k-1} - \frac{12+6\delta_{n,k}}{\alpha_{n,k}} - \frac{29}{4}\frac{\gamma_{n,k}}{\alpha_{n,k}} - 3\frac{\gamma_{n,k}}{\alpha_{n,k}}\delta_{n,k-1} \\ &= 6\frac{n+2k-3}{n+2k-2} - 6\frac{n+2k-2}{\alpha_{n,k}} - \frac{29}{4}\frac{\gamma_{n,k}}{\alpha_{n,k}} - 3\frac{\gamma_{n,k}}{\alpha_{n,k}}\delta_{n,k-1} \\ &= 6 - \frac{6}{n+2k-2} - \frac{6}{k} - \frac{6}{n+k-2} - 3\frac{\gamma_{n,k}}{\alpha_{n,k}}\left((n+2k-4) + \frac{5}{12}\right). \end{aligned}$$

为了表达 $F_{n,k}$，我们指出

$$\frac{\gamma_{n,k}}{\alpha_{n,k}}\beta_{n,k-1} = \frac{n+2k-4}{n+2k-2}\frac{\beta_{n,k-1}}{\alpha_{n,k-1}} = \frac{s_{n,k-1}}{n+2k-2},$$

其中我们用 $s_{n,k} := (n+2k-2)\frac{\beta_{n,k}}{\alpha_{n,k}}$，与$E_{n,k}$ 类似的直接计算表明

$$\begin{aligned} F_{n,k} &= 6 + 3\frac{n+2k-2}{\alpha_{n,k}} + 6\frac{n+2k-4}{n+2k-2} + \frac{3}{2}\frac{\gamma_{n,k}}{\alpha_{n,k}}\left((n+2k-4) + \frac{5}{12}\right) \\ &\quad + 32\frac{s_{n,k}}{n+2k-2} + 16\frac{s_{n,k-1}}{n+2k-2}. \end{aligned}$$

因此，为了证明我们的断言，只需指出：

$$\begin{aligned} (n+2k-4)\frac{\gamma_{n,k}}{\alpha_{n,k}} &= \frac{(n+2k-4)^2}{(k-1)(n+k-3)(n+2k-2)} \\ &= \frac{n-4}{n-2}\cdot\frac{1}{k-1} + \frac{n}{n-2}\cdot\frac{1}{n+k-3} + \frac{4}{(k-1)(n+k-3)(n+2k-2)} \end{aligned}$$

在 k 中递减（因此 $\frac{\gamma_{n,k}}{\alpha_{n,k}}$ 在 k 中也递减）；

$$s_{n,k} = (n+2k-2)\frac{\sqrt{(n-1)k(n+k-2)}}{k(n+k-2)} = \sqrt{(n-1)\left(4 + \frac{(n-2)^2}{k(n+k-2)}\right)}$$

在 k 中递减，并且

$$\frac{n+2k-2}{\alpha_{n,k}} + 2\frac{n+2k-4}{n+2k-2} = 2 + \frac{n+2k-2}{k(n+k-2)} - \frac{4}{n+2k-2} = 2 + \frac{(n-2)^2}{k(n+k-2)(n+2k-2)}$$

关于 k 是递减的。

□

5.2. 遍历性的证明。 现在我们可以完成定理 1.1 中遍历性陈述的证明。

定理 *1.1* 中遍历性的证明。 我们需要证明，在满足定理 $\lambda > \lambda(m)$ 的夹逼条件下，1.1，酉标架流是遍历的。若标架流不是遍历的，且 $m \neq 4$,28，根据推论 3.2 可知，存在一个流不变正交投影算子 $\pi_{\mathcal{V}} \in C^\infty(SM, S^2\mathcal{N})$，它具有偶傅里叶次数，并投影到一个秩为 $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}$ 的复向量丛 $1 \leq r \leq m/2-1$。

根据推论 3.5 和引理 5.1，可知存在一个非零的复正规扭曲共形 Killing 张量 $u \in C^\infty(M, \Omega_k \otimes S^2T^*M)$，其次数为偶数$k \geq 2$，并满足不等式（5.1）。我们区分两种情况。

情形 1。 若 $k \geq 4$，引理 5.3 和 5.4 表明，若全纯夹挤 λ满足 $\lambda > \max(\lambda_1(n, 4)\ \lambda_2(n, 4))$，则有 $B_{n,k} > 0$ 且 $B_{n,k} + \frac{1}{2}C_{n,k} > 0$由引理 5.2 可知 $u \equiv 0$。

情形 2。 若 $k = 2$，令 $\pi_{\mathcal{V}}$ 为推论 3.2给出的投影算子，其复秩 r 满足 $1 \leq r \leq m/2-1$。根据 [CLMS21，引理 4，2], 可得 $\pi_{\mathcal{V}}$ 必为如下形式

$$\pi_{\mathcal{V}} = \frac{2r}{n}\mathbb{I}_{TM} + u,$$

其中 $u \in C^\infty(M, \Omega_2 \otimes S^2T^*M)$。特别地，由于 $\mathbb{I}^{TM}$是平行的，这意味着 $\mathbf{X}$ $u = 0$，即 $\mathbf{X}_\pm u = 0$。此外，简单的代数计算（见 [CLMS21，第 38]页）可得

$$\|\iota_v u\|^2_{L^2} = \tfrac{2r}{n(n-2r)}\|u\|^2_{L^2}, \tag{5.5}$$

并且由于 $2r \le m-2 = n/2-2$，我们得到

$$\|\iota_v u\|^2_{L^2} \le \tfrac{n-2}{n(n+2)}\|u\|^2_{L^2}. \tag{5.6}$$

对2.7应用扭曲 Pestov 恒等式 u，对于 $k=2$，利用$\mathbf{X}_\pm u = 0$ （引理4.4 的界因此毫无用处），以及引理4.1、4.2和4.3给出的上界，我们得到:

$$\left(\tfrac{3\lambda-2}{2}n - \tfrac{8(1-\lambda)}{3}(2n(n-1))^{1/2} - \tfrac{1+\lambda}{2}\right)\|u\|^2_{L^2} - \tfrac{1+\lambda}{2}n\|\iota_v u\|^2_{L^2} \le 0.$$

将（5.5）代入前一个不等式，我们便得到:

$$\left(\tfrac{3\lambda-2}{2}n - \tfrac{8}{3}(1-\lambda)(2n(n-1))^{1/2} - \tfrac{1+\lambda}{2}\tfrac{n-2}{n+2}\right)\|u\|^2_{L^2} \le 0.$$

This 表明，当 $k=2$ 时，只要全纯夹挤 λ 满足，便有 $u \equiv 0$ s

$$\lambda \ge \lambda_3(n) := \frac{6n + 16(2n(n-1))^{1/2} + \frac{6n}{n+2}}{9n + 16(2n(n-1))^{1/2} - \frac{6n}{n+2}}.$$

总结 $k \ge 4$ 和 $k = 2$ 这两种情形，我们得出：只要全纯夹挤 λ 满足相应条件，酉标架流就是遍历的

$$\lambda > \max(\lambda_1(2m,4), \lambda_2(2m,4), \lambda_3(2m)) =: \lambda_0(m).$$

使用形式计算工具，可以很容易地验证，对于$m \ge 6$， $\lambda_0(m) = \lambda_2(2m)$。不过，出于实际考虑，我们将给出一个稍欠精确、但容易得多的计算界。

具体而言，利用显然的不等式 $((n+2)(n-1))^{1/2} < n + 1/2$，我们可以写成

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_1(n,4)} - 1 &= \frac{3\alpha_{n,4} - 12}{6\alpha_{n,4} + 32\beta_{n,4} + 6} = \frac{12(n+2) - 12}{24(n+2) + 32(4(n+2)(n-1))^{1/2} + 6} \\ &> \frac{12n+12}{88n+86} = \frac{6n+6}{44n+43}.\end{aligned}$$

同理，由于 $16\sqrt{2} < 68/3$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_3(n)} - 1 &= \frac{3n - \frac{12n}{n+2}}{6n + 16(2n(n-1))^{1/2} + \frac{6n}{n+2}} = \frac{3 - \frac{12}{n+2}}{6 + 16(\frac{2(n-1)}{n})^{1/2} + \frac{6}{n+2}} \\ &> \frac{3 - \frac{12}{n+2}}{6 + \frac{68}{3} + \frac{6}{n+2}} = \frac{9n-18}{86n+190}.\end{aligned}$$

最后，利用引理 5.4 证明中的计算以及显然的不等式 $64/\sqrt{3} < 37$ 和

$$\frac{4}{3} > \gamma_{n,4} = \frac{4(n+2)(n+4)}{3(n+1)(n+6)} > \frac{4n}{3(n+1)}, \qquad \forall n \ge 3,$$

我们得到

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\lambda_2(n,4)}-1 &= \frac{3\alpha_{n,4}-12+\gamma_{n,4}\left(3\alpha_{n,3}-\frac{29}{4}-3\delta_{n,3}\right)-6\delta_{n,4}}{6\alpha_{n,4}+32\beta_{n,4}+6+\gamma_{n,4}\left(6\alpha_{n,3}+16\beta_{n,3}+\frac{29}{8}+\frac{3}{2}\delta_{n,3}\right)+3\delta_{n,4}}\\ &> \frac{12(n+2)-12+\frac{4n}{3(n+1)}\left(9(n+1)-\frac{29}{4}-3(n+2)\right)-6(n+4)}{24(n+2)+64(n+\frac{1}{2})+6+\frac{4}{3}\left(18(n+1)+16\sqrt{3}n+\frac{29}{8}+\frac{3}{2}(n+2)\right)+3(n+4)}\\ &> \frac{14n-\frac{77}{3}}{(117+\frac{64}{\sqrt{3}})n+126+\frac{29}{6}} > \frac{14n-26}{154n+131}.\end{aligned}$$

不难验证

$$\frac{6n+6}{44n+43} > \frac{9n-18}{86n+190} > \frac{14n-26}{154n+131}, \qquad \forall n \geq 10,$$

这意味着 $\lambda_0{}^{1}{}_{(m)} - 1 > \frac{14n-26}{154n+131}$，因此最终

$$\lambda_0(m) < \frac{154n+131}{168n+105} = \frac{308m+131}{336m+105} =: \lambda(m),$$

从而证明了定理 1.1中的遍历性结论。 □

我们以一条关于剩余情形 $m = 4$、28 的注记结束本段：

注 5.5. 在情形 $m = 28$ 下，可以验证[4] E_6 固定了 $S^3\mathbb{C}^{27}$中的一个元素。正如我们在推论 3.2 的证明中所见，传递群不可能是半单群，因为它总是包含数量矩阵：因此，定理 3.1 并未排除 $\mathsf{E}_6 \times \mathsf{U}(1) \lneq \mathsf{U}(27)$ 的子群作为复维数 $m = 28$下的传递群出现。在这种情形下，传递群会固定 $\mathsf{End}(S^3\mathbb{C}^{27})$ 中的一个正交投影算子。尽管如此，下面涉及扭曲 Pestov 恒等式的论证无法推广到 $\mathsf{End}(S^3\mathbb{C}^{27})$，因为该向量空间涉及次数过高的张量幂。换言之，该论证会导出某个 $\lambda(28) > 1$ 的夹挤条件 $\lambda > \lambda(28)$，因此结论将是空洞的。情形 $m = 4$ 也有类似的注记。这应与[CLMS21，定理 3.8] 作比较；在那里我们只处理满足 $\mathfrak{o} \in \{\mathrm{id}\ S^2, \Lambda^2, \Lambda^3\}$ 的 $\mathfrak{o}(\mathcal{N})$ 中的元素。[CLMS21，定理 1.2] 中较差的夹挤估计源于外幂 $\Lambda^3\mathcal{N}$。

5.3. 混合性的证明。现在只需证明混合性。实际上，我们将证明以下命题：

命题 5.6。负曲率 K ¨ahler 流形 (M, g) 上的酉标架流是遍历的，当且仅当它具有混合性。

证明。 混合性蕴含遍历性，因此只需证明在此情形下遍历性蕴含混合性。根据 [Lef21，引理 3 的证明，7], 只需证明方程

$$X_{F_{\mathbb{C}}M} u = i\lambda u, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ u \in L^2(F_{\mathbb{C}}M), \tag{5.7}$$

意味着 $u \equiv 0$。令 $u \in L^2(F_{\mathbb{C}}M)$ 是方程 (5.7) 的一个解。由于 $F_{\mathbb{C}}M \to SM$ 是一个主 $\mathsf{U}(m-1)$-丛，定义在 SM上，空间 $L^2(F_{\mathbb{C}}M$可分解为

$$L^2(F_{\mathbb{C}}M) = \bigoplus_{k=0}^{+\infty} L^2(SM, \Theta_k), \tag{5.8}$$

[4]例如，使用 LiE 程序。

其中 Θ_k 是定义在 SM 上的向量丛，其在 $v \in SM$ 上的纤维是 U$(m-1)$ 的卡西米尔算子作用于纤维上的函数 $(F_{\mathbb{C}}M)_v$ 所得到的特征空间，对应于特征值 $\mu_k \geq 0$（且当 $k \neq j$ 时，$\mu_k \neq \mu_j$）。由于 $X_{F_{\mathbb{C}}M}$ 保持分解 (5.8)（因为标架流 $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 与 U$(m-1)$ 的右作用可交换），我们推得，对每个 $k \geq 0$，某个满足 (5.7) 的函数 $u = \sum_k u_k \in \oplus_{k=0}^{+\infty} L^2(SM, \Theta_k)$ 的分量 $u_k \in L^2(SM, \Theta_k)$ 必须满足

$$X_{F_{\mathbb{C}}M} u_k = i\lambda u_k.$$

由于 $\Theta_0 = \mathbb{C}$ 在 SM 上是平凡的，方程 $X_{F_{\mathbb{C}}M} u_0 = i\lambda u_0$ 可写为 $Xu_0 = i\lambda u_0$，其中 $u_0 \in L^2(SM)$，而 X 是测地向量场。但由于 (M, g) 具有负曲率，测地流是混合的，因此我们推得 $u_0 = 0$。

对于 $k \neq 0$, [，Lef21 的命题 2.6] 基于微局部分析表明，$u_k \in L^2(SM, \Theta_k)$ 实际上是光滑的，也就是说，$u_k \in C^\infty(SM, \Theta_k)$。此外，$X_{F_{\mathbb{C}}M}|u_k|^2 = 0$，因此利用标架流 $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 的遍历性假设，我们得到 $|u_k|$ 在 $F_{\mathbb{C}}M$ 上为常数。若 $u_k \neq 0$，则经适当缩放后，我们得到 u_k： $F_{\mathbb{C}}M \to$ U(1) 是一个定义良好的光滑映射。为简化记号，从现在起我们省略下标 k，并将 u 简写为 u_k，将 μ 简写为 μ_k。

将复线丛 $\Lambda^{m-1,0}\mathcal{N} \to SM$ 的单位圆丛记为 P。现在注意到，存在一个自然的满射丛映射 $\psi : F_{\mathbb{C}}M \to P$，定义如下

$$\psi : (v, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m) \mapsto (v, (\mathbf{e}_2 - iJ\,\mathbf{e}_2) \wedge \ldots \wedge (\mathbf{e}_m - iJ\,\mathbf{e}_m)).$$

沿着测地流线，对 $\Lambda^{m-1,0}\mathcal{N}$ 的截面进行自然的酉平行移动，因此存在一个流 $(\Phi_t^P)_{t\in\mathbb{R}}$ 作用在 P 上，其生成元为 X_P，并且如§2.3所述，它扩展了测地流 $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$。也就是说，记 $\pi : P \to SM$ 为投影映射，则对所有 $\pi \circ \Phi_t^P = \varphi_t \circ \pi$，都有 $t \in \mathbb{R}$。此外，ψ 将 $F_{\mathbb{C}}M$ 上的标架流与 P 上的流相互交织，即

$$\Phi_t^P \circ \psi = \psi \circ \Phi_t. \tag{5.9}$$

我们断言以下结论成立：

断言 5.7。存在一个光滑函数 $w \in C^\infty(P)$，使得 $u = \psi^* w$，且 $X_P w = i\lambda w$。

注意，一旦我们知道 $u = \psi^* w$ 存在某个函数 w，关系 $X_P w = i\lambda w$ 便可由（5.9）和 $X_{F_{\mathbb{C}}M} u = i\lambda u$ 立即得出。

证明。我们证明，对于某个 $w \in C^\infty$（P），$u = \psi^* w$。固定任意一点 $v_0 \in SM$，并且 $w_0 \in$（$F_{\mathbb{C}}M$）$_{v_0}$。于是有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} (F_{\mathbb{C}}M)_{v_0} & \xrightarrow{\psi} & P_{v_0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{U}(m-1) & \xrightarrow{\det} & \mathrm{U}(1) \end{array} \tag{5.10}$$

其中向下的箭头均为等距变换。因此，将 u 限制在纤维（$F_{\mathbb{C}}M$）$_{v_0}$ 上，并将（$F_{\mathbb{C}}M$）$_{v_0}$ $\simeq$ 等距地识别为U（$m-1$），便得到映射 F：$= u$（v_0），使得

$$F : F_{\mathbb{C}}M \simeq \mathrm{U}(m-1) \to \mathrm{U}(1), \tag{5.11}$$

且 $\Delta_{\mathrm{U}(m-1)} F = \mu F$ 与 $\mu \neq 0$，因为 u 在 $k \neq 0$ 时取值于 Θ_k。换言之，F 是 U$(m-1)$ 上卡西米尔算子的特征函数，对应特征值 $\mu \neq 0$，且模长为常数。

现在回想一下，U($m-1$) 是由特殊酉群 SU($m-1$) 对圆群 U(1) 作分裂群扩张得到的，也就是说，det : U($m-1$) $\to$ U(1) 是一个纤维丛，其纤维与 SU($m-1$) 等距。我们声称，这样的函数 F 必然在丛 U($m-1$) 的 SU($m-1$)-纤维上为常数，也就是说，对于某个 $f \in C^\infty$(U(1))，$F = \det^* f$；对于某个整数 $j \geq 0$，$\mu = j^2$，且 f 是 $\Delta_{\mathrm{U}(1)}$ 的特征函数，对应特征值 j^2。

事实上，由于 U($m-1$) $= \mathrm{SU}(m-1) \times_{\mathbb{Z}_m}$ U(1)，存在一个 $\mathbb{Z}_m$丛映射[5] p :SU($m-1$) $\times$U(1) $\mapsto$ U($m-1$)，且该映射局部上是黎曼等距映射。因此，我们得到 $\Delta_{\mathrm{SU}(m-1)\times\mathrm{U}(1)} p^*F = \mu\ p^*F$。由于 SU($m-1$) $\times$ U(1) 是一个黎曼乘积，其特征函数可表示为各因子上特征函数乘积之和，特征值则是各因子上特征值之和。因此，我们可以写成

$$p^*F(w,z) = \sum_{j=1}^{N} a_j(w) b_j(z) = \sum_{j=1}^{N} a_j(w) z^{k_j},$$

对于某个有限数 $N > 0$，其中 $(w,z) \in$ SU($m-1$)$\times$U(1)，$k_j \in \mathbb{Z}$ 且 $k_{j_1} \neq k_{j_2}$对于 $j_1 \neq j_2$, $a_j \neq 0$ 是 $\Delta_{\mathrm{SU}(m-1)}$ 的一个特征函数，对应特征值 λ_j和 $\lambda_j + k_j^2 = \mu > 0$。然而，我们也知道 p^*F的模恒为 1。固定点 $w = \mathbf{1}_{\mathbb{C}^{m-1}} \in$ SU($m-1$) 并让 $z \in$ U(1) 变化，容易得到 N必定等于 1，也就是说，$p^*F(w,z) = a(w)z^k$，其中 $k \in \mathbb{Z}$为某个值。因此$a \in C^\infty$(SU($m-1$)) 满足 $|a| = 1$ 和 $\Delta_{\mathrm{SU}(m-1)} a = \lambda a$，其中 $\lambda \geq 0$ 为某个值（且$k^2 + \lambda = \mu$）。

我们断言 $\lambda = 0$，也就是说，a 是常数，因此 F 沿 SU($m-1$)-纤维为常数。事实上，若 $\lambda \neq 0$，利用

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_{\mathrm{SU}(m-1)} |a|^2 \\ &= (\Delta_{\mathrm{SU}(m-1)} a)\overline{a} + a(\Delta_{\mathrm{SU}(m-1)} \overline{a}) - 2\nabla a \cdot \nabla \overline{a} \\ &= 2\lambda - 2|\nabla a|^2, \end{aligned}$$

我们得到 $|\nabla a|$ 是一个非零常数。由于 SU($m-1$) 是单连通的，映射 a 可提升到 U(1) 的万有覆盖，因此存在映射 θ : SU($m-1$) $\to \mathbb{R}$，使得 $a = e^{i\theta}$。于是，在 θ 的一个临界点处，我们得到 $\nabla a = 0$，这显然荒谬。

因此，$\lambda = 0$这表明 F沿丛映射 det : U($m-1$) 的 SU($m-1$)-纤维为常数，$\to$ U(1)。反过来，由于 (5.10) 可交换，我们得到 u 在映射 $\psi : F_{\mathbb{C}} M \to P$ 的原像上为常数，因此 $u = \psi^* w$ 对于某个光滑映射 $w \in C^\infty(P)$。□

因此，我们刚刚证明，如果存在一个非零解满足条件（5.7），那么也存在一个非零解满足

$$X_P w = i\lambda w, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, w \in C^\infty(P). \tag{5.12}$$

因此，接下来只需证明（5.12）没有非零解；实际上，我们将对 $w \in L^2(P)$ 证明这一点。

[5] SU($m-1$) $\times$ U(1) 上的 $\mathbb{Z}_m$-作用由 $(w,z) \mapsto (w\omega^{-k}, \omega^k z)$ 给出，其中 $(w,z) \in$SU($m-1$) $\times$ U(1), $k \in \{0, ..., m-2\}$ 且 $\omega := e^{2i\pi/(m-1)}$。

假设 $w \in L^2(P)$ 是（5.12）的一个解。如上所述，利用 P 是一个主 U(1) 丛这一事实，我们可以分解

$$L^2(P) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} L^2(SM, L_k), \tag{5.13}$$

其中， L_k 是由满足条件 $Vf = ikf$ 的函数 $f \in L^2(P)$ 给出的复线丛，其中 V 是 P 的纤维上 U(1) 作用的无穷小生成元。注意，对于 $k \in \mathbb{Z}$ ，有 $L_k = L^{\otimes k}$ ，其中 $L := L_1$ 且 $L_1 \simeq \Lambda^{m-1,0}\mathcal{N}$。现在，利用分解 (5.13)，方程 $Xw = i\lambda w$ 可写为：对所有 $k \in \mathbb{Z}$，均有 $Xw_k = i\lambda w_k$ ，其中$w_k \in L^2(SM, L_k)$。根据 [Lef21，命题 2.6], ，我们还知道 w_k 是光滑的，即 $w_k \in C^\infty(SM, L_k)$。此外， $X|w_k|^2 = 0$，因此由流的遍历性（φ_t）可知， $|w_k|$ 是常数$_{t\in\mathbb{R}}$。若 $k = 0$，则 $L_0 = \mathbb{C}$ 在 SM 上是平凡的，因此测地流（φ_t）的混合性$_{t\in\mathbb{R}}$ 意味着 $w_0 \equiv 0$。若 $k \neq 0$，且 $w_k \neq 0$，则可得到一个光滑且处处不为零的截面 $w_k \in C^\infty(SM, L_k)$，因此 L_k 是平凡的。但这又意味着 $L_1 = \Lambda^{m-1,0}\mathcal{N}$ 是平凡的，这与事实矛盾（见推论 3.2 的证明）。因此，(5.12) 的任意解都是平凡的，故 (5.7) 的任意解也都是平凡的。命题 5.6 得证。□

References

[Ami86] Arif Amirov。《传输方程反问题解的存在性与唯一性定理》。Sibirsk. Mat. Zh., 27(6):3–20, 1986.[Ano67] Dmitri Viktorovitch Anosov。《负曲率闭黎曼流形上的测地流》。Trudy Mat. Inst. Steklov., 90:209, 1967.[Ber60a] Marcel Berger。《黎曼压缩与全纯压缩》。Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3), 14:151–159, 1960.[Ber60b] Marcel Berger。《若干充分压缩的黎曼流形》。Bull. Soc. Math. France, 88:57–71, 1960.[BG63] Richard L. Bishop 和 Samuel I. Goldberg。《正曲率凯勒流形的拓扑》。Tohoku Math. J. (2), 15:359–364, 1963.[BG80] Michael Brin 和 Mikhael Gromov。《标架流的遍历性》。Invent. Math., 60(1):1–7, 1980.[BK78] Jean-Pierre Bourguignon 和 Hermann Karcher。《曲率算子：压缩估计与几何实例》。Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup. (4), 11(1):71–92, 1978.[BK84] Michael Brin 和 Hermann Karcher。《具有压缩负曲率流形上的标架流》。Compositio Math., 52(3):275–297, 1984.[BP74] Michael I. Brin 和 Yakov B. Pesin。《部分双曲动力系统》。Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 38:170–212, 1974.[BP03] Keith Burns 和 Mark Pollicott。《稳定遍历性与标架流》。Geom. Dedicata, 98:189–210, 2003.[Bri75a] Michael Brin。《某类动力系统的拓扑传递性，以及负曲率流形上的标架流》。Funkcional. Anal. i Prilo˘zen., 9(1):9–19, 1975.[Bri75b] Michael Brin。《C-系统群扩张的拓扑》。Mat. Zametki, 18(3):453–465, 1975.[Bri82] Michael Brin。《标架流的遍历理论》。载于《遍历理论与动力系统 II》（马里兰州大学公园市，1979/1980），Progr. Math. 第21卷，第163–183页。Birkh¨auser，马萨诸塞州波士顿，1982.[BT82] Raoul Bott 和 Loring W. Tu。《代数拓扑中的微分形式》，数学研究生教材第82卷。Springer-Verlag，纽约—柏林，1982.[˘CC06] Martin ˘Cadek 和 Michael Crabb。《球面上的 G-结构》。Proc. London Math. Soc. (3), 93(3):791–816, 2006.[CL21] Mihajlo Ceki´c 和 Thibault Lefeuvre。《整体性反问题》。arXiv:2105.06376，2021年5月。

[CLMS21] Mihajlo Ceki´c、Thibault Lefeuvre、Andrei Moroianu 和 Uwe Semmelmann。《偶维流形上标架流的遍历性》。arXiv:2111.14811，2021年11月。[CLMS22] Mihajlo Ceki´c、Thibault Lefeuvre、Andrei Moroianu 和 Uwe Semmelmann。《迈向标架流遍历性的 Brin 猜想：新进展与展望》。Math. Res. Rep., 3:21–34, 2022.[GPSU16] Colin Guillarmou、Gabriel P. Paternain、Mikko Salo 和 Gunther Uhlmann。《负曲率下联络的X射线变换》。Comm. Math. Phys., 343(1):83–127, 2016.[HM79] Roger E. Howe 和 Calvin C. Moore。《酉表示的渐近性质》。J. Functional Analysis, 32(1):72–96, 1979.[Hop36] Eberhard Hopf。《福克斯群与遍历理论》。Trans. Amer. Math. Soc., 39(2):299–314, 1936.[HP06] Boris Hasselblatt 和 Yakov Pesin。《部分双曲动力系统》。载于《动力系统手册》第1B卷，第1–55页。Elsevier B. V.，阿姆斯特丹，2006.[JS07] Dmitry Jakobson 和 Alexander Strohmaier。《拉普拉斯型与狄拉克型特征函数及标架流的高能极限》。Comm. Math. Phys., 270(3):813–833, 2007.[JSZ08] Dmitry Jakobson、Alexander Strohmaier 和 Steve Zelditch。《凯勒流形上几何算子的谱》。J. Mod. Dyn., 2(4):701–718, 2008.[KN96] Shoshichi Kobayashi 和 Katsumi Nomizu。《微分几何基础》第I卷。Wiley Classics Library。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1996。1963年原版重印，Wiley-Interscience 出版物。[Lef21] Thibault Lefeuvre。《通过微局部分析对 Anosov 流作等距扩张》。arXiv:2112.05979，2021年12月。[Leo71] Peter Leonard。《球面上的 G-结构》。Trans. Amer. Math. Soc., 157:311–327, 1971.[Muk75] Ravil Galatdinovich Mukhometov。《平面上的地震学反运动学问题》。Akad. Nauk. SSSR, 6:243–252, 1975.[Muk81] Ravil Galatdinovich Mukhometov。《黎曼度量重建问题》。Sibirsk. Mat. Zh., 22(3):119–135, 237, 1981.[Pat99] Gabriel P. Paternain。《测地流》，数学进展第180卷。Birkh¨auser Boston, Inc.，马萨诸塞州波士顿，1999.[PS88] Leonid N. Pestov 和 Vladimir A. Sharafutdinov。《负曲率流形上张量场的积分几何》。Sibirsk. Mat. Zh., 29(3):114–130, 221, 1988.[PSU15] Gabriel P. Paternain、Mikko Salo 和 Gunther Uhlmann。《高维中的不变分布、Beurling 变换与张量层析成像》。Math. Ann., 363(1-2):305–362, 2015.[Sha94] Vladimir A. Sharafutdinov。《张量场的积分几何》。反问题与病态问题丛书。VSP，乌得勒支，1994。

Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstrasse 190, CH-8057 Zürich, Switzerland
电子邮箱：mihajlo.cekic@math.uzh.ch

Université de Paris and Sorbonne Université, CNRS, IMJ-PRG, F-75006 Paris, France.
电子邮箱：tlefeuvre@imj-prg.fr

Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire de mathématiques d'Orsay, 91405,Orsay, France电子邮箱：andrei.moroianu@math.cnrs.fr

Institut für Geometrie und Topologie, Fachbereich Mathematik, Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 57, 70569 Stuttgart, Germany电子邮箱：uwe.semmelmann@mathematik.uni-stuttgart.de