arXiv:2301.05943v2 [math.KT] 2 May 2023

局部紧性作为有限生成的 K(1)-局部对偶

OLIVER BRAUNLING

Abstract. 设 R 是数域整数环的任意局部化。我们证明，有限生成 R-模的 K-理论与局部紧 R-模的 K-理论，在 K(1)-局部同伦范畴中互为 Anderson 对偶。对于 p-进域和有限域，结论也成立。

1. Introduction

设 p 是一个奇素数。我们证明，下列两个正合范畴的 K-理论互为 K(1)-局部 Anderson 对偶：

$$\text{finitely generated } R\text{-modules} \quad \leftrightarrow \quad \text{locally compact } R\text{-modules}$$

在特殊情形下，Spec R是一个平坦于整数集 $\mathbf{Z}[\frac{1}{p}]$上的一维算术概形，并且只差有限维实向量空间。经过适当解释后，预期这种对偶性在任意维数下都成立。在进一步讨论之前，先给出我们所证明结果的精确表述。我们用 $\mathcal{O}_S$ 表示 S-整数环。

定理 A（对偶性）。设 p 是一个奇素数， F 是一个数域， S 是 F 的有限处的一个（可能无限的）集合，满足 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_S$。那么

$$I_{\mathbf{Z}_p} L_{K(1)} K(\mathcal{O}_S) \cong L_{K(1)} K(\mathsf{LCA}^{\circ}_{\mathcal{O}_S}).$$

如果 S 只包含有限多个赋值，这就是一种互反对偶。

与我们此前关于这一主题的论文一样，$\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 表示由 $\mathcal{O}_S$-模构成、配备局部紧拓扑的正合范畴。这些模不必有限生成，但态射以及 $\mathcal{O}_S$ 的标量作用都必须是连续的。上标 $(-)^\circ$ 表示将所有拓扑上为实向量空间的此类模取商。该对偶性将有限态射下的拉回与推前互换。

在 K(1)-局部世界中，所有常见的对偶性概念，尤其是 p-完备的 Anderson 对偶、Brown–Comenetz 对偶或 Spanier–Whitehead 对偶，都仅相差平移和扭曲。因此，有限生成 $\leftrightarrow$ 局部紧性这一对偶现象适用于所有这些对偶。我们选择聚焦于 Anderson 对偶，因为它能带来最简单的表述。

这种对偶性也可以表述为一个配对

$$\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S} \times \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_S, fg} \longrightarrow \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S} \tag{1.1}$$

正合范畴之间的配对，它诱导出一个右 $K(\mathcal{O}_S)$-模结构

$$K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}) \otimes K(\mathcal{O}_S) \longrightarrow K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}). \tag{1.2}$$

一旦转到 K(1)-局部同伦范畴，就可以构造一个迹映射

$$L_{K(1)} K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}) \longrightarrow I_{\mathbf{Z}_p} \mathbb{S}_{\widehat{p}} \tag{1.3}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 19F05, 55P42, 22B05。*Key words and phrases.* K-局部紧模理论、Anderson 对偶、Poitou–Tate对偶、带紧支撑的 K-理论。

将式 1.2 与式 1.3 复合，即可得到诱导对偶性的配对。

我们的整体思路，尤其是研究式 1.1 中配对的想法，受 Clausen 的工作 [Cla13, Cla17], 启发，并证实了关于某种类似“具有紧支撑的 K-理论”的 $K(1)$-局部对偶性的大多数（迄今尚未证明的）预期（至少在维数 1 且远离 p 的情况下）。我不知道 Clausen 在 [Cla17] 中的框架是否会严格呈现出相同的对偶性。他没有考虑 $\mathrm{LCA}^{\circ}_{\mathcal{O}_S}$，而是考虑从 F-向量空间到 $\mathrm{LCA}_{\mathbf{Z}}$ 中有界复形的 ∞-范畴 Z-线性函子，而且没有对实向量空间取商。最终得到的配对本质上相同，但我认为对偶可能会稍微大了一点。

Blumberg–Mandell [BM20] 在 S 仅为 p 上方的赋值这一特殊情形下计算了 $I_{\mathbf{Z}_p} L_{K(1)} K(\mathcal{O}_S)$，但他们在论文中将对偶表示为某个称为 Fib($\kappa$) 的抽象纤维，完全没有谈及局部紧性。本文的主要新意在于以局部紧性的方式明确给出对偶模型，并允许比 Blumberg–Mandell 更一般得多的 S 取值，其中包括技术上微妙的无限 S 情形。要为整个数域 $I_{\mathbf{Z}_p} L_{K(1)} K(F)$ 的 K-理论建立对偶性（即 Clausen 工作中的情形），允许无限集 S 至关重要。

读者很容易注意到，Clausen 和 Blumberg–Mandell 的这些工作一直是我们的主要灵感来源。我们的视角不再着眼于类域论，而是转向 $\mathcal{O}_S$ 上模范畴中有限生成性与局部紧性之间的对偶性，这一视角似乎是全新的。

更一般地，$\mathcal{O}_S \mapsto K(\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S})$ 预计可以推广到任意（qcqs）输入概形，并应当能够延伸为某种类似于“带紧支撑的 K-理论”的理论，参见 [Cla13]。对于某个 S-整数 $\mathcal{O}_S$ 环上的平坦、有限型且分离的正则概形（仍假设 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_S$），预计定理 A 的某个版本成立。 [Bra23] 中的计算表明，对于高维概形，$\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 的定义需要导出局部紧性，或更复杂的拓扑概念，例如凝聚方法或 n-Tate 局部紧性，而不是单纯的局部紧性。不过，这是后续文章的主题。定理 A 的局部有限域对应版本如下。

定理 B. 设 p 为奇素数，且 F 是 $\mathbf{Q}_\ell$ 的有限扩张，或对于任意素数 $\ell \neq p$，是 $\mathbf{F}_\ell$ 的有限扩张，或者是实数域 R 的有限扩张。那么

$$I_{\mathbf{Z}_p} L_{K(1)} K(F) \cong L_{K(1)} K(\mathrm{LCA}_F).$$

这是一种互反对偶。

关于 $F/\mathbf{Q}_\ell$ 的陈述确实归功于 Blumberg–Mandell，尽管他们的表述方式有所不同。他们在 [BM20, 定理 1.4] 中证明，$K(F)$ 是 Anderson 自对偶的，即

$$I_{\mathbf{Z}_p} L_{K(1)} K(F) \cong L_{K(1)} K(F),$$

但对于有限剩余域的局部域，有限生成与局部紧性并无区别：每个有限维 F 向量空间都是典范的局部紧空间，而任何局部紧 F 模都必为有限维。因此，他们的自对偶陈述确实是有限生成—局部紧性二元性的一个实例。请注意，对于有限域等情形，情况大不相同：带有 t-阿代尔拓扑的 $\mathbf{F}_q((t))$ 是一个局部紧的 $\mathbf{F}_q$ 模，却远非有限生成。尽管如此，对偶现象依然成立。定理 B 中关于有限域的部分也在 Blumberg–Mandell–Yuan [BMY21] 中有所讨论，但没有给出局部紧性解释。顺便一提，他们注意到 Anderson 对偶中有一个平移 Σ。正如我们在定理 B 的证明中所示，这个平移对应于 $\mathrm{LCA}_{\mathbf{F}_q}$ 层面的一个平移，在进行 $K(1)$-局部化之前就已显现。

定理 A 在无限 S 的情形下缺乏对称性，这是因为存在一个普遍问题：Anderson 对偶仅对同伦群为有限生成整数集p-模的谱具有自反性。我认为，可以在局部紧凝聚谱的框架下表述这一结果，并

采用真正的庞特里亚金对偶。这样，定理 A 应当可以扩展到无限 S 的情形，并且在两个方向上都成立。

我们按如下步骤进行：

(1) 在 §4 中，我们用普通稳定同伦范畴中的一个纤维序列来计算 K(LCA$_{\mathcal{O}_S}$)。这将 [AB19] 推广到任意的 S。对于 S 仅为 p之上的赋值的情形，这个纤维序列的 K(1)-局部版本对应于 [BM20] 中的抽象纤维 Fib(κ)。然而，由于我们用局部紧性来刻画该纤维，这与 Blumberg–Mandell 所用的纤维序列截然不同。(2) 在 §5 中，我们为 ad`eles 构造 Thomason 下降谱序列的受限直积版本。对于有限的 S，这并无妨碍，因为受限直积既是直积也是余积。然而，对于无限的 S，我们面临无限极限和余极限与 K(1)-局部化之间的相互作用。为此，我们采用了来自 [CM21] 和 [ELSØ22] 的技术。(3) S-整数环 $\mathcal{O}_S$ 只取决于 S 中的有限位，不会因从 S 中添加或移除无穷位而改变。LCA$_{\mathcal{O}_S}$ 也同样如此。在 §6 中，我们引入一个新的范畴 LC$_{\mathcal{O}_S}$，它也能感知 S 中的无穷位；当 S 包含所有无穷位时，该范畴与 LCA$_{\mathcal{O}_S}$ 一致。(4) 在 §7 中，我们为对偶性建立迹映射。Blumberg–Mandell 通过一个相容的截面系来构造该映射，该截面系对应于一个为 $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ 定义的包含 $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \subseteq \pi_0$。这里我们更倾向于采用 Clausen 在 [Cla17] 中提出的思路：为 $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ 定义迹映射后，只需预先复合遗忘函子 LCA$_{\mathcal{O}_S}$ $\to$LCA$^{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}$，忘掉 $\mathcal{O}_S$-模结构而改用 $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-模结构，就能得到一般 $\mathcal{O}_S$ 的迹映射。这正是对偶的局部紧一侧上的推前 f_*。我们还特意证明，这最终得到的结果与 Blumberg–Mandell 方法所得相同（命题 7.6）。(5) 在 §8 中，我们建立对偶性。这主要受到 Blumberg–Mandell 的启发，但现在还要处理无穷 S带来的额外复杂性。 [BM20] 构造了 Artin–Verdier 对偶性的一个 étale 超层版本，而我们采用 Poitou–Tate 序列。众所周知，对于有限的 S，两者等价。然而，对于无限的 S，我们不知道如何用 étale（超）层来表述，因为这需要一种粘合，其中“开浸入”是任意局部化，不一定是有限型。(6) 最终，证明可以概括如下：使用 [AB19] 和 [BM20] 中出现的纤维（它们分别来自两个先验上无关的计算），将两种方法推广到任意地方集合后，证明相应的纤维彼此匹配。

在此过程中，我们会遇到一些潜在陷阱，它们屡屡带来小麻烦。首先，若 A 是前有限阿贝尔群，那么只有当 A 拓扑有限生成时，$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 才会给出正确的庞特里亚金对偶。这会给 Brown–Comenetz 对偶带来问题（这也是改用凝聚谱的一个充分理由）。其次，域的 K-理论的 K(1)-局部化会得到伽罗瓦上同调，而非 Tate 上同调。这会在无穷位处造成问题。第三，无限极限和余极限需要在普通谱与K(1)-局部谱之间移动。最终证明这样做性质良好，但这一点并非显而易见。

本文不涉及特征 $p > 0$，我们总是假设 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_S$。Clausen 的 [Cla17]包含了大量关于如何将这一点纳入考量的信息。我们避开 $p = 2$, 不仅因为它有着古怪的 Moore 谱。我们还需要控制实处 Tate 上同调中的一些 2-扭现象，但目前尚不清楚该如何实现。

2. Philosophy

为了说明为什么 LCA$_{\mathcal{O}_S}$ 可能是对偶的一个良好候选，我们来解释一个简单的思想实验。我们只考虑域的 K-理论。设 F'/F 是一个域扩张。

我们更倾向于使用几何语言，因此将其记为

$$f\colon \operatorname{Spec} F' \longrightarrow \operatorname{Spec} F.$$

由于一切都是仿射的，拟凝聚层的转移 f^*, f_* 对应于正合函子 $\mathsf{Mod}_{F'} \leftrightarrows \mathsf{Mod}_F$，并且

$$M \mapsto M \otimes_F F' \qquad \text{and} \qquad M \mapsto M\mid_F,$$

后者将 F'-向量空间结构遗忘，转而采用 F-向量空间结构。为了在 K-理论上诱导非平凡映射，我们需要施加一种“有限性概念”。否则，所有 F-向量空间的 K-理论 $K(\mathsf{Mod}_F)$ 都会因 Eilenberg 诡论而为零。文明人于是选择要求有限生成（或其近亲，例如凝聚模或完美复形）。对于 F-向量空间，这就意味着 $\dim_F(M) < \infty$。这个范畴具有非零的 K-理论，但现在我们需要确保这种有限性概念与我们的转移相容。由于

$$M \mapsto M \otimes_F F'$$

会将任意有限生成的 F-模映为有限生成的 F'-模，因此对于任意域扩张（不一定是有限扩张），我们都得到平坦拉回。虽然这里我们只讨论域，但这也是我们为何能对概形的 K-理论拥有平坦拉回，而无须要求 f 为有限型的原因。对于推前，情况则有所不同：只有当 F'/F是有限扩张时， $M\mid_F$ 才会是有限维的 F-向量空间。这就是为何我们只能对适当映射（在仿射情形下则是有限映射）得到推前的玩具模型。

这一切当然都是显而易见的。不过，让我们以这些观察为指引，建立一种对偶理论。牢记定理 A，LCA_F 应当允许具有完全相反行为的转移。对于 LCA_F而言，“有限性概念”是指考虑配备局部紧拓扑的 F-向量空间。就其本身而言，这并不构成任何限制，因为任何 F-向量空间都可以赋予离散拓扑，从而成为局部紧的。然而，在 F-向量空间上存在许多种拓扑，其作用与施加有限维性极为相似。例如，任取一个素数 p。那么，在 LCA_F中拓扑上 p-挠的 F-向量空间类（即对于所有 x，$\lim_{n\to\infty} p^n x = 0$ 成立）最终证明，与作为局部紧阿贝尔群[1], 同构于有限维 $\mathbb{Q}_p$-向量空间的那些空间类一致。因此，从某种意义上说，要求局部紧性并非与有限生成完全无关。

然而，这正是对偶性中的关键点：在转移方面，局部紧性与有限生成的作用恰恰相反：如果 M 带有局部紧拓扑， $M\otimes_F F' \simeq M^{[F':F]}$ 就可以赋予乘积拓扑（不用担心，还有一种更函子化、更优雅的拓扑定义方式）。如果 $[F'\colon F] < \infty$，那么它也会是局部紧的。只有当 F'/F是有限的时，这种做法才行得通。另一方面，对于推前，给 $M\mid_F$ 赋予局部紧拓扑很容易：我们只需保留 M 已有的拓扑即可。即使 F'/F是无限域扩张，这种做法也始终可行。因此，对于哪种转移要求 F'/F 是有限的，其情形正好相反。同样，存在一个推前 $\mathsf{LCA}_{\mathbf{Q}} \to \mathsf{LCA}_{\mathbf{Z}}$，但反方向上没有拉回。

定理 C. 若 F'/F是一个有限扩张， S是 F的一个（可能无限的）有限处集合，且S' 是 F' 中位于 S 之上的各处，则该对偶性

$$I_{\mathbf{Z}_p} L_{K(1)} K(\mathcal{O}_S) \cong L_{K(1)} K(\mathsf{LCA}^{\circ}_{\mathcal{O}_S})$$

定理 A 的对偶性会交换转移的角色：左侧的推前 f_* 对应右侧的拉回 f^*，反之亦然。定理 B 也同样如此。

我们注意到，上述讨论与 $K(1)$-局部现象无关。赋值$X \mapsto K(\mathsf{LCA}_X)$ 在普通同伦范畴中就已定义良好。

[1]局部紧阿贝尔

3. Setting the stage

3.1. 约定。所有环均含幺且交换。环同态必须保持单位元。戴德金整环要求 Krull 维数为 ≤ 1，也就是说，我们也将域视为戴德金整环。“几乎所有”意为“除有限多个之外的所有”。对于 X 概形或环，$H^i(X,\mathcal{F})$ 表示上同调群，且总是指 ´étale 上同调，通常会将其改写为伽罗瓦上同调的形式。我们用 $\widehat{H}^i$ 表示 Tate 上同调，但它很少发挥作用。我们用 $\mathbb{Z}/p^k(j)$ 表示第 j 个 Tate 扭曲。这与其他人可能记作 $\mu_{p^k}^{\otimes j}$ 的对象相同。每当我们写 $\mathbb{Z}/p^k(\frac{j}{2})$ 且 j 为奇数时，指的都是零模。约定阿基米德局部域 F_v 中的整数环 $\mathcal{O}_v$ 就是 F_v 本身。类域论的记号通常遵循 Milne 著作 [Mil06] 中的用法。关于考虑一个环 R 上“所有” R-模时涉及的集合论问题，请参见 §B。

我们用 Sp 表示通常的同伦范畴，即谱的 ∞-范畴；用 K 表示 $K(1)$-局部同伦范畴。若要强调（余）极限取自哪个范畴，我们有时会为其添加上标。提到谱时，我们通常指的是心中所想的 [Sch] 对称谱，不过也可以采用任何等价模型。我们用 $I_{\mathbb{Z}_p}$, $I_{\mathbb{Q}_p/\text{整数集}_p}$ 分别表示 p- 完备的 Anderson 对偶和 Brown–Comenetz 对偶。关于 $K(1)$-局部对偶，我们在 §C 中概述了关键定义和性质。我们所说的 K-理论始终指非连通 K-理论，见 [Sch06, BGT13]。取其 1-连通覆盖后，这与 Quillen K-理论一致。

我们用 $\mathrm{D}^?_\infty(\mathrm{C})$ 表示 C 的导出 ∞-范畴，用 $\mathrm{D}^?(\mathrm{C}) := H_o\mathrm{D}^?_\infty(\mathrm{C})$ 表示其同伦范畴，即作为三角范畴的经典导出范畴。

3.2. 设置。假设 F 是一个数域。我们将 $\mathcal{O}_F$ 记作 F 的整数环，将 S_∞ 记作其无穷位集合。若 v 是任意一个处，则用 F_v 表示 F 在 v 处的度量完备化。若 v 是一个有限处，则用 $\mathcal{O}_v$ 表示 F_v 中的整数环，或者等价地，表示 $\mathcal{O}_F$ 在 v 处的度量完备化。我们将默认把有限处与 $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_F$ 中的点等同起来。设 $S \supseteq S_\infty$ 是 F 的一个赋值集合。集合 S 可以是无限的，例如，它可以是所有赋值。用 $\mathcal{O}_S$ 表示 S-整数环：它可以定义为

$$\mathcal{O}_S := \{x \in F \mid x \in \mathcal{O}_v \text{ for all } v \notin S\}. \tag{3.1}$$

若 S 是有限的，也可以按如下方式得到：若我们定义 $X := \operatorname{Spec}\mathcal{O}_F$ 和 $U := X - (S \setminus S_\infty)$，那么 $\mathcal{O}_S \cong \Gamma(U, \underline{\mathcal{O}}_X)$（其中 $\underline{\mathcal{O}}_X$ 表示 X 的结构层）。X 的所有开子概形都具有这种形式。请注意，由于类群是有限的，它们都自动是仿射的。

4. Computations on the locally compact side

设 F 是一个数域。令 $S \supseteq S_\infty$ 为 F 的一组赋值，可以是无限集。我们将 $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 记作单位圆，并将其视为一个局部紧阿贝尔群。

定义 4.1。$\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 是由局部紧 $\mathcal{O}_S$-模构成的范畴，其态射为连续的 $\mathcal{O}_S$-模同态。

注 4.2。这意味着，对象是配备了拓扑的 $\mathcal{O}_S$-模 X，使得 X 作为拓扑空间是局部紧的，并且当 $\mathcal{O}_S$ 赋予离散拓扑时，X 是一个拓扑 $\mathcal{O}_S$-模。后者等价于要求对每个 $\alpha \in \mathcal{O}_S$，乘法 $(\alpha \cdot -)$: $X \to X$ 都是连续的。范畴 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 等价于（1- 范畴的）函子范畴 $\mathrm{Fun}(\langle\mathcal{O}_S\rangle, \mathrm{LCA}_{\mathbb{Z}})$，其中 $\langle\mathcal{O}_S\rangle$ 是以 $\mathcal{O}_S$ 为唯一对象的范畴，而 $\mathrm{End}(\mathcal{O}_S, \mathcal{O}_S) = \mathcal{O}_S$ 是其自同态环。

若仅出于集合论方面的考虑，人们或许会觉得，与其真正允许所有模，不如采用基数界更让人放心。这样做是可行的，但不会影响我们的任何

结果。我们将在附录 §B 中对此作出解释。本讨论也回应了有些人对我们此前关于局部紧模的论文感到不安之处。

注 4.3. 当我们希望强调自己是在范畴 $\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_S}$ 中工作时，偶尔会谈到代数 $\mathcal{O}_S$-模（当模确实带有拓扑，但我们尚未检查标量作用是否连续时，这一点尤其重要）。

例 4.4. 特殊情形 $F := \mathbf{Q}$ 和 $S = \{\infty\}$ 导出 $\mathcal{O}_S = \mathbf{Z}$。例如，$\mathbb{T} \in \mathrm{LCA}_{\mathbf{Z}}$。$\mathrm{LCA}_{\mathbf{Z}}$ 范畴中的同调代数由 Moskowitz [Mos67] 以及 Hoffmann 和 Spitzweck [HS07]，进行了极为详尽的研究，这成为随后关于局部紧模范畴的工作的出发点之一，例如 [Cla17]。

$\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 范畴是一个 $\mathcal{O}_S$-线性拟阿贝尔范畴。特别地，它是一个 $\mathcal{O}_S$-线性正合范畴。可容许单态射（分别为满态射）是闭嵌入（分别为开满射）的 $\mathcal{O}_S$-模同态。Pontryagin 对偶[2]

$$(-)^\vee \colon \mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S} \longrightarrow \mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}^{op}$$

是正合范畴之间的正合等价，并且还使 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 成为一个带对偶的正合范畴。所有对象都是自反的。这些性质都可以从 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_F}$ 的类似性质中引入。

定义 4.5. 设 $X \in \mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$。

(1) 如果 X 作为拓扑空间是离散的（分别为紧致的），我们就称其为离散的（分别为紧致的）。[3] 连通或全不连通时同样如此。(2) 如果 X 的底层局部紧阿贝尔群同构于带通常拓扑的有限维实向量空间，则称 X 为向量模。(3) 如果 X 不能写成直和 $X \simeq V \oplus X'$，其中 V 是一个非零向量模，则称 X 为无向量的。(4) 如果 $X \simeq V \oplus Q$ 属于 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$，其中 V 是一个向量模，并且

$$Q = \mathcal{O}_S \cdot C = \{\alpha c \mid \alpha \in \mathcal{O}_S, c \in C\}\,, \tag{4.1}$$

其中 $C \subseteq Q$ 是 Q 的某个紧致开闭 $\mathcal{O}_F$-子模。C 的选择不是数据的一部分，只需证明其存在即可。如果还可以安排使得 $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{O}_S^\times} \alpha C = 0$，则称 X 为阿代尔的。

我们用 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ qa} \subseteq \mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$（分别）表示拟阿代尔对象（分别为阿代尔对象）的满子范畴。

例 4.6。每个紧致 $\mathcal{O}_S$-模都是拟阿代尔的，只需令 C 为其自身，并取 $V = 0$。

定义 4.7. 若存在一个紧致子集 $K \subseteq G$ 使得 (1) $g \in K$ 推出 $-g \in K$，且 (2) 若记 $K^n := $，则称局部紧阿贝尔群 G 为紧生成[4]（简称：紧生成）。

[2]这就是赋予紧开拓扑的 $X \mapsto \mathrm{Hom}(-, \mathbb{T})$。请注意：尽管 $\mathrm{Hom}(A, B)$-群总可以赋予紧开拓扑，但一般而言，即使 A、B 都是局部紧的，它们也未必是局部紧的。对于 $B := \mathbb{T}$，它们总是局部紧的。[3]我们特意说明这一点，以免与范畴中的“紧对象”一词，或 ∞-范畴中“离散”一词的用法混淆。[4]遗憾的是，这个术语至少还有另外两种毫不相关的含义。一个（例如 Hausdorff）拓扑空间 X 称为 *compactly generated*，如果对于任意子集 $Y \subseteq X$，“对于任意紧子空间 $C \subseteq X$，$Y \cap C$ 都是闭的”这一性质蕴含 Y 是闭的。每个局部紧阿贝尔群在此意义下都是紧生成的 Hausdorff 空间。在本文中，我们只在拓扑群论的意义上使用“紧生成”，即如定义 4.7 中所述。紧生成还有另一种与范畴论相关的含义，这又是另一回事，不过也不太容易引起混淆。

$\mathrm{im}_{\mathsf{Set}}(K \times K \times \cdots \times K \xrightarrow{+} G)$ 表示在 n重加法映射下的集合论像[5]，则$G = \bigcup_{n\geq 1} K^n$。

定义 4.8。设 $X \in \mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$。若 X 满足以下条件，则称其为归纳紧生成（ind-c.g.，即归纳紧生成）：

$$X = \mathcal{O}_S \cdot H = \{\alpha h \mid \alpha \in \mathcal{O}_S, h \in H\},$$

其中 $H \subseteq Q$ 是某个紧生成的开闭 $\mathcal{O}_F$-子模。对于由归纳紧生成对象构成的满子范畴，记作 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ icg} \subseteq \mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$。选择 H 并非数据的一部分，只需它存在即可。

虽然上述大多数概念都是 [AB19], 中相应概念的推广，但归纳紧生成模这一概念并未出现在我们早期的论文中。事实证明，这是一个有用的概念，可以简化各种论证。

4.1. 阿代尔与阿代尔模。拓扑挠这一概念在局部紧阿贝尔群理论中起着关键作用，而非挠子模。与代数挠不同，拓扑挠在对偶运算下保持不变：群 $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ 是一个离散的 p-挠群。其庞特里亚金对偶 $\mathbb{Z}_p$ 在代数意义上无挠，但仍是拓扑 p-挠的。

定义 4.9. 若局部紧阿贝尔群 G 的每个零邻域都包含一个紧开子群 U，使得 G/U 是离散挠群，则称其为拓扑挠群。若某个局部紧阿贝尔群的底层群是拓扑挠群，则称 $A \in \mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 为拓扑挠模。

这一概念还有一个针对单个素数的版本。

定义 4.10. 假设 $A \in \mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$，且 $v = P$ 是与极大理想$P \in \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_F$相关联的处。若对每个零邻域 $0 \in U \subset A$，都存在某个 $N_U \geq 1$，使得.....则称 $a \in A$ 为拓扑 P-挠。

$$P^{N_U} \cdot a \subseteq U.$$

若对象 A 的所有元素都是拓扑 P-挠元素，则称该对象为拓扑 P-挠。记作

$$A^P := \{a \in A \mid a\ \textit{is topological}\ P\textit{-torsion}\}$$

表示由拓扑 P-挠元素构成的代数 $\mathcal{O}_F$-子模。

对于 $\mathcal{O}_S = \mathbb{Z}$，这就归结为熟知的拓扑 p-挠概念。

例 4.11. 一般而言， A^P 不一定是 A的闭子模，因此这一概念未必适合在 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$范畴内进一步分解 A。作为一个具体例子，对于 $F = \mathbb{Q}$， $S = \{\infty\}$，我们有 $\mathcal{O}_S = \mathbb{Z}$；对于任意素数 p，根据 [Arm81，命题 2.6], ，群 $\mathbb{T}^{(p)}$ 是p-幂挠元素的子群。也就是说，尽管 $\mathbb{T}$ 带有非离散拓扑，我们得到的仍只有代数挠元素。这是 $\mathbb{T}$的一个稠密真子群。

对于阿代尔对象中的拓扑挠子模，情况会更好。

定理 4.12. 假设 $A \in$LCA$_{\mathcal{O}_S}$ 是无向量阿代尔的。

(1) 那么 A 是一个拓扑挠模。(2) A 和 $A^\vee$ 均全不连通。(3) 对于 S 中的每个有限处 $v = P$，子模 $A^P \subseteq A$ 都是一个闭的 $\mathcal{O}_S$-子模。

[5]我们特别强调，指的是 *set-theoretic image*，因为 $\mathrm{LCA}_{\mathbf{Z}}$ 范畴中的范畴论像未必相同。范畴论像总是集合论像的闭包，因此这一差异会发挥作用。

(4) 存在一个同构

$$A \simeq \prod_{P \in S}{}' (A^P : A^P \cap C), \tag{4.2}$$

其中 C 是任意一个紧致开 $\mathcal{O}_F$-子模，使得

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{O}_S^\times} \alpha C = 0 \qquad and \qquad \bigcup_{\alpha \in \mathcal{O}_S^\times} \alpha C = A. \tag{4.3}$$

此外， $A^P \cap C$ 是 A^P 的一个紧致开 $\mathcal{O}_F$-子模，使得

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{O}_S^\times} \alpha(A^P \cap C) = 0 \qquad and \qquad \bigcup_{\alpha \in \mathcal{O}_S^\times} \alpha(A^P \cap C) = A^P. \tag{4.4}$$

(5) 对于 (p) $=P \cap \mathbf{Z}$，每个 A^P 都是一个（代数上和拓扑上）有限维 $\mathbf{Q}_p$-向量空间。

证明。(1) 由于 A 是无向量阿代尔，我们可以写成

$$A = \bigcup_{x \in \mathcal{O}_S^\times} xC \qquad \text{such that} \qquad \bigcap_{x \in \mathcal{O}_S^\times} xC = 0 \tag{4.5}$$

对于 $C \subseteq A$，这是 A 的某个紧致开 $\mathcal{O}_F$-子模。对于所有 $x \in \mathcal{O}_S^\times$，与 x 的乘法都是同胚，因此所有 $\mathcal{O}_F$-子模 xC 都是开子群。由此可得， A 的所有开子群的交是平凡的（因为 xC 构成一个共尾子族）。根据 [HR79 定理 7.8]， A 的单位元的连通分支是平凡的。于是，根据 [HR79 定理 7.3]，可知 A 是全不连通的；再根据 [HR79 定理 7.7]，单位元的每个邻域 $0 \in U$ 都包含一个紧致开子群 $W_U \subseteq U$。由于该子群是开子群，商群 A/W_U 是离散 LCA 群。在 LCA 群范畴中，我们可得

$$A/W_U = \bigcup_{x \in \mathcal{O}_S^\times} (xC/W_U)$$

并且，由于 xC 在 A/W_U中的像是紧致的，它必定是有限集。由此可推得 xC/W_U 是一个挠群，进而 A/W_U 是一个离散挠群。根据 [Arm81, 定理 3.5 (e)]，可知 A 是拓扑挠的；再由同上引文中的 (c)，可知 $A^\vee$ 是全不连通的。这就证明了 (1) 和 (2)。记 A^p 为 $\mathrm{LCA}_{\mathbf{Z}}$ 意义下的拓扑 p-挠元素（即局部紧阿贝尔群理论意义下的拓扑 p-挠元素）。利用 [Arm81, 引理 3.8（Armacost 将下标 p用于我们所说的上标 p]），可推出 (3)：首先证明拓扑 p-挠子群 A^p 是一个闭子群，然后证明它是一个拓扑 $\mathbf{Z}_p$-模。由此可见，$\mathcal{O}_F$-模结构 $\mathcal{O}_F \times A \to A$ 可扩展为一个关于 p-阿代尔拓扑的拓扑 $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p$-模结构

$$\left(\varprojlim_n \mathcal{O}_F \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \right) \times A^P \longrightarrow A^P. \tag{4.6}$$

由于 $\mathcal{O}_F$ 是一个有限 Z-代数， $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p \cong \prod_P \mathcal{O}_{F,P}$，其中 P 遍历 $\mathcal{O}_F$中位于 p之上的素数。这个典范分解提供了幂等元，从而将 A^p 典范地分解为该断言中的 A^P， φ：在 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_F}$中，$A^p \cong \prod_P A^P$（同样的论证表明，$(A \cap C)^p \cong \prod_P (A \cap C)^P$也在 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_F}$中）。如果 x 是拓扑 p-扭子（或 P-扭子），那么对任意 $\alpha \in \mathcal{O}_S$， αx 也如此，因此 A^P确定了 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 中的一个对象，并且同构 φ 在 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 中也成立（这部分论证不适用于 $A \cap C$，因为 C 不一定是一个 $\mathcal{O}_S$-模）。此外，由于 A^p

是闭的，这也表明 A^P 在 A中是闭的，从而证明了 (3)。Arm81 定理 3.10] 的一个变体接着表明，存在一个 LCA$\mathcal{O}_F$ 中的同构，使得

$$A \cap C \cong \prod_P (A \cap C)^P, \tag{4.7}$$

其中 P遍历 $\mathcal{O}_F$的所有极大理想。于是， [Arm81，定理 3.13] 给出了等式 4.2 中的同构，但有两个限制：(L1) P 遍历所有极大理想[6] ，以及 (L2) C 的选取采用等式 4.5 中的选取。我们消除 L2：注意，若 $C_2 \subseteq C$ 是等式 4.5 中的另一种选取，则 C/C_2 是离散的（因为 C_2 是开集）且紧致的（因为 C 是紧致的），因此是有限的。于是，对于 C的任意两种选取，记为 C_1、C_2，它们在 C_1+C_2中都具有有限指数（ C_1+C_2也既开又紧致）。改变 C会影响等式 4.7，但受限直积 $A \simeq \prod'(A^P, A^P \cap C)_P$

在将 $A^P \cap C$ 替换为有限指数子群链后，无论作为群还是在拓扑上都保持不变。这就消除了 L2。接下来讨论 L1。等式 4.4 是由 A 具有阿代尔性质得出的。接下来，我们证明 $P \notin S$ 蕴含 $A^P = 0$。为此，注意 $(A \cap C)^P$ 既是一个 $\widehat{\mathcal{O}_{F,P}}$-模（因为它是拓扑 P-挠的），也是一个 $\mathcal{O}_F$-模（因为 A和 C都是如此），但未必是$\widehat{\ }$一个 $\mathcal{O}_S$-模。然而，在$\mathcal{O}_{F中,\ P}$除 P之外的所有素数都已被局部化掉，因此若 $P \notin S$，则有环的分解$\mathcal{O}_F \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_{F,\ P}$，所以在这种情况下$(A \cap C)^P$是一个 $\mathcal{O}_S$-模。由此可得，对于所有 $\alpha \in \mathcal{O}_S^\times$， $\alpha(A^P \cap C) = A^P \cap C$，因此

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{O}_S^\times} \alpha(A^P \cap C) = A^P \cap C \qquad \text{and} \qquad \bigcup_{\alpha \in \mathcal{O}_S^\times} \alpha(A^P \cap C) = A^P \cap C.$$

由等式 4.4，我们推得 $A^P = 0$。这消去了 L1，因此最终以定理所述的形式解决了等式 4.2，从而证明了 (4)。对于 (5)：设 p 是位于 P下方的素数。根据构造

$$T := A^P \cap C$$

是一个拓扑 $\widehat{\mathcal{O}_{F,P}}$-模（见等式 4.6 及其下方关于如何将其调整为适用于 $A^P \cap C$ 的讨论）。同样，由于 $P \in S$, A^P是一个 $\widehat{\mathcal{O}_{F,P}} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_S$-模。注意， $\widehat{\mathcal{O}_{F,P}} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_S = \text{Frac}\ \widehat{\mathcal{O}_{F,P}}$, ，因此 A^P是一个在（某个有限扩张的）$\mathbb{Q}_p$上的代数[7]向量空间。注意，此时我们尚不知道它是一个拓扑 $\mathbb{Q}_p$-向量空间：乘以$\frac{1}{p}$ 可能不连续[8]。现在证明这一点：首先，我们声称 A^P 是 σ-紧致的[9]。这显然是因为

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{O}_S^\times} \alpha(A^P \cap C) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{O}_S^\times} \alpha T = A^P \tag{4.8}$$

等式 4.4 将其表示为紧集 $\alpha(A^P \cap C)$ 的可数并（利用 $\alpha \in \mathcal{O}_S^\times$ 通过同胚作用，且 $A^P \cap C$ 是紧致的）。由于 $A^P \subseteq A$ 是闭的，因此 A^P 是局部紧且 σ-紧致[10]。由于 p可逆，$(- \cdot p)$: $A^P \twoheadrightarrow A^P$是一个连续满射，其源空间是 σ-紧致的。根据 Pontryagin 开映射定理 [Mor77，第 23 页，定理3], ，可知这必定是一个开映射，因此也是一个同胚。这就说明A^P 是一个拓扑 $\mathbb{Q}_p$-向量空间。接下来只需证明它是有限维的。由于 p 通过同胚作用于 A^P，且 T在 A^P中是开集，pT在 T中也将是开集。因此， T/pT

[6]而不是仅遍历 S[7]按照注释 4.3 的含义[8]根据 S，LCA 中可能存在 $\mathbb{Q}$-向量空间$\mathcal{O}_S$，其中乘以素数 p 是连续的，但乘以$\frac{1}{p}$则不是。在这种情况下，尽管乘以 p 是可逆的，但它并非同胚。参见 [AB19，例 2。8] 对于 $F = \mathbb{Q}$ 和 $S = \{\infty\}$，因此 $\mathcal{O}_S = \mathbb{Z}$。[9]紧集的可数并[10]这两种性质互不蕴含。带实度量拓扑的有理数集 $\mathbb{Q}$ 不是局部紧的，但它是可数的，因此是 σ-紧的。另一方面，任何不可数离散群都不是 σ-紧的。

是离散的。然而， T 也是紧致的，因此 T/pT 既紧致又离散，故为$\widehat{\ }$有限集。因此， T是一个紧致的$\mathcal{O}_{F,\ P}$-模，而 $T/\mathfrak{m}_{\widehat{\mathcal{O}_F}\ ,\ P}T$（它是 T/pT的一个商）是有限的。因此，根据拓扑 Nakayama 引理（[Lan90，第 5 章，第 §1] 节）， T 是一个有限生成的$\widehat{\mathcal{O}_{F,P}}$-模。根据等式 4.8 的右侧， A^P 不过是通过将 p取逆对 T 进行局部化，因此 $\dim_{\mathbf{Q}_p} A^P$ 至多等于 T的 $\mathbf{Z}_p$-模生成元个数，而该数是有限的[11]。□

例 4.13。定义 S-整 ad`eles 为受限直积

$$\mathbb{A}_S := \prod_{v\in S}{}' F_v, \tag{4.9}$$

并赋予通常的受限积拓扑。则 $\mathbb{A}_S \in \mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ ad}$。根据经典数论中的一个事实，存在正合列

$$\mathcal{O}_S \hookrightarrow \mathbb{A}_S \twoheadrightarrow \mathbb{A}_S/\mathcal{O}_S \tag{4.10}$$

在 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 中，其中左箭头是对角嵌入。这里 $\mathcal{O}_S$ 是离散且无挠的，而 $\mathbb{A}_S/\mathcal{O}_S$ 是紧致且连通的。这就是 ad`ele 正合列。尽管在 S 不包含所有无穷位时，公式 4.9 仍有意义，但正合列 4.10 实际上依赖于这一贯穿全文的假设。

注 4.14。公式 4.9 采用了一种常见且实用的简写。不过，这种写法略有不精确。严格来说，我们应将 ad`eles 指定为 $\mathbb{A}_S := \prod_{v\in S_\infty} F_v \times \prod'_{v\in S\setminus S_\infty}(F_v :\ \mathcal{O}_v)$，其中S第二个因子是相对于紧开子群 $\mathcal{O}_v$ 的受限直积 .

4.2. 范畴的受限积。

4.2.1. 正合结构。设 I 是某个集合，且以该集合为指标的 I 个范畴 $(\mathsf{C}_v)_{v\in I}$ 都是正合范畴。则 $\prod_{v\in I}\mathsf{C}_v$ 是一个正合范畴。其对象是满足 $X_v \in \mathsf{C}_v$ 的数组 $X = (X_v)_{v\in I}$，态射按分量定义；若一个核余核列在每个 C_v 中按分量正合，则称其为正合列。设有正合函子 $\xi_v\colon \mathsf{C}_v \to \mathsf{D}_v$，其中 $(\mathsf{C}_v)_{v\in I}$ 与 $(\mathsf{D}_v)_{v\in I}$ 的指标集相同。对任意子集 $I' \subseteq I$，定义 $\mathsf{J}^{(I')} := \prod_{v\in I\setminus I'}\mathsf{C}_v \times \prod_{v\in I'}\mathsf{D}_v$。那么，只要 $I' \subseteq I''$，就存在一个正合函子 $\xi_{I',I''}\colon \mathsf{J}^{(I')} \to \mathsf{J}^{(I'')}$，其定义为对所有 $v \in I''\setminus I'$ 按分量取 ξ_v，并在其他位置取单位元。我们将正合范畴的受限直积定义为

$$\prod_{v\in I}{}'(\mathsf{D}_v : \mathsf{C}_v) := \operatorname*{colim}_{I'\subseteq I,\ \#I'<\infty} \mathsf{J}^{(I')}, \tag{4.11}$$

其中 ξ_v 是隐含的，而这种记号（尽管可能被认为顺序不自然）受到拓扑群论传统记号的启发。参见注 4.14。

注意，若 C_v、D_v 是带对偶的正合范畴（[Sch10，§2]），且 ξ_v 是保持对偶的正合函子，那么受限直积是一个带对偶的正合范畴。

4.2.2. 幺半结构。假设 §4.2.1 中的范畴 $(\mathsf{C}_v)_{v\in I}$ 还带有双正合（对称）幺半结构 $\otimes_v\colon \mathsf{C}_v \times \mathsf{C}_v \to \mathsf{C}_v$。这意味着，对于任意固定的对象 $C \in \mathsf{C}_v$，由 $X \mapsto C \otimes_v X$ 给出的函子 $\mathsf{C}_v \to \mathsf{C}_v$ 是正合的， $X \mapsto X \otimes_v C$ 的情形也类似。此外，假设 $(\mathsf{D}_v)_{v\in I}$ 也配备了双正合（对称）幺半结构。若我们将 §4.2.1 中的函子 $\xi_v\colon \mathsf{C}_v \to \mathsf{D}_v$ 选为（对称）幺半函子，那么这就使得 $\prod'(\mathsf{D}_v : \mathsf{C}_v)$ 成为一个双正合（对称）幺半范畴。幺半结构逐元素定义，§4.2.1 中的函子 $\xi_{I',\ I''}$ 可（由 ξ_v 诱导）赋予自然的（对称）幺半结构。

[11]事实上，由于 A^P 是一个 $\mathbf{Q}_p$-向量空间， $T \subseteq A^P$ 不可能有 p-挠，因此 $\dim_{\mathbf{Q}_p} A^P = \mathrm{rk}_{\mathbf{Z}_p} T \leq \dim_{\mathbf{F}_p} T/pT$，但我们不需要这个更强的事实。

4.3. 阿代尔模的结构。为表述下面的定理，我们采用如下约定：若 v 是一个无限处，则 $\mathcal{O}_v := F_v$ 。

命题 4.15. 设 $S \supseteq S_\infty$ 是 F 的一个素位集合，可能是无限集。那么存在一个带对偶的正合范畴之间保持正合性和对偶性的等价

$$\Psi\colon \prod_{v\in S}{}' (\mathsf{Proj}_{F_v,fg} : \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_v,fg}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad}. \tag{4.12}$$

这里，右侧的对偶性是庞特里亚金对偶（$X \mapsto X^\vee$），左侧的对偶性则由下式诱导

$$M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_v}(M, \mathcal{O}_v) \qquad resp. \qquad M \mapsto \mathrm{Hom}_{F_v}(M, F_v),$$

以及 $\xi_v(M) := F_v \otimes_{\mathcal{O}_v} M$。函子 Ψ 将一个模数组 $(M_v)_{v\in S}$ 映至其自身，但赋予其在 $v \in S_\infty$ 上的实拓扑，以及在 $v \in S \setminus S_\infty$ 上的阿代尔拓扑。

命题 4.15 的证明。请参阅 [AB19, §4，尤其是命题 4.8]。该文讨论了 S 为所有赋值时的证明，但很容易将其改写为上述（更一般的）版本。只需将 Braconnier–Vilenkin 型定理 [AB19, §3] 替换为上文的定理 4.12。□

推论 4.16. $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ ad}$ 是一个分裂正合拟阿贝尔范畴。如果 S 是有限的，则存在一个等价 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ ad} \xrightarrow{\sim} \mathsf{Mod}_{R,\ fg}$，其中 $R := \prod_{v\in S} F_v$ 是积环。

证明。等式 4.12 左侧的范畴有核（因为每个 $\mathcal{O}_v$ 都是遗传的，也就是说，$\mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_v,\ fg}$ 中的任意核都必定仍是投射的）。由于该范畴与其反范畴自对偶，因此所有余核也都存在。故它是拟阿贝尔的。接下来，如果每个 C_v、D_v 都是分裂正合的，那么受限直积也如此。如果 S 是有限的，受限直积就简化为 $\prod_{v\in S}\mathsf{Mod}_{F_v,\ fg}$，从而得到第二个结论。□

如果 S 是无限的，$\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ ad}$ 将无法与 $\prod'_{v\in S} F_v$上的模范畴一致。参见 [AB19，例 4.11]。更糟的是，当 S 为无限时，$\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ ad}$ 将不是阿贝尔范畴。

例 4.17. 若 S 是无限的，则不存在对象 $X \in \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ ad}$ 使得任意对象在 n 足够大时都是 $X^{\oplus n}$ 的商。

注 4.18. 命题 4.15 可用于赋予 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ ad}$ 一个双正合对称幺半结构。同上引文中的函子 ξ_v可扩展为对称幺半函子 $\xi_v\colon (\mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_v,\ fg}, \otimes_{\mathcal{O}_v}) \to (\mathsf{Proj}_{F_v,\ fg}, \otimes_{F_v})$。由于投射模是平坦的，所涉及的幺半结构都是双正合的。因此，§4.2.2 中指出的一般构造为等式 4.12 左侧赋予一个双正合对称幺半结构。现在通过命题 4.15 的范畴等价 Ψ 将其传递到 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ ad}$ 。我们指出，这个幺半结构与 [HS07] 中的结构相容。

4.4. 局部紧模的结构。

定理 4.19。设 $X \in \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 是任意的。

(1) 存在一个（非典范的）正合列

$$Q \hookrightarrow X \twoheadrightarrow D,$$

在 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 中，其中 Q 是拟阿代尔的，D 是离散的。

(2) 如果 X 是拟阿代尔的，则存在一个（典范的）正合列

$$K \hookrightarrow X \twoheadrightarrow A$$

在 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 中，其中 K 是紧致的，A 是阿代尔的。如果 X 是无向量的，那么 K 和 A 也是如此。

(3) 若 P 是离散的 $\mathcal{O}_S$-模，且在 $\mathsf{Mod}_{\mathcal{O}_S}$中是投射的，则它是 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 中的投射对象。(4) 若 I 是紧致的 $\mathcal{O}_S$-模，且其对偶 $I^\vee$ 在 $\mathsf{Mod}_{\mathcal{O}_S}$中是投射的，则它是 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$中的内射对象。

(5) 向量模是 LCA$\mathcal{O}_S$ 中的内射对象和投射对象。

证明。(5) 环 $\mathcal{O}_S$ 是 $\mathcal{O}_F$的局部化。遗忘函子 LCA$_{\mathcal{O}_S} \to$ LCA$\mathcal{O}_F$ 是完全忠实的、正合的，并且反映正合性。根据 [Bra19，定理 5.13]，若 X 是向量模，则它在 LCA$\mathcal{O}_F$ 中既是内射对象，也是投射对象。由满性可得结论。(3) 由于 P在 Mod$\mathcal{O}_S$中是投射的，存在一个代数提升，将其提升为 LCA$\mathcal{O}_S$中的正合列。由于 P是离散的，在此映射下的任意原像必然是开集，因此该提升是连续的，从而是 LCA$\mathcal{O}_S$ 中的一个映射。(4) 由 (3) 在庞特里亚金对偶性下得到，因为该对偶性会交换内射对象与投射对象（任何到对偶范畴的范畴等价都有此性质）。(1) 根据 [Bra19，引理 6.5] ，存在一个正合列

$$V \oplus C \hookrightarrow X \overset{q}{\twoheadrightarrow} D \tag{4.13}$$

在 LCA$\mathcal{O}_F$ 中，其中 V 是一个向量模， $C \in$ LCA$\mathcal{O}_F$ 是紧致的，而 $D \in$ LCA$\mathcal{O}_F$ 是离散的。由于 V 是 LCA$\mathcal{O}_F$ 中的内射对象（再次使用 [Bra19，定理 5.13] ），我们可以在 LCA$\mathcal{O}_F$ 中写作 $X \simeq X' \oplus V$。自然地， V 自动是一个 $\mathcal{O}_S$-模（甚至是一个 F-向量空间）。尽管 X' 起初只是一个 $\mathcal{O}_F$- 模，但它必定是一个（代数） $\mathcal{O}_S$- 模（假设存在某个 $\alpha \in \mathcal{O}_F$，满足 $\alpha^{-1} \in \mathcal{O}_S$ 且 $y' \in X'$，并且相对于直和有 $\alpha^{-1}y' = x' + v$。那么 $y' = \alpha x' + \alpha v$ 迫使 $\alpha v = 0$ 属于 V。然而，作为一个向量模， V 也是一个 F-模，因此不可能有 $\mathcal{O}_F$-扭结，所以必有 $v = 0$）。由于 X 是一个拓扑 $\mathcal{O}_S$-模，$\mathcal{O}_S$ 在 X' 上的标量作用也连续。将 V 分裂为一个直和项后，只需证明向量自由的 X 满足我们的断言。我们回到序列 4.13，这次取 $V = 0$。由于 D 是离散的， $C = q^{-1}(D)$ 是开集。在 X 内定义 $Q = \mathcal{O}_S \cdot C$。由于 C 是一个 $\mathcal{O}_F$-模，且 $\mathcal{O}_S$ 是 $\mathcal{O}_F$ 的一个局部化，我们有

$$Q = \bigcup_{x \in \mathcal{O}_S} xC = \bigcup_{x \in \mathcal{O}_S^\times} xC.$$

由于 X 是一个拓扑 $\mathcal{O}_S$-模，乘以 $x \in \mathcal{O}_S^\times$ 是一个同胚；又因为C 是开集，所以每个 xC也是开集。因此，Q 是 X中的（闭）开子集，并且按构造是一个 $\mathcal{O}_S$-模。于是，$Q \in$ LCA$\mathcal{O}_S$，我们可以在 LCA$\mathcal{O}_S$ 中构造正合列 $Q \hookrightarrow X \twoheadrightarrow D'$。由于 Q 是开集， D' 必定是 LCA$\mathcal{O}_S$中的离散对象。这就证明了（1）。（2）若 Q 是无向量准阿代尔，则可写为

$$Q = \bigcup_{x \in \mathcal{O}_S^\times} xC$$

其中 $C \subseteq Q$ 是一个紧致开 $\mathcal{O}_F$-子模。定义 $K := \bigcap_{x \in \mathcal{O}_S^\times} xC$。由于 C 是紧致的，每个xC 都是紧致的，因而是 Q中的闭集。因此，作为闭集的交集， K 是 C 的一个闭$\mathcal{O}_F$-子模（因为 $1 \cdot C$ 属于该交集）。由于 C 是紧致的， K也是紧致的。接下来注意到， K 实际上是一个 $\mathcal{O}_S$-模：由于 $\mathcal{O}_F \to \mathcal{O}_S$ 是一个局部化，对于每个 $k \in K$ 和 $\alpha \in \mathcal{O}_S$，我们都能找到 $\alpha = \frac{f}{s}$，使得 $f \in \mathcal{O}_F$ 和 $s \in \mathcal{O}_S^\times$ 成立；继而有 $\alpha k = s^{-1}(fk)$，且 $fk \in K$ （$\subseteq C$），因此$s^{-1}(fk)$ $\in s^{-1}C \subseteq K$。定义 $A := Q/K$，得到 LCA$\mathcal{O}_S$ 中的正合列 $K \hookrightarrow Q \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} A$。对象 A 是无向量的，否则某个向量模直和项将提升为 Q 的一个向量模直和项，因为向量模是投射对象（如上文所示）。C 在 π 下的像仍然是紧致的，并且是一个 $\mathcal{O}_F$-子模。由于 π 是容许满射，它是开映射，因此开集 $C \subseteq Q$ 被映到 A中开集 $\pi(C)$。因此， $\pi(C)$ 是 A中的一个紧致开$\mathcal{O}_F$-子模。由于 π 是满射，

$$A = \mathcal{O}_S \cdot \pi(C) = \{\alpha c \mid \alpha \in \mathcal{O}_S, c \in \pi(C)\}.$$

我们推导出 A 是无向量准阿代尔的。接下来，我们证明 A 是阿代尔的：假设 $\overline{t} \in \bigcap_{x \in \mathcal{O}_S^\times} x\pi(C)$。那么对所有 $x \in \mathcal{O}_S^\times$，都存在 $c_x \in C$ 使得 $\overline{t} = x\pi(c_x)$。令 $t \in Q$ 为 $\overline{t}$的一个原像。那么对所有 $x \in \mathcal{O}_S^\times$，我们得到 $t - xc_x \in K$。将 $t = xc_x + k_x$ 写作 $k_x \in K$。由于 K

是一个 $\mathcal{O}_S$-模和 $x^{-1} \in \mathcal{O}_S^\times$，我们可以将 $k_x = x\tilde{c}_x$ 写作 $\tilde{c}_x := x^{-1}k_x \in K \subseteq C$。我们得到 n

$$t = xc_x + x\tilde{c}_x = x(c_x + \tilde{c}_x) \qquad \text{for all} \qquad x \in \mathcal{O}_S^\times.$$

因此，$t \in K$，进而 $\overline{t} = 0$。由此可得，A 是阿代尔的。因此，令 $X := Q$，我们已在 Q 无向量时证明了 (2)。若 Q 有非平凡的向量模直和项，则将 (2) 应用于其无向量的补直和项。这便证明了 (2) 在一般情形下成立。□

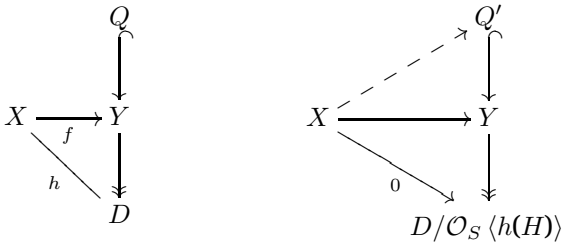
例 4.20. 若 G 是拓扑群，且 A、$B \subseteq G$ 是闭子群，则 $A + B$ 未必是闭的。例如，R 中的 $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ 便说明了这一点。不过，如果额外假设其中一个群是紧致的，那么 $A + B$ 也是闭的。

命题 4.21. 我们记录这些范畴之间的以下关系：

(1) $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S,qa} \subseteq \mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S,icg}$。(2) $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 中从归纳有限生成对象到离散 $\mathcal{O}_S$-模的任意态射，其像均为有限生成。(3) $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 中从拟阿代尔对象到离散 $\mathcal{O}_S$-模的任意态射，其像均为有限。(4) 满子范畴的包含 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S,icg} \subseteq \mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 是左 s-滤过的。(5) 满子范畴 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S,icg} \subseteq \mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 是扩张封闭的。(6) 满子范畴 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S,qa} \subseteq \mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 是扩张封闭的。(7) 满子范畴 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad} \subseteq \mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 是扩张封闭的。

证明。（1）假设 X 是拟阿代尔的。设 $X \simeq V \oplus Q$，其中 V 是一个向量模；设 $Q = \mathcal{O}_S \cdot C$，其中 C 是 Q 的一个紧致开闭 $\mathcal{O}_F$-子模。定义 $H := V + C$。这是 X 中的一个闭 $\mathcal{O}_F$-子模，因为 V 是闭的，而 C 在 X 中是紧致的（见习题 4.20）。我们得到 $X/\overline{H} \cong Q/C$，它是离散的，因为 C 在 Q 中是开集，因此 H 在 X 中是（闭）开集。和 $K := B_V(1) + C$（其中 V 中的闭单位球取自我们任意选定的 V 上的实向量空间范数）是 H 为紧生成的一个见证。（2）假设 X 是归纳紧生成的，并给定 $g\colon X \to D$，其中 D 是离散的。取定义 4.8 中的 $H \subseteq X$。那么作为局部紧阿贝尔群，$H \simeq \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{Z}^m \oplus C$，其中 C 是一个紧致局部紧阿贝尔群 [（Mos67，定理 2.5]）。显然，$g(\mathbb{R}^n) = 0$ 和 $g(C)$ 在 D 中必须是有限的，因为 $\mathbb{R}^n$ 是连通的，而 C 是紧致的。因此，$g(H)$ 是一个有限生成阿贝尔群。记 $\mathcal{O}_S\langle h(H)\rangle$ 为 $\mathcal{O}_S$-模由 $g(H)$ 张成的子模。那么 $g(X) = \mathcal{O}_S\langle g(H)\rangle$，且它作为 $\mathcal{O}_S$-模是有限生成的。（3）与（2）的证明完全相同，但这次 $m = 0$。（4）我们证明左滤性：假设给定 $f\colon X \to Y$，其中 $X \in$ 是局部紧阿贝尔群$\mathcal{O}_S,icg$。利用定理 4.19 得到左侧的图表，其中

(4.14)

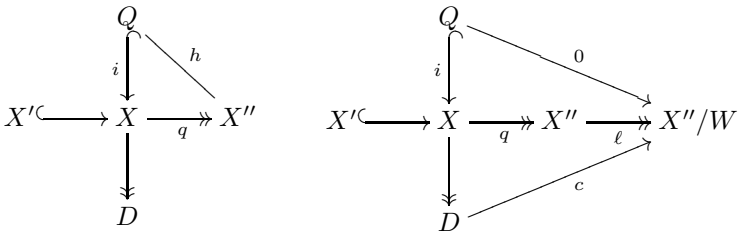


其中 Q 是拟阿代尔的，D 是离散的。取如定义 4.8 中的 $H \subseteq X$。由命题的第 (2) 部分，我们推得 $\mathcal{O}_S\langle h(H)\rangle$ 是有限生成的。定义 $Q' := \ker(Y \twoheadrightarrow D/\mathcal{O}_S\langle h(H)\rangle)$，得到方程 4.14 中右侧的图表。我们断言 Q' 是归纳紧生成的。为此，注意到滤子$Q \hookrightarrow Q' \hookrightarrow Y$ 导出正合列 $Q'/Q \hookrightarrow Y/Q \overset{q}{\twoheadrightarrow} Y/Q'$，但根据图 4.14，箭头 q 与 $D \twoheadrightarrow D/\mathcal{O}_S\langle h(H)\rangle$一致，因此得到 $Q'/Q \cong \mathcal{O}_S\langle h(H)\rangle$。我们得到正合列

(4.15)
$$Q \overset{t}{\hookrightarrow} Q' \twoheadrightarrow \mathcal{O}_S\langle h(H)\rangle$$

右侧的商是离散的。由于 Q 是拟阿代尔的，根据命题的第 (1) 部分，它是归纳紧生成的；取如定义 4.8 中的 $H \subseteq Q$， $Q = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{O}_S^\times} \alpha H$。取元素 b_1、……、$b_r \in Q'$，将$\widehat{\ }$映到 $\mathcal{O}_S$-模 $\mathcal{O}_S \langle h(H) \rangle$ 的一组生成元上。定义 $H' := H + \mathcal{O}_F \langle b_1$、……、$b_r \rangle \subseteq Q'$。由于 H 在 Q 中是$\widehat{\ }$开子集，且 Q 在 Q' 中是开子集（因为方程 4.15 中 t 的余核是离散的），所以 H 在 Q' 中是开子集，$\widehat{\ }$因此 H' 也如此。由于 H 是紧生成的， H' ([Mos67，定理 2.5])也是紧生成的。我们得到 $Q' = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{O}_S^\times} \alpha H'$，因此 Q'是归纳紧生成的。于是，方程 4.14 中右侧的图表证明了左滤过性质。接下来，我们证明左特殊性：设给定一个正合列 $X' \hookrightarrow X \overset{q}{\twoheadrightarrow} X''$，其中 X''是归纳紧生成的。应用定理 4.19，得到左侧图表中的中间一列

(4.16)

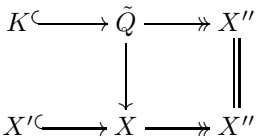


配备 $h := q \circ i$。选取定义 4.8 中的 $H \subseteq Q$。由于 $\overline{H}$ 在 Q 中是开集，且 i 是开集， q 也是开集，因此集合 $h(H) \subseteq X''$ 是既闭又开的。于是， $\overline{h(H)} = h(H)$ 是一个紧生成开集，也是一个 $\mathcal{O}_F$-模。定义$W := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{O}_S^\times} \alpha h(H)$。由于每个 α 都通过同胚作用，每个 $\alpha h(H)$ 也都是开集，因此它们的并集 W 在 X'' 中也是既闭又开的。根据构造， W 是 X'' 的一个开 $\mathcal{O}_S$-子模。我们得到等式 4.16 中右侧的图表。提升 c 存在，且必为容许满射，因此 X''/W 是离散的。由于 X'' 是归纳紧生成的， ℓ 的像是一个有限生成的 $\mathcal{O}_S$-模；但 ℓ 是满射，因此 X''/W 是有限生成的。定义

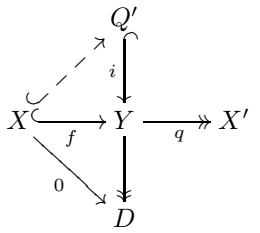
$$\tilde{Q} := Q + \mathcal{O}_S \langle g_1, \dots, g_r \rangle \subseteq X,$$

其中 $g_1, \dots, g_r \in X$ 是映射到 X''/W 的一组有限集 $\mathcal{O}_S$-模生成元的元素。由于 $\tilde{Q}$ 在 X 中是开集， Q 也如此。现在用 $H := H + \mathcal{O}_F \langle g_1, \dots, g_r \rangle \subseteq Q$ 作为证据，说明 Q 是归纳紧生成的。由此得到

(4.17)



$\tilde{\ }$其中间向下箭头是（闭）开包含 $Q \hookrightarrow X$。映射 $Q \to X''$ 按构造是$\tilde{\ }$满射，并且作为开映射 $Q \hookrightarrow X \twoheadrightarrow X''$的复合也是开映射。$q$对象 K 定义为右侧顶部满态射的核。它也是归纳紧生成的。可以用$H_K := H \cap K \subseteq K$ 作为见证。由于 H 在 Q中是开的，H_K 在 K 中也是开的（根据$\tilde{\ }$子空间拓扑的定义），且 $\mathcal{O}_S \cdot H_K = \mathcal{O}_S H \cap \mathcal{O}_S K = Q \cap K = K$。（5）使用 [BGW16，引理 2.14]，并依赖命题的第（4）部分。（6）设 $X \overset{f}{\hookrightarrow} Y \twoheadrightarrow X'$ 是正合列，其中X、 X' 是拟阿代尔的。现在重复断言（4）证明中的前几个步骤。由此得到图表



其中 Q' 是拟阿代尔的， D 是离散的，并且对角虚线提升存在（即：逐字重复论证，我们会得到这样的图表，但其中 Q' 是归纳紧生成的；然而，由于 X 是拟阿代尔的， $\mathcal{O}_S\langle h(H)\rangle$ 是有限挠 $\mathcal{O}_S$模，考虑到这一点，我们可以安排使 Q' 成为拟阿代尔的）。此外，与（3）不同，映射 f 是容许单态射。由于 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 是幂等完备的（它是拟阿贝尔的），因此 $X \hookrightarrow Q'$ 必定是容许单态射。滤子 $X \hookrightarrow Q' \hookrightarrow Y$ 给出正合列 $Q'/X \hookrightarrow Y/X \twoheadrightarrow Y/Q'$，但 $Y/Q' \cong D$ 是离散的，因此得到正合列 $Q'/X \hookrightarrow X' \twoheadrightarrow D$。由于 X' 是拟阿代尔的且 D 是离散的，命题的第（3）部分推出 D 是有限的。然而，由于我们知道 Q' 是拟阿代尔的，正合列 $Q' \hookrightarrow Y \twoheadrightarrow D$ 现在推出 Y 也是拟-˜阿代尔的（例如，取 s_1、.....、 $s_l \in Y$作为 D中各元素的原像；若 $Q' = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{O}_S^\times} \alpha C$ 满足

˜ ^ $\asymp C$是一个紧致开 $\mathcal{O}_F$子模，则对于 $C := \sum s_i C$，我们得到 $Y = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{O}_S^\times} \alpha C$）。（7）将$X' \hookrightarrow X \twoheadrightarrow X''$ 写成 X'，其中 $X'' \in$ 是 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S, ad}$。由于阿代尔对象是拟阿代尔的，且根据第（6）部分，拟阿代尔对象在扩张下封闭，因此 X 是拟阿代尔的。阿代尔对象的对偶仍是阿代尔对象，对 $X''^\vee \hookrightarrow X^\vee \twoheadrightarrow X'^\vee$ 应用相同论证可知 $X^\vee$ 是拟阿代尔的。由定理 4.19，将 $K \hookrightarrow X \twoheadrightarrow A$ 写成 K，其中 K 是紧致的， A 是阿代尔的。对偶情形类似，$K' \hookrightarrow X^\vee \twoheadrightarrow A'$。因此， $A'^\vee \hookrightarrow X \twoheadrightarrow K'^\vee$ 是一个正合列，其中 $A'^\vee$ 是阿代尔的， $K'^\vee$ 是离散的。根据第（3）部分，从拟阿代尔对象到离散对象的映射必有有限像。因此， $K'^\vee$ 是有限的，进而 K 是有限的。现在回忆 $K \subseteq X$。由于 X'、X'' 是阿代尔的（因而无挠），正合列 $X' \hookrightarrow X \twoheadrightarrow X''$在遗忘拓扑后表明 X 是无挠阿贝尔群的扩张，因而自身也无挠[12]。由于 $K \subseteq X$ 完全由挠元素构成，我们必有 $K = 0$。但这意味着 $X \cong A$，从而表明 X 是阿代尔的。□

4.5. 连通模。我们汇总了关于 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 中连通性和内射对象的一些观察。这些结果推广了 [Bra19、AB19] 中的刻画。总的来说，情况有些复杂。设 $X \in \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$。我们称

$$\mathrm{aco}(X) := \bigcup_{f\in \mathrm{Hom}_{\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}}(\mathbb{A}_S, X)} \mathrm{im}_{\mathsf{Set}}(f\colon \mathbb{A}_S \longrightarrow X), \tag{4.18}$$

即所有从 S-阿代尔到X的 $\mathcal{O}_S$-模同态的集合论像之并，也就是 X的阿代尔核心。

请注意， $\mathbb{A}_S$除了是一个 $\mathcal{O}_S$-模之外，也是一个拓扑环。设 $f(x)$ $g(y)$ $\in$aco(X) 且 $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_S$。由连续的 $\mathcal{O}_S$-模映射

$$\mathbb{A}_S \xrightarrow{\triangle} \mathbb{A}_S \oplus \mathbb{A}_S \xrightarrow{(\cdot x, \cdot y)} \mathbb{A}_S \oplus \mathbb{A}_S \xrightarrow{(\alpha f, \beta g)} X \oplus X \xrightarrow{+} X$$

$$s \longmapsto (s,s) \longmapsto (sx, sy) \longmapsto (\alpha f(sx), \beta g(sy)) \longmapsto \alpha f(sx) + \beta g(sy),$$

任意元素 $\alpha f(x) + \beta g(y)$ 都可以是 $1_{\mathbb{A}_S}$ 的像，因此集合 aco(X) 是 X的一个代数 $\mathcal{O}_S$-子模。

例 4.22。在 $\underline{\mathsf{LCA}_{\mathbf{Z}}}$ 中，条件 aco$(X) = X$ 等价于是内射对象，而条件 aco$(X) = X$ 等价于连通（两者均由 $\mathbb{A}_{\{\infty\}} = \mathbb{R}$ 和[Mos67，定理 3.2 及其推论 2] 得出）。

例 4.23。对式 4.18 中所有 f 求并的重要性，可由以下事实看出：设 $C \in \mathsf{LCA}_{\mathbf{Z}}$ 紧致。那么，存在一个像稠密的连续群同态 $f\colon \mathbb{R} \to C$，当且仅当 C 连通且有一个基数为连续统势 $\leq \mathfrak{c}$ 的开邻域基 [Arm81，命题 5.16 (a),(c)]。我们认为，条件 aco$(X) = X$ 随规模变化时表现得更好。~~关于这~~类问题的更多内容，见 §B。

[12]证明无挠阿贝尔群在所有阿贝尔群中扩张封闭，是一道非常基础的经典习题。

引理 4.24。LCA$\mathcal{O}_S$ 中每个连通模都同构于 $V \oplus K$，其中 V 是一个向量$\mathcal{O}_S$-模， K 是一个紧致连通 $\mathcal{O}_S$-模。

(1) 庞特里亚金对偶性将紧致连通模映为离散的 $\mathcal{O}_S$-平坦模，反之亦然。(2) 如果 S 只包含无穷位，则 LCA$\mathcal{O}_S$ 中的每个内射对象都是连通的。(3) 任意紧致连通模 K ，只要 $K^\vee$ 是有限生成的 $\mathcal{O}_S$-模，就是 LCA$\mathcal{O}_S$中的内射对象。除非 S 包含所有赋值，否则总存在某个紧致连通 K 不是内射对象。(4) 如果 S 包含所有赋值，那么每个紧模都是连通且内射的。(5) 如果 $I \in$LCA$\mathcal{O}_S$ 是一个内射对象，那么 $\operatorname{aco}(X) = X$。

利用 (5) 可以直接证明 (2)：如果 S 只包含无穷位，那么 $\mathbb{A}_S$ 是一个实向量空间，因而是连通的，所以 aco(X) 必须包含在X的单位元的连通分支中。

证明。假设 $X \in$ LCA$\mathcal{O}_S$ 是连通的。由定理 4.19 (1)，存在正合列 $Q \hookrightarrow X \twoheadrightarrow D$ ，其中 D 是离散的。由于 X 是连通的， D也必定连通，因此 $D = 0$。由定理 4.19 (2)，存在正合列 $K \hookrightarrow X \twoheadrightarrow A$ ，其中 K 是一个紧致的 $\mathcal{O}_S$-模，而 A 是阿代尔的。写作$A \simeq V \oplus A'$ ，其中 V是一个向量 $\mathcal{O}_S$-模，而 A' 是无向量阿代尔。由定理 4.12 (2)， A' 是全不连通的。由于 $X \twoheadrightarrow A \twoheadrightarrow A'$ 是满射， A' 也必定连通，因此 $A' = 0$。我们得到一个正合列 $K \hookrightarrow X \twoheadrightarrow V$。由于根据定理 4.19 (5)， V是一个射影对象，该列分裂。利用这个分裂，我们可以找到一个容许满射 $X \twoheadrightarrow K$，从而证明 K 是连通的。根据[Mor77，定理 30] 的推论 2，对偶的 $K^\vee$ 是离散的，且没有非平凡紧子群，即 $K^\vee$ 是无挠的。(1) 由于 $\mathcal{O}_S$ 是戴德金整环，因此可知 $K^\vee$ 在 $\mathcal{O}_S$上是平坦的。反过来，(离散的) 平坦模没有挠元，因此可以反向应用所引用的结果，推出庞特里亚金对偶是紧致且连通的。(2) [Bra19，命题 8.1 (1)](3) 由于 $K^\vee$ 是无挠的，利用戴德金整环上的有限生成平坦模是射影模这一事实即可。于是，定理 4.19 (4)表明 K 是一个内射对象。反过来，假设每个紧致连通模 K 都是 LCA$\mathcal{O}_S$中的内射对象。根据 (1)，这意味着每个代数平坦 $\mathcal{O}_S$-模都是射影模。因此，根据 [Lam91，定理 24.25]， $\mathcal{O}_S$ 是一个完美[13] 环 (按非交换环论/按 Bass 的定义)。由于 $\mathcal{O}_S$ 是一个整环， [Lam91，定理 23.24]推出 $\mathcal{O}_S$ 是一个局部环，其极大理想 $\mathfrak{m}$ 中的所有元素都是幂零的。因此， $\mathfrak{m} = (0)$，且 $\mathcal{O}_S$ 必定是一个域。根据假设， S 包含所有无穷位；由等式 3.1可知， S 必须包含所有赋值。(4) 如果 S 包含所有赋值，那么 $\mathcal{O}_S = F$，因此所有$\mathcal{O}_S$-模都是平坦的；(1)的反向结论表明，任意紧模都是连通的。此外， $K^\vee$ 始终是一个射影 F-模，即使它不是有限生成的。再次应用定理 4.19 (4)。(5) 假设 $y \in I$。考虑图表中的实线箭头

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_S & \hookrightarrow & \mathbb{A}_S & \twoheadrightarrow & \mathbb{A}_S/\mathcal{O}_S \\ & \searrow^{\cdot y} & \downarrow & & \\ & & I, & & \end{array}$$

其中，对角箭头根据其 $\mathcal{O}_S$-模结构将 $x \in \mathcal{O}_S$ 映射到 $xy \in I$。虚线箭头由 I 的内射性而存在。由式 4.18 可直接推出 $y \in$aco(X)。由于 y 是任意的，aco(X) $= X$。□

问题 4.25. 哪些对象 $X \in$LCA$\mathcal{O}_S$ 满足 aco(X) $= X$?

[13]这个术语与 Frobenius 无关。

4.6. 归纳紧生成模。

命题 4.26。包含 LCA$\mathcal{O}_{S,qa}$ ⊆LCA$\mathcal{O}_{S,icg}$ 诱导出稳定 ∞- 范畴 D^b_∞ (LCA$\mathcal{O}_{S,qa}$) $\xrightarrow{\sim}$ D^b_∞(LCA$\mathcal{O}_{S,icg}$) 之间的等价。

证明。范畴 LCA$\mathcal{O}_{S,qa}$ 是 LCA$\mathcal{O}_S$ 的全正合子范畴，因为它对扩张封闭（命题 4.21）。我们验证 [Kel96, 定理 12.1] 中的条件，从而得出该包含在同伦范畴 $Ho(\mathrm{D}^b_\infty(\mathrm{LCA}\mathcal{O}_{S,qa}))$ $\xrightarrow{\sim} Ho(\mathrm{D}^b_\infty$ (LCA$\mathcal{O}_{S,icg}$))上诱导三角等价。同上引文的条件 C1相当于证明：对每个 $X \in \mathrm{LCA}\mathcal{O}_{S,icg}$，都存在一个正合列 $X \hookrightarrow N \twoheadrightarrow N'$，使得 $N \in \mathrm{LCA}\mathcal{O}_{S,qa}$。取定义 4.8中的 $H \subseteq X$。那么 $H \in$ LCA $\mathcal{O}_{F,cg}$ 并且

$$X = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{O}_S^\times} \alpha H = \varinjlim_{\alpha\in\mathcal{O}_S^\times} H. \tag{4.19}$$

（即余极限中的所有模都是 H，但过渡态射都具有 $H \hookrightarrow \alpha H$ 的形式）。存在一个同构 $H \simeq V\oplus G\oplus C$，其中 V 是一个向量 $\mathcal{O}_F$-模，G 是一个底层群为 $\mathbf{Z}^n$、其中某个 $n<\infty$ 的离散 $\mathcal{O}_F$-模，而 C 是一个紧致 $\mathcal{O}_F$- 模（利用 [Bra19, 定理 6.4 (2)], ，以及 $\mathcal{O}_F$ 是一个戴德金整环这一事实）。首先，定义

$$\tilde{G} := \varinjlim_{\alpha\in\mathcal{O}_S^\times} G,$$

˜，其中过渡映射如式 4.19 所示。由于每个 G 都是离散的，G 也是离散的，并且在代数上与 ˜ $\mathcal{O}_S \otimes_{\mathcal{O}_F} G$ 一致。我们注意到，$G \in$ LCA$\mathcal{O}_S$ 是离散的。注意，由于 G 是有限˜生成的（无挠）$\mathcal{O}_F$-模，G 是有限生成的（无挠）$\mathcal{O}_S$-模。接下来，V 必然已经是一个局部紧 $\mathcal{O}_S$-模。为此，只需注意所有 $\alpha \in \mathcal{O}_S$ 必然通过双射作用于 V，因为它是一个 F-向量空间。此外，V 是 σ-紧致的，因此 Pontryagin 开映射定理（[Mor77，第 23 页，定理 3]）迫使乘以任意 α˜ 都是一个同胚。特别地，余极限 V:=colim$_{\alpha\in\mathcal{O}_S^\times} G$ 本身就是 V，因为所有过渡˜ ˜ ˜ ˜ ˜映射都是同构。我们得出 $X \cong V\oplus G\oplus C$。由于 $V, C \in$ LCA$\mathcal{O}_S$,qa，因此还需为 G 找到˜ ˜一个分解。由于 G 是有限生成的无挠 $\mathcal{O}_S$-模，它实际上是投射的（因为 $\mathcal{O}_S$ 是一个戴德金整环）。现在，将阿代尔序列 $\mathcal{O}_S \hookrightarrow \mathbb{A}_S \twoheadrightarrow \mathbb{A}_S/\mathcal{O}_S$˜ 在 $\mathcal{O}_S$ 上作（拓扑）张量[14]，得到 G，见式 4.10。正如同上引文所述，$\mathbb{A}_S$ 是阿代尔的，而 $\mathbb{A}_S/\mathcal{O}_S$ 是拟阿代尔的（因为它是一个紧致 $\mathcal{O}_S$- 模[15]）。因此，该序列

$$X \hookrightarrow \tilde{V} \oplus (\tilde{G} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbb{A}_S) \oplus \tilde{C} \twoheadrightarrow \tilde{G} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbb{A}_S/\mathcal{O}_S$$

具备我们对条件 C1 所需的所有性质。对于条件 C2，我们需要检查：只要 $Q' \hookrightarrow Q \overset{q}{\twoheadrightarrow} X$ 属于 LCA$\mathcal{O}_{S,}$ $_{icg}$，且 $Q', Q \in$ 属于 LCA$\mathcal{O}_{S,qa}$，就必须有 $X \in$ 属于 LCA$\mathcal{O}_{S,qa}$。这显而易见：写作 $Q = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{O}_S^\times} \alpha C$，其中 C 是一个紧致的 $\mathcal{O}_F$-模。那么 $X = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{O}_S^\times} \alpha q(C)$，其中 $q(C)$ 也是开集，因为 q 是开映射；它还是紧致的，因为 C 是紧致的。□

引理 4.27. 包含 LCA$\mathcal{O}_{S,\ ad}$ ⊆LCA$\mathcal{O}_{S,\ qa}$ 诱导出局部化非交换动机之间的等价 $\mathcal{M}\mathrm{D}^b_\infty$(LCA$\mathcal{O}_{S,\ ad}$) $\xrightarrow{\sim}$ $\mathcal{M}\mathrm{D}^b_\infty$ (LCA$\mathcal{O}_{S,\ qa}$)。

[14]利用 Moskowitz 张量积理论为其赋予拓扑 [Mos67]。关键在于，$\tilde{G}$ 是一个有限生成的 $\mathcal{O}_S$-模。[15]实际上，一种更直白、虽不那么概念化的论证是注意到，阿代尔对象的商必定是拟阿代尔的。这正是我们在同一证明中用来证明条件 *C2* 的论证，因此读者可以直接照用。

证明. 令 $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ qa}$ 表示紧致 $\mathcal{O}_S$-模[16]的满子范畴。容易看出，$\mathsf{C} \subseteq \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ qa}$ 是左 s-滤过的，因此存在 Verdier 局部化序列 $\mathsf{D}^b_\infty(\mathsf{C}) \to \mathsf{D}^b_\infty(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ qa}) \to \mathsf{D}^b_\infty(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ qa}/\mathsf{C})$。由可数积的 Eilenberg 诣论，$\mathcal{M}\mathsf{D}^b_\infty(\mathsf{C}) = 0$，因为紧模的乘积仍是紧的（Tychonov 定理）。最后，函子 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ ad} \to \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ qa}/\mathsf{C}$ 是正合的，由定理 4.19 可知本质满且完全忠实。因此，它是正合等价。□

4.7. 主纤维序列。本文主要关注非连通的 K-理论。然而，以下某些结果对所有局部化不变量都成立[BGT13，定义 8.1]。尽管如此，我们仍将它们记作 K，以聚焦于我们的主要应用。

定理 4.28. 设 F 是一个数域，S 是 F 的一个素位集合，允许是无限集，并且包含所有无穷位。设 A 是一个稳定的可呈范畴。设 $K\colon \mathsf{Cat}^{\mathrm{ex}}_\infty \to \mathsf{A}$ 是一个与滤过余极限相交换的局部化不变量。如果 $\#S = \infty$，我们还需假设 K 保持可数积。那么

$$\begin{aligned} K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad}) &\cong \operatorname*{colim}_{S' \subseteq S,\ \#S' < \infty} K\left(\prod\nolimits_{v \in S \setminus S'} \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_v,fg} \times \prod\nolimits_{v \in S'} \mathsf{Mod}_{F_v,fg}\right) \\ &\cong \prod\nolimits'_{v \in S} K(F_v) : K(\mathcal{O}_v), \end{aligned} \tag{4.20}$$

证明。由命题 4.15 和等式 4.11 可知，正合范畴之间的正合等价会在 $\mathsf{Cat}^{\mathrm{ex}}_\infty$ 中诱导其导出稳定 ∞-范畴之间的等价，因此根据对该不变量所作的假设，结论立即成立 K。□

定理 4.29. 设 F 是一个数域，S 是 F 的一个赋值集合，可以是无限的，并且包含所有无穷位。设 A 是一个稳定的可呈现 ∞-范畴。设 $K\colon \mathsf{Cat}^{\mathrm{ex}}_\infty \to \mathsf{A}$ 是一个局部化不变量（它不一定与滤过余极限可交换）。那么以下序列

$$K(\mathcal{O}_S) \longrightarrow K\left(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad}\right) \longrightarrow K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S})$$

由正合函子 $(-) \mapsto (-) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbb{A}_S$ 作为第一个箭头所诱导，是 A 中的一个纤维序列。

这推广了 [Bra18] 的主纤维序列（对应于 $S = S_\infty$ 仅为无穷位的特殊情形）以及 [AB19]（其中 S 是所有赋值）。

我们引入以下简写

$$\prod_{v \in S}{}' K(F_v) : K(\mathcal{O}_v) := \operatorname*{colim}_{S' \subseteq S,\ \#S' < \infty} \prod\nolimits_{v \in S \setminus S'} K(\mathcal{O}_v) \times \prod\nolimits_{v \in S'} K(F_v), \tag{4.21}$$

其中，余极限中的过渡映射 $K(\mathcal{O}_v) \to K(F_v)$ 由正合函子 $(-) \mapsto (-) \otimes_{\mathcal{O}_v} F_v$ 诱导。下面这个上述定理的版本需要更强的假设，但能更明确地描述中间项的形式。

定理 4.30. 设 F 是一个数域，S 是 F的一个赋值集合，可能是无限的，并且包含所有无穷位。假设 A 是一个稳定的可呈现 ∞范畴。假设 $K\colon \mathsf{Cat}^{\mathrm{ex}}_\infty \to \mathsf{A}$ 是一个与滤过余极限相交换的局部化不变量。如果 $\#S = \infty$，我们还需要假设 K 保留可数积。那么序列

$$K(\mathcal{O}_S) \longrightarrow \prod_{v \in S}{}' \left(K(F_v) : K(\mathcal{O}_v)\right) \longrightarrow K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}) \tag{4.22}$$

由正合函子 $(-) \mapsto (-) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbb{A}_S$ 诱导，并以其为第一个箭头，是 A 中的一个纤维序列。

[16]由于庞特里亚金对偶性给出了与 $\mathsf{Mod}^{op}_{\mathcal{O}_S}$ 的等价，我们看到 C 是一个阿贝尔范畴。这可以用来给出其他证明，不过我们不再进一步讨论。

定理 4.29 和定理 4.30 的证明。（步骤 1）我们得到图表

$$\begin{array}{ccccc} K(\mathsf{Mod}_{\mathcal{O}_S,fg}) & \longrightarrow & K(\mathsf{Mod}_{\mathcal{O}_S}) & \longrightarrow & K(\mathsf{Mod}_{\mathcal{O}_S}/\mathsf{Mod}_{\mathcal{O}_S,fg}) \\ \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau} \\ K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,icg}) & \longrightarrow & K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}) & \longrightarrow & K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}/\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,icg}) \end{array} \tag{4.23}$$

如下：(1) 包含 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,icg} \subseteq \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$（分别地，$\mathsf{Mod}_{\mathcal{O}_S,fg} \subseteq \mathsf{Mod}_{\mathcal{O}_S}$）诱导出相应导出 ∞-范畴的 Verdier 局部化序列，因为根据命题 4.21，它们是左 s-滤过的（分别是阿贝尔范畴中的 Serre 子范畴）。参见 [Hv19b、Hv19a、§8.3][17]。(2) 向下箭头仅表示将顶行的模视为赋有离散拓扑。对于有限生成模，取 $K := \{\pm b_1, \dots, \pm b_r\}$，其中 b_1，……，b_r是一组生成元，即可表明它是归纳紧生成的。（步骤 2）容易验证函子 $\mathsf{Mod}_{\mathcal{O}_S}/\mathsf{Mod}_{\mathcal{O}_S,fg} \to \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}/\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,icg}$是正合范畴之间的正合等价：它是正合的。根据定理 4.19，任意 $X \in \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 都有一个正合列 $Q \hookrightarrow X \twoheadrightarrow D$，其中 Q 是拟阿代尔的（因此根据命题 4.21，(1)，是归纳紧生成的），而 D 是离散的。因此，它本质满。接下来注意，离散的 $\mathcal{O}_S$-模是归纳紧生成的，当且仅当它是有限生成的[18]。因此，箭头 τ 是 A 中的等价。由此可知，图 4.23 中左侧的方块是双笛卡尔的。然而，$K(\mathsf{Mod}_{\mathcal{O}_S}) = 0$ 根据 Eilenberg 诡论成立，因为 $\mathsf{Mod}_{\mathcal{O}_S}$ 具有可数余积。此外，由投射对象满子范畴的包含所诱导的箭头 $K(\mathcal{O}_S) \to K(\mathsf{Mod}_{\mathcal{O}_S,fg})$ 是等价，因为 $\mathcal{O}_S$ 是正则的，因此 $\mathsf{D}^b_\infty(\mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_S,fg}) \to \mathsf{D}^b_\infty(\mathsf{Mod}_{\mathcal{O}_S,fg})$ 诱导出一个等价。由此得到纤维序列 $K(\mathcal{O}_S) \to K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,icg}) \to K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S})$。（步骤 3）沿用这一构造，箭头 η 由如下函子诱导：该函子将有限生成投射 $\mathcal{O}_S$-模 X 映到其自身，并赋予离散拓扑。将 $\mathcal{E}(-)$ 记为正合列 ([Büh10，练习 3.9]) 的正合范畴。我们声称，箭头 η 与由函子 $(-) \mapsto (-) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbb{A}_S$ 所诱导的箭头同伦。为此，我们注意到函子

$$\mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_S,fg} \longrightarrow \mathcal{E}\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,icg}, \qquad X \mapsto (X \hookrightarrow X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbb{A}_S \twoheadrightarrow X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbb{A}_S/X)$$

是正合的（其中 $X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbb{A}_S$ 赋予阿代尔`的拓扑。因此它是阿代尔的，而商 $X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbb{A}_S/X$ 除以离散的 X 是紧致的）。因此，由于 K 也是加性不变量，若将 f_{i*} $(i = 1, 2, 3)$ 记作三个位置（左、中、右）所诱导的投影，则有正合列 $f_{2*} = f_{1*} + f_{3*}$：$K(\mathcal{O}_S) \to K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,icg})$。现在注意到，$f_{3*}$ 可分解为 $K(\mathcal{O}_S) \to K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\text{紧模}}) \to K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,icg})$；这里所说的紧模，即 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\text{紧模}}$，是归纳紧生成模的满子范畴。由 Tychonov 定理可知，紧模的任意乘积仍是紧模，因此 $K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\text{紧模}})$ 可由 Eilenberg 诡论得到。因此，$f_{3*} = 0$。由此可得 $f_{1*} = f_{2*}$。[19] (步骤 4) 根据命题 4.26 和引理 4.27，我们得到 $K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,icg}) \cong K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,qa}) \cong K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad})$。现在利用命题 4.15，存在范畴的正合等价 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad} \cong \prod'_{v \in S} \mathsf{Mod}_{F_v,fg}$。这证明了定理 4.29，并将其与定理 4.28 结合，还可得到定理 4.30。□

例4.31. 在 [AB19] 中，已经证明 $K_1(\mathsf{LCA}_F)$ 与幺理想类群相同。在当前情形下，这对应于令 S 为所有赋值的集合。上述计算

[17]对于顶行，[Sch04] 中的 Schlichting 局部化定理也能得出这一点。对于底行，原始的 Quillen 局部化定理 [Qui73] 就足够了。不过，为了使图表交换，最好使用同一个局部化定理（否则就必须证明它们给出的纤维序列彼此兼容）。Henrard–van Roosmalen 局部化定理的一大优势在于，它是目前已知的最一般的正合范畴局部化定理（甚至适用于单侧正合范畴）。[18]利用这样一个事实：离散局部紧阿贝尔群是紧生成的，当且仅当它同构于整数集 $\mathbb{Z}^n$，其中某个 n [Mos67, Thm. 2.5]。这就迫使 H 定义 4.8 中的对象成为有限生成的 $\mathcal{O}_F$-模。

[19] $K\ \mathcal{O}_S \ \to\ K \qquad \mathcal{O}_S \qquad \xrightarrow{a}$ 我们 K 强调，不存在相应的“对偶”分解 ( ) (LCA，离散) ($\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ icg}$)，因为离散模只有在有限生成时才是归纳紧生成的。因此，这种假设中的箭头 a 并不存在，也就没有可以证明 $f_{1*} = 0$ 的 Eilenberg 诡论。

表明，这一观察无法推广到更小的 S。由定理 4.30 可得长正合序列

$$K_1(\mathcal{O}_S) \to \prod_{v\in S}{}' \left(F_v^\times : \mathcal{O}_v^\times\right) \to K_1(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}) \to K_0(\mathcal{O}_S) \xrightarrow{\beta} \prod_{v\in S} \mathbf{Z}.$$

由于 $\mathcal{O}_S$是戴德金整环[20] $K_0(\mathcal{O}_S) \cong$整数集$\oplus \mathrm{Cl}(\mathcal{O}_S)$，并且容易看出，$\beta$在秩直和项上是单射[21]，且将 $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_S)$ 映为零（这是必然的，因为类群是挠群，而映射的目标是无挠的）。由 Bass–Milnor–Serre [BMS67] 以及局部化，我们有 $K_1(\mathcal{O}_S) \cong \mathcal{O}_S^\times$。因此，我们得到一个正合列

$$C_{F,S} \hookrightarrow K_1(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}) \twoheadrightarrow \mathrm{Cl}(\mathcal{O}_S),$$

其中 $C_{F,\,S}$是 S-id`ele 类群（属于） $F$。因此，只要 $\mathcal{O}_S$ 的理想类群是平凡的，$K_1(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S})$ 就与 id`ele 类群一致。

4.8. 环结构。本节中，K 表示非连通 K-理论。但更一般地，任意对称幺半 ∞-范畴之间的松弛幺半局部化不变量，也可以进行以下构造。

双正合对称幺半结构

$$\mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_S,fg} \times \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_S,fg} \longrightarrow \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_S,fg},$$

将 $(X,Y) \mapsto X \otimes_{\mathcal{O}_S} Y$ 映至 E_∞，在 K-理论上诱导出一个环结构

$$K(\mathcal{O}_S) \otimes_{\mathsf{Sp}} K(\mathcal{O}_S) \longrightarrow K(\mathcal{O}_S).$$

存在一个类似的双正合配对

$$\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S} \times \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_S,fg} \longrightarrow \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}. \tag{4.24}$$

它可以按如下方式构造：令 $\mathsf{Free}_{\mathcal{O}_S,\,fg}$ 表示有限生成自由 $\mathcal{O}_S$-模的正合范畴。它由 $\mathcal{O}_X$ 加性生成。因此存在唯一的配对

$$\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S} \times \mathsf{Free}_{\mathcal{O}_S,fg} \longrightarrow \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$$

使得 $(-)\otimes\mathcal{O}_S\colon X\otimes\mathcal{O}_S := X$ 是单位函子。它唯一地延拓到幂等完备化 $(-)^{\mathrm{ic}}$。由于 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 已经是幂等完备的（它具有所有核），且 $\mathsf{Free}^{\mathrm{ic}}_{\mathcal{O}_S,\,fg} \cong \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_S,\,fg}$，我们得到式 4.24。我们注意到，阿代尔模会映至阿代尔模：

$$\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad} \times \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_S,fg} \longrightarrow \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad}.$$

在备注 4.18 中，我们建立了一个双正合对称幺半结构

$$\otimes\colon \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad} \times \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad} \longrightarrow \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad}$$

在 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\,ad}$ 上。这将 K-理论 $K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\,ad})$ 呈现为一个 E_∞-环谱，可形象地写作

$$K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad}) \otimes_{\mathsf{Sp}} K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad}) \longrightarrow K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad}). \tag{4.25}$$

我们可以将上述讨论概括如下。

命题 4.32. 假设 K 指的是非连通的 K-理论。采用上述§4.8 中的构造，$K(\mathcal{O}_S)$ 是一个 E_∞-环谱，$K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\,ad})$ 是一个 E_∞-环谱，$K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S})$ 是一个 $K(\mathcal{O}_S)$-模，而由 $X \mapsto \mathbb{A}_S \otimes_{\mathcal{O}_S} X$ 诱导的 $K(\mathcal{O}_S) \to K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\,ad})$ 使 $K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\,ad})$ 成为一个 $K(\mathcal{O}_S)$-代数。

[20]本文采用如下约定：戴德金整环的克鲁尔维数为 ≤ 1，因此域也包含在这一概念之内。[21]在本节的基本假设下，S 包含所有无穷位，因此 S 非空。

命题 4.33. 如果我们取局部化不变量 $K\colon \mathsf{Cat}_\infty^{\mathrm{ex}} \to \mathsf{Sp}$，使其以谱为值，与滤过余极限交换，并且当输入为对称幺半稳定 ∞-范畴时具有松对称幺半结构，那么上述结果还可以补充如下内容：

(1) 式 4.20 中的谱等价可以提升为 E_∞-环谱的等价。(2) 式 4.22 中的第一个箭头是 E_∞-环谱之间的映射。

证明。(1) 该等价由命题 4.15 给出的正合函子 Ψ 诱导。根据备注 4.18，$\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ ad}$ 上的幺半结构经过构造，使得 Ψ 是一个对称幺半等价。因此，根据函子性，该等价是环谱的等价。(2) 这是成立的，因为底层正合函子是松对称幺半的。□

5. Restricted product of descent spectral sequences

本节中，K 表示非连通的 K-理论。设 F 为一个数域。设 S 为 F 的一个（可能是无限的）赋值集合，其中包含所有无穷位，并满足 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_S$。回忆命题 4.15，

$$K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad}) \cong \operatorname*{colim}_{S'\subseteq S,\ \#S'<\infty} \prod_{v\in S\setminus S'} K(\mathcal{O}_v) \times \prod_{v\in S'} K\left(F_v\right). \tag{5.1}$$

本节我们希望证明这一结果的一个 K(1)-局部类比，也就是说，我们希望将每个字母“K”替换为“$L_{K(1)}K$”。

我们用 Sp 表示普通稳定同伦范畴，用 K 表示 K(1)-局部同伦范畴。我们将使用额外的上标来说明在哪个范畴中取（余）极限。例如，$\mathrm{colim}^{\mathsf{K}}$ 或 $\bigoplus^{\mathsf{K}}$ 表示在 K 中取相应的余极限，然后将其表示为 Sp 中的一个 K(1)-局部对象。也就是说：我们从不真正以内在于范畴 K 的方式进行研究，而总是只考察它在 Sp 中的局部对象代表。

既然如此，让我们回到寻找等式 5.1 的 K(1)-局部类比这一问题。首先注意，极限和余极限的泛性质给出了自然映射

$$L_{K(1)}\prod\nolimits^{\mathsf{Sp}}(\ldots) \longrightarrow \prod\nolimits^{\mathsf{K}} L_{K(1)}(\ldots) \tag{5.2}$$

$$\mathrm{colim}^{\mathsf{K}}\ L_{K(1)}(\ldots) \longrightarrow L_{K(1)}\left(\mathrm{colim}^{\mathsf{Sp}}\ (\ldots)\right). \tag{5.3}$$

先验而言，它们都没有理由是等价。

定理 5.1. 设 F 为一个数域，S 为 F 的一个（可能无限的）赋值集合，其中包含所有无穷位，且满足 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_S$。那么，从等式 5.1 的左侧出发，由等式 5.2 和等式 5.3 中的态射组成的之字形链诱导出一个谱的等价

$$L_{K(1)}K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad}) \cong \operatorname*{colim}^{\mathsf{K}}_{S'\subseteq S,\ \#S'<\infty} \prod\nolimits^{\mathsf{K}}_{v\in S\setminus S'} L_{K(1)}K(\mathcal{O}_v) \times \prod\nolimits^{\mathsf{K}}_{v\in S'} L_{K(1)}K\left(F_v\right). \tag{5.4}$$

这里 K 表示非连通 K-理论。

对于直积，无需使用上标 $\prod^{\mathsf{K}}$，因为直积在谱范畴 Sp 和 K 中相同；不过我们仍将其加上，以强调它与式 5.1 中谱范畴 Sp 的表述完全类比。

有限 S 的定理 5.1 证明。若 S 有限，则式 5.1 中的余极限是沿有限有向系统取的；又因为 $L_{K(1)}$ 与有限余极限交换，我们可以选取 $S' = S$，得到

$$L_{K(1)}K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad}) \cong L_{K(1)}\left(\prod\nolimits_{v\in S'} K\left(F_v\right)\right) \cong \prod\nolimits_{v\in S'} L_{K(1)}\left(K\left(F_v\right)\right)$$

因为 $L_{K(1)}$ 与有限乘积交换。□

本节其余部分将致力于证明在 S 可能无限的情况下的定理 5.1 .

5.1. 个体下降谱序列。我们首先回顾个体谱序列的形式，它们将用于构造受限直积。即便只是为了引入记号，我们也快速介绍一下，不过仅限于我们之后实际关心的那些环。假设 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_S$。那么每个环 $R = \mathcal{O}_S$、$\mathcal{O}_v$、F_v 都包含 $\frac{1}{p}$，并且具有 étale$p$-上同调维数 ≤ 2。事实上，除了实处和复位的 $\mathcal{O}_v = F_v$ 外，所有情况下该维数都恰为 2。因此，对于任意 $k \geq 1$，Thomason 下降谱序列都是收敛的，且其 E_2 页为

$$E_2^{i,j} := H^i(R, \mathbf{Z}/p^k(-\tfrac{j}{2})) \Rightarrow \pi_{-i-j} L_{K(1)} K(R) \otimes_{\mathsf{Sp}} \mathbb{S}/p^k, \tag{5.5}$$

但至多有三列含有非零项。因此，E_2页的形式如下

$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
2	0	$H^0(R, \mathbf{Z}/p^k(-1))$	$H^1(R, \mathbf{Z}/p^k(-1))$	$H^2(R, \mathbf{Z}/p^k(-1))$	0
1	0	0	0	0	0
0	0	$H^0(R, \mathbf{Z}/p^k(0))$	$H^1(R, \mathbf{Z}/p^k(0))$	$H^2(R, \mathbf{Z}/p^k(0))$	0
−1	0	0	0	0	0
−2	0	$H^0(R, \mathbf{Z}/p^k(1))$	$H^1(R, \mathbf{Z}/p^k(1))$	$H^2(R, \mathbf{Z}/p^k(1))$	0
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	−1	0	1	2	$\cdots$

(5.6)

其微分 d_2: $E_2^{i,j} \to E_2^{i+2,j-1}$ 具有上同调型。在任何非零行中，微分必定指向一个零项，因此谱序列必定在 E_2页就已坍缩。由此，我们得到典范同构 $\pi_{2j-1} L_{K(1)} K(R) \otimes \mathbb{S}/p^k \cong H^1(R, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(j))$ 和正合列

$$H^2(R, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(j+1)) \hookrightarrow \pi_{2j} L_{K(1)} K(R) \otimes_{\mathsf{Sp}} \mathbb{S}/p^k \twoheadrightarrow H^0(R, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(j)) \tag{5.7}$$

分别对所有 $j \in \mathbf{Z}$ 成立。阴影区域突出显示了 π_0对角线。

5.2. $K(1)$在内部。我们首先计算等式 5.4 的右侧。这一计算主要是 $K(1)$-局部同伦范畴中的内在计算。

5.2.1. P群。

定义 5.2. 设 p 为奇素数。设 F 为数域，S 为 F 的一个（可能是无限的）赋值集合，包含无穷位，并且满足 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_S$。记 $G_S := \mathrm{Gal}(F_S/F)$，其中 F_S 是 F 的最大伽罗瓦扩张，且在 S 之外非分歧。若 M 是有限的 p-primary G_S- 模，则定义

$$P_S^i(F, M) := \prod_{v \in S \setminus S_\infty}{}' H^i(F_v, M) : H^i_{\mathrm{ur}}(F_v, M)$$

为阿贝尔群的受限直积。注意，v 仅遍历有限处。[22]

注 5.3. 此定义与 [Har20, Ch. 17, Def. 17.5] 一致。Harari 的 v 遍历 S中的所有处，但他采用约定（[Har20, Def. 17.4]）：对于无穷位，H^0 实际指的是 Tate 上同调 $\widehat{H}^0$。不过，在我们的情形下，这恰好为零：对于复位，$\widehat{H}^0(F_v, M)$ 总是零；对于实处，$2\widehat{H}(F_v, M) = 0$，因为 $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ 的阶为 2。由于 M 的阶为奇数，这个群也消失。此定义也与 Milne[Mil06, Ch. I, §4, before Lemma 4.8] 以及 [NSW08, Ch. VIII, §5] 相容。

[22]从本文的角度来看，在这个定义中略去无穷位似乎相当随意且不自然。我们这样做是为了使定义与文献中的做法一致。以这种方式定义 P-群有 *are* 个理由。问题在于，无穷位处的局部对偶必须用 Tate 上同调群来表述；若使用通常的伽罗瓦上同调群，这种对偶性在所有实位和复位处都会退化。更多相关内容，参见陷阱 A.2。

5.2.2. 导出完备化。我们首先回顾计算 $K(1)$-局部余极限所需的一些基础知识。设 p 为一个素数。记 Ab 为阿贝尔群的阿贝尔范畴。若群 $A \in \mathsf{Ab}$ 的自然映射 $A \to A := \lim_{n\to\infty} A/p^nA$ 是同构，则称其为 p-完备群。我们将 $\widehat{\mathsf{Ab}}^p$ 记作导出 p-完备阿贝尔群[23], 的范畴，即 Ab 中包含所有 p-完备群的最小阿贝尔全子范畴。一个很好的参考文献是 [HS99, Appendix A]。我们只需要几个性质：定义

$$L_i(A) := \mathrm{Ext}^{1-i}_{\mathsf{Ab}}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p, A).$$

这些是函子 $L_i\colon \mathsf{Ab} \to \mathsf{Ab}_p \subset \mathsf{Ab}$，且 L_0 是右正合的， L_1 是它唯一的高阶左导函子。也就是说，对于任意正合列 $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$，序列

$$0 \to L_1A' \to L_1A \to L_1A'' \to L_0A' \to L_0A \to L_0A'' \to 0 \tag{5.8}$$

是正合的。回顾一下，整数集 Z 的整体维数为 1（是一个遗传环），因此对于 $i \neq 0$，1，$\mathrm{Ext}^i_{\mathsf{Ab}} = \mathrm{Ext}^i_{\mathsf{Mod}_{\mathbf{Z}}}$ 为零。主要工具是下面这个简单事实。

引理 5.4。（[HS99，定理 A.2 (a)]）对于任意阿贝尔群 A,

$$A_{\mathrm{div}} \hookrightarrow L_0A \twoheadrightarrow \widehat{A}$$

$\widehat{\ }$是正合的，其中 A_{div} 表示 p-可除元素构成的子群，而 $A := \lim_{n\to\infty} A/p^nA$ 是经典的 p-完备化。

5.2.3. 主要计算。

引理 5.5. 设 F 是一个数域，并假设 $S_\infty \subseteq S$。设 p 是一个奇素数。假设 M 是一个有限的 p-主伽罗瓦模。那么

(1) $L_0P^i_S(F,M) \cong P^i_S(F,M)$ *for all* $i \in \mathbf{Z}$.
(2) $L_1P^i_S(F,M) = 0$ *for all* $i \in \mathbf{Z}$.

证明. 对每个 i，都存在一个包含

$$P^i_S(F,M) \subseteq \prod_{v\in S} H^i(F_v, M). \tag{5.9}$$

更确切地说，对于 $i = 0$，在所有情况下这确实都是等式。对于 $i = 1$，若 S 有限，则这是等式；若 S 无限，通常则是对一个严格较小子群的包含。该直积带有到各个 $H^i(F_v, M)$ 的投影算子，而后面的群总是有限的（由局部类域论可知）。由于 p-可除元素的像必定仍是 p-可除的，而有限群没有非零的 p-可除元素，我们得出 $P^i_S(F,M)_{\mathrm{div}} = 0$。因此，

$$L_1P^i_S(F,M) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p, P^i_S(F,M)) = 0$$

因为 $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ 中的每个元素都是 p-可除的。这就证明了 (2)。对于 (1)，引理 5.4 表明我们只需计算经典的 p-完备化。由于 M 有限，当 k 充分大时， $p^k \cdot M = 0$。因此， $p^k \cdot P^i_S(F,M) = 0$，从而逆极限最终为单位元。□

引理 5.6. 设 F 是一个数域， S 是 F 的一个（可能无限的）素位集合，包含无穷位，并且满足 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_S$。假设 $k \geq 1$。定义

$$\mathfrak{X}_\infty := \operatorname*{colim}^{\mathsf{K}}_{S'\subseteq S,\ \#S'<\infty} \left(\prod_{v\in S\setminus S'} L_{K(1)}(K/p^k)(\mathcal{O}_v) \times \prod_{v\in S'} L_{K(1)}(K/p^k)\,(F_v)\right)$$

[23]这些概念还有其他常用名称。Bousfield–Kan [BK72], Mitchell、Hahn [HM07], 等人称之为 Ext-p-*complete groups*。例如，Barthel、Frankland、Hovey、Strickland [HS99，附录 A], [BF15，附录 A] 将其称为 L-*complete* 群。我们倾向于使用“导出完备”，因为这个名称更具描述性。

这是等式 5.4 的右侧，但与 Moore 谱 $\mathbb{S}/p^k$ 张量积。对等式 5.5 的 Thomason 下降谱序列（分别对应 $R = \mathcal{O}_v$ 和 F_v）取受限直积，可得一个收敛谱序列

$$E_2^{i,j} := \prod_{v\in S}{}' H^i(F_v, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(-\tfrac{j}{2})) : H^i(\mathcal{O}_v, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(-\tfrac{j}{2})) \Rightarrow \pi_{-i-j}\mathfrak{X}_\infty,$$

并且（正如对每个 Eq. 5.5 分别而言一样）它会坍缩为两列。值得注意的是，

(1) $\pi_{2j-1}\mathfrak{X}_\infty \cong P_S^1(F, \mathrm{Z}/p^k\mathrm{Z}(j))$，以及 (2) $P_S^2(F, \mathrm{Z}/p^k\mathrm{Z}(j+1)) \hookrightarrow \pi_{2j}\mathfrak{X}_\infty \twoheadrightarrow P_S^0(F, \mathrm{Z}/p^k\mathrm{Z}(j)) \oplus \bigoplus_{v\in S} H^0(F_v, \mathrm{Z}/p^k\mathrm{Z}(j))$，(3) 自然态射 $(-) \to L_{K(1)}(-)$ 诱导了一个从

$$\operatorname*{colim}^{\mathsf{Sp}}_{S'\subseteq S,\ \#S'<\infty} \left(\prod_{v\in S\setminus S'} L_{K(1)}(K/p^k)(\mathcal{O}_v) \times \prod_{v\in S'} L_{K(1)}(K/p^k)\,(F_v)\right)$$

到 $\mathfrak{X}_\infty$的等价。换言之：在 $K(1)$-局部同伦范畴中取余极限与否，并无区别。

备注 5.7。注意，偶数指标的同伦群有一个额外的直和项，对应于无穷位；这一项并非来自 P^0-群。出现这一项的原因如下：在通常的文献中，无穷位处 P^0-群里的 H^0 直和项使用 Tate 上同调。正如我们在备注 5.3 中回顾的，这些项只贡献 2-扭现象，因此在本文的设定中都消失了。然而，无穷位处的 Thomason 下降谱序列贡献的是这些位置上的普通（即未经 Tate 修正的）伽罗瓦上同调群 H^0 。即使在复位处，它们也可能非零，并会在 H^0-群中贡献 p-主挠。正是这些直和项，使得我们在引理 5.6 中看到它们与 P^0-群并列出现。简而言之：下降谱序列并不知道文明人选择在无穷位使用 Tate 上同调，因此它照常给出它一贯给出的结果：普通伽罗瓦上同调。由于 R 和 C 的 p-上同调维数为零（因为 p 是奇数），这番讨论只会影响 H^0-群。更多内容参见陷阱 A.2。

证明。无穷位只有有限个，因此 $L_{K(1)}$ 与它们的直积可交换。因此，在证明的其余部分，我们着重处理有限位，并默认将无穷位一并带上。我们使用 Thomason 下降谱序列计算每个 $\mathcal{O}_v$ resp. F_v 的 $L_{K(1)}(K/p^k)(-)$ 的同伦群。为简洁起见，我们只对 $\mathcal{O}_v$ 详细说明。我们得到

$$H^2(\mathcal{O}_v, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(j+1)) \hookrightarrow \pi_{2j}L_{K(1)}(K/p^k)(\mathcal{O}_v) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{O}_v, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(j))$$

and

$$\pi_{2j-1}L_{K(1)}(K/p^k)(\mathcal{O}_v) \cong H^1(\mathcal{O}_v, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(j))$$

对任意的 $j \in$Z 和 $k \geq 1$ 均成立。因此，对于偶数索引群，我们得到

$$\prod_{v\in S\setminus S'} H^2(\mathcal{O}_v, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(j+1)) \tag{5.10}$$

$$\hookrightarrow \pi_{2j}\left(\prod_{v\in S\setminus S'} L_{K(1)}(K/p^k)(\mathcal{O}_v)\right) \twoheadrightarrow \prod_{v\in S\setminus S'} H^0(\mathcal{O}_v, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(j)), \tag{5.11}$$

类似地，对于奇数索引群，

$$\pi_{2j-1}L_{K(1)} \prod_{v\in S\setminus S'} (K/p^k)(\mathcal{O}_v) \cong \prod_{v\in S\setminus S'} H^1(\mathcal{O}_v, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(j)). \tag{5.12}$$

对于 $L_{K(1)}(K/p^k)(F_v)$，计算过程类似。定义

$$\mathfrak{X}_{S'} := \prod_{v\in S\setminus S'} L_{K(1)}(K/p^k)(\mathcal{O}_v) \times \prod_{v\in S'} L_{K(1)}(K/p^k)(F_v), \qquad \text{and} \qquad \mathfrak{X}_\infty := \operatorname*{colim}^{\mathsf{K}}_{S'\subseteq S,\ \#S'<\infty} \mathfrak{X}_{S'},$$

即，

$$\mathfrak{X}_\infty = L_{K(1)}\left(\operatorname*{colim}^{\mathsf{Sp}}_{S'\subseteq S,\ \#S'<\infty} \mathfrak{X}_{S'}\right), \tag{5.13}$$

根据 Hovey 的计算 [Hov08，推论 3.5], 存在一个自然正合列

$$L_0(\operatorname{colim}^{\mathsf{Ab}}_{S'} \pi_{2j-1}\mathfrak{X}_{S'}) \hookrightarrow \pi_{2j-1}\mathfrak{X}_\infty \twoheadrightarrow L_1(\operatorname{colim}^{\mathsf{Ab}}_{S'} \pi_{2j-2}\mathfrak{X}_{S'}) \tag{5.14}$$

$\widehat{\ }$在 Ab 中（或等价地，在 Ab_p 中）。正如我们在记号中所强调的，内部余极限取在阿贝尔群范畴中[24]。由等式 5.12 可得

$$\begin{aligned}\operatorname{colim}^{\mathsf{Ab}}_{S'} \pi_{2j-1}(\mathfrak{X}_{S'}) &= \operatorname*{colim}_{S'}\left(\prod_{v\in S\setminus S'} H^1(\mathcal{O}_v, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(j)) \times \prod_{v\in S'} H^1(F_v, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(j))\right)\\ &= P^1_S(F, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(j)).\end{aligned}$$

F由等式 5.10，通过类似的计算可得到阿贝尔群的一个正合列

.15群（5

$$P^2_S(F, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(j)) \hookrightarrow \operatorname{colim}^{\mathsf{Ab}}_{S'} \pi_{2j-2}\mathfrak{X}_{S'} \twoheadrightarrow P^0_S(F, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(j-1)) \oplus \bigoplus_{v\in S_\infty} H^0(F_v, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(j-1)).$$

现在我们可以计算式 5.14 中的各项了。将式 5.15 作为导出完备化长正合序列（即式 5.8）的输入，利用引理 5.5 计算其中各项，得到（由于两个 L_1-项在 P^*_S-群上均消失），$L_1\left(\operatorname{colim}^{\mathsf{Ab}}_{S'} \pi_{2j-2}\mathfrak{X}_{S'}\right) = 0$，由此可知式 5.14 化简为

$$P^2_S(F, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(j)) \hookrightarrow \pi_{2j-1}\mathfrak{X}_\infty \twoheadrightarrow P^0_S(F, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(j-1)) \oplus \bigoplus_{v\in S_\infty} H^0(F_v, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(j-1)),$$

在此识别下，该序列中的两个箭头正是式 5.15 中的箭头。对于偶数编号的同伦群，计算过程类似，只是交换了部分项的角色。这就证明了 (1) 和 (2)。应用于式 5.13 时，自然态射 $(-) \to L_{K(1)}(-)$ 变为一个态射

$$\phi\colon \operatorname*{colim}^{\mathsf{Sp}}_{S'\subseteq S,\ \#S'<\infty} \mathfrak{X}_{S'} \longrightarrow \mathfrak{X}_\infty = L_{K(1)}\left(\operatorname*{colim}^{\mathsf{Sp}}_{S'\subseteq S,\ \#S'<\infty} \mathfrak{X}_{S'}\right). \tag{5.16}$$

现在，我们可以对左侧重复上述论证。上述推导均成立，而且更为简单。我们得到一个形状完全相同的下降谱序列。由于等式 5.16 中的映射 ϕ 在这两个谱序列之间诱导了一个同构，我们推得 ϕ 诱导了一个谱的等价。这就证明了 (3)。□

[24]我们强调这一点，是因为 $\widehat{\ }\mathsf{Ab}_p$ 中的余极限并不相同。事实上，它们相当于计算 L_0。

The proof also shows that the E_2-page of the spectral sequence reads

(5.17)

⋮	⋮	⋮	⋮
2	$P_S^0(F,\mathbf{Z}/p^k(-1)) \oplus \bigoplus_{v\in S_\infty} H^0(F_v,\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(-1))$	$P_S^1(F,\mathbf{Z}/p^k(-1))$	$P_S^2(F,\mathbf{Z}/p^k(-1))$
1	0	0	0
0	$P_S^0(F,\mathbf{Z}/p^k(0)) \oplus \bigoplus_{v\in S_\infty} H^0(F_v,\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(0))$	$P_S^1(F,\mathbf{Z}/p^k(0))$	$P_S^2(F,\mathbf{Z}/p^k(0))$
−1	0	0	0
−2	$P_S^0(F,\mathbf{Z}/p^k(1)) \oplus \bigoplus_{v\in S_\infty} H^0(F_v,\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(1))$	$P_S^1(F,\mathbf{Z}/p^k(1))$	$P_S^2(F,\mathbf{Z}/p^k(1))$
⋮	⋮	⋮	⋮
	0	1	2

其中只有三列非零，这显然正是受限直积版本的下降谱序列所应有的情形。同样，阴影区域标示了 π_0-对角线的位置。

5.3. $K(1)$ 在外侧。接下来，我们计算等式 5.4 的左侧。这主要是在普通稳定同伦范畴中的计算，并绕道进入动机范畴。

5.3.1. $K(1)$-局部整 ad `eles。

引理 5.8. 假设 $k \geq 1$。设 S' 是有限处组成的有限集，使得 $S' \subseteq S$。假定 S' 包含 S 中所有位于素数 p之上的赋值。那么自然态射

$$L_{K(1)}\left(\prod_{v\in S\setminus S'}(K/p^k)(\mathcal{O}_v)\right) \longrightarrow \prod_{v\in S\setminus S'} L_{K(1)}(K/p^k)(\mathcal{O}_v) \tag{5.18}$$

是一个等价。由于 $K(1)$-局部同伦范畴中的内在乘积可以在谱范畴 Sp 中计算，因此右侧乘积的含义没有歧义。

为此，我们需要深入了解如何通过对 Bott 元素求逆来计算 $L_{K(1)}$。证明有些冗长，故放在附录 §D 中。

5.3.2. 证明的总结。现在，我们已经为证明准备好了所有要素 f.

一般 S 情形下定理 5.1 的证明。取 $k \geq 1$。根据命题 4.15 并展开受限直积的定义（见 §4.2.1），我们得到

$$\begin{aligned} L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_{S,ad}}) &\cong L_{K(1)}\left(K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_{S,ad}}) \otimes_{\mathsf{Sp}} \mathbb{S}/p^k\right) \\ &\cong L_{K(1)}\left(K\left(\operatorname*{colim}_{S'\subseteq S,\ \#S'<\infty} \prod_{v\in S\setminus S'} \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_v,fg} \times \prod_{v\in S'} \mathsf{Mod}_{F_v,fg}\right) \otimes_{\mathsf{Sp}} \mathbb{S}/p^k\right) \\ &\cong L_{K(1)}\left(\operatorname*{colim}^{\mathsf{Sp}}_{S'\subseteq S,\ \#S'<\infty} (K/p^k)\left(\prod_{v\in S\setminus S'} \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_v,fg} \times \prod_{v\in S'} \mathsf{Mod}_{F_v,fg}\right)\right) \end{aligned}$$

因为 K 理论与 smashing 都和滤过余极限可交换。余极限是在谱范畴中取的。一般来说，函子 $L_{K(1)}$ 不与滤过余极限可交换。它由 KU 局部化（这是 smashing 的）以及随后进行的 p 完备化构成 [Mit92，命题 3.2， L_1 同上引文与 L_{KU}] 一致。p 完备化是无法保持 smashing 的唯一原因。然而，由于 K/p^k 是一个 p 扭谱， p 完备化最终会稳定。因此，限制在 p 扭谱的子范畴上时，我们确实可以将 $L_{K(1)}$ 移到余极限之外。由此得到

$$\cong \operatorname*{colim}^{\mathsf{Sp}}_{S'\subseteq S,\ \#S'<\infty} \left(L_{K(1)}\left(\prod_{v\in S\setminus S'}(K/p^k)(\mathcal{O}_v)\right) \times \prod_{v\in S'} L_{K(1)}(K/p^k)(F_v)\right)$$

因为 K 理论与任意多个正合范畴的直积（包括无限多个）可交换，而 $L_{K(1)}$ 与有限乘积可交换。结合引理 5.8（[25]），我们得到

$$\cong \operatorname*{colim}^{\mathsf{Sp}}_{S'\subseteq S,\ \#S'<\infty} \left(\prod_{v\in S\setminus S'} L_{K(1)}(K/p^k)(\mathcal{O}_v)\times \prod_{v\in S'} L_{K(1)}(K/p^k)(F_v)\right). \tag{5.19}$$

最后，利用引理 5.6（3）中的等价，可知我们可以将式 5.19 左侧的余极限替换为 $\operatorname*{colim}_{S'\subseteq S,\ \#S'<\infty}$。综上所述，我们得到了逐层对所有 $k\geq 1$ 都成立的等价。容易看出，该等价与各自 $k\mapsto(-)/p^k$ 逆系统中的过渡映射相容。由于断言两边都是 p-完备谱，因此可将它们写成各自 $(-)/p^k$项的同伦逆极限；逐层等价遂意味着二者严格等价。□

推论 5.9. 引理 5.6 中的下降谱序列同样逐字适用于将极限项替换为

$$\mathfrak{X}_\infty := L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad}).$$

证明. 根据定理 5.1，这些谱彼此等价。 □

6. Non-archimedean locally compact modules

本节中，我们将讨论对假设稍作放宽的情形。设 F 是一个数域，记 S_∞ 为其无穷位集合。设 S 是 F 的任意赋值集合（可以是无限集，也可以是空集，且 S_∞ 不必包含于 S中）。

定义

$$F_{\langle S\rangle} := \bigoplus_{v\in S_\infty\setminus(S\cap S_\infty)} F_v, \tag{6.1}$$

也就是说， $F_{\langle S\rangle}$ 是 $F_\infty := F\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{R}$ 中对应于 F 中未包含在 S内的无穷位的理想。将 $F_{\langle S\rangle}$ 视为一个环[26]。

例 6.1. 若 S 是一个包含所有无穷位的赋值集合，则 $F_{\langle S\rangle}=0$ 是零环。

例 6.2. 若 S 只包含有限处，则 $F_{\langle S\rangle}=F_\infty$。

考虑函子

$$\rho\colon \mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},fg}\longrightarrow \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$$

它将有限生成投射 $F_{\langle S\rangle}$-模映到其自身，并赋予其实向量空间拓扑。

引理 6.3。函子 ρ 是正合且完全忠实的，并且

$$\mathsf{D}^b\left(F_{\langle S\rangle}\right)\to \mathsf{D}^b\left(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}\right)$$

是完全忠实的。它将 $\mathsf{D}^b\left(F_{\langle S\rangle}\right)$ 实现为一个厚三角满子范畴。若 S 包含所有无穷位，则这只是零三角范畴的嵌入。

[25]所引的引理要求 S' 包含所有位于素数 p 之上的素数。但根据 $\frac{1}{p}\in\mathcal{O}_S$，这些 S' 余最终。[26]它通常不是 F_∞ 的子环，因为本文约定所有环都有单位元，且环同态必须保持单位元。因此，积环中的真因子并非子环。

证明。正合性显然。设 $M, N \in \mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},\ fg}$。我们计算

$$\rho(M,N)\colon \mathrm{RHom}_{F_{\langle S\rangle}}(M,N) \longrightarrow \mathrm{RHom}_{\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}}(\rho M, \rho N). \tag{6.2}$$

对于 Ext^0 群，我们注意到所有 $F_{\langle S\rangle}$-模同态都是 R-线性的，并且有限维实向量空间的所有 R-线性自同态都是连续的。反过来，有限维实向量空间之间的任意连续 $\mathcal{O}_F$-模态射都自动是 R-线性的（由 $\mathcal{O}_F$-线性推出 F-线性，然后利用稠密性加以论证）。因此， $\rho(M,N)$ 在 Hom 群上是一个同构。由于式 6.2 左侧的所有模作为代数 $F_{\langle S\rangle}$-模都是投射的，因此 $r \geq 1$ 的所有 $\mathsf{Ext}^r_{F_{\langle S\rangle}}$ 群都消失。然而，根据定理 4.19 (5)，所有向量$\mathcal{O}_S$-模在 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 中都是投射的，因此 $r \geq 1$ 的所有 Ext^r 群在 $\mathsf{D}^b(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S})$ 中也都消失。由此得到的作为三角子范畴的嵌入是厚的。该断言的最后一部分归结为例 6.1。□

定义 6.4. 设 F 是一个数域， S 是任意赋值集合（可以是无限集、空集，也不一定包含无穷位）。我们称

$$\mathsf{D}\ \mathsf{LC}\mathcal{O}_S := \mathsf{D}^b_\infty\left(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}\right) / \mathsf{D}^b_\infty\left(F_{\langle S\rangle}\right)$$

为局部紧 $\mathcal{O}_S$-模的 ∞-范畴。注意，$\mathsf{D}\,\mathsf{LC}\mathcal{O}_S$ 的定义实际上取决于集合 S，而非如记号可能让人误以为的那样，仅取决于环 $\mathcal{O}_S$。我们希望这不会造成任何混淆。

如果 S 包含所有无穷位，我们便得到定义 4.1 中的 $\mathsf{D}^b_\infty(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S})$。在大多数值得关注的情形中，定义 6.4 中的商已经可以在正合范畴的层面上构造。下面对此进行讨论。

引理 6.5. 设 S 是 F 的任意赋值集合，但至少包含一个有限处。那么 $\mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},fg}$ 是 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 的一个 Serre 子范畴，商 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}/\mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},fg}$ 存在于正合范畴的 2-范畴中，并且

$$\mathsf{D}\ \mathsf{LC}\mathcal{O}_S \cong \mathsf{D}^b_\infty\left(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}/\mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},fg}\right).$$

类似地，商 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ ad}/\mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},\ fg}$ 存在于正合范畴的 2-范畴中，并且与 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ ad}$ 在 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}/\mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},\ fg}$中的本质像一致。

定义 6.6. 假设 S 是 F的任意处集合，但至少包含一个有限处。定义

$$\mathsf{LC}\mathcal{O}_S := \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}/\mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},fg}. \tag{6.3}$$

只要前一个定义适用，即 S 包含所有无穷位，这个定义就与前一个定义相容：$\mathsf{LC}\mathcal{O}_S \cong \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$。与定义 6.4 一样，这个新范畴 $\mathsf{LC}\mathcal{O}_S$取决于集合 S，而不仅仅取决于环 $\mathcal{O}_S$ 本身。我们还将 $\mathsf{LC}^{\mathcal{O}_S,\ ad}$ 定义为 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ ad}$ 在式 6.3 中商里的本质像。

引理 6.5 的证明。由于向量 $\mathcal{O}_S$-模是内射的[27] （由定理 4.19 (5) 得出），向量模的所有扩张都是向量模。由此很容易推出，$\mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},\ fg}$ 在 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$中总是扩张封闭的。因此，我们只需证明 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 中向量$F_{\langle S\rangle}$-模的子对象和商仍是向量 $F_{\langle S\rangle}$-模。为此，设 V 是任意一个向量 $\mathcal{O}_S$-模。由于 S含有一个有限处，我们可以选取某个 $f \in (\mathcal{O}_S^\times \cap \mathcal{O}_F) \setminus \mathcal{O}_F^\times$。若 $U \hookrightarrow V$是任意一个容许子对象，则 U 是实向量空间中的闭子群。根据[Mor77，定理 6]，，这意味着对于适当的 $0 \leq m$、$n < \infty$ （属于 LCA 群范畴），有 $U \simeq \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{R}^n$。定义 $U_{\mathbf{R}}$ 为对应于 $\mathbb{R}^n$-直和项的进一步子群。对于任意的$\alpha \in \mathcal{O}_S$， $\alpha U_{\mathbf{R}}$ 必须是 LCA 群 U的连通子群，因此包含于 $U_{\mathbf{R}}$中。

[27]就这一 论证而言，使用投射性也同样 可行

我们得出， $U_{\mathbf{R}}$ 是 U的代数 $\mathcal{O}_S$-子模。因此， $U/U_{\mathbf{R}}$（其底层子群为 $\mathbf{Z}^m$）是代数 $\mathcal{O}_S$-模。假设 $U/U_{\mathbf{R}} \neq 0$。由于 $f^{\pm 1}(U/U_{\mathbf{R}}) = U/U_{\mathbf{R}}$， f 必须整于 $\mathbf{Z}$，因此 $f^{\pm 1} \in \mathcal{O}_F$，即 $f \in \mathcal{O}_F^{\times}$，这与假设矛盾。于是， $U/U_{\mathbf{R}} = 0$ ，从而 U 是一个向量模。同理， V的所有商都必须是向量模。现在，若 V 并非任意的向量 $\mathcal{O}_S$-模，而特指一个 F_v-向量空间，那么很容易看出，它的所有向量子模和商也都是 F_v-向量空间。这表明， $F_{\langle S\rangle}$-向量模的所有子对象和商仍是此类对象，从而证明 $\mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},\ fg}$ 是一个 Serre 子范畴。接下来，根据 [Hv19b，命题 1.4]（该命题适用，因为 $\mathsf{Proj}^{F_{\langle S\rangle}}$ 中的所有子对象都是容许子对象）， $\mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},\ fg}$ 是亏格渗透的

- 在拟阿贝尔范畴 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 中，以及
- 在拟阿贝尔范畴 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ ad}$ （推论 4.16）。

由于 $\mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},\ fg}$ 的本质像仅由 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 中的内射对象构成，我们接下来可以援引 [Hv19a，定理 1.5] ，得出 2-范畴商

$$\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}/\mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},fg} \tag{6.4}$$

作为正合范畴存在；$\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\ ad}/\mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},\ fg}$ 的情形也类似。根据同上引文中的局部化定理，我们得到一个 Verdier 纤维序列

$$\mathsf{D}^b_{(F_{\langle S\rangle},fg),\infty}(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}) \longrightarrow \mathsf{D}^b_{\infty}(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}) \longrightarrow \mathsf{D}^b_{\infty}(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}/\mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},fg}).$$

这里，$\mathsf{D}^b_{(F_{\langle S\rangle},fg)\ \infty}(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S})$ 可定义为来自同调属于 $\mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},\ fg}$ 的复形的微分分次范畴。由投射性可知，包含映射 $\mathsf{D}^b_{\infty}(\mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},\ fg}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{D}^b_{(F_{\langle S\rangle},fg)\ \infty}(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S})$ 是一个等价。因此，式 6.4 中正合范畴的导出 ∞-范畴与定义 6.4 中取的商一致。□

例 6.7. 若 S 为空，则 $\mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},fg}$ 不是 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_F}$的 Serre 子范畴。对于任意有限生成平坦的 $\mathcal{O}_F$-模 M，赋予 $M_{\mathbf{R}} := M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ 实向量空间拓扑。则序列

$$M \hookrightarrow M_{\mathbf{R}} \twoheadrightarrow M_{\mathbf{R}}/M \tag{6.5}$$

在 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_F}$中是正合的。这表明向量模可能有并非向量模的子对象和商对象。因此，$\mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},fg}$ 不是 Serre 子范畴。此外，假设在正合范畴的 2-范畴中存在商 $Q := \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_F}/\mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},fg}$ 。那么商函子 $q\colon \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_F} \to Q$ 是一个正合函子，因此，除 $M_{\mathbf{R}}$之外， M 和 $M_{\mathbf{R}}/M$ 也都必须映射为零对象。由此可知，任意向量模、任意有限生成的 $\mathcal{O}_F$-模（非平坦的情形也包括在内，因为可由自由模对其作分解），以及底层拓扑空间为有限维环面的所有模，在Q中都必须为零。我们看到，$\ker(q)$远大于 $\mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},fg}$。

我们按照公式 4.9 定义 $\mathbb{A}_S := \prod'(F_v : \mathcal{O}_v)$，但这次不再要求$v \in S$$S$ 包含所有无穷位。于是， $\mathbb{A}_S$ （以及 $\mathbb{A}_{S\cup S_\infty}$）是 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 中的局部紧拓扑$\mathcal{O}_S$-模，并确定商范畴 $\mathsf{LC}\mathcal{O}_S$ 中的一个对象。

命题 6.8. 设 A 是一个稳定的可呈现 ∞-范畴。设 $K\colon \mathsf{Cat}^{\mathrm{ex}}_{\infty} \to \mathsf{A}$ 是一个局部化不变量，它不必与滤过余极限交换。令 S 为F 的任意一个素位集合，其中包含

- 至少一个有限处，或者
- 至少包含所有无穷位。

Then

(1) 存在一个正合且保持对偶的正合范畴等价，与对偶 y

$$\Psi\colon \prod_{v\in S}{}' \left(\mathsf{Proj}_{F_v,fg} : \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_v,fg}\right) \xrightarrow{\sim} \mathsf{LC}\mathcal{O}_{S,ad}\ ;$$

(2) 序列

$$K(\mathcal{O}_S) \longrightarrow K\left(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{S,ad}\right) \longrightarrow K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S) \tag{6.6}$$

由正合函子 $(-) \mapsto (-)\otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbb{A}_S$ 作为第一箭头所诱导的，是 A 中的一个纤维序列；

(3) 并且如果我们假设 K 是一个与滤过余极限相交换的局部化不变量，并且（仅当 $\#S = \infty$ 时） K 与无穷乘积相交换，那么这个纤维序列可以改写为

$$K(\mathcal{O}_S) \longrightarrow \prod_{v\in S}{}' \left(K(F_v) : K(\mathcal{O}_v)\right) \longrightarrow K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S);$$

(4) 并且如果 K 指的是非连通 K-理论，

$$L_{K(1)}K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{S,ad}) \cong \operatorname*{colim}^{\mathsf{K}}_{S'\subseteq S,\ \#S'<\infty} \prod\nolimits^{\mathsf{K}}_{v\in S\setminus S'} L_{K(1)}K(\mathcal{O}_v) \times \prod\nolimits^{\mathsf{K}}_{v\in S'} L_{K(1)}K\left(F_v\right).$$

如果 S 包含所有无穷位，这就归结为命题 4.15、定理 4.29、定理 4.30；否则则更一般。

证明。（1）仅依赖命题 4.15，我们得到一个保持对偶性的正合等价

$$\Psi\colon \prod_{v\in S\cup S_\infty}{}' \left(\mathsf{Proj}_{F_v,fg} : \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_v,fg}\right) \xrightarrow{\sim} \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad}.$$

现在从两个正合范畴中相容地商去 $\mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},fg} \cong \prod_{S_\infty\setminus(S\cap S_\infty)} \mathsf{Proj}_{F_v,fg}$。类似地，考虑 (2)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K(F_{\langle S\rangle}) & \xrightarrow{\simeq} & K(F_{\langle S\rangle}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
K(\mathcal{O}_S) & \longrightarrow & K\left(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad}\right) & \longrightarrow & K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}) \\
\| & & \downarrow & \lozenge & \downarrow \\
\mathrm{fib}(\alpha) & \longrightarrow & K\left(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{S,ad}\right) & \xrightarrow[\alpha]{} & K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S),
\end{array} \tag{6.7}$$

其中中间一行是定理 4.29 的纤维序列。中间和右侧的向下序列是纤维序列，而方块 ($\lozenge$) 的交换性来自引理 6.5 以及相应的、关于附属导出 ∞-范畴的 Verdier 局部化序列。特别地，α 表示余纤维上的诱导映射。等价 $K(F_{\langle S\rangle}) \xrightarrow{\sim} K(F_{\langle S\rangle})$ 表明 ($\lozenge$) 是双笛卡尔的。这又意味着自然映射 $K(\mathcal{O}_S) \to \mathrm{fib}(\alpha)$ 是一个等价。这就证明了等式 6.6。（3）按照定理 4.30 的证明进行。（4）直接由定理 5.1 和（1）得出，因为我们至多只商去有限多个因子的贡献。□

例 6.9. 设 S 是一个不包含所有无穷位的赋值集合。那么$S_\infty\setminus(S\cap S_\infty) \neq \varnothing$。人们可能会想知道，是否也可以将 $\mathsf{LC}\mathcal{O}_S$ 定义为 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 的满子范畴$\mathcal{U}\subset$，其中不允许存在与 F_v 同构且满足 $v\in S_\infty\setminus(S\cap S_\infty)$ 的阿代尔模直和项。这似乎不太可能。首先，注意到

$$\mathbb{A}_{(S\cup S_\infty)}/\mathcal{O}_S$$

是一个紧致连通的 $\mathcal{O}_S$-模，且不含向量模直和项。因此，正合的 ad`èle 序列

$$\mathcal{O}_S \hookrightarrow \mathbb{A}_{(S\cup S_\infty)} \twoheadrightarrow \mathbb{A}_{(S\cup S_\infty)}/\mathcal{O}_S \tag{6.8}$$

例 4.13 表明， $\mathcal{U}$ 在 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 中不是扩张封闭的，因此不是全正合子范畴。因此，尚不清楚如何在 $\mathcal{U}$上选择一种正合结构。其次，等式 6.8 在 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}/\mathrm{Proj}_{F\langle S\rangle,\ fg}$中的像，即，

$$\mathcal{O}_S \hookrightarrow \mathbb{A}_S \twoheadrightarrow \mathbb{A}_{(S\cup S_\infty)}/\mathcal{O}_S$$

在 $\mathsf{LC}\mathcal{O}_S$中是正合的。尽管此序列中的所有对象确实都属于 $\mathcal{U}$，但该序列在底层阿贝尔群上并不正合。这意味着，即使可以在 $\mathcal{U}$ 上赋予一种正合结构，使其等价于 $\mathsf{LC}\mathcal{O}_S$，这种正合结构也必定相当奇特。

7. The trace map

本节中， K 表示非连通的 K-理论，我们关注在 S 不含无穷位时的范畴 $\mathsf{LC}\mathcal{O}_S$ 。固定一个奇素数 p。我们还作出一些稍后会允许变动的进一步选择：具体而言， F 表示一个数域， $S \supseteq S_\infty$ 是 F 的有限处集合，满足 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_S$ ，而 $k \geq 1$ 是任意自然数。作出这些选择后，命题 6.8 给出了一个由 $K(\mathcal{O}_S)$- 模构成的纤维序列。我们将其与 $\mathbb{S}/p^k$ 张量，得到

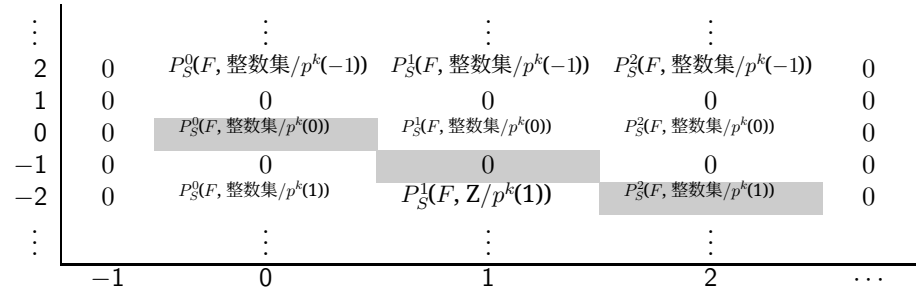
$$(K/p^k)(\mathcal{O}_S) \longrightarrow (K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{S,ad}) \longrightarrow (K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S)$$

是一个 $(K/p^k)(\mathcal{O}_S)$-模的纤维序列。我们对素数p应用 $K(1)$-局部化函子。得到一个 $L_{K(1)}(K/p^k)(\mathcal{O}_S)$-模的纤维序列

$$L_{K(1)}(K/p^k)(\mathcal{O}_S) \overset{(\star)}{\to} L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{S,ad}) \to L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S). \tag{7.1}$$

我们添加了符号（$\star$），以便于在下文引用此映射。该纤维序列诱导出一个同伦群的长正合序列。本节中，我们只研究它在 π_0 附近的部分。注意，对于$L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{S,ad})$ 而非 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$，引理 5.6 中受限直积下降谱序列的类似物现在具有 E_2-页

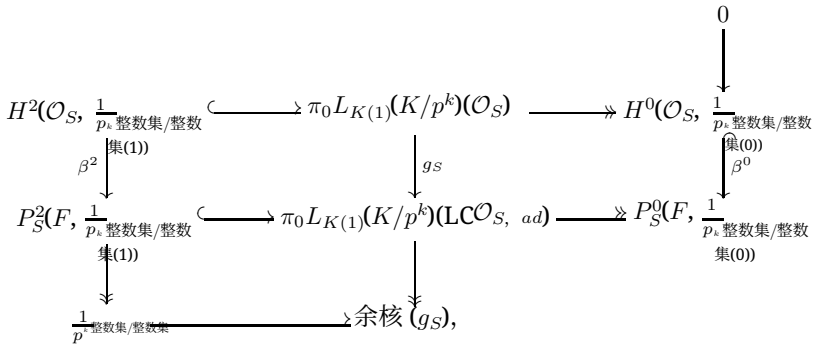
(7.2)



这与图表 5.17 的区别在于，丢失了第 0 列中与无穷位相关联的某些 H^0-群的贡献。

我们得到下图中的中间两行（我们将在下文解释各项的来源）

(7.3)



其中，中间向下的列是由将 π_0 应用于式 7.1 中的 $(\star)$ 所诱导的，即 $g_S := \pi_0(\star)$。顶行源自应用于 $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_S$ 的 Thomason 下降谱序列，底行则来自我们的下降谱序列受限直积版本，图 7.2。除 $(\star)$ 本身以外，向下箭头均源自完备化所对应环同态 $\mathcal{O}_S \to F_v$ 之间下降谱序列的相容性。

注 7.1. 稍作展开：箭头 $(\star)$ 是由定理 4.30 诱导的 $\mathrm{Proj}^{\mathcal{O}_S,\ fg} \to \mathrm{LC}^{\mathcal{O}_S,\ ad}$。随后，式 4.22 将其与张量乘以[28] $\mathbb{A}_S = \prod'_{v\in S\cup S_\infty}(F_v : \mathcal{O}_v)$ 的环映射联系起来，从而保证受限直积中出现的所有下降谱序列彼此相容。对于受限直积的每个因子，该映射均由以下正合函子诱导

$$M \mapsto M \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_v \qquad (\text{resp. } M \mapsto M \otimes_{\mathcal{O}_S} F_v)$$

并且下降谱序列在环映射下相容。

记 $G_S := \mathrm{Gal}(F_S/F)$，其中 F_S 是 F 在 S之外不分歧的最大伽罗瓦扩张。由 Poitou–Tate 正合序列（[Mil06，定理 4.10]），映射 β^0 是单射，且β^2 的余核为

$$H^0\left(\mathcal{O}_S, \left(\tfrac{1}{p^k}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}(1)\right)^D\right)^* = H^0\left(\mathcal{O}_S, \mathrm{Hom}\left(\tfrac{1}{p^k}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}(1), F^{\mathrm{sep}\,\times}\right)\right)^* = H^0(\mathcal{O}_S, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^* = \tfrac{1}{p^k}\mathbf{Z}\Big/\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p. \tag{7.4}$$

我们在此处直接沿用了“同上引文”这一记法。这里，$(-)^D$ 表示对偶（若用 ´étale 层来书写，它对应于$\mathcal{H}om(-, \mathbb{G}_m)$），而 $(-)^* := \mathrm{Hom}(-, \mathrm{Q}_p/\mathrm{Z}_p)$ 是 p-典型庞特里亚金对偶的离散变体。这就解释了图 7.3 中列出的另外两项。

对图 7.3 应用蛇引理，可得到以下第一个单射

$$E_{F,S,k}\colon \tfrac{1}{p^k}\mathbf{Z}/\mathbf{Z} \hookrightarrow \mathrm{coker}\,(g_S) \hookrightarrow \pi_0 L_{K(1)}(K/p^k)(\mathrm{LC}^{\mathcal{O}_S}) \tag{7.5}$$

第二个单射则来自式 7.1 所诱导的同伦群正合列的正合性。注意，若 $S \subseteq S'$ 是赋值的两种选择，则存在一个正合函子

$$\eta_{S'/S}\colon \mathrm{LC}^{\mathcal{O}_{S'}} \longrightarrow \mathrm{LC}^{\mathcal{O}_S}, \tag{7.6}$$

它只是舍弃 $\mathcal{O}_{S'}$-模结构，转而采用 $\mathcal{O}_S$-模结构。拓扑保持不变。这显然是一个正合函子。

[28]将 $\mathrm{LC}^{\mathcal{O}_S}$ 用 $\mathrm{LCA}^{\mathcal{O}_S}$ 的定义展开后，只要我们是在 $\mathrm{LCA}^{\mathcal{O}_S}$ 中工作，就必须将无穷位 S_∞ 加入这个阿代尔直积。不过，一旦我们转而进入商范畴 $\mathrm{LC}^{\mathcal{O}_S}$，这些直和项就变成了零。

引理 7.2. 假设 S' 是 F 的另一个有限位集合，且 $S \subseteq S'$。那么图表

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{p^k}\mathbf{Z}/\mathbf{Z} & \xrightarrow{E_{F,S',k}} & \pi_0 L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{S'}) \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{S'/S}} \\ \frac{1}{p^k}\mathbf{Z}/\mathbf{Z} & \xrightarrow[E_{F,S,k}]{} & \pi_0 L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{S}) \end{array} \tag{7.7}$$

是交换的。

证明。（步骤 1）若我们按照等式 4.12 将阿代尔模范畴视为正合范畴的受限直积，则存在一个包含函子 i，将较小的受限直积映入较大的受限直积，并在新增的因子中放入零对象；还存在一个投影函子 p，用于遗忘因子。

$$\prod_{v\in S'}{}' \left(\mathsf{Proj}_{F_v,fg} : \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_v,fg}\right) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \prod_{v\in S}{}' \left(\mathsf{Proj}_{F_v,fg} : \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_v,fg}\right) \tag{7.8}$$

函子 p 和 i 显然是 $\mathcal{O}_S$-线性的且正合的。此外，我们有

$$p \circ i = \mathrm{id}\,. \tag{7.9}$$

在命题 4.15 的正合等价下，我们也可以将它们视为正合函子

$$\mathsf{LC}\mathcal{O}_{S',ad} \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \mathsf{LC}\mathcal{O}_{S,ad}\,.$$

由.....构成的子图表

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{LC}\mathcal{O}_{S',ad} & \hookrightarrow & \mathsf{LC}\mathcal{O}_{S'} \\ {\scriptstyle i}\uparrow \;\vdots\; {\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{S'/S}} \\ \mathsf{LC}\mathcal{O}_{S,ad} & \hookrightarrow & \mathsf{LC}\mathcal{O}_{S} \end{array}$$

仅由实线箭头构成的图表是可交换的。水平箭头源自阿代尔模完全正合子范畴的包含。虚线箭头 p 不会与其他箭头交换。由于此图表中的所有函子（甚至 p）都是正合的，我们得到一个诱导的 K 理论谱图表；我们可以对后者进行 $K(1)$-局部化，并取 π_0。由此得到图表

$$\begin{array}{ccc} \pi_0 L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{S',ad}) & \xrightarrow{\lambda} & \pi_0 L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{S'})\,. \\ {\scriptstyle i_*}\uparrow \;\vdots\; {\scriptstyle p_*} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{S'/S,*}} \\ \pi_0 L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{S,ad}) & \xrightarrow[\gamma]{} & \pi_0 L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{S}) \end{array} \tag{7.10}$$

同样，仍然只有实线箭头必然交换，即 $\eta_{S'/S,\,*} \circ \lambda \circ i_* = \gamma$。不过，如果我们将范围限制在子群 $\mathrm{im}(i_*) \subseteq \pi_0 L_{K(1)}(K/p^k)(\,\mathsf{LC}\mathcal{O}_{S',\,ad})$ 上，就可以得出该图表对于虚线映射 p_* 也可交换的结论，因为对于 $x := i_* y$，我们有

$$(\eta_{S'/S,*} \circ \lambda)(i_* y) = \gamma y = (\gamma \circ p_*)(i_* y)$$

这要归功于等式 7.9。这就是证明的策略：至少在限制于 $\mathrm{im}(i_*)$ 时，图 7.10 对于 p_* 也可交换。

（步骤 2）现在我们检查图 7.7 的交换性。设 x 位于上述图表的左上角。它沿顶部的水平箭头映射

$$x \in \tfrac{1}{p^k}\mathbf{Z}\Big/\mathbf{Z} \hookrightarrow \mathrm{coker}\,(g_{S'}) \hookrightarrow \pi_0 L_{K(1)}(K/p^k)(\,\mathsf{LC}\mathcal{O}_{S'}\,) \tag{7.11}$$

到图表的右上角。由于

$$\operatorname{coker}(g_{S'}) = \frac{\pi_0 L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{L}\mathsf{C}\mathcal{O}_{S',ad})}{\operatorname{im}(g_{S'})}$$

（见图 7.3），我们可以选取某个代表元 $\tilde{x} \in \pi_0 L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{L}\mathsf{C}\mathcal{O}_{S',ad})$。现在考虑该图表

$$\begin{array}{ccc} P^2_{S'}(F, \frac{1}{p^k}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}(1)) & \hookrightarrow & \pi_0 L_{K(1)}(K/p^k)^{\tilde{x}\in}(\mathsf{L}\mathsf{C}\mathcal{O}_{S',ad}) \\ \uparrow{\scriptstyle i_*} & & \uparrow{\scriptstyle i_*} \\ P^2_S(F, \frac{1}{p^k}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}(1)) & \hookrightarrow & \pi_0 L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{L}\mathsf{C}\mathcal{O}_{S,ad}). \end{array} \tag{7.12}$$

注意，展开 $P^2_{(-)}$ 的定义时，左侧的映射 i_* 仍然是由包含与赋值 $S' \setminus S$ 对应的附加因子所诱导的，如公式 7.8 所示。我们注意到，不失一般性，可以假设代表元 $\tilde{x}$ 选自图 7.12 左上方的子群 $P^2_{S'}(F, \frac{1}{p^k}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}(1))$。这可由映射 $E_{F,S',k}$ 的构造推出，尤其是由图 7.3 可知（子群 $\frac{1}{p^k}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$ 中余核 $(g_{S'})$ 的所有元素都有来自 $P^2_{S'}$-群的代表元）。最后，我们考察图 7.12 左侧的 i_*：展开图 7.3 中最左侧的一列，可得

$$\begin{array}{ccccc} H^2(\mathcal{O}_{S'}, \frac{1}{p^k}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}(1)) & \xrightarrow{\beta^2} & P^2_{S'}(F, \frac{1}{p^k}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}(1))^{\tilde{x}\in} & \xrightarrow{\text{inv}} & \frac{1}{p^k}\mathbf{Z}/\mathbf{Z} \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i_*} & & \| \\ H^2(\mathcal{O}_S, \frac{1}{p^k}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}(1)) & \xrightarrow[\beta^2]{} & P^2_S(F, \frac{1}{p^k}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}(1))^{\tilde{x}_{\text{new}}\in} & \xrightarrow[\text{inv}]{} & \frac{1}{p^k}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}. \end{array} \tag{7.13}$$

这里左侧的向上箭头由环嵌入 $\mathcal{O}_S \subseteq \mathcal{O}_{S'}$ 导出。很容易看出，它确实与中间列中的箭头 i_* [29] 相交换（但请注意，这并非由 i_* 中任何形式的函子性所推出。相反，我们从 etale 上同调上的环映射 $\mathcal{O}_S \subseteq \mathcal{O}_{S'}$ ′出发，并需要验证它确实也在中间项上诱导出 i_* P^2）。关键在于，在映射 'inv' 下，代表元 $\tilde{x}$ 被映射到我们在式 7.11 中最初采用的 x。由于图 7.13 中商对象上的诱导向上映射是单位元，即最右侧的向上箭头，因此我们也可以在图 7.13 的下行中找到一个类 $\tilde{x}_{\text{new}} \in P^2_S(F, \frac{1}{p^k}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}(1))$，它映射到 $\frac{1}{p^k}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$ 中相同的 x。在图 7.12 中下方的水平箭头作用下，这个新的代表元选择映射到 $\pi_0 L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{L}\mathsf{C}\mathcal{O}_{S,\,ad})$ 中的一个类；该类在 i_* 的作用下，映射到我们元素 x 的另一个可能的代表元。这表明，在步骤 1 的图 7.10 中，我们可以找到一个属于子群 $\operatorname{im}(i_*)$ 的代表元。正如我们所解释的，限制在这个子群上，图 7.10 关于映射p_*也相交换。因此，将 p_* 作用于右侧的代表元 $i_*\tilde{x}_{\text{new}}$，

$$x \in \frac{\frac{1}{p^k}\mathbf{Z}}{\mathbf{Z}} \hookrightarrow \operatorname{coker}(g_{S'}) = \frac{\pi_0 L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{L}\mathsf{C}\mathcal{O}_{S',ad})}{\operatorname{im}(g_{S'})}$$

对应于（根据步骤 1）由 $\eta_{S'/S}$ 诱导的映射，并且在 $\frac{1}{p^k}$整数集。整数集上是单位元。这证明了我们的断言。□

[29]图 7.13 中间的向上箭头与图 7.12 最左侧的向上箭头一致。

Wh每当我们改变 k，例如使得 $k' \leq k$ 时，乘以 $p^{k-k'}$ 会诱导出一个自然映射

$$K/p^{k'} \longrightarrow K/p^{k}. \tag{7.14}$$

对于数域的扩张 F'/F，记 $S(F')$ 为 F' 上位于 F 的处 S 之上的处的集合。于是，该扩张诱导出概形之间的有限态射

$$\pi\colon \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{F',S(F')} \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{F,S}.$$

我们可以构造相应的推前。在正合范畴层面，我们定义

$$\pi_*\colon \mathsf{LC}\mathcal{O}_{F',S(F')} \longrightarrow \mathsf{LC}\mathcal{O}_{F,S}$$

只需舍弃 $\mathcal{O}_{F',\ S\,(F')}$-模结构，改用 $\mathcal{O}_{F,\ S}$-模结构。显然，这是一个正合函子。

命题 7.3。固定一个奇素数 p。在所有满足 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_S$ 且 $k \geq 1$ 的数域三元组 (F, S, k) 与有限处 S 中，图表

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{p^{k'}}\mathbf{Z}/\mathbf{Z} & \xrightarrow{E_{F',S',k'}} & \pi_0 L_{K(1)}(K/p^{k'})(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{F',S'}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{1}{p^{k}}\mathbf{Z}/\mathbf{Z} & \xrightarrow[E_{F,S,k}]{} & \pi_0 L_{K(1)}(K/p^{k})(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{F,S}) \end{array} \tag{7.15}$$

当 F'/F 是一个扩张（“向较小的域前进时”）、 $S' \supseteq S(F')$，且 $k' \leq k$ （“增大 k 时”）时，图表交换。右侧向下的箭头是由正合函子诱导的 K-理论上的映射

$$\pi_* \circ \eta_{S'/S(F')}. \tag{7.16}$$

这个函子实际上与遗忘 $\mathcal{O}_{F',S'}$-模结构而保留 $\mathcal{O}_{F,S}$-模结构的函子完全相同，并保持相同的局部紧拓扑。

证明。我们将其细分为若干步骤。(1) 首先，假设 $F' = F$ 和 $S' = S$，因此只有k 发生变化。于是我们只需跟踪式 7.14 中的映射。在 K-理论中，这源于乘以 p 的某个幂；因此，经过下降谱序列后，在 ′页的阿贝尔 étale 层上也对应于乘以 p 。根据式 7.4，Cartier 对偶 $(-)^{D}$ 以及随后 $(-)^{*}$ 将该映射先反向再反向回来，最终得到图 7.15 左侧到右侧的单射。(2) 因此，在证明的其余部分中，我们可以假设 k 保持不变。接下来，假设 $F' = F$ 和 $k' = k$，因此只有 S 发生变化。于是我们的断言归结为引理 7.2。(3) 于是，我们剩下的情形是： F'/F 是某个有限扩张， $k' = k$ 和$S' \supseteq S\ (F')$ 。根据步骤 2，只需证明对 $S' = S\ (F')$ 本身的相容性。首先注意，在阿代尔模的全正合子范畴的包含下，该图表

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{LC}\mathcal{O}_{F',S(F'),ad} & \hookrightarrow & \mathsf{LC}\mathcal{O}_{F',S(F')} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} \\ \mathsf{LC}\mathcal{O}_{F,S,ad} & \hookrightarrow & \mathsf{LC}\mathcal{O}_{F,S}, \end{array}$$

是交换的，也就是说，若忘掉 $\mathcal{O}_{F',\ S(F')}$-模结构，转而考虑 $\mathcal{O}_{F,\ S}$-模结构，那么前一种意义下的阿代尔模确实也是后一种意义下的阿代尔模。接下来，根据命题 4.15，也就是说，

$$\Psi\colon \prod_{v' \in S}{}' \left(\mathsf{Proj}_{F'_{v'},fg} : \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_{F',v'},fg}\right) \xrightarrow{\sim} \mathsf{LC}\mathcal{O}_{F',S(F'),ad}$$

函子 π_* 被识别为 $\mathrm{Proj}_{F'_{v'},\ fg}$（分别为 $\mathrm{Proj}^{\mathcal{O}_{F',\ v',\ fg}}$）上的正合函子；这些函子同样是忘掉 $F'_{v'}$-向量空间结构、转而考虑 F_v-向量空间结构（其中 v' 遍历 F 的处 v 上有限多个赋值）的函子。对于 $\mathcal{O}_{F',\ v'}$ 也类似，它们是有限的 $\mathcal{O}_{F,\ v}$-代数。这正是普通[30]K-理论中有限推前所依据的同一个正合函子。现在，情形实质上已归结为 Blumberg–Mandell [BM20，定理 1.5]。由 Brauer 群关于有限域扩张的函子性，伽罗瓦上同调上的余限制在 Hasse不变量上诱导出单位元。这就解决了剩余的相容性问题，并完成了证明。□

根据我们的假设 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_S$，存在一个正合函子

$$\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S} \longrightarrow \mathsf{LCA}_{\mathbf{Z}[\frac{1}{p}]} \tag{7.17}$$

该函子将 $\mathcal{O}_S$-模结构遗忘，转而采用来自 $\mathbf{Z}[\frac{1}{p}] \subseteq \mathcal{O}_S$ 的 $\mathbf{Z}[\frac{1}{p}]$-模结构。它诱导出一个正合函子

$$\mathsf{LC}\mathcal{O}_S \longrightarrow \mathsf{LC}\mathcal{O}_{\mathbf{Q},\{p\}}\ .$$

遵循 Blumberg–Mandell 在 [BM20, Thm. 1.5], 中的思路，范畴 $\mathsf{LC}^{\mathcal{O}_{\mathbf{Q},\ \{p\}}}$ 带有一种非常自然的迹映射构造。

定理 7.4（Blumberg–Mandell，[BM20, Thm. 1.5]）。设 K 是非连通的 K-理论。存在一个典范同构

$$\pi_0 L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{\mathbf{Q},\{p\}}) \cong \tfrac{1}{p^k}\mathbf{Z}/\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p. \tag{7.18}$$

现在可以将其与 Brown–Comenetz 对偶联系起来。我们在 §C 中回顾这种对偶性。由公式 C.4 可知，存在一个典范同构

$$\mathrm{Hom}_{Ho(\mathsf{Sp})}(Z, I_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}\mathbb{S}_{\widehat{p}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}\left(\pi_0(Z \otimes_{\mathsf{Sp}} \mathcal{N}), \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p\right) \tag{7.19}$$

对于所有 $K(1)$-局部谱 Z，其中 $\mathcal{N} := \Sigma^{-1}\mathbb{S}\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}^p$，而 $\mathbb{S}_{\widehat{p}}$ 表示 $K(1)$-局部球面[31]。由递增 k下的相容性，这些映射

$$\pi_0 L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{\mathbf{Q},\{p\}}) \longrightarrow \tfrac{1}{p^k}\mathbf{Z}/\mathbf{Z} \tag{7.20}$$

在余极限上诱导出一个典范映射。根据下面这个适用于任意谱 X 的简短计算,

$$\begin{aligned} \mathrm{colim}\, X/p^k &\cong \mathrm{colim}\left(X \otimes_{\mathsf{Sp}} \mathbb{S}\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}\right) \\ &\cong X \otimes_{\mathsf{Sp}} \mathbb{S}\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \cong X \otimes_{\mathsf{Sp}} \Sigma\mathcal{N} \cong \Sigma X \otimes_{\mathsf{Sp}} \mathcal{N}, \end{aligned} \tag{7.21}$$

定义了一个映射

$$\pi_0(\Sigma L_{K(1)} K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{\mathbf{Q},\{p\}}) \otimes_{\mathsf{Sp}} \mathcal{N}) \longrightarrow \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p. \tag{7.22}$$

由式 7.19，这个映射唯一确定了一个映射

$$\Sigma L_{K(1)} K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{\mathbf{Q},\{p\}}) \longrightarrow I_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}\mathbb{S}_{\widehat{p}}$$

从而得到一个映射 $L_{K(1)}K(\mathsf{LC}^{\mathcal{O}_{\mathbf{Q},\ \{p\}}}) \to \Sigma^{-1} I_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}\mathbb{S}_{\widehat{p}}$。由 p-完备性（更具体地说，由公式 C.5），这等价于指定一个映射到球面的 Anderson 对偶

$$L_{K(1)}K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{\mathbf{Q},\{p\}}) \longrightarrow I_{\mathbf{Z}_p}\mathbb{S}_{\widehat{p}}. \tag{7.23}$$

这是迹映射的关键输入。

[30]普通理论，而非局部紧 K-理论[31]这就是 $K(1)$-局部同伦范畴内在对称幺半结构的张量单位

定义 7.5. 设 K 为非连通的 K理论。我们定义一个迹映射

$$\mathrm{Tr}_{F,S}\colon L_{K(1)}K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{F,S}) \longrightarrow I_{\mathbf{Z}_p}\mathbb{S}_{\widehat{p}}$$

通过复合由式 7.17 中的正合函子诱导的映射与式 7.23 中的映射。

通常，我们使用其有限层版本。由 $X \xrightarrow{\cdot p} X \longrightarrow X/p$ 可知，其中 X 任意，对偶化得到 $I_{\mathbf{Z}_p}X \xleftarrow{\cdot p} I_{\mathbf{Z}_p}X \longleftarrow I_{\mathbf{Z}_p}(X/p)$，因此

$$(I_{\mathbf{Z}_p}X)/p \cong \Sigma I_{\mathbf{Z}_p}(X/p). \tag{7.24}$$

将定义 7.5 的迹映射模 p^k 化，我们得到

$$L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{F,S}/p^k} (I_{\mathbf{Z}_p}\mathbb{S}_{\widehat{p}})/p^k \underset{\text{Eq. 7.24}}{\xrightarrow{\sim}} \Sigma I_{\mathbf{Z}_p}(\mathbb{S}/p^k) \underset{\text{Eq. C.5}}{\xrightarrow{\sim}} I_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}\mathbb{S}/p^k. \tag{7.25}$$

我们称之为迹映射的有限层版本。对于 $\mathsf{LC}^{\mathcal{O}_{\mathbf{Q},\{p\}}}$，这给出了式 7.20。

定义 7.5 的构造将 [BM20，定理 1.5] 推广到更一般且可能无限的赋值选择 S。与同上引文不同，我们通过遗忘函子 $\mathsf{LC}^{\mathcal{O}_{F,S}} \to \mathsf{LC}^{\mathcal{O}_{\mathbf{Q},\{p\}}}$ 将问题约化到 $\mathsf{LC}^{\mathcal{O}_{\mathbf{Q},\{p\}}}$ 的情形，而不是证明唯一截面系的存在性。不过，也可以用这样的唯一截面系来表述:

命题 7.6（与 [BM20] 方法的相容性）。固定一个奇素数 p。设 K 为非连通 K-理论。

(1) 在所有满足以下条件的数域三元组 (F,S,k)、有限处集合 S 和 $k \geq 1$ 中: F, $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_S$, 以及 $k \geq 1$，存在唯一一组阿贝尔群同态

$$V_{F,S,k}\colon \pi_0 L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{F,S}) \longrightarrow \tfrac{1}{p^k}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$$

其满足 $V_{F,\,S,\,k} \circ E_{F,\,S,\,k} = \mathrm{id}_{\frac{1}{p^k}\text{整数集}_p/\text{整数集}_p}$，并具有如下性质：设 (F,S,k) 和 (F',S',k') 满足: F'/F 是一个扩张， S' 包含 $S(F')$，且 $k' \leq k$。 *Then*

$$\begin{array}{ccc} \pi_0 L_{K(1)}(K/p^{k'})(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{F',S'}) & \longrightarrow & \frac{1}{p^{k'}}\mathbf{Z}/\mathbf{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_0 L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{F,S}) & \longrightarrow & \frac{1}{p^k}\mathbf{Z}/\mathbf{Z} \end{array} \tag{7.26}$$

交换，其中左侧向下的箭头由与式 7.16 中相同的正合函子 $\mathsf{LC}^{\mathcal{O}_{F',\,S'}} \to \mathsf{LC}^{\mathcal{O}_{F,\,S}}$ 诱导，也就是说，忘掉 $\mathcal{O}_{F',\,S'}$-模结构，转而采用 $\mathcal{O}_{F,\,S}$-模结构。

(2) 将 (1) 中的映射组装成余极限，并利用等式 7.21，这些映射

$$V_{F,S}\colon \pi_0(\Sigma L_{K(1)}K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{F,S}) \otimes_{\mathsf{Sp}} \mathcal{N}) \longrightarrow \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$$

定义映射

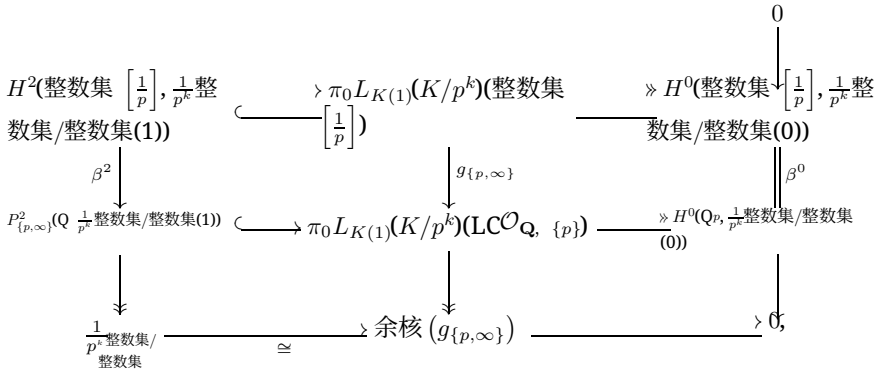
$$\Sigma L_{K(1)}K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{F,S}) \longrightarrow I_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}\mathbb{S}_{\widehat{p}}$$

应用 Σ^{-1} 并将平移后的 Brown–Comenetz 对偶识别为 Anderson 对偶后，它们与 $\mathrm{Tr}_{F,\,S}$ 一致。

证明。 (1) 首先，我们将注意力限制在具有以下形式的三元组 (F,S,k): F是任意数域， $k \geq 1$ 是任意的，但是

$$S(F) := \{\text{places above } p\} \cup S_\infty. \tag{7.27}$$

限制在这些三元组上（它们只需用对 (F, k) 编号），由 Blumberg–Mandell [BM20, Thm. 1.5] 的构造可知，存在一个唯一的 $V_{F,S,k}$。为完整起见，我们回顾如下：对于 $(\mathbb{Q}\ k)$，图 7.3 特化为



其中 β^0 是一个同构。这意味着 $V_{\mathbb{Q},\ \{p\},\ k} := E^{-1}\ _{\mathbb{Q}\ \{p\},\ k}$ 是唯一可能的选择（这也给出了定理 7.4 的证明）。现在根据命题 7.3，对于所有需要检查图 7.26 是否可交换的三元组 (F, S, k) 和 (F', S', k')，映射 $E_{F,\ S,\ k}$ 构成一个相容的单射系统。这意味着我们（保持 k 不变），总可以向下移动到三元组 $(\mathbb{Q}\ \{p\}, k)$，它是所有固定 k 的三元组所成偏序集中的（唯一）终对象，并在那里使用唯一确定的截面 $V_{\mathbb{Q},\ \{p\},\ k}$。(2) 根据命题 7.3，这个系统正是定义 7.5 中用于表示映射 $\mathrm{Tr}_{F,\ S}$ 的系统。由此得证。□

8. Duality

本节中，K 表示非连通的 K-理论。设 F 为一个数域，S 为 F 的一个（可能是无限的）赋值集合，且满足 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_S$。本节将证明两个整体对偶性结果：

- （S 包含所有无穷位）第一个对偶性涉及 $\mathrm{LCA}^{\mathcal{O}_S}$，即所有局部紧 $\mathcal{O}_S$-模所构成的范畴。
- （S 任意）第二个对偶性涉及 $\mathrm{LC}^{\mathcal{O}_S}$，即 §6 中经过修改的范畴；在其中，我们可以从 S中去除不需要的无穷位。

我们认为，$\mathrm{LCA}^{\mathcal{O}_S}$ 范畴的定义简单，因此更有意思。$\mathrm{LC}^{\mathcal{O}_S}$ 范畴不那么自然，但它给出了更简洁的对偶性表述。

8.1. S 包含所有无穷位。本小节中，我们假设 S 包含所有无穷位，且 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_S$。我们将为 $L_{K(1)}K(\mathrm{LCA}^{\mathcal{O}_S})$构造一个下降谱序列。我们将依据 Milne [Mil06，第 1 章，§4]中的论述。我们将 $G_S := \mathrm{Gal}(F_S/F)$ 简记为最大伽罗瓦扩张 F_S/F 的伽罗瓦群，该扩张在 S之外非分歧。对于 L/F任意有限扩张，我们记

S' 表示 L 中位于 S处上方的赋值，J_L:$_S := \prod'_{v \in S'} \left(L_v^\times;\ \mathcal{O}_L^\times$ 表示$_v\right)$ 的 S'-幂等`，$L$:$E_L$:$_S$；$= \mathcal{O}_L^\times$ 表示$_{S'}$ 的 $S'$-单位群，$L$:$C_L$:$_S$；$= J_L$表示$_S/E_L$-幂等$_S$ 类群。此外，$S'$:`colim E_S，$=$: $_L E_L$colim$_S$，以及 $J_S := \mathrm{colim}_L J_L$表示相应的伽罗瓦模，定义在$_S$上。

命题 8.1（未对偶化谱序列）。设 K 表示非连通的 K-理论。设 p 为奇素数，F 为数域，S 为 F 的一个（可能无限的）赋值集合，其中包含无穷

pla处，并且满足 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_S$。假设 $k \geq 1$。那么存在一个收敛谱序列

$$E_2^{i,j} := \operatorname{Ext}^i_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p^k(1+\tfrac{j}{2}), C_S\right) \Rightarrow \pi_{-i-j} L_{K(1)}(K/p^k)K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}),$$

其中 C_S 表示该数域的 S-id`ele 类群。

E_2-页的形状为

$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
2	0	$\operatorname{Ext}^0_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p^k(2), C_S\right)$	$\operatorname{Ext}^1_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p^k(2), C_S\right)$	$\operatorname{Ext}^2_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p^k(2), C_S\right)$	0
1	0	0	0	0	0
0	0	$\operatorname{Ext}^0_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p^k(1), C_S\right)$	$\operatorname{Ext}^1_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p^k(1), C_S\right)$	$\operatorname{Ext}^2_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p^k(1), C_S\right)$	0
−1	0	0	0	0	0
−2	0	$\operatorname{Ext}^0_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p^k(0), C_S\right)$	$\operatorname{Ext}^1_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p^k(0), C_S\right)$	$\operatorname{Ext}^2_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p^k(0), C_S\right)$	0
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	−1	0	1	2	$\cdots$

微分 d_2: $E^{i,j}_2 \to E^{i+2,j-1}_2$。阴影区域标出 π_0-对角线。

证明。（步骤 1）考虑正合函子

$$\mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_S, fg} \longrightarrow \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}, \qquad M \longmapsto M \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbb{A}_S.$$

由命题 4.15，我们可以将诱导的 K-理论上的映射（在本证明中记为 δ）与以下映射等同：

$$\delta\colon K(\mathcal{O}_S) \longrightarrow \prod_{v\in S}{}' \left(K(F_v) : K(\mathcal{O}_v)\right), \tag{8.1}$$

其中，受限直积各因子上的诱导映射分别为 $M \mapsto M \otimes_{\mathcal{O}_S} F_v$（分别为 $M \mapsto M \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_v$），因此对应于概形态射。现在将 $L_{K(1)}$ 应用于等式 8.1。根据定理 5.1 和引理 5.6（3），$L_{K(1)}(\delta)$ 展开为

$$L_{K(1)}K(\mathcal{O}_S) \longrightarrow \operatorname*{colim}^{\mathsf{Sp}}_{S'\subseteq S,\ \#S'<\infty} \left(\prod\nolimits_{v\in S\setminus S'} L_{K(1)}K(\mathcal{O}_v) \times \prod\nolimits_{v\in S'} L_{K(1)}K\left(F_v\right)\right). \tag{8.2}$$

由于余极限中所有过渡映射与相应 Thomason 下降谱序列逐级兼容，我们得到一个关于等式 8.2 中映射的同伦余纤维的下降谱序列。从现在起，我们转而在模 p^k 意义下工作。我们将用伽罗瓦上同调的形式写出这些谱序列。按照定义 5.2，记 $G_S := \mathsf{Gal}(F_S/F)$，其中 F_S 是 F 的最大伽罗瓦扩张，且在 S 之外非分歧。于是，´Spec $\mathcal{O}_S$ 或 Spec F_v 上的 étale 层都可以视为 G_S-模，因为局部伽罗瓦群 $G_v := \mathsf{Gal}(F_v^{\mathrm{sep}}/F_v)$ 可与 G_S 中某个分解子群等同。我们用 $\mathrm{I}_{G_v}^{G_S}$ 表示伽罗瓦模的余诱导。该同伦余纤维的谱序列具有如下形式

$$E_2^{i,j} := H^i\left(G_S, \operatorname{cofib}\left(\mathbf{Z}/p^k(-\tfrac{j}{2}) \xrightarrow{\delta} \prod_{v\in S}{}' \left(\mathrm{I}_{G_v}^{G_S}\mathbf{Z}/p^k(-\tfrac{j}{2}) : \mathrm{I}_{G_{v,\mathrm{ur}}}^{G_S}\mathbf{Z}/p^k(-\tfrac{j}{2})\right)\right)\right) \tag{8.3}$$

带有极限项

$$\Rightarrow \pi_{-i-j}\left(\operatorname{cofib}\left(L_{K(1)}(K/p^k)(\mathcal{O}_S) \xrightarrow{\delta} \prod_{v\in S}{}' \left(L_{K(1)}(K/p^k)(F_v) : L_{K(1)}(K/p^k)(\mathcal{O}_v)\right)\right)\right).$$

得益于 §4.7 中的纤维序列，极限项可简化如下。

$$\begin{aligned}
&\cdots \Rightarrow \pi_{-i-j} \operatorname{cofib}\left(L_{K(1)}(K/p^k)(\mathcal{O}_S) \xrightarrow{\delta} L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad})\right) \\
&\cong \pi_{-i-j} L_{K(1)} \operatorname{cofib}\left((K/p^k)(\mathcal{O}_S) \xrightarrow{\delta} (K/p^k)(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad})\right) \\
&\cong \pi_{-i-j} L_{K(1)}(K/p^k) K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}) \qquad \text{(by Thm. 4.30).}
\end{aligned} \tag{8.4}$$

（步骤 2）我们接下来展开式 8.3 中谱序列的 E_2-页。我们将伽罗瓦上同调群改写为 $H^i(G_S, -) \cong \mathrm{Ext}^i_{G_S}(\mathbf{Z}, -)$ 的形式。为简洁起见，我们省略受限直积 $\prod'(-:-)$ 中第二个位置的具体写法。由于 RHom 与 $^{v\in S}$锥相交换，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{RHom}_{G_S}\left(\operatorname{cofib}\left(\mathbf{Z}/p^k(-\tfrac{j}{2}) \to \prod_{v\in S}{}' \mathrm{I}^{G_S}_{G_v} \mathbf{Z}/p^k(-\tfrac{j}{2})\right)\right) \\
&\cong \operatorname{cofib}\left(\mathrm{RHom}_{G_S}\left(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/p^k(-\tfrac{j}{2})\right) \to \mathrm{RHom}_{G_S}\left(\mathbf{Z}, \prod_{v\in S}{}' \mathrm{I}^{G_S}_{G_v} \mathbf{Z}/p^k(-\tfrac{j}{2})\right)\right) \\
&\cong \operatorname{cofib}\left(\mathrm{RHom}_{G_S}\left(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/p^k(-\tfrac{j}{2})\right) \to \prod_{v\in S}{}' \mathrm{RHom}_{G_S}\left(\mathbf{Z}, \mathrm{I}^{G_S}_{G_v} \mathbf{Z}/p^k(-\tfrac{j}{2})\right)\right)
\end{aligned} \tag{8.5}$$

由于 Hom 群在第二个变量上与任意极限相交换，而且此处的 Hom 群在第二个变量上也与滤过余极限相交换，因为 Z 是 G_S-模范畴中的紧对象。现在我们运用类域论中的结果：我们将使用如下 G_S-模的正合列

$$E_S \hookrightarrow J_S \twoheadrightarrow C_S \tag{8.6}$$

引自 [Mil06，第 1 章，第 4 节，主定理的证明]。定义见同上引文。为后续使用，我们也记录以下同构：在后文的每次应用中，M 都将是某个 Tate 扭曲 $\mathbf{Z}/p^k(j)$，接着是 $M^d = \mathbf{Z}/p^k(1-j)$；而 $(-)^* = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(-, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ 是庞特里亚金对偶的非拓扑版本（我们将在例 C.6 中回顾它与真正的庞特里亚金对偶之间的关系）。

$$\begin{array}{rcll}
\mathrm{Ext}^r_{G_S}(M, C_S) & \cong & H^{2-r}(\mathcal{O}_S, M)^* & \text{对于 } r \geq 1 \\
\mathrm{Ext}^r_{G_S}(M, E_S) & \cong & H^r(\mathcal{O}_S, M^d) & \text{对于 } r \geq 0 \\
\mathrm{Ext}^r_{G_S}(M, J_S) & \cong & P^r_S(F, M^d) & \text{对于 } r \geq 1
\end{array} \tag{8.7}$$

第一个同构是 [Mil06, 定理 4.6 (a)]。这些条件均已满足，因为 M 是有限的，并且条件 $p \in P$（采用同上引文中的记号）也已满足，因为 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_S$（由 p-分圆塔可知，解释见 [Mil06, 第 1 章 §4] 开头）。由于 M 被 p湮灭，同构两边也都被湮灭，因此我们不必像同上引文那样限制在 p-扭子部分。第二个同构是 [Mil06, 引理 4.12]。第三个同构是 [Mil06, 引理 4.13], ，同样利用了我们只会在有限的 M 情形下调用这一结果。两个同构中对 $r \geq 1$ 的限制带来了一些微妙之处。下面详细讨论。对于 $r = 0$，式 8.7 中最后一个同构的正确替换是（同样由 [Mil06, 引理 4.13]给出）

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^0_{G_S}(M, J_S) &\cong \prod_{v\in S} H^0(G_v, M^d) \\
&\cong P^0_S(F, M^d) \oplus \bigoplus_{v\in S_\infty} H^0(F_v, M^d).
\end{aligned} \tag{8.8}$$

请注意，这正是我们在引理 5.6、注记 5.7 和图表 5.17 中已经遇到的“异常”。因此，这个表面上的“异常”实际上与我们的框架完全吻合。

（步骤 3）利用这些事实（特别是等式 8.7 中最后两个方程以及等式 8.8 中的 $r=0$ 修正），我们可以将等式 8.5 识别为

$$\begin{aligned}&\cong \operatorname{cofib}\left(\mathrm{RHom}_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p(1+\tfrac{j}{2}), E_S\right) \to \mathrm{RHom}_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p(1+\tfrac{j}{2}), J_S\right)\right)\\ &\cong \mathrm{RHom}_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p(1+\tfrac{j}{2}), \operatorname{cofib}\left(E_S \longrightarrow J_S\right)\right)\\ &\cong \mathrm{RHom}_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p(1+\tfrac{j}{2}), C_S\right),\end{aligned} \tag{8.9}$$

其中最后一个同构来自等式 8.6。总结这一计算，我们得到了一个收敛谱序列

$$\begin{aligned}E_2^{i,j} &:= \mathrm{Ext}^i_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p(1+\tfrac{j}{2}), C_S\right)\\ &\Rightarrow \pi_{-i-j} L_{K(1)}(K/p) K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}).\end{aligned} \tag{8.10}$$

这就证明了命题 8.1。 □

8.2. 任意的 S。在本小节中，只要满足 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_S$， S 就可以是 F 的任意素位集合。后者意味着 S 至少包含一个有限处，因此定义 6.6 可用。除了 §8.1 中定义的伽罗瓦模之外，我们还需要如下内容：对于固定的有限扩张 L/F，记 S'_∞ 为 L 的无穷位，

$V_{L,\,S} := \prod_{v \in S'_\infty \setminus (S' \cap S'_\infty)} L_v^\times$ 表示 S'-idele 中不需要的[32] 无穷处因子，以及 $V_S := \operatorname{colim}_L V_{L,\,S}$。赋值 $S'_\infty \setminus (S' \cap S'_\infty)$ 的选择与等式 6.1 中的选择相对应。

引理 8.2。我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} V_S & \xrightarrow{\simeq} & V_S & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ E_S & \hookrightarrow & J_S & \twoheadrightarrow & C_S \\ \| & & \downarrow & & \downarrow \\ E_S & \hookrightarrow & J_S^{\setminus\infty} & \longrightarrow & C_S^{\setminus\infty} \end{array}, \tag{8.11}$$

其中 $J_S^{\setminus\infty}$ 、 $C_S^{\setminus\infty}$ 分别定义为相应的余核。

证明。显然。 □

图 8.11 是图 6.7 的伽罗瓦模对应物。

命题 8.3（对偶化谱序列）。设 K 表示非连通的 K理论。设 p 为奇素数， F 为数域， S 为任意（可能无限的）赋值集，满足 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_S$。假设$k \geq 1$。则存在一个收敛谱序列

$$\begin{aligned}E_2^{i,j} &:= \mathrm{Ext}^i_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p^k(1+\tfrac{j}{2}), C_S^{\setminus\infty}\right)\\ &\Rightarrow \pi_{-i-j} L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S).\end{aligned}$$

具有微分 $d^{i,\,r^j}$：$E^{i,\,r^j} \to E^{i+r,\,r}$ $^{i-r+1}$上同调型。或者，也可以将其 E_2-页项表述为

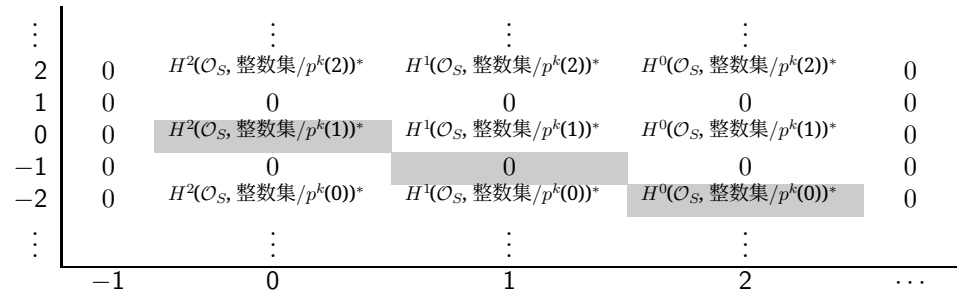
$$E_2^{i,j} \cong H^{2-i}(\mathcal{O}_S, \mathbf{Z}/p^k(1+\tfrac{j}{2}))^* \tag{8.12}$$

对所有 $i, j \in \mathbf{Z}$。我们将其称为对偶化形式。

[32]，我们的意思是要在事后将它们移除，正如 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 是通过将相应的阿基米德因子商去而定义的。

我们可以详细写出 E_2-页的各项:

(8.13)



证明。这与命题 8.1 的证明完全类似，因为 $\mathrm{LC}\mathcal{O}_S$ 与 $\mathrm{LCA}^{\mathcal{O}_S}$ 的区别仅在于除去了对应于无穷位的一些因子的商，而$C_S^{\setminus\infty}$ 的情况也一样。因此，我们只说明如何修改命题 8.1 的证明，而我们的修改实际上只涉及该证明的步骤 2。

（步骤 1）我们按照上一个证明中的步骤 1 进行，也就是说，我们同样考虑

$$\delta\colon K(\mathcal{O}_S) \longrightarrow \prod_{v\in S}{}' \, (K(F_v) : K(\mathcal{O}_v)) \, .$$

等式 8.2 仍然成立，不过现在改用命题 6.8 (1)、(4)。所得谱序列的极限项可像等式 8.4 那样计算，不过现在改为依赖命题 6.8 (3) 中修正后的纤维序列。描述极限项的等式 8.4 变为

$$\begin{aligned} E_2^{i,j} &:= H^i\left(G_S, \dots\right) \\ &\Rightarrow \pi_{-i-j} L_{K(1)}(K/p^k) K(\mathrm{LC}\mathcal{O}_S) \end{aligned}$$

对于定义 6.6 中修正后的范畴 $\mathrm{LC}\mathcal{O}_S$ 。之后的推导均可原样进行，直至并包括等式 8.5。该同构仍如所述成立，但与等式 8.6 中 $E_S \hookrightarrow J_S \twoheadrightarrow C_S$ 的识别并不完全成立，因为 J_S 和 C_S 中包含的一些无穷位可能缺失。

（步骤 2，情况略有不同）我们利用引理 8.2 修正阿基米德赋值处的不匹配。由图 8.11 的各列可得长正合列

$$0 \to \mathrm{Ext}^0_{G_S}(M, V_S) \to \mathrm{Ext}^0_{G_S}(M, J_S) \to \mathrm{Ext}^0_{G_S}(M, J_S^{\setminus\infty}) \to \mathrm{Ext}^1_{G_S}(M, V_S) \to \cdots .$$

由于 $\mathbf{C}^\times$ 和 $\mathbf{R}^\times$ 都是 p-可除的（因为 p 是奇数），且我们的 M 始终是有限的 p-主伽罗瓦模， [Mil06，例 0.8] 得出

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^r_{G_S}(M, V_S) &\cong H^r(G_S, \mathrm{Hom}(M, V_S)) \\ &\cong \bigoplus_{v\in S_\infty\setminus(S\cap S_\infty)} H^r(G_S, \mathrm{I}_{G_v}^{G_S} M^d) \qquad (\text{for all } r \geq 0). \end{aligned}$$

由于 G_v 对于 $v \in S_\infty$ 的 ´étale p-上同调维数为零，因此这对 $r \geq 1$ 为零。对 C_S-对应情形也可进行类似计算。因此，

$$0 \to \bigoplus_{v\in S_\infty\setminus(S\cap S_\infty)} H^0(G_S, \mathrm{I}_{G_v}^{G_S} M^d) \to \mathrm{Ext}^0_{G_S}\left(M, J_S\right) \to \mathrm{Ext}^0_{G_S}(M, J_S^{\setminus\infty}) \to 0$$

是正合的。因此，等式 8.8 推出

$$\mathrm{Ext}^0_{G_S}(M, J_S^{\setminus\infty}) \cong P_S^0(F, M^d).$$

对于 $C_S^{\setminus\infty}$ ，情况类似，但稍微复杂一些：在 [Mil06，第1章第4节第 59] 页的计算中（或详见 [NSW08，引理8.6.12]），左侧

向下箭头同上引文的核是$\bigoplus_{v\in S_\infty\setminus(S\cap S_\infty)} H^0(G_S, \mathrm{I}_{G_v}^{G_S} M^d)$，因此我们得到

$$0 \to \bigoplus_{v\in S_\infty\setminus(S\cap S_\infty)} H^0(G_S, \mathrm{I}_{G_v}^{G_S} M^d) \to \mathrm{Ext}^0_{G_S}(M, C_S) \to \mathrm{Ext}^0_{G_S}\left(M, C_S^{\setminus\infty}\right) \to 0,$$

但根据 [Mil06, Thm. 4.6 (b)]

$$\mathrm{coker}\left(\mathrm{Ext}^0_{G_S}(M, D_S(L)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^0_{G_S}(M, C_S)\ \right) \ \cong H^2(\mathcal{O}_S, M)^*$$

（对于适当的扩张 L/F），可以将两种计算联系起来，从而得到 $\mathrm{Ext}^0_{G_S}(M, C_S^{\setminus\infty}) \cong H^2(\mathcal{O}_S, M)^*$。结合 V_S 的高阶 Ext 群消失以及等式 8.7，可得

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Ext}^r_{G_S}(M, C_S^{\setminus\infty}) & \cong & H^{2-r}(\mathcal{O}_S, M)^* & \text{for } r\in\mathbf{Z} \\ \mathrm{Ext}^r_{G_S}(M, E_S) & \cong & H^r(\mathcal{O}_S, M^d) & \text{for } r\in\mathbf{Z} \\ \mathrm{Ext}^r_{G_S}(M, J_S^{\setminus\infty}) & \cong & P^r_S(F, M^d) & \text{for } r\in\mathbf{Z} \end{array} \tag{8.14}$$

以及一个由 G_S-模组成的正合列

$$E_S \hookrightarrow J_S^{\setminus\infty} \twoheadrightarrow C_S^{\setminus\infty}.$$

（步骤 3）现在我们可以按照命题 8.1 证明中的步骤 3 继续。等式 8.5 展开为

$$\begin{aligned} &\cong \mathrm{cofib}\left(\mathrm{RHom}_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p(1+\tfrac{j}{2}), E_S\right) \to \mathrm{RHom}_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p(1+\tfrac{j}{2}), J_S^{\setminus\infty}\right)\right) \\ &\cong \mathrm{RHom}_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p(1+\tfrac{j}{2}), \mathrm{cofib}\left(E_S \longrightarrow J_S^{\setminus\infty}\right)\right) \\ &\cong \mathrm{RHom}_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p(1+\tfrac{j}{2}), C_S^{\setminus\infty}\right), \end{aligned}$$

这与等式 8.9 相对应。与等式 8.10 一样，我们得到一个谱序列，其 E_2 页和极限页分别为

$$\begin{aligned} E_2^{i,j} &:= \mathrm{Ext}^i_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p^k(1+\tfrac{j}{2}), C_S^{\setminus\infty}\right) \\ &\Rightarrow \pi_{-i-j} L_{K(1)}(K/p^k) K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S). \end{aligned}$$

我们的断言可由利用等式 8.14 的第一个同构，在底层类形成的对偶配对下重写 E_2-页项得出。□

8.3. 对偶定理的证明。如 §C 中所述，我们用 K 表示素数 p 处的 $K(1)$-局部同伦范畴。其内禀张量结构源于对通常的 smash 积进行 $K(1)$-局部化。

定理 8.4（对偶，主要表述）。令 K 表示非连通的 K-理论。设 p 为奇素数，F 为数域，S 为 F 的有限处集合（可以是无限集），且满足 $\frac{1}{p}\in\mathcal{O}_S$。则配对

$$L_{K(1)}K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}) \otimes_{\mathsf{K}} L_{K(1)}K(\mathcal{O}_S) \longrightarrow L_{K(1)}K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{F,S}} I_{\mathbf{Z}_p}\mathbb{S}_{\widehat{p}} \tag{8.15}$$

是左完美的[33]。其伴随映射

$$L_{K(1)}K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S) \longrightarrow I_{\mathbf{Z}_p} L_{K(1)}K(\mathcal{O}_S) \tag{8.16}$$

是一个等价。若 S 只包含有限多个处，则该配对左右完美，尤其是其反向伴随映射

$$L_{K(1)}K(\mathcal{O}_S) \longrightarrow I_{\mathbf{Z}_p} L_{K(1)}K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}) \tag{8.17}$$

也是一个等价。

[33]我们回顾一下 §C.2 中术语 *left/right perfect* 的用法。

目前，文献中尚无关于凝聚谱的色同伦论。不过，一旦这套理论建立起来，上述结果将给出凝聚谱的左右完美配对，即使 S 是无限的。自反性的失效是阿贝尔群范畴的问题，这个问题被带入了谱范畴，并非算术本身造成的。

证明。（步骤 1）双正合配对

$$\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S} \times \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_S,fg} \longrightarrow \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S} \tag{8.18}$$

式 4.24（§4.8）诱导出一个 K-理论上的配对；利用 Moore 谱上的乘法，也诱导出一个 $K/p^k \cong K \otimes_{\mathsf{Sp}} \mathbb{S}/p^k$ 上的配对。由此得到的配对

$$(K/p^k)(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}) \otimes_{\mathsf{Sp}} (K/p^k)(\mathcal{O}_S) \longrightarrow (K/p^k)(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S})$$

进而产生一个 $K(1)$-局部配对

$$L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}) \otimes_{\mathsf{K}} L_{K(1)}(K/p^k)(\mathcal{O}_S) \longrightarrow L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S})$$

and

- $E^{\bullet,\bullet}(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S})$，命题 8.1 为 $\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}$ 提供的下降谱序列，以及
- $E^{\bullet,\bullet}(\mathcal{O}_S)$，如 §5.1 所述的普通下降谱序列，

获得一个诱导的乘法结构。我们希望剖析这一对谱序列

$$E_r^{i,j}(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}) \otimes_{\mathbf{Z}} E_r^{i',j'}(\mathcal{O}_S) \longrightarrow E_r^{i+i',j+j'}(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}). \tag{8.19}$$

为了计算乘法在 K-理论上的作用，注意到我们的配对与下式相容

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_S,fg} \times \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_S,fg} & \xrightarrow{\otimes} & \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_S,fg} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad} \times \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_S,fg} & \xrightarrow[\otimes]{} & \mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad}. \end{array} \tag{8.20}$$

这使得 $K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\,ad})$成为一个 $K(\mathcal{O}_S)$-代数，并且由定理 4.30 可得

$$K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}) \cong \operatorname{cofib}\left(K(\mathcal{O}_S) \to K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad})\right).$$

因此，我们可以在以下层面计算该配对

$$K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad}) \otimes K(\mathcal{O}_S) \longrightarrow K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad}).$$

但是，根据命题 4.15，$\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,\,ad}$ 可以识别为一个受限乘积范畴。利用这一识别，我们的配对便化为通常的张量积

$$\mathsf{Proj}_{F_v,fg} \otimes \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_S,fg} \longrightarrow \mathsf{Proj}_{F_v,fg} \qquad \text{resp.} \qquad \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_v,fg} \otimes \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_S,fg} \longrightarrow \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_v,fg}.$$

下降谱序列 $E^{\bullet,\bullet}(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S})$ 和 $E^{\bullet,\bullet}(\mathcal{O}_S)$ 均来自对相应 K-理论谱的过滤。由于已知通常的张量积在谱序列上的配对与杯积相容，因此我们得出，在我们的情形中也同样如此。下文将用“$\smile$”表示杯积。将这些杯积改写为 Ext 群的形式会很有用：

设 a、b、u、$v \in$ 整数集任意。回顾一下，对于每个配对

$$\mathbf{Z}/p^k(u) \otimes \mathbf{Z}/p^k(v) \longrightarrow \mathbf{Z}/p^k(u+v)$$

伴随映射

$$\mathbf{Z}/p^k(u) \longrightarrow \operatorname{Hom}\left(\mathbf{Z}/p^k(v), \mathbf{Z}/p^k(u+v)\right) \tag{$*$}$$

诱导出一个交换方块[34]

$$\begin{array}{ccc}
H^a\left(-,\mathbf{Z}/p^k(u)\right)\otimes H^b\left(-,\mathbf{Z}/p^k(v)\right) & \xrightarrow{\smile} & H^{a+b}\left(-,\mathbf{Z}/p^k(u+v)\right) \\
\downarrow{\scriptstyle *\otimes 1} & & \| \\
\mathrm{Ext}^a(\mathbf{Z},\mathrm{Hom}\left(\mathbf{Z}/p^k(v),\mathbf{Z}/p^k(u+v)\right))\otimes H^b\left(-,\mathbf{Z}/p^k(v)\right) & & \| \\
\downarrow & & \| \\
\mathrm{Ext}^a(\mathbf{Z}/p^k(v),\mathbf{Z}/p^k(u+v))\otimes \mathrm{Ext}^b\left(\mathbf{Z},\mathbf{Z}/p^k(v)\right) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^{a+b}\left(\mathbf{Z},\mathbf{Z}/p^k(u+v)\right)
\end{array}$$

通过 Ext 群上的约内达积来表示伽罗瓦上同调上的杯积（参见 [Har20, 命题 16.17]或 [Mil06, 第 I 章，命题 0.14]）。

将此应用于等式 8.19 的配对，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ext}^i_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p^k(1+\tfrac{j}{2}),C_S\right)\otimes \mathrm{Ext}^{i'}_{G_S}\left(\mathbf{Z},\mathbf{Z}/p^k(-\tfrac{j'}{2})\right) \\
&\qquad\longrightarrow \begin{cases} \mathrm{Ext}^{i+i'}_{G_S}(\mathbf{Z},C_S) & \text{for } j+j'=-2 \\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}
\end{aligned} \tag{8.21}$$

（步骤 2）上述论述可下降到商范畴 $\mathsf{LC}\mathcal{O}_S$：等式 8.18 的双正合配对诱导出一个双正合配对

$$\mathsf{LC}\mathcal{O}_S\times \mathsf{Proj}_{\mathcal{O}_S,fg}\longrightarrow \mathsf{LC}\mathcal{O}_S \tag{8.22}$$

因为实向量空间与有限秩自由 $\mathcal{O}_S$-模张量后，仍带有实向量空间拓扑。更具体地说，由此可知，带有实拓扑的 $F_{\langle S\rangle}$-模会被映到 $F_{\langle S\rangle}$-模。现在该配对的形式为

$$K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S)\otimes_{\mathsf{Sp}} K(\mathcal{O}_S)\longrightarrow K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S). \tag{8.23}$$

可以得到一个类似的谱序列配对，其中用 $C_S^{\setminus\infty}$ 替代 C_S。我们只需检查步骤 1 中的所有论证都与取商去掉 $\mathsf{Proj}_{F_{\langle S\rangle},fg}$ 相容，并将命题 8.1 中的谱序列 $E^{\bullet,\bullet}(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S})$ 替换为命题 8.3 中的 $E^{\bullet,\bullet}(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S)$。细节从略，因为命题 8.3 的证明已花篇幅说明如何实现这一转换。现在我们得到的不是等式 8.21，而是

$$\begin{aligned}
&\underline{\mathrm{Ext}^i_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p^k(1+\tfrac{j}{2}),C_S^{\setminus\infty}\right)}\otimes \mathrm{Ext}^{i'}_{G_S}\left(\mathbf{Z},\mathbf{Z}/p^k(-\tfrac{j'}{2})\right) \\
&\qquad\longrightarrow \begin{cases} \underline{\mathrm{Ext}^{i+i'}_{G_S}\left(\mathbf{Z},C_S^{\setminus\infty}\right)} & \text{for } j+j'=-2 \\ \underline{0} & \text{otherwise.}\end{cases}
\end{aligned} \tag{8.24}$$

暂且忽略下划线，我们添加它们只是为了稍后指代这些术语。情况 $i+i'=2$ 是特殊的：此时等式 8.21 的配对取值于 $\mathrm{Ext}^2_{G_S}(\mathbf{Z}\ C_S)$，而它在底层类形成的不变映射下

$$\mathrm{inv}\colon \mathrm{Ext}^2_{G_S}(\mathbf{Z},C_S)\cong H^2(\mathcal{O}_S,C_S)\cong \mathbf{Q}/\mathbf{Z}, \tag{8.25}$$

是 Poitou–Tate 对偶配对的目标。这一点对 $C_S^{\setminus\infty}$ 同样成立，无需任何改动：我们有 $\mathrm{Ext}^2_{G_S}(M,C_S^{\setminus\infty})\cong \mathrm{Ext}^2_{G_S}(M,C_S)$。这是由于高阶伽罗瓦

[34]请记住，Hom群的复合顺序为 $\mathrm{Hom}(B,C)\times\mathrm{Hom}(A,B)\to\mathrm{Hom}(A,C)$。

V_S的上同调消失，正如命题 8.3 的证明中所讨论的那样。因此，将其限制到 $i+i'=2$，我们得到一个配对

$$\begin{aligned}&\underline{\mathrm{Ext}^i_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p^k(1+\tfrac{j}{2}),C_S^{\setminus\infty}\right)}\otimes\mathrm{Ext}^{i'}_{G_S}\left(\mathbf{Z},\mathbf{Z}/p^k(-\tfrac{j'}{2})\right)\\&\longrightarrow\begin{cases}\underline{\mathrm{Ext}^2_{G_S}\left(\mathbf{Z},C_S^{\setminus\infty}\right)\cong\mathbf{Q}/\mathbf{Z}} & \text{for } i+i'=2 \text{ and } j+j'=-2\\ \underline{0} & \text{otherwise.}\end{cases}\end{aligned}\tag{8.26}$$

（步骤 3）接下来的一步最好通过一个玩具模型来解释：设 $p\colon A\times B\longrightarrow \mathrm{Q/Z}$ 是阿贝尔群的一个配对。若它是左完美的，也就是说，其伴随映射 $A\to B^*:=\mathrm{Hom}(B,\mathrm{Q/Z})$ 是一个等价，我们就可以用 A 的对偶将其同构地替换。这样一来，配对 p 就变成了求值配对。

$$\begin{array}{ccc}A\times B & \xrightarrow{p} & \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\\ \downarrow & & \|\\ B^*\times B & \xrightarrow[\mathrm{ev}]{} & \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\end{array}\tag{8.27}$$

在当前的证明中，我们将把这一机制应用于整体类域论底层类形成的对偶配对。该配对为

$$\mathrm{Ext}^i_{G_S}(M,C_S^{\setminus\infty})\otimes H^{2-i}(\mathcal{O}_S,M)\longrightarrow\mathrm{Ext}^2_{G_S}(M,C_S^{\setminus\infty})\xleftarrow{\sim}\mathrm{Ext}^2_{G_S}(M,C_S)\xrightarrow[\mathrm{inv}]{\sim}\mathbf{Q}/\mathbf{Z},\tag{8.28}$$

它是左完美的，并诱导出同构

$$\Upsilon\colon\ \mathrm{Ext}^i_{G_S}(M,C_S^{\setminus\infty})\xrightarrow{\sim}H^{2-i}(\mathcal{O}_S,M)^*\qquad\text{for all } i\in\mathbf{Z}.$$

参见 Milne [Mil06，第 I 章，§1，主定理附近，Thm. 1.8]；或 Harari [Har20，§16.3 开头]。我们之前已经用过 Υ：它是为我们的谱序列 $E^{\bullet,\bullet}(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S)$ 提供等式 8.12 对偶化形式的同构，也是等式 8.14 中所用的同一个同构（甚至在更早的等式 8.7 中也用到了）。现在将等式 8.28 的配对代入等式 8.27 的机制。注意，由于限制到 $i+i'=2$ 和 $j+j'=-2$，这只是将等式 8.28 应用于特殊情形 $M:=\mathrm{Z}/p^k(1+\frac{j}{2})$ 的一个实例。因此，等式 8.27 变为

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{Ext}^i_{G_S}\left(\mathbf{Z}/p^k(1+\frac{j}{2}),C_S^{\setminus\infty}\right)\otimes\mathrm{Ext}^{i'}_{G_S}\left(\mathbf{Z},\mathbf{Z}/p^k(-\frac{j'}{2})\right) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^2_{G_S}\left(\mathbf{Z},C_S^{\setminus\infty}\right) & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\\ \downarrow{\scriptstyle\Upsilon\otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle\sim} & & \|\\ H^{2-i}(\mathcal{O}_S,\mathbf{Z}/p^k(1+\frac{j}{2}))^*\otimes\mathrm{Ext}^{i'}_{G_S}\left(\mathbf{Z},\mathbf{Z}/p^k(-\frac{j'}{2})\right) & \xrightarrow[\mathrm{ev}]{} & H^{2-(i+i')}(\mathcal{O}_S,\mathbf{Z}/p^k)^* & \xrightarrow[\sim]{} & \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.\end{array}$$

因此，我们可以继续考察下行中的配对。除非 $i+i'=2$ and$j+j'=-2$，否则该配对为零；在这种情况下，它就是求值配对

$$\begin{aligned}&H^{2-i}(\mathcal{O}_S,\mathbf{Z}/p^k(1+\tfrac{j}{2}))^*\otimes\mathrm{Ext}^{2-i}_{G_S}\left(\mathbf{Z},\mathbf{Z}/p^k(1+\tfrac{j}{2})\right)\\&\xrightarrow[\mathrm{ev}]{}H^0(\mathcal{O}_S,\mathbf{Z}/p^k)^*\cong\mathbf{Z}/p^k.\end{aligned}\tag{8.29}$$

根据构造，这个映射是 $H^0(\mathcal{O}_S,\mathrm{Z}/p^k)^*\cong\mathrm{Z}/p^k$ into$\pi_0(K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S)$ 中典范嵌入的一个截面。到目前为止，整个讨论都围绕等式 8.23 中的配对展开。接下来，我们将这个配对的 $K(1)$-局部化形式与第 7 节的迹映射复合。

$$L_{K(1)}K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S)\otimes_{\mathsf{K}}L_{K(1)}K(\mathcal{O}_S)\longrightarrow L_{K(1)}K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S)\xrightarrow{\mathrm{Tr}_{F,S}}I_{\mathbf{Z}_p}\mathbb{S}_{\widehat{p}}.$$

模 p^k 而言，我们得到与迹的有限层版本（等式 7.25）相对应的配对，即

(8.30)

$$L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S)\otimes_{\mathsf{Sp}} L_{K(1)}(K/p^k)(\mathcal{O}_S)\to L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S)\xrightarrow{\mathrm{Tr}_{F,S}/p^k} I_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}\mathbb{S}/p^k.$$

根据构造，在 π_0 上，式 8.30 中最右边的映射，依迹映射的构造，等于映射 $V_{F,\ S,\ k}$ 到

(8.31)

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{O}_S,\mathbf{Z}/p^k)^* & \xrightarrow{E_{F,S,k}} & \pi_0 L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S) \\ & \searrow^{\sim} & \downarrow{\scriptstyle V_{F,S,k}=\pi_0(\mathrm{Tr}_{F,S}/p^k)} \\ & & \frac{1}{p^k}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}, \end{array}$$

其中

$$E_{F,S,k}\colon H^0(\mathcal{O}_S,\mathbf{Z}/p^k)^*\hookrightarrow \pi_0 L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S)$$

是由 $E^{\bullet,\bullet}(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S)$ 的谱序列导出的自然包含。正如其名称所示，它与式 7.5 的显式构造一致。命题 7.6 (1) 证明了图表 8.31 的交换性，同一结果的 (2) 部分表明 $\pi_0(\mathrm{Tr}_{F,\ S}/p^k)=V_{F,\ S,\ k}$。由此可得，式 8.30 中的配对在同伦群 π_* 上诱导出一个分次配对

$$\pi_r\otimes\pi_s\longrightarrow\pi_{r+s}.$$

对于 $r+s\neq 0$，此配对为零；对于 $r+s=0$，它是一个左完美配对，换言之，其伴随映射

(8.32)

$$L_{K(1)}(K/p^k)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S)\longrightarrow F_{\mathsf{Sp}}\left(L_{K(1)}(K/p^k)(\mathcal{O}_S),I_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}\mathbb{S}/p^k\right)\cong I_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}L_{K(1)}(K/p^k)(\mathcal{O}_S)$$

是一个等价。

（步骤 4）在步骤 3 中，我们已证明，对于所有 $k\geq 1$，等式 8.30 都是一个左完美配对。还需证明我们的论断在不模去 p^k 的情况下仍然成立。由于我们的谱是 p-完备的（见注 C.3），这并无妨碍。具体来说，等式 8.23 中配对的伴随映射为

$$\begin{aligned} L_{K(1)}K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S)&\longrightarrow F_{\mathsf{Sp}}\left(L_{K(1)}K(\mathcal{O}_S),L_{K(1)}K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S)\right)\\ &\longrightarrow F_{\mathsf{Sp}}\left(L_{K(1)}K(\mathcal{O}_S),I_{\mathbf{Z}_p}\mathbb{S}_{\widehat{p}}\right)\cong I_{\mathbf{Z}_p}L_{K(1)}K(\mathcal{O}_S).\end{aligned}$$

我们需要验证这个映射是一个等价。我们发现

$$L_{K(1)}K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S)\longrightarrow I_{\mathbf{Z}_p}L_{K(1)}K(\mathcal{O}_S)$$

根据公式 C.5，它等价于

$$\Sigma L_{K(1)}K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S)\longrightarrow I_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}L_{K(1)}K(\mathcal{O}_S)$$

是一个等价。由于两边都是 p-完备的，只需验证这个映射模 p 后是一个等价，也就是说，只需证明

$$\left(\Sigma L_{K(1)}K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S)\right)/p\longrightarrow\left(I_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}L_{K(1)}K(\mathcal{O}_S)\right)/p$$

是一个等价。由 $X\xrightarrow{\cdot p}X\to X/p$ 我们得到 $I_{\mathbf{Q}_p/\text{整数集}_p}X\xleftarrow{\cdot p}I_{\mathbf{Q}_p/\text{整数集}_p}X\leftarrow I_{\mathbf{Q}_p/\text{整数集}_p}(X/p)$，因此 $(I_{\mathbf{Q}_p/\text{整数集}_p}X)/p\cong\Sigma(I_{\mathbf{Q}_p/\text{整数集}_p}(X/p))$。因此，

$$\Sigma L_{K(1)}(K/p)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S)\longrightarrow\Sigma\left(I_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}L_{K(1)}(K/p)(\mathcal{O}_S)\right).$$

因此，剩下要验证的是

$$L_{K(1)}(K/p)(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S)\longrightarrow I_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}L_{K(1)}(K/p)(\mathcal{O}_S)$$

这是一个等价。然而，这一点已在步骤 3 中解决，特别是等式 8.32。这证明等式 8.15 中的配对是左完美的，等价地，等式 8.16 是一个等价。若S 有限，则命题 8.3 的谱序列的 E_2 页上的所有伽罗瓦上同调群都是有限的。因此， $L_{K(1)}(K/p^k)(\mathrm{LC}\mathcal{O}_S)$ 的同伦群也都是有限的。仅凭有限性，这些谱关于 Brown–Comenetz 对偶都是自反的。因此，等式 8.30 中的配对还将是右完美的，并且反向伴随也满足等式 8.32 的类似结论。接着，步骤 4 中的相同论证解决了反向对偶，即等式 8.17。证明至此完成。□

8.4. 推论与补充。我们可以立即从引言中得出简化后的表述。设 p 为一个奇素数， F 为一个数域， S 为 F 的一个（可能是无限的）有限位集合，使得 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_S$。

定理 A 的证明。为了避免在引言中就以完全一般的情形建立 $\mathrm{LC}\mathcal{O}_S$ ，我们简要地将 $\mathrm{LCA}^{\circ}_{\mathcal{O}_S}$ 定义为 $\mathrm{LCA}^{\mathcal{O}_S}$ 对那些底层 LCA 群为实向量空间的 $\mathcal{O}_S$-模取商。后者等同于所有向量 $\mathcal{O}_S$-模构成的范畴，因此 $\mathrm{LCA}^{\circ}_{\mathcal{O}_S} =_{def} \mathrm{LC}\mathcal{O}_S$ ，因为根据假设， S 只包含有限位。□

8.4.1. 转移。现在设 S 为 F 的任意一个（可能是无限的）赋值集合，但满足 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_{F,S}$。若 F'/F 是有限扩张，则令 $S(F')$ 表示 F' 中位于 S 之上的赋值。设 S' 为 F' 的任意赋值集合，使得 S' 包含 $S(F')$。

定义 8.5。我们将该扩张记为 $f\colon \mathrm{Spec}\ F' \to \mathrm{Spec}\ F$。

（1）定义推前

$$f_*\colon \mathrm{LC}\mathcal{O}_{F',S'} \longrightarrow \mathrm{LC}\mathcal{O}_{F,S}$$

在 $\mathrm{LCA}^{\mathcal{O}_{F',S'}}$层面上，即遗忘局部紧 $\mathcal{O}_{F',S'}$-模结构，转而采用 $\mathcal{O}_{F',S'}$-模结构。

（2）设 $S' = S(F')$。定义拉回

$$f^*\colon \mathrm{LC}\mathcal{O}_{F,S} \longrightarrow \mathrm{LC}\mathcal{O}_{F',S'}$$
$$M \longmapsto M \otimes_{\mathcal{O}_{F,S}} \mathcal{O}_{F',S'}$$

在 $\mathrm{LCA}^{\mathcal{O}_{F,S}}$ 层面上，将其定义为 [Mos67] 的拓扑张量积。不依赖此张量积，也可以等价地将其定义为

$$f^*M := \mathrm{Hom}_{\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_{F',S'}}}(\mathcal{O}_{F'}, M^\vee)^\vee, \tag{8.33}$$

其中 Hom 群赋予紧开拓扑。

这两个函子都是正合的，并在 K-理论上诱导映射，我们也将它们称为推前和拉回。

推前将 $F'_{\langle S'\rangle}$-模映到 $F_{\langle S\rangle}$-模，因此，尽管我们实际上只给出了 $\mathrm{LCA}^{\mathcal{O}_{F',S'}}$ 的定义，但由此可知，它在商 $\mathrm{LC}\mathcal{O}_{F',S'}$ 上仍是良定义的。拉回也同样如此。

推前的定义对于无限扩张 F'/F 也有意义。由于这超出了本文的讨论范围，我们不再进一步讨论。

证明。只有拉回需要讨论。Hom-张量伴随给出

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{F',S'} \otimes_{\mathcal{O}_{F,S}} M &\cong \mathcal{O}_{F'} \otimes_{\mathcal{O}_F} M \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_{F'}}}(\mathcal{O}_{F'} \otimes_{\mathcal{O}_F} M, \mathbb{T})^\vee \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_F}}(\mathcal{O}_{F'}, M^\vee)^\vee.\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{O}_{F'}$是有限生成离散群，赋予紧开拓扑的群 $\mathrm{Hom}^{\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_F}}(\mathcal{O}_{F'}, M^\vee)$ 是一个局部紧$\mathcal{O}_{F',S'}$-模（参见 [Mos67，定理 4.3（2′）]）。在

特别地，其庞特里亚金对偶也局部紧。这证明了式 8.33 给出了拉回的另一种构造方式。这也说明相关的张量积确实是局部紧的。提醒读者， [Mos67] 的张量积通常会得到一个不一定局部紧的拓扑模。□

例 8.6。如果 $\mathcal{O}_{F'}$ 是一个自由 $\mathcal{O}_F$-模（一般情况下未必如此），则可以取任意 $\mathcal{O}_F$-模同构 $\alpha\colon \mathcal{O}_{F'} \simeq \mathcal{O}^{[F'\colon F]}$ 并赋予

$$\mathcal{O}_{F',S'} \otimes_{\mathcal{O}_{F,S}} M \cong \mathcal{O}_{F'} \otimes_{\mathcal{O}_F} M \overset{\alpha}{\simeq} M^{[F':F]}$$

其乘积拓扑。由于 $\mathcal{O}_{F'}$ 是离散的，这与前面的定义一致。容易看出，所得拓扑与 α 的选择无关。如果 $\mathcal{O}_{F'}$ 在 $\mathcal{O}_F$ 上不是自由的，仍然可以将这一方法应用于自由覆盖。不过，要证明由此得到的拓扑定义良好，会变得越来越繁琐。

引理 8.7。假设我们处于 §8.4.1 开头所述的情形。分别对 F 和 F' 考虑定理 4.30 中的纤维序列。则由

$$\begin{array}{ccccc}
K(\mathcal{O}_{F',S'}) & \longrightarrow & \prod\limits_{v'\in S}{}' \ (K(F'_{v'}) : K(\mathcal{O}_{F',v'})) & \longrightarrow & K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_{F',S'}}) \\
{\scriptstyle f_*}\downarrow \uparrow{\scriptstyle f^*} & & {\scriptstyle f_*}\downarrow \uparrow{\scriptstyle f^*} & & {\scriptstyle f_*}\downarrow \uparrow{\scriptstyle f^*} \\
K(\mathcal{O}_{F,S}) & \longrightarrow & \prod\limits_{v\in S}{}' \ (K(F_v) : K(\mathcal{O}_v)) & \longrightarrow & K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_{F,S}})
\end{array}$$

仅由（水平向上）或（水平向下）的箭头组成的子图表是交换的。对于左项和中间项，我们按照 K- 理论中的通常方式定义 f^* 和 f_* ；对于右项，我们采用定义 8.5。

证明。对于 f_*，这是显然的。对于 f^*，需要计算阿代尔模的等式 8.33 的拉回。可以发现，它与相对于 p-进（分别为实）向量空间结构的通常张量积一致。验证这一点后，其余部分也显而易见。□

定理 C 的证明。（步骤 1）我们将通过分析等式 8.19 中配对两侧相关下降谱序列层面的转移来证明这一点。对于 $E^{i',\ r\ j'}(\mathcal{O}_S) \Rightarrow K(\mathcal{O}_S)$，众所周知，拉回对应于限制，而推前对应于余限制。对于 $E^{i,\ r\ j}(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}) \Rightarrow K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S})$，引理 8.7 展示了类似的性质。特别地，由此可知，我们也可以通过取余纤维上的诱导映射来定义转移

$$\operatorname{cofib}\left(K(\mathcal{O}_S) \longrightarrow \prod_{v\in S}{}' \ (K(F_v) : K(\mathcal{O}_v))\right) \xrightarrow{\sim} K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S}).$$

这就将证明我们的结论归结为说明限制和余限制在对偶性下互换。在伽罗瓦上同调中，投影公式的具体形式为

$$x \smile \operatorname{cor}_F^{F'}(y) = \operatorname{cor}_F^{F'}\left(\operatorname{res}_F^{F'}\, x \smile y\right). \tag{8.34}$$

对于每个类形成，图表

$$\begin{array}{ccc}
H^2(\mathcal{O}_{F',S'}, C_{F',S'}) & \xrightarrow[\sim]{\operatorname{inv}_{F'}} & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\
{\scriptstyle \operatorname{cor}_F^{F'}}\downarrow & & \| \\
H^2(\mathcal{O}_{F,S}, C_{F,S}) & \xrightarrow[\operatorname{inv}_F]{\sim} & \mathbf{Q}/\mathbf{Z}
\end{array} \tag{8.35}$$

均可交换。由于 $H^2(\mathcal{O}_{F,S}, C_S) \cong \mathrm{Ext}^2_{G_S}(\mathbb{Z}, C_S) \cong \mathrm{Ext}^2_{G_S}(\mathbb{Z}, C_S^{\backslash\infty})$，对于 $\mathcal{O}_{F',S'}$ 也同样如此，我们可以利用这一点关联 F 和 F' 两者在等式 8.26 中的配对。我们计算

$$\mathrm{inv}_F\left(x \smile \mathrm{cor}_F^{F'}(y)\right) \underset{\text{Eq. } 8.34}{=} \mathrm{inv}_F\left(\mathrm{cor}_F^{F'}\left(\mathrm{res}_F^{F'}\, x \smile y\right)\right) \underset{\text{Eq. } 8.35}{=} \mathrm{inv}_{F'}\left(\mathrm{res}_F^{F'}\, x \smile y\right).$$

由此可知，限制是余限制的左伴随映射（就双线性配对而言）。由于它们分别是伽罗瓦上同调中拉回与推前的对应概念，因此相关的断言对相应下降谱序列的 E_2 页也成立，进而对 $L_{K(1)}K(-)$ 也成立。由于此论证本质上依赖于类形成的一个性质，它在定理 B 的情形下也有效。□

猜想。令 K 表示非连通 K-理论。设 p 为奇素数，F 为数域，S 为 F 的有限处组成的有限集，且满足 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_S$。那么存在如下纤维序列的等价

$$\begin{array}{ccccc} L_{K(1)}K(\mathcal{O}_S) & \longrightarrow & L_{K(1)}K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{S,ad}) & \longrightarrow & L_{K(1)}K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S) \\ \Downarrow & & \Updownarrow & & \Uparrow \\ I_{\mathbf{Z}_p}L_{K(1)}K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_S) & \longrightarrow & I_{\mathbf{Z}_p}L_{K(1)}K(\mathsf{LC}\mathcal{O}_{S,ad}) & \longrightarrow & I_{\mathbf{Z}_p}L_{K(1)}K(\mathcal{O}_S) \end{array}$$

其中底行是顶行的 Anderson 对偶（或许相差一个符号）。

所谓纤维序列的等价，是指底层的谱的双笛卡尔方形（包括零同伦）带有一个与对偶方形的等价。采用当前的证明方法来构造这一结构，似乎会是一项极其棘手的工作。

8.5. 预期。对于所有正则概形 X，都应存在一个由导出局部紧 $\mathcal{O}_X$-模构成的范畴 C_X。

猜想。我们将注意力限制在这样的正则概形上：它们在某个数域的 S-整数环 $\mathcal{O}_S$ 上是平坦、有限型且分离的。

(1) 对应关系 $U \mapsto \mathsf{C}_U$ 应满足扎里斯基余层性质；也就是说，对于开集 $U \subseteq U'$，不应有一个限制，而应有一个截面的扩张，即一个正合函子

$$\mathsf{C}_U \longrightarrow \mathsf{C}_{U'}.$$

(2) 对于每个适当态射 $f\colon X \to Y$，都应有一个拉回函子[35] $f^*\colon \mathsf{C}_Y \to \mathsf{C}_X$。(3) 对于每个光滑态射 $f\colon X \to Y$，都应有一个推前函子 $f_*\colon \mathsf{C}_X \to \mathsf{C}_Y$。(4) 在 $K(\mathsf{C}_X)$ 上应存在一个动机权滤子，以及“局部紧动机上同调” $H^*_{\mathrm{lc}}(-, \mathbb{Z}(n))$，并且该滤子应对应一个 Atiyah–Hirzebruch 型谱序列 $H^*_{\mathrm{lc}}(-, \mathbb{Z}(*)) \Rightarrow K(\mathsf{C}_X)$。(5) 一旦有了 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_S$，$K(\mathsf{C}_X)$ 和 $K(X)$ 就应是素数 p 处的 $K(1)$-局部 Anderson 对偶，差一个平移。

对于有限型且分离的 $\mathbb{F}_p$ 上的正则概形，应当存在类似的形式体系，它在 p 之外有效。

为了纳入素数 p，应转向 Selmer K-理论，正如 Clausen [Cla17] 所设想的那样。对于所有拟紧拟分离概形，都应该可以定义这样一个范畴；不过，这一定义应当比单纯要求某种形式的导出局部紧性稍复杂一些。[Bra19, Bra20]，表明，在非正则概形上，即使在一维算术概形的情形下，也无法得到恰当的对象。例如，如果要将本文改用于数域中的非极大阶 $\mathfrak{A} \subsetneq \mathcal{O}_F$，$\mathsf{LCA}_{\mathfrak{A}}$ 就不是恰当的概念。

[35] 因此，这与通常的预期恰恰相反

这一切还有一个非交换版本。我们决定不将其纳入本手稿，但可参见 [BHv21] 了解一些初步进展。其几何对应物应当是上述猜想的一个版本，并由阿祖马亚层扭曲。

Appendix A. Proof of Theorem B

我们将定理 B 的证明推迟到附录中，因为它在很大程度上独立于数域这一复杂得多的情形。

还有一点需要注意：在全文中，对于任意拓扑环 R，范畴 LCA_R 始终指由局部紧拓扑 R-模及连续的 R-模同态构成的范畴。在正文中，我们只在环带有离散拓扑时使用这一范畴。而在附录中（且仅在附录中），情况有时有所不同。因此，有些简化不再适用。特别是，注 4.2 中将 LCA_R 描述为 $\mathrm{Fun}(\langle\mathcal{O}_S\rangle,\mathsf{LCA}_{\mathbf{Z}})$ 的另一种方式，仅当 R 带有离散拓扑时才成立。

定理 B 的证明。（局部版本，非阿基米德情形）设 F 是 $\mathbf{Q}_\ell$ 的有限扩张。由 BM20，定理 1.4]，谱 $K(F)$ 在 $K(1)$-局部同伦范畴中是 Anderson 自对偶的，即

$$I_{\mathbf{Z}_p} L_{K(1)}K(F) \cong L_{K(1)}K(F).$$

根据 [AB19, §A.2，尤其是命题 A.4]，存在一个正合范畴之间的正合等价 $\mathrm{Proj}_{F,\ fg} \xrightarrow{\sim} \mathsf{LCA}_F$，适用于拓扑局部紧 F-向量空间。这就证明了该断言。（局部版本，阿基米德情形）可直接验证。（有限域情形）Blumberg–Mandell–Yuan [BMY21, 命题 6.5] 也研究了 $K(\mathbf{F}_q)$ 的 Anderson 对偶。他们观察到的对偶中的平移 Σ，可以在局部紧一侧解释为一种平移；这种平移在局部化到 $K(1)$-局部世界之前就已存在。于是它便成为 Tate 范畴解环性质的一个实例。我们用一种自成一体的方式来说明这一点：设 F 是 $\mathbf{F}_\ell$ 的有限扩张。根据 [AB19，命题 A.1] 的证明，存在正合范畴之间的正合等价 $\Gamma\colon \mathsf{LCA}_F \xrightarrow{\sim} \mathsf{Tate}(\mathrm{Mod}_{F,\ fg})$，同上引文中也称为 Γ，因此

$$K(\mathsf{LCA}_F) \cong K(\mathsf{Tate}(\mathrm{Mod}_{F,fg})) \cong \Sigma K(\mathrm{Mod}_{F,fg}) = \Sigma K(F), \tag{A.1}$$

其中第二个等价是 Sho Saito 关于 Tate 范畴的去环定理 [Sai15]。有限域的 $\widehat{\ }$ 上同调维数恰为 1（绝对伽罗瓦群是整数集），因此 Thomason 下降谱序列的形式如图 5.6 所示，但所有 H^2-项均为零。结合等式 A.1 中的等价（反向应用），我们得到

$$\pi_{2j+1} L_{K(1)}K(\mathsf{LCA}_F) \otimes \mathbb{S}/p^k \cong H^0(F, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(j))$$
$$\pi_{2j} L_{K(1)}K(\mathsf{LCA}_F) \otimes \mathbb{S}/p^k \cong H^1(F, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(j))$$

对所有 $j \in \mathbf{Z}$ 和 $k \geq 1$均成立。对于 $j = 0$，第二个同构给出了一个与 $/p^k\mathbf{Z}$ 相容的同构系统，因此对于余极限，我们得到

$$\pi_0\left(L_{K(1)}K(\mathsf{LCA}_F) \otimes \mathbb{S}\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p\right) \cong H^1(F, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p) \cong \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p.$$

稍作改写，利用 $\mathbb{S}\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \cong \Sigma\mathcal{N}$，这定义了一个映射

$$\pi_0\left(L_{K(1)}\Sigma K(\mathsf{LCA}_F) \otimes \mathcal{N}\right) \longrightarrow \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$$

因此，$L_{K(1)}\Sigma K(\mathsf{LCA}_F) \to I_{\mathbf{Q}_p/\text{整数集}_p}\mathbb{S}_{\widehat{p}} \cong \Sigma I_{\mathbf{Z}_p}\mathbb{S}_{\widehat{p}}$，这是由 Brown–Comenetz 对偶和 Anderson 对偶在 p-完备情形下的性质得出的（具体而言，这里用到了公式 C.4 和公式 C.5）。去悬挂得到映射

$$L_{K(1)}K(\mathsf{LCA}_F) \longrightarrow I_{\mathbf{Z}_p}\mathbb{S}_{\widehat{p}}, \tag{A.2}$$

它将充当有限域情形下 §7 中迹映射作用的类比。§4.8 中的配对可以更一般地针对带有离散拓扑的任意环 R 来构造，从而赋予 $K(\mathsf{LCA}_R)$ a$K(R)$-模结构。由此得到的配对

$$K(R) \otimes_{\mathsf{Sp}} K(\mathsf{LCA}_R) \longrightarrow K(\mathsf{LCA}_R)$$

对于我们的特殊情形 $R := F$，与式 A.2 中的迹映射复合后，便诱导出一个配对

$$L_{K(1)}K(F) \otimes_{\mathsf{K}} L_{K(1)}K(\mathsf{LCA}_F) \longrightarrow L_{K(1)}K(\mathsf{LCA}_F) \longrightarrow I_{\mathbf{Z}_p}\mathbb{S}_{\widehat{p}}.$$

通过揭示这一配对的作用，可以证明它是完美配对：只需证明它在同伦群上诱导出完美配对，而这又可由相关 Thomason 下降谱序列的 E_2 页上存在完美配对推出。上述配对（针对 $L_{K(1)}K \otimes \mathbb{S}/p^k$）为

$$H^i(F, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(j)) \otimes_{\mathbf{Z}} H^{1-i}(F, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(-j)) \longrightarrow H^1(F, \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}(0)) \cong \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$$

根据有限域的伽罗瓦上同调对偶性，该配对是完美配对（或者也可以直接说，$\widehat{\ }$之所以成立，是因为 Gal(F^{sep}/F) $\cong \mathsf{Z}$ 是秩为一的自由有限群）。由此证明得证。□

上述论证与 §8 中的论证完全类似；正如那里所解释的，只需证明这些完美配对模 p 后仍是完美配对。

推论 A.1. 设 p 为奇素数，F 为数域，S 为包含无穷位的 F 的有限处集合，并且满足 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_S$。那么我们有如下自对偶性

$$I_{\mathbf{Z}_p} L_{K(1)}K(\mathcal{O}_{S,ad}) \cong L_{K(1)}K(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad}).$$

对于无限集合 S，自对偶性并不成立，陷阱 A.2 中对此作了解释。

证明。利用命题 4.15，并将定理 B 所给出的自对偶性相加。 □

陷阱 A.2。推论 A.1 的证明足够简单，不至于引发疑虑。尽管如此，仍有两点微妙之处：（1）有人可能会疑惑，这种自对偶性对于无限的赋值集合是否成立。由于存在一种非常一般的 Pontryagin自对偶，这一点尤其容易令人信以为真

$$P^i(F, M) \longrightarrow P^{2-i}(F, M)^\vee \qquad (\text{for all } i \in \mathbf{Z}) \tag{A.3}$$

对于群 P^i，任意有限伽罗瓦模 M 在赋予自然的局部紧拓扑后，见 [NSW08，第 VIII 章，命题 8.5.2]。这一对偶性对任意 S 的选择都成立，显然我们希望据此构造推论 A.1。然而，由于这是拓扑 Pontryagin 对偶，我们需要将其化归为底层群上相对于 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(-, \mathsf{Q}/\mathsf{Z})$ 的纯代数对偶，以便用 Brown–Comenetz 对偶来重新表述（并且如 §C.1 所述，对 p-完备 Anderson 对偶也同样如此）。正如我们在例 C.6 中详细说明的，只有当相关的紧致（有限伽罗瓦）群是拓扑有限生成时，这种重新表述才可行。这意味着我们的 p-完备谱必须以有限生成的 Z_p-模作为同伦群，而当 S 为无限集时，这一条件便不成立。（2）在无穷处，式 A.3 中的对偶性依赖于 Tate 上同调群 $\widehat{H}^0 \otimes \widehat{H}^2 \to \widehat{H}^2$ 之间的完美对偶；此外，这些群至多含有 2-挠。如我们在注 5.3 和注 5.7 中已经解释的，这类对偶性不会出现在 $K(1)$-局部化的同伦群中。相反，定理 B 中关于 R 和 C 的对偶性仅利用了 H^0 在普通伽罗瓦上同调中与自身的自对偶性，从而产生 p-主挠。以 p-挠现象取代 2-挠现象或许令人困惑，但须注意这是两种完全独立的情况：Tate 上同调中的 2-挠对偶性在 Poitou–Tate 对偶中具有实际的算术意义（例如，R 处的希尔伯特符号便源于此），但与我们无关，因为我们的 p 是奇数。p-主挠的自对偶作用于 H^0，则相当平淡。它没有算术意义，在 Poitou–Tate 对偶中也没有对应的现象。

陷阱 A。 3. Vista C.8 中的方法应当可以将推论 A.1 推广到无限集 S。

Appendix B. Locally compact modules with cardinality bounds

设 R 是一个诺特环。为了避免处理所有 R-模所构成的范畴，人们或许会觉得施加某种基数界更加稳妥。同样，也可能希望将局部紧模限制为满足某种大小约束的模。本附录将概述如何实现这一点；最终我们会看到，只要基数界足够大，就完全不会影响 K-理论（或其他局部化不变量）。

设 κ 是一个无限基数，并令 $\mathrm{Mod}_R^{\leq\kappa}$ 表示由具有 κ-生成集的 R-模构成的阿贝尔范畴。或者，$\mathrm{Mod}_R^{\leq\kappa} \cong \mathrm{Ind}_\kappa(\mathrm{Mod}_{R,\ fg})$，其中 Ind_κ 表示基于基数至多为 κ 的图表的 Ind-范畴。我们回顾一下，每个局部紧阿贝尔群 M 都具有一个非典范分解 $M \simeq \mathbf{R}^n \oplus N$，其中

$$C \hookrightarrow N \twoheadrightarrow D, \tag{B.1}$$

其中 C 是 N 的一个紧开子群，而 D 是离散的。N 的同构类由 [AA78] 唯一确定（ [Rum01, 命题 33] 中有一个简洁的证明）。

定义 B.1. 设 κ 是一个无限基数。令 $\mathrm{LCA}^{\leq\kappa}\ \mathbf{z}$ 为局部紧阿贝尔群范畴，其中的群都可按式 B.1 分解，且满足 $D \in \mathrm{Mod}^{\leq\kappa}\ \mathbf{z}$ 以及 $C^\vee \in \mathrm{Mod}^{\leq\kappa}\ \mathbf{z}$ 。

由于 C 是紧致的，其庞特里亚金对偶 $C^\vee$ 是离散的，因此可视为 $\mathrm{Mod}_{\mathbf{Z}}$中的一个对象。若还有另一个分解 $C' \hookrightarrow N \twoheadrightarrow D'$ 如式 B.1 所示，且满足$C' \subseteq C$，那么 C/C' 必定是有限的（因为 C 是紧致的，而 C' 是 N中的开子群，因此 C/C'带有离散拓扑）。相应地， C 和 D 都可在有限子商构成的之字形链意义下良好定义。因此，若式 B.1 所示的某个序列满足定义 B.1 中的条件，则任意这样的序列都满足这些条件。利用这一点，很容易证明如下结论。

引理 B.2. $\mathrm{LCA}^{\leq\kappa}{}_{\text{整数集}}$ 是一个拟阿贝尔范畴。

一如既往，将闭单射作为容许单态射、开满射作为容许满态射时，$\mathrm{LCA}^{\leq\kappa}{}_{\text{整数集}}$ 带有一个正合结构（与最大正合结构一致）。接下来，定义 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}^{\leq\kappa} := \mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S} \cap \mathrm{LCA}^{\leq\kappa}{}_{\text{整数集}}$。注意，庞特里亚金对偶性限制为正合范畴之间的正合等价

$$(-)^\vee : \mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}^{\leq\kappa} \longrightarrow \mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}^{\leq\kappa,op},$$

这仅仅是定义 B.1 自对偶性质的结果。本文中的所有论证（以及[Bra19, AB19]）对 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}^{\leq\kappa}$ 中任意选取的无限基数 κ均成立。

例 B.3. 我们对 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}^{\leq\kappa}$ 的定义并不意味着该范畴中的所有模都有κ-生成集。例如，即使对于 $\kappa = \aleph_0$，$\mathbf{R}$、$\mathbf{Z}_p$、$\mathbf{Q}_p \in \mathrm{LCA}^{\leq\kappa}{}_{\text{整数集}}$，尽管这些阿贝尔群不可数。

最关键的是，我们在证明的不同步骤中使用的艾伦伯格诡计，只要求存在紧模的可数积和离散模的可数余积。任何这样的 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}^{\leq\kappa}$ 中确实都存在这些对象。最后，对于基数 $\kappa \leq \kappa'$，存在作为全正合子范畴的包含

$$\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}^{\leq\kappa} \hookrightarrow \mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}^{\leq\kappa'}$$

（对于阿代尔的、归纳紧生成等模，情况也类似），从而得到到任意局部化不变量$K : \mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{ex}} \to \mathbf{A}$ 的映射。由于我们的计算适用于任意 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}^{\leq\kappa}$，这表明值 $K(\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}^{\leq\kappa})$（分别为 $\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}^{\leq\kappa,\ ad}$）沿递增的 κ保持不变。这也解释了为什么在本文中讨论基数约束基本上无关紧要。

顺带一提，我们也提及另一种视角。

引理 B.4. 对于 $\kappa = \aleph_0$，$\mathrm{LCA}_{\mathcal{O}_S}^{\leq \aleph_0}$ 等价于第二可数局部紧 $\mathcal{O}_S$-模的范畴。

证明。首先，离散空间是第二可数的，当且仅当它是可数的。因此，定义 B.1 中的条件 $D \in \mathsf{Mod}^{\leq \aleph_0}_{\mathsf{Z}}$ 等价于 D 是第二可数的。其次，庞特里亚金对偶性将第二可数空间映为第二可数空间，因此紧致部分 C 是第二可数的，当且仅当 $C^\vee$ 是可数的。最后，向量模总是第二可数的。□

Appendix C. Duality in the $K(1)$-local homotopy category

设 p 为奇素数。我们将 $(\mathsf{Sp}, \otimes_{\mathsf{Sp}})$ 记为关于 smash 积的谱的对称幺半稳定 ∞-范畴。具体而言，我们采用对称谱作为实现，并大体沿用 Schwede 的记法 [Sch]。同伦范畴 $Ho(\mathsf{Sp}, \otimes_{\mathsf{Sp}})$ 自然构成一个张量三角范畴；更强地说，按 [HPS97, 定义 1.1.4], [HS99, §1.3] 的意义，它是一个代数稳定同伦范畴。用 $\mathbb{S}A$ 表示阿贝尔群 A 的 Moore 谱。我们只会用到 $\mathbb{S}\mathsf{Z}/p^k \cong \mathbb{S}/p^k$ 及其极限和余极限，并且可以为它们固定一个具体的选取。我们使用简写 $\mathcal{N} := \Sigma^{-1}\mathbb{S}\mathsf{Q}_p/\mathsf{Z}_p$，并用 KU 表示周期复 K-理论。令 K 为素数 p 处的 $K(1)$-局部同伦范畴。我们将相应的局部化函子记为 $L_{K(1)}$，

$$L_{K(1)} \colon \mathsf{Sp} \longrightarrow \mathsf{Sp},$$

因此，K 是 $K(1)$-局部对象构成的子范畴。于是 K 又是一个对称幺半稳定∞-范畴，其结构由

$$X \otimes_{\mathsf{K}} Y := L_{K(1)}(X \otimes_{\mathsf{Sp}} Y).$$

以及 $Ho(\mathsf{K}, \otimes_{\mathsf{K}})$ 又是一个代数稳定同伦范畴 [HS99，定理 7.1]。虽然它的张量结构需要再次进行局部化，但函数谱

$$F_{\mathsf{Sp}}(X, Y) = F_{\mathsf{K}}(X, Y) \tag{C.1}$$

自动是 $K(1)$-局部的。$K(1)$-局部谱尤其是 p-完备的。我们还使用一个「对偶对应物」 $L_{\mathrm{KU}}\mathsf{Sp}_{\mathrm{tor}}$，即将 p-挠谱对复 K-理论进行局部化所得的对象。与 $\mathcal{N}$ 作 smash 乘积的自然伴随，

$$F_{\mathsf{Sp}}(\mathcal{N} \otimes_{\mathsf{Sp}} X, Y) \cong F_{\mathsf{Sp}}(X, F_{\mathsf{Sp}}(\mathcal{N}, Y)).$$

伴随函子对诱导出稳定 ∞-范畴之间的等价

$$\mathsf{K} = L_{K(1)}\mathsf{Sp} \xrightarrow{\sim} L_{\mathrm{KU}}\mathsf{Sp}_{\mathrm{tor}},$$

其中 $X \mapsto X \otimes_{\mathsf{Sp}} \mathcal{N}$（反之则为 $F_{\mathsf{Sp}}(\mathcal{N}, X) \leftarrow X$）。这种等价起初仅存在于 Sp 中的 p-完备谱与 p-扭谱之间，但也适用于 KU-局部情形。关于更一般的情形，参见 [Lur11]。

C.1. Brown–Comenetz 与 Anderson 对偶性。我们来回顾一下 p-完备情形中的 Brown–Comenetz 与 Anderson 对偶性，其设定见 [HS99, HM07]。[Sto12, §1, §2] 中有一篇非常易读的概述。设 J 是一个内射阿贝尔群。记 $\mathsf{Sp}^{\widehat{p}}$ 为 p-完备谱的稳定∞-范畴。函子 $\mathfrak{D}_J \colon \mathsf{Sp}^{op}_{\widehat{p}} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ 定义为

$$Z \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(\pi_0(Z \otimes_{\mathsf{Sp}} \mathcal{N}), J) \tag{C.2}$$

是一个上同调函子。具体来说：Z 中的纤维序列会诱导同伦群的长正合序列。由于 J 是内射的，$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(-, J)$ 是正合函子，因此总而言之，我们得到一个反变函子，它将纤维序列映为正合列。此外，Z 中的任意余积都与张量积[36]，以及 π_0可交换。由于 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(-, J)$ 将余积映为

[36]在当前情形下，这是一个 smash 积 on

乘积，结论得证。因此，存在唯一的表示谱 D_J，使得$\mathfrak{D}_J(Z) = \mathrm{Hom}^{Ho(\mathsf{Sp})}(Z, D_J)$。最后，注意到由于 Z是 p-完备的，$\pi_0(Z \otimes_{\mathsf{Sp}} \mathcal{N})$ 是一个 p-挠群，因此 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(\pi_0(Z \otimes_{\mathsf{Sp}} \mathcal{N})\ J)$ 是（经典意义上和导出的）p-完备的。由此，D_J本身是一个 p-完备谱。若 $J \to J'$ 是内射阿贝尔群之间的态射，则会诱导出上同调函子 $\mathfrak{D}_J \to \mathfrak{D}_{J'}$之间的态射，并对应一个表示谱之间的映射 $D_J \to D_{J'}$。p-完备谱 p的 p-完备 Brown–Comenetz 对偶 X 定义为

$$I_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p} X := F_{\mathsf{Sp}}(X, D_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}). \tag{C.3}$$

特别地，我们可以不写作 $D_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}$，而写作 $I_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}\mathbb{S}_{\widehat{p}}$，其中 $\mathbb{S}_{\widehat{p}}$ 表示 p-完备的球谱。由于 X 和 $D_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}$ 都是 p-完备的，因此 $I_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}X$也是如此。使用这一记号并展开可表示性，可得方程

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Sp}}(Z, I_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}\mathbb{S}_{\widehat{p}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}\left(\pi_0(Z \otimes_{\mathsf{Sp}} \mathcal{N}), \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p\right), \tag{C.4}$$

我们利用该方程构造到 $I_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}\mathbb{S}_{\widehat{p}}$的态射。为简便起见，我们记 $G^* := \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(X,\mathrm{Q}_p/\mathrm{Z}_p)$。

备注 C.1。原始 Brown–Comenetz 对偶定义在任意谱上，并基于对函子的表示

$$Z \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}\left(\pi_0 Z, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\right)$$

而不是公式 C.2 中的函子。将其限制到 p-典型部分，即 $\mathrm{Q}_p/\mathrm{Z}_p \subset \mathrm{Q}/\mathrm{Z}$，函子$Z \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(\pi_0 Z,$ $\mathrm{Q}_p/\mathrm{Z}_p)$仍具有如下性质：如果 Z 恰好是一个 p-完备谱，则按此定义的 Brown–Comenetz 对偶通常不会是 p-完备的。因此，为避免误解，人们可能$\widehat{}$更倾向于将公式 C.3 的对偶记为 $I_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}$，并称其为 p-完备对偶。这只是品味问题。

推论 C.2. (1) $\pi_n(I_{\mathbf{Q}_p/\text{整数集}_p} X) \cong \pi_{-n}(X \otimes_{\mathsf{Sp}} \mathcal{N})^*$(2) $\pi_n($ $I_{\mathbf{Q}_p/\text{整数集}_p} X/p^k) \cong \pi_{-n}(X/p^k)^*$

性质 (2) 体现了注记 C.1 中经典 Brown–Comenetz 对偶的性质。

我们也可以考虑 $J :=\mathrm{Q}_p$。正合列

$$\mathbf{Z}_p \hookrightarrow \mathbf{Q}_p \twoheadrightarrow \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p,$$

它可以看作 Z_p 的内射分解，这启发我们定义另一个对偶：

$$I_{\mathbf{Z}_p} X := F_{\mathsf{Sp}}\left(X, \mathrm{fib}\left(D_{\mathbf{Q}_p} \to D_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}\right)\right).$$

这对应于一个 p-完备谱的 p-完备 Anderson 对偶。不过，这里并没有什么有趣的现象，因为对于 p-完备输入谱，$\mathfrak{D}_{\mathbf{Q}_p}(Z) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(\pi_0(Z \otimes_{\mathsf{Sp}} \mathcal{N}), \mathrm{Q}_p)$ 是零函子，因为 π_0 总是 p-扭的。因此，这两种对偶仅相差一个平移：

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{Z}_p} X &\cong F\left(X, \mathrm{fib}\left(0 \to D_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}\right)\right) \cong F\left(X, \Sigma^{-1} D_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}\right) \\ &\cong \Sigma^{-1} F\left(X, D_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}\right) \cong \Sigma^{-1} I_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p} X. \end{aligned} \tag{C.5}$$

因此，在本文的语境中，讨论 Brown–Comenetz 对偶还是 Anderson 对偶并没有太大区别。最后，上述关于 p-完备谱的讨论原样适用于 $K(1)$-局部同伦范畴。一旦我们进入 $K(1)$-局部语境，根据 Gross–Hopkins，即使改为考虑 p-完备的 Spanier–Whitehead 对偶，也大致等价于取上述任一种对偶[37]

$$F_{\mathsf{K}}(X, I_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}\mathbb{S}_{\widehat{p}}) \cong F_{\mathsf{K}}(X, \mathbb{S}_{\widehat{p}}) \otimes_{\mathsf{K}} I_{\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p}\mathbb{S}_{\widehat{p}}, \tag{C.6}$$

其中 $\mathbb{S}_{\widehat{p}} := L_{K(1)}\mathbb{S}$ 现在表示 $K(1)$-局部化的 p-完备球面，而它如今在幺半结构中已变得 $\otimes_{\mathsf{K}}$-可逆。参见 [HS99，推论 10.6]，或文章 [Str00][HG94]。

[37]请注意，使用 F_{K} 或写作 F_{S}并无区别 $_{\mathsf{p}}$ 对于 $K(1)$-局部输入。

C.2. 完美配对。称配对 $\mu\colon X\otimes Y\to Z$ 为左完美，若 Hom-张量伴随 $\mathrm{Hom}(X\otimes Y,Z)\cong \mathrm{Hom}(X,\mathrm{Hom}(Y,Z))$ 将 μ 映为等价 $X\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}(Y,Z)$。若反向配对 $\mu^{\mathrm{op}}\colon Y\otimes X\to Z$ 是左完美配对，则称配对 μ 为右完美。若一个配对同时是左完美和右完美，则称其为完美配对。

注 C.3. 对于 p-完备谱，只需通过与 $\mathbb{S}/p$ 张量来检验配对是否为左完美。这一点如下可见：μ 是左完美的，当且仅当 $f\colon X\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}(Y,Z)$ 是一个等价，但 $f\colon$ p-完备谱之间的态射是一个等价，当且仅当 $f\otimes\mathbb{S}/p$ 是一个等价。为此，注意到纤维 $\mathrm{fib}(f)/p\simeq 0$ 意味着乘以 p 是一个等价，因此任意幂次也如此，所以 $\mathrm{fib}(f)/p^n\simeq 0$。但根据 p-完备性，$\mathrm{fib}(f)\cong\lim \mathrm{fib}(f)/p^n$，而后者为零。反向显然。因此，$f$ 是一个等价，当且仅当 $X/p\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}(Y,Z)/p$是一个等价；反向应用左完美配对的定义，这成立当且仅当$\mu/p\colon X/p\otimes Y/p\to Z/p$是左完美的。

C.3. 自反性。本节讨论定理 A 中方向 $L_{K(1)}K(\mathcal{O}_S)\cong I_{\mathbf{Z}_p}L_{K(1)}K(\mathrm{LCA}^{\mathcal{O}_S})$ 为何仅对有限 S 成立，以及如何解决这一问题。固定某个（稳定 ∞-）范畴中的对象 D。定义 $I(X):=\mathrm{Hom}(X,D)$。于是，由伴随性可得一个自然诱导的双对偶映射 $X\to I^2X$。若双对偶映射是同构，我们就称 X 是自反的（对于所选的对偶类型而言）。

例 C.4. 设 R 为任意离散环。那么在 LCA_R 中，每个对象对于庞特里亚金对偶都是自反的，$D:=$R/Z（圆群）。

例 C.5. 对于所有同伦群 π_iX 均为有限生成的 $\mathbf{Z}_p$-模[38]的谱，$K(1)$-局部 Brown–Comenetz 对偶是自反的。这完全是阿贝尔群中的一种现象，我们将在例 C.6 中说明。由于 Brown–Comenetz 对偶与 Anderson 对偶仅相差一个平移，这一结论同样适用。

例 C.6. 在前一个例子中取 $R:=$Z。于是庞特里亚金对偶性在以下 $\mathrm{LCA}_{\mathbf{Z}}$ 的满子范畴之间诱导出反等价：

离散挠阿贝尔群 $\leftrightarrow$ 有限生成阿贝尔群。

我们可以尝试在不考虑拓扑的情况下，仅从底层阿贝尔群结构重构这种对偶性。在左侧，对偶的底层阿贝尔群可由下式计算：

$$G^\vee=_{def}\mathrm{Hom}_{\mathsf{LCA}_{\mathbf{Z}}}(G,\mathbf{R}/\mathbf{Z})=\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

因为 G 是挠群，而且普通代数群同态与连续群同态之间没有区别。反向则比较棘手。由于 G 是有限群，人们可能会倾向于用 $\mathrm{Hom}^{\mathsf{LCA}_{\mathbf{Z}}}(\varprojlim_H G/H,\mathrm{R/Z})$ 来定义对偶，其中 H 遍历 H 的所有有限指数子群。于是每个 G/H 都是有限群，因此逆极限自然是一个有限群。这一想法基于这样的希望：

$$G=\varprojlim_H G/H,$$

可以仅凭群结构重构 G。若 G 是拓扑有限生成的，这一想法确实可行，因为有限生成完备化是一个幂等函子。然而，一般而言，有限群的有限生成完备化会得到一个不同的群。[NS07]的引言对这个一般性问题作了进一步介绍。若 G 恰好是拓扑有限生成的，确实可以得到

$$\begin{aligned}G^\vee=_{def}\mathrm{Hom}_{\mathsf{LCA}_{\mathbf{Z}}}(G,\mathbf{R}/\mathbf{Z})&\cong\mathrm{Hom}_{\mathsf{LCA}_{\mathbf{Z}}}(\varprojlim_H G/H,\mathbf{R}/\mathbf{Z})\\&\cong\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}),\end{aligned}$$

也就是说，这两个对偶都可以纯粹在其底层阿贝尔群的层面上定义 .

[38]由于同伦群是导出的 p-完备的，因此它们带有 *canonical* 整数集p-模结构。

例 C.7. 根据引理 5.6（对于 $j=1$），我们有

$$\pi_1 L_{K(1)}(K/p)(\mathsf{LCA}_{\mathcal{O}_S,ad}) \cong P_S^1(F,\mathbf{Z}/p(1)).$$

对于所有有限处 $v\in S$，我们可以将 $F_v^\times \simeq \langle\pi_v\rangle\times\mathcal{O}_v^\times$写作 π_v一个局部一致化元，因此

$$\simeq \prod_{v\in S}{}' (F_v^\times/p : \mathcal{O}_v^\times/p) \cong \bigoplus_{v\in S\setminus S_\infty} \mathbf{F}_p \oplus \prod_{v\in S\setminus S_\infty} \mathcal{O}_v^\times/p$$

只要 S 是无限集，直和就不是有限生成的 $\mathbf{Z}_p$-代数。

展望 C.8. 我希望可以建立一个凝聚谱范畴，使得对于每个X，每个 $\pi_i X$ 都是凝聚阿贝尔群。这样，我们就可以将所有 $\pi_i X$ 均来自局部紧阿贝尔群的谱范畴 Sp_{lc}称为局部紧谱。在这个子范畴中，适当形式的布朗可表性应当能给出一个真正的庞特里亚金对偶化对象 $I_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}}$，并将公式 C.4 修改为

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Sp}_{lc}}(Z, I_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}}\mathbb{S}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{LCA}_{\mathbf{Z}}}(\pi_0 Z, \mathbf{R}/\mathbf{Z}).$$

于是，所有局部紧谱的自反性证明应可归结为经典的庞特里亚金对偶性。为证明这一切，或许可以采用 Clausen–Scholze 的全忠实嵌入 $D^b(\mathsf{LCA}_{\mathbf{Z}}) \hookrightarrow D(\mathsf{Cond(Ab)})$ [CS19，讲座 IV，推论 4.9] 的一个版本。不过，这并非与这个设想中的子范畴完全吻合的对应

$$\mathsf{Sp}_{lc} \hookrightarrow \mathsf{Cond(Sp)},$$

由于有着宽松得多的有界性条件：我们不再假设这些谱是连通或余连通的。局部紧性假设应当纯粹是逐层的。接下来，需要在这一框架下发展色同伦论，至少要发展到能够使用 $L_{K(1)}$ 的程度。我设想这将应用于非连通的 K-理论，但此时不应得到 p-完备谱，而应得到 p-完备化，作为拓扑上 p-挠的紧致（$\Leftrightarrow$ pro-p pro有限谱）谱，嵌入在 Sp_{lc}中。感谢 Ko Aoki 和 Achim Krause 与我就此事进行了一些讨论。

Appendix D. Proof of Lemma 5.8

我们重述引理。

引理 D.1. 令 K 表示非连通的 K-理论。设 $k\geq 1$。令 S' 为有限处构成的有限集，且满足 $S'\subseteq S$。假设 S' 包含 S 中位于素数 p之上的所有赋值。那么自然态射

$$L_{K(1)}\left(\textstyle\prod_{v\in S\setminus S'}(K/p^k)(\mathcal{O}_v)\right) \longrightarrow \prod_{v\in S\setminus S'} L_{K(1)}(K/p^k)(\mathcal{O}_v)$$

是一个等价。由于 K(1)-局部同伦范畴中的内在乘积可以在谱范畴 Sp 中计算，因此右侧乘积的含义是明确的。

证明。在开始之前，我们先回顾一下：尽管 K理论与范畴的无穷积交换，但它并不与环的无穷积交换[39]，，因此无法将左侧的乘积展开为 $K/p^k(\prod\mathcal{O}_v)$。虽然 Spec $\prod\mathcal{O}_v$ 是拟紧拟分离的，但这意味着 Clausen–Mathew [CM21] 的拟紧拟分离下降结果并不能直接应用。我们采用另一种思路，在一个戴德金整环上工作，并将 K理论谱的无穷积实现为该情形下的积层。这个积层是普通 K理论上的模；随后，Thomason 构造收敛 ´étale 下降谱序列以计算K(1)-局部化的方法——其形式是将一个 Bott 元 β求逆——便可对这个模层成立，

[39]为此，注意对于任意环 R，元组 $(R^1,R^2,R^3,\ldots)$ 是 $\prod_{\mathbf{N}}\mathrm{Proj}_{R,fg}$ 中的一个对象，但它甚至不是积环 $R_\infty := \prod_{\mathbf{N}}R$ 上的有限生成模，因为有限直和 $R_\infty^{\oplus n}$所映到的任何对象，在每个位置上的秩至多为 n 。因此，底层范畴并不相同。基于这一想法，可以构造具体的反例，例如 [Wei13, 第 II 章，例 2.2。3], 因为 $K(\prod_{\mathbf{N}}\mathrm{Proj}_{R,fg})\cong\prod_{\mathbf{N}}K(R)$。

其 E_1页上具有相应的无穷积。我们选择使用 [ELSØ22]的技术来实现这一点。（步骤 1）如果我们能够对任意一个 S的 F 赋值集合证明该结论，

- 包含所有无穷位，并且
- 不包含任何位于 p 之上的处，

并且 $S' = \varnothing$ （因为该断言仅涉及差集 $S \setminus S'$）。因此，今后我们假设 $S' = \varnothing$。定义 $T := \{F\} \setminus S$的所有处。集合 T仅包含有限处，并包含所有位于 p之上的处。现在我们将使用 [ELSØ22，定理 1.6]。我们的基底概形[40] 是谱 $\mathcal{O}_T$，其中 $\mathcal{O}_T$按等式 3.1 中的定义，而同上引文中称为 ℓ 的素数取为 p。由于 F 是一个数域且 $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}_T$，引用定理的所有假设均已满足。记 $\mathrm{SH}_{\mathrm{Nis}}(\mathcal{O}_T)$ 为 ELSØ22 第 2.1 节中的稳定动机范畴 [8] ，并记 $\mathsf{KGL}_{\mathcal{O}_T}$ 为表示代数 K理论的动机谱。我们将有限处 $v \in S$ 与谱 $\mathcal{O}_T$中的闭点对应起来。闭浸入族 i_v: 谱 $\kappa(v) \hookrightarrow$ 谱 $\mathcal{O}_T$（其中 $v \in S$）诱导出自然映射[41]

$$\coprod_{v \in S} \operatorname{Spec} \kappa(v) \xrightarrow{i_S} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_T$$

由余积的泛性质。左侧的概形就是 Spec $\kappa(v)$ 的不交并。对于 $\mathrm{SH}_{\mathrm{Nis}}(\mathcal{O}_T)$ 中的伴随 $i_S^* \rightleftarrows i_{S*}$，我们得到一个单位 $1 \to i_{S*}i_S^*$；将其应用于 $\mathsf{KGL}_{\mathcal{O}_T}/p$ 后，这诱导出一个映射

$$\mathsf{KGL}_{\mathcal{O}_T}/p \longrightarrow i_{S*}i_S^*\mathsf{KGL}_{\mathcal{O}_T}/p \tag{D.1}$$

and

$$\mathcal{F} := i_{S*}i_S^*\mathsf{KGL}_{\mathcal{O}_T}/p \cong \prod_{v \in S} i_{v*}i_v^*\mathsf{KGL}_{\mathcal{O}_T}/p \tag{D.2}$$

因为 i_{v*}、 i_v^* 是正合的。式 D.1 中的映射使 $i_{S*}i_S^*\mathsf{KGL}_{\mathcal{O}_T}/p$ 成为一个 $\mathrm{MGL}_{\mathcal{O}_T}$-模。[42] 我们得到

$$\operatorname{Hom}_{Ho(\mathrm{SH}_{\mathrm{Nis}})}(\mathbf{1}_{\mathcal{O}_T}[n], \mathcal{F}) \cong \pi_n \left(\prod_{v \in S} (K/p)(\mathcal{O}_v) \right)$$

特别地，[43]

$$\pi_n\mathcal{F} := \operatorname{Hom}_{Ho(\mathrm{SH}_{\mathrm{Nis}})}(\mathbf{1}_{\mathcal{O}_T}[n], \mathcal{F}) \cong \pi_n \left(\prod_{v \in S} (K/p)(\mathcal{O}_v) \right). \tag{D.3}$$

这一计算很容易推广到

- $\mathcal{O}_T$-概形 $X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_T$（因此 $\operatorname{Hom}_{Ho(\mathrm{SH}_{\mathrm{Nis}})}(\mathbf{1}_X[n], \mathcal{F})$ 可计算相应基变换到 X 后的 K-理论），
- étale 超层化 $\mathcal{F}^{ét} := \varepsilon_*\varepsilon^*\mathcal{F}$，其中 ε 是拓扑变换函子

$$\varepsilon^* \colon \mathrm{SH}_{\mathrm{Nis}} \rightleftarrows \mathrm{SH}_{\text{ét}} \colon \varepsilon_*.$$

（步骤 2）暂且假设 F 包含一个本原的 p 次单位根 $\zeta_p \in F$。选定这个根后，我们可以选取一个 Bott 元 β，即任意一个

$$(\pi_2 K(F))/p \hookrightarrow \pi_2(K(F) \otimes \mathbb{S}/p) \twoheadrightarrow {}_p\pi_1 K(F) \tag{D.4}$$

[40]在 [ELSØ22] 中，基底概形称为 S，这与我们的记号[41]冲突；它是闭浸入当且仅当 S 有限[42]除去若干因子（包括泛点对应的因子）后，这个映射就是 Nisnevich 拓扑的戈德曼消解中的第一个映射。[43]我们用不到双分次同伦群 $\pi_{n,\,q}\mathcal{F}$。具体而言， $\pi_n\mathcal{F}$ 指的是 $\pi_{n,\,0}\mathcal{F}$。

映射到 $\zeta_p \in \pi_1 K(F) \cong F^\times$ 的元素。存在一个收敛的 ´étale 下降谱序列，其对象为超层化 $\mathcal{F}^{ét}$。在 $\mathcal{O}_T$ 上求值后，它呈现为

$$E_1^{a,b} := H^{2a-b}(\mathcal{O}_T, \underline{\pi}_a(\mathcal{F}^{ét})) \Rightarrow \pi_{b-a}(\mathcal{F}^{ét}). \tag{D.5}$$

接下来，我们将 Bott 元求逆。我们可以将求逆 β 建模为望远镜局部化 n

$$\mathcal{F}^{ét}[\beta^{-1}] \cong \operatorname{colim}\left(\mathcal{F}^{ét} \xrightarrow{\cdot\beta} \Sigma^{-2}\mathcal{F}^{ét} \xrightarrow{\cdot\beta} \Sigma^{-4}\mathcal{F}^{ét} \xrightarrow{\cdot\beta} \cdots\right). \tag{D.6}$$

我们可以像式 D.5 中那样构造相应的谱序列余极限。一方面，这给出了一个新的收敛谱序列，记作 $E^{\bullet,\ \bullet}[\beta^{-1}]$，满足

$$E_1^{a,b}[\beta^{-1}] := H^{2a-b}(\mathcal{O}_T, \underline{\pi}_a(\mathcal{F}^{ét}[\beta^{-1}])) \Rightarrow \pi_{b-a}(\mathcal{F}^{ét}[\beta^{-1}]). \tag{D.7}$$

接下来，验证如下结论：

断言A：我们断言，式 D.5 中前一个谱序列的 $E^{a,\ _1\ ^b}$-页可化简为

$$E_1^{a,b} = \prod_{v\in S} H^{2a-b}\left(\mathcal{O}_T, \mathbf{Z}/p\right) \tag{D.8}$$

并且乘以 β 在式 D.6 的定向系统中通过同构作用。（步骤 3）根据断言A，式 D.6 中相应 E_1-页的望远镜余极限等价于一个常值归纳系统。因此，在式 D.7 中将 β^{-1} 求逆不会改变 E_1-页；此外，根据式 D.8，其余各项可化简为

$$E_1^{a,b}[\beta^{-1}] := \prod_{v\in S} H^{2a-b}\left(\mathcal{O}_T, \mathbf{Z}/p\right) \Rightarrow \pi_{b-a}(\mathcal{F}^{ét}[\beta^{-1}]). \tag{D.9}$$

接下来需要确定这个谱序列的极限。由 [ELSØ22, 定理1.6 (i)] ，我们可推出 Bott反演的 $\mathcal{F}[\beta^{-1}]$ 满足 ´étale 超下降。因此，到超层化的自然态射必为等价。这给出了 $\mathcal{F}[\beta^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}[\beta^{-1}]^{ét} \xleftarrow{\sim} \mathcal{F}^{ét}[\beta^{-1}]$中的第一个等价。第二个等价利用了超层化（一个左伴随映射）与余极限可交换这一事实。利用这些等价，式 D.9 中的极限项变为

$$\Rightarrow \pi_{b-a}(\mathcal{F}[\beta^{-1}]). \tag{D.10}$$

接下来，我们将 Bott反演替换为 $K(1)$-局部化。

断言B：我们有

$$L_{K(1)} \prod_{v\in S} (K/p)(\mathcal{O}_v) \cong \left(\prod_{v\in S} (K/p)(\mathcal{O}_v)\right)[\beta^{-1}].$$

为此，回顾一下，局部化函子 $L_{K(1)}$ 可实现为先进行 p-完备化，再进行 KU局部化。谱 $\prod_{v\in S}(K/p)(\mathcal{O}_v)$ 是有界的 p-挠的，因此 p-完备化的作用就是单位元。KU局部化是 smashing 的，即，

$$\begin{aligned} L_{K(1)} \prod_{v\in S} (K/p)(\mathcal{O}_v) &\cong L_{\mathrm{KU}} \prod_{v\in S} (K/p)(\mathcal{O}_v) \\ &\cong \left(\prod_{v\in S} K(\mathcal{O}_v)\right) \otimes_{\mathsf{Sp}} \mathbb{S}/p \otimes_{\mathsf{Sp}} \mathbb{S}_{\mathrm{KU}} \qquad (D.11) \\ &\cong \left(\prod_{v\in S} (K/p)(\mathcal{O}_v)\right)[\beta^{-1}] \qquad (D.12) \end{aligned}$$

对于 $\mathbb{S}_{\mathrm{KU}} := L_{\mathrm{KU}}\mathbb{S}$ KU局部球。将 Bott 元与式 D.12 中 Adams映射的求逆联系起来，是一项著名的计算，完全是在 Moore 谱 $\mathbb{S}/p$ 和$\mathbb{S}_{\mathrm{KU}}$ 上进行的（相关导读例如见 Mitchell [Mit92、Bousfield 的定理 1.4 以及定理 2.3

见 Snaith]，或更简要地参见 Waldhausen [Wal84，第 4 节附录，第 193]页；也可参见 Jardine 的教材[Jar97，第 7.5 节，第 276] 页，其中有一个概述）。特别是，尽管这些计算通常用于概形的 K-理论，但它们也适用于式 D.11 中的无限乘积。这就证明了断言B。

（步骤 4）利用式 D.3 的一个版本（针对已对 β 求逆的 $\mathcal{F}$ 作了调整），断言 B 表明，在普通稳定同伦范畴中，$L_{K(1)}\prod_{v\in S}(K/p)(\mathcal{O}_v)$ 的同伦群与 $\mathcal{F}[\beta^{-1}]$ 在 $\mathrm{SH}_{\mathrm{Nis}}$ 中的同伦群一致。因此，式 D.9 的谱序列连同式 D.10 中新增的极限项，变为

$$E_1^{a,b}[\beta^{-1}] := \prod_{v\in S} H^{2a-b}\left(\mathcal{O}_T, \mathbf{Z}/p\right) \Rightarrow \pi_{b-a}(\mathcal{F}[\beta^{-1}]) \cong \pi_{b-a} L_{K(1)}\left(\prod_{v\in S}(K/p)(\mathcal{O}_v)\right).$$

这表明自然态射

$$L_{K(1)}\left(\textstyle\prod_{v\in S\setminus S'}(K/p)(\mathcal{O}_v)\right) \longrightarrow \prod_{v\in S\setminus S'} L_{K(1)}(K/p)(\mathcal{O}_v) \tag{D.13}$$

在所有同伦群上都诱导出同构，因此是一个等价。

（步骤 5）在步骤 2 中，我们曾假设 $\zeta_p \in F$。这一限制可以用标准方法消除：K-群具有有限转移，并且域扩张 $F(\zeta_p)/F$ 的次数是 $p-1$ 的一个因子，因而特别地与 p 互素。由于我们的断言中出现的所有同伦群都是 p-主群，标准转移论证允许我们将问题归约为证明 $F(\zeta_p)$ 的情形。详情参见 Jardine [Jar97，第 7 章，推论 7.29]，并将此用于无限乘积中的每个因子。其次，D.13 只证明了我们的断言对 K/p 成立。然而，由于式 5.18 两边都是 p-完备谱，我们可以通过证明该映射模 p 是等价来检验它是否为等价。这就证明了该引理。□

致谢。感谢 Markus Spitzweck 多次通过电子邮件帮助我梳理一些想法并克服技术难题。若没有 M. Groechenig、K. R ¨ulling 和 M. Wendt 的鼎力支持，这项工作便不可能完成。我由衷感谢他们的帮助。与 K. Aoki、D. Clausen、A. Krause、H. Krause、M. Spitzweck 和 M. Wendt 的交流，多次激发了我对这一项目的兴趣，也让我重燃热情。

2023年5月3日

References

[AA78] D. Armacost 和 W. Armacost, *Uniqueness in structure theorems for LCA groups*, 《加拿大数学杂志》 **30** 1978 3, 593 599 578649 ( )，第 – 期。MR AB P. Arndt 和 O. Braunling, [19] *On the automorphic side of the K-theoretic Artin symbol*, 《Selecta Mathematica》（新系列） **25** 2019 3, 38, 47 3954369 ( )，第 期，文章编号 。MR Arm D. Armacost, [81] *The structure of locally compact abelian groups*, 《纯数学与应用数学专著和教材》，第 68 卷，Marcel Dekker, Inc.，纽约，1981 年。MR 637201[BF15] T. Barthel 和 M. Frankland, *Completed power operations for Morava E-theory*, 《代数与几何拓扑》 **15** 2015 4, 2065 2131 3402336 ( )，第 – 期。MR BGT A. Blumberg、D. Gepner 和 G. Tabuada, [13] *A universal characterization of higher algebraic K-theory*, 《几何与拓扑》 **17** 2013 2, 733 838 3070515 ( )，第 – 期。MR BGW O. Braunling、M. Groechenig 和 J. Wolfson, [16] *Tate objects in exact categories*, 《莫斯科数学杂志》16 (2016 3, 433 504, ´ 3510209)，第 – 期。附录由 Jan ˇS ˇtovıˇcek 和 Jan Trlifaj 撰写。MR BHv O. Braunling、R. Henrard 和 A.-C. van Roosmalen, [21] *A non-commutative analogue of Clausen's view on the idèle class group* https://arxiv.org/abs/2109.04331 2021 ，( )。[BK72] A. Bousfield 和 D. Kan, *Homotopy limits, completions and localizations*, 《数学讲义》，第 304, 1972 0365573 卷，Springer-Verlag，柏林—纽约，。MR BM A. Blumberg 和 M. Mandell, [20] *K-theoretic Tate-Poitou duality and the fiber of the cyclotomic trace*, 《数学发明》 **221** 2020 2, 397 419 4121155 ( )，第 – 期。MR BMS H. Bass、J. Milnor 和 J.-P. Serre, [67] *Solution of the congruence subgroup problem for* $\mathrm{SL}_n (n \geq 3)$ *and*谱范畴$_{2n} (n \geq 2)$，高等科学研究所出版物（1967），第 33 期，59–137。MR 244257

[BMY21] A. Blumberg、M. Mandell 和 A. Yuan, *Chromatic convergence for the algebraic K-theory of the sphere spectrum* https://arxiv.org/abs/2110.03733 2021 , ( )。[Bra18] O. Braunling, *K-theory of locally compact modules over rings of integers*, 《国际数学研究通知》（2018）, rny083。[19] ———— *On the relative K-group in the ETNC* **25** 2019 1112 1177 4028830 Bra, , 《纽[20] ———— *On the relative K-group in the ETNC Part III* **26** 2020 656 687 约数学杂志》( ), –。MR Bra, , 《纽约数学杂志》( ), –。MR 4118150[Bra23] , *K-theory of locally compact modules for higher-dimensional varieties*, 准备中（2023年）。[B¨uh10] T. B¨uhler, *Exact categories*, 《数学探索》28（2010）, 第 1 期, 1–69。MR 2606234 (2011e:18020) [Cla13] D. Clausen, *Thesis: Arithmetic Duality in algebraic K-theory*。[Cla17] , *A K-theoretic approach to Artin maps*, arXiv:1703.07842 [math.KT] （2017）。[CM21] D. Clausen 和 A. Mathew, *Hyperdescent and étale K-theory*, 《数学发明》225（2021）, 第 3 期, 981–1076。MR 4296353[CS19] D. Clausen 和 P. Scholze, *Lectures on Condensed Mathematics (after Clausen–Scholze)*, 2019。[ELSØ22] E. Elmanto、M. Levine、M. Spitzweck 和 P. A. Østvaer, *Algebraic cobordism and étale cohomology*, 《几何与拓扑》 **26** 2022 2, 477 586 4444265 ( ), 第 – 期。MR Har D. Harari, , Universitext, [20] *Galois cohomology and class field theory* Springer, Cham, [2020], 由 Andrei Yafaev 从 2017 年法文原版译出。MR 4174395[HG94] M. Hopkins 和 B. Gross, *The rigid analytic period mapping Lubin-Tate space and stable homotopy* , , , 《美国数学会通 *theory* **30** 1994 1, 76 86 1217353 报》（新系列）( ), 第 – 期。MR [07] *Iwasawa theory for K 1 -local spectra* HM R. Hahn 和 S. Mitchell, ( ), 《美国数学会汇刊》359（2007）, 第 11 期, 5207–5238。MR 2327028[Hov08] M. Hovey, *Morava E-theory of filtered colimits*, 《美国数学会汇刊》360（2008）, 第 1 期, 369–382。MR 2342007[HPS97] M. Hovey、J. Palmieri 和 N. Strickland, *Axiomatic stable homotopy theory*, 《美国数学会回忆录》 **128** 1997 610, +114 1388895 ( ), 第 x 期。MR HR E. Hewitt 和 K. Ross, [79] *Abstract harmonic analysis. Vol. I*, 第二版, 《数学科学基础丛书》 [《数学科学基础》], 第 115 卷, Springer-Verlag, 柏林—纽约, 1979, 551496《拓扑[99] *Morava K-theories and localisation* **139** 1999 群结构、积分理论、群表示》。MR HS M. Hovey 和 N. Strickland, , 《美国数学会回忆录》( ), 第 666 期, viii+100。MR 1601906[HS07] N. Hoffmann 和 M. Spitzweck, *Homological algebra with locally compact abelian groups*, 《数学进展》212（2007）, 第 2 期, 504–524。MR 2329311 (2009d:22006) [Hv19a] B. Henrard 和 A. C. van Roosmalen, *Derived categories of one-sided exact categories and their localizations* arXiv:1903.12647 2019 , ( )。[Hv19b] , *Localizations of one-sided exact categories*, arXiv:1903.10861 （2019）。[Jar97] J. Jardine, *Generalized étale cohomology theories*, 《数学进展丛书》, 第 146 卷, Birkh¨auser Verlag, 巴塞尔, 1997 年。MR 1437604[Kel96] B. Keller, *Derived categories and their uses*, 《代数手册》第 1 卷, North-Holland, 阿姆斯特丹, 1996 年, 第 671–701 页。MR 1421815 (98h:18013) [Lam91] T. Y. Lam, *A first course in noncommutative rings*, 《数学研究生教材》, 第 131 卷, Springer-Verlag, 纽约, 1991 年。MR 1125071 (92f:16001) [Lan90] S. Lang, *Cyclotomic fields I and II*, 第二版, 《数学研究生教材》, 第 121 卷, Springer-Verlag, 纽约, 1990, 1029028 附录由 Karl Rubin 撰写。MR Lur J. Lurie, , [11] *Derived Algebraic Geometry XII: Proper Morphisms Completions and the Grothendieck* , 。 *Existence Theorem* [06] *Arithmetic duality theorems* 2006 2261462 Mil J. [92] *Harmonic localization of algebraic K-theory spectra* **332** 1992 Milne, , 第二版, BookSurge, LLC, 南卡罗来纳州查尔斯顿, 。MR Mit S. Mitchell, , 《美国数学会汇刊》( ), 第 2 期, 823–837。MR 1069739[Mor77] S. Morris, *Pontryagin duality and the structure of locally compact abelian groups*, 剑桥大学出版社, 剑桥—纽约—墨尔本, 1977 年, 伦敦数学会讲义丛书第 29 号。MR 0442141[Mos67] M. Moskowitz, *Homological algebra in locally compact abelian groups*, 《美国数学会汇刊》127 (1967 361 404 0215016), –。[07] MR NS N. Nikolov 和 D. Segal, *On finitely generated profinite groups. I. Strong completeness and uniform* , 《数学年刊》（ ）( ), *bounds* 2 **165** 2007 1, 171 238 2276769 第 – 期。MR [08] *Cohomology of number fields*NSW J. Neukirch、A. Schmidt 和 K. Wingberg, , 第二版, 《数学科学基础丛书》 [《数学科学基础》], 第 323 卷, Springer-Verlag, 柏林, 2008 年。MR 2392026

[Qui73] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory. I*, 代数 K理论，I：高阶 K理论（会议论文集，巴特尔纪念研究所，华盛顿州西雅图，1972），Springer，柏林，1973，第 85–147 页。数学讲义，第 341 卷。MR 0338129 (49 #2895) [Rum01] W. Rump, *Almost abelian categories* ´ ´ ´ **42** 2001 3, , 《范畴微分拓扑札记》（），163 225 1856638
第 – 期。MR [Sai15] S. Saito, *On Previdi's delooping conjecture for K-theory*, 《代数与数论》9（2015），第 1 期，1–11。MR 3317759[Sch] S. Schwede, *Symmetric spectra*。[Sch04] M. Schlichting, *Delooping the K-theory of exact categories*, 《拓扑》43（2004），第 5 期，1089–1103。MR 2079996 (2005k:18023)
[06] ——— *Negative K-theory of derived categories* **253** 2006 1, 97 134 2206639 Sch, , 《数学杂志》
[10] ——— *Hermitian K-theory of exact categories* **5** 2010 1, 105 165
（），第 – 期。MR Sch, , 《K 理论杂志》（），第 – 期。MR 2600285
[12] *Duality for topological modular forms* **17** 2012 271 311 Sto V. Stojanoska, ,
《文献数学》（），–。MR 2946825
[00] *Gross-Hopkins duality* **39** 2000 5, 1021 1033 Str N. Strickland, , 1763961
《拓扑》（），第 – 期。MR [84] *Algebraic K-theory of spaces localization and the chromatic filtration of stable ho-*
Wal F. Waldhausen, , , *motopy* 1982 1982 1051, ,

《代数拓扑》，奥胡斯（奥胡斯，），数学讲义，第 卷。Springer，柏林，1984，第 173–195 页。MR 764579[Wei13] C. Weibel, *The K-book*，数学研究生教材，第 145 卷，美国数学会，普罗维登斯，RI，2013，《代数 K理论导论》。MR 3076731

University of Wuppertal、 Germany
Email address: oliver.braunling@gmail.com