非 domestic 字符串代数的吊床

VINIT SINHA、AMIT KUBER、ANNOY SENGUPTA 和 BHARGAV KALE

印度坎普尔印度理工学院数学与统计学系，
印度北方邦

arXiv:2301.05956v1 [math.RT] 14 Jan 2023

Abstract. 我们证明，字符串代数的吊床最简单版本的序型属于 *finite description* 线性序这一类——该类是包含 0、1 的最小线性序类，并且在同构、有限序和、与 ω 和 ω^*的反字典序积以及有限子集的洗牌下封闭；证明中以线性序的凝缩（局部化）为工具。我们还引入带集的两个有限子集，并用它们描述吊床完备化中左 N-字符串的位置。

1. Introduction

设 Λ 是代数闭域 $\mathcal{K}$ 上的一个字符串代数。Brenner [2] 引入了一类称为吊床的偏序集，用于研究有限维不可分解右 Λ-模之间的映射的分解。Schr¨oer [12, § 3] 在字符串代数背景下引入的吊床的最简单形式是有界离散线性序——本文只讨论这一类吊床。我们用一些标准序型来计算 Λ 的吊床的序型，从而推广 Sardar 与第二作者关于 [10] 的主要结果；后者只处理了 Λ 为国内型的情形。

代数 Λ 为国内型，当且仅当其中只有有限多个带。这些带是一个称为桥箭图 [12, § 4] 的有限组合工具的顶点——其略作修改的版本曾用于国内型情形下序型的显式计算。为将（有限）桥箭图的概念推广到非国内情形，在 [3,Definition 3.1.1], 中引入了带集合的一个有限子集 [3, Theorem 3.1.6] ，其元素称为素带。我们利用一个等价关系对带集合进行划分，使得每个等价类至少包含一个素带，从而得到一个有限集合 $\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ ，该集合配备了自然的可达偏序 $\preceq$。我们根据等价类是有限还是无限，将 $\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 的元素分类为国内型或非国内型。 $\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 中存在非国内型元素，当且仅当代数 Λ 具有非国内性。在这一意义下，对非国内串代数的研究是国内串代数与元-$\bigcup$-循环串代数的结合（[3, § 3.4]）；后一类代数的特征是，其 $\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 仅由非国内型元素组成，并且任意两个不同元素都不彼此 $\preceq$-相关。

令 rad_Λ 表示有限长度右 Λ-模范畴的根基。Schr¨oer 将 [12,国内型字符串代数刻画为根基幂零的代数。事实上，当 Λ 为国内型时，他证明了 $\mathrm{rad}_\Lambda^{\omega\cdot(n+2)} = 0$，其中 n 是其桥箭图中路径长度的最大值，从而无需计算吊床的序型。据推测， [3, 猜想 4.4.1] 非国内字符串代数的稳定秩严格小于 ω^2。本文的结果，尤其是第 11、12 节的结果，将用于未来的工作，以肯定地解决这一猜想。

Prest [6, 命题 0.6] 从另一个角度刻画了非国内型（字符串）代数：其根基中存在一个可分解系统，而这样的可分解系统由一个具有非空内部的有界有理数区间索引。

为阐述本文的主要结果，我们需要先介绍一些序理论记号与约定，这方面我们大体遵循 Rosenstein [8]。记号 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{N}^+$ 分别表示自然数集和正自然数集。对于 $n \in \mathbb{N}$，记号 n 表示含有 [8]个元素的有限

E-mail address: vinitsinha20@iitk.ac.in、 askuber@iitk.ac.in、 annoysgp20@iitk.ac.in、 kalebhargav@gmail.com。2020 *Mathematics Subject Classification.* 16G20。*Key words and phrases.* 字符串代数、非 domestic、吊床、有限描述线性序。

线性序的序型。记号 ω 表示 $\mathbb{N}$的序型， ω^* 表示其对偶， ζ 表示整数集的序型， η 表示有理数的序型， λ 表示实数的序型， ϑ 表示无理数的序型。对于线性序 L_1 和 L_2，记号 $L_1 + L_2$ 和 $L_1 \cdot L_2$ 分别表示它们的序和与反字典序积。记号$\sum_{i\in (I,\ <)} L_i$ 表示以（可能是无限的）线性序（I， $<$）为指标的线性序 L_i 的序和。如果不存在从 η 到线性序（L， $<$）的嵌入，则称该线性序是散布的。

在对线性序的模型论研究中，L¨auchli 和 Leonard [5] 引入了两类 $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ 线性序（见 [8, 定义 7.6、7.19]），以理解通过 Ehrenfeucht-Fra¨ıss´é 博弈描述的初等等价的分级版本。其中 $\mathcal{M}_0$ 这一类是散布线性序类的子类，而其中的每个线性序都不是散布的。 $\mathcal{M}_0$ 这一类最初出现于 [10]，当时记作 $\mathrm{LO}_{\mathrm{fp}}$，表示有限呈示线性序。它的子类 $\mathrm{dLO}^{11}_{\mathrm{fp}}$ 由有界离散有限呈示线性序组成，被刻画为国内型字符串代数吊床的序型类 [10, （推论 10.14，命题 10.18]）。

本文的主要结果（定理 11.9）表明，（非 domestic）字符串代数的吊床序型属于 L¨auchli 和 Leonard 的 $\mathcal{M}$ 这一类的一个子类。我们将 $\mathcal{M}$中的序称为有限描述线性序，因此采用更具提示性的记号 $\mathrm{LO}_{\mathrm{fd}}$，而不使用 $\mathcal{M}$；其由有界离散序组成的子类记作 $\mathrm{dLO}^{11}_{\mathrm{fd}}$。每个有限描述序都仅通过对一个固定的有限线性序集合进行有限次序论运算而构造而成（定义 2.3）。然而，与国内型情形不同，我们不认为 $\mathrm{dLO}^{11}_{\mathrm{fd}}$ 中的每个线性序都同构于某个字符串代数的吊床（问题 11.13）。

用于证明主定理的技巧是对吊床进行“递归重构”（引理 2.4）。为了更好地解释这种方法，我们需要引入凝缩的概念。线性序 L 的凝缩是一个单调满射 $c\colon L \twoheadrightarrow L'$。当把线性序视为一个（小）范畴时，它的每个凝缩都等价于相对于某种适当选取的弱等价所作的局部化。已知 L' 以及映射 c 的所有纤维，就可以重构 L，具体如下：

$$L \cong \sum_{x\in L'} c^{-1}(x).$$

若 L 是所考虑的吊床，我们就选取一个合适的 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$，以定义一个分裂凝缩$c_{\mathsf{B}}\colon L \twoheadrightarrow L_{\mathsf{B}}$，使得 $L_{\mathsf{B}} \in \mathrm{dLO}^{11}_{\mathrm{fd}}$，且 c_{B} 的每个纤维本身都是一个吊床（引理 7.8），并且纤维的序型只有有限种。根据 B 是国内型还是非 domestic，凝缩序 L_{B} 分别同构于由若干个 $\omega + \omega^*$ 或 $\omega + \zeta\cdot\eta + \omega^*$ 组成的有限序和（推论 11.8）。 $\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 的有限性有助于通过归纳法证明 c_{B} 的纤维确实属于 $\mathrm{dLO}^{11}_{\mathrm{fd}}$。要对吊床的序型作出“有限描述”，还需要本文中其他若干有限性结果的支持（推论 4.8、6.7、6.10，注记 10.2，以及命题 11.1、11.4）。

我们在推论 9.4 中证明，对于 L_{B} 中的一个元素，其在 L 中的直接后继（分别地，前驱）的凝缩，是其在 L_{B} 中的直接后继（分别地，前驱）。我们还确定了 L_{B} 的一个子集，该子集与其有限凝缩之间存在双射（见 [8, § 4.2]）——当且仅当 B 是国内型时，这样的子集才是有限的。若 B 是非国内型，我们进一步确定了它的余有限子集，其中的元素称为 B-中心；该子集作为 L 的子序，其序型为 η（推论 11.5）。

通过向吊床中添加所谓的左 $\mathbb{N}$-字符串，可以得到吊床的完备化（命题 4.5）。回顾一下，国内串代数中的每个左 $\mathbb{N}$-字符串都是几乎周期的 [7, 命题 2]；这一结论在非国内串代数中不成立。吊床中与 ω 或 ω^* 同构的每个区间，都会为完备化贡献一个形如 $^\infty\mathfrak{bu}$ 的几乎周期左 $\mathbb{N}$-字符串，其中 $\mathfrak{u}$ 是一个字符串，而 $\mathfrak{b}$ 是一种特殊类型的素带（定义 8.4）。其余的左 $\mathbb{N}$-字符串（其中也包括一些几乎周期的左$\mathbb{N}$-字符串）位于 λ 的无理位置（命题 12.8）。

尽管定理 11.9 推广了 [10, 推论 10.14], ，后者用于计算国内型字符串代数中吊床的序型，但前者采用递归算法，因此在计算上比后者更复杂。

一个以有界箭图代数形式给出的有限维 $\mathcal{K}$-代数，其数据量有限。我们认为，对于这类代数，如果能找到一个有限偏序集，使其在字符串代数中发挥与 $\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 相同的作用，那么可以采用该偏序集元素的“凝缩”，递归重构吊床。$\mathrm{LO}_{\mathrm{fd}}$ 类似乎是可数无限线性序中最自然的一类，它们能够用有限量的数据加以描述。

本文其余部分安排如下。有限描述线性序类 $\mathrm{LO}_{\mathrm{fd}}$ 在 § 2 中定义；本节的重点是递归重构引理（引理 2.4）。在 § 3 中介绍线性序的完备化之后，我们计算 $\mathrm{dLO}_{\mathrm{fd}}^{11}$ 中若干序的完备化。§ 4 中建立字符串代数的记号和约定，并在 § 5 中证明偏序集 $(\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}, \preceq)$ 是有限的。在 § 7 中介绍凝缩算子 c_{B} 之前，§ 6 先引入凝缩吊床。引理 7.8 有助于将吊床分解为较小吊床的序和，从而为计算序型建立归纳法。§ 8 中介绍素带集合的两个特殊子集之后，§ 9 完成对凝缩吊床中字符串的直接邻居的描述。§ 10 给出 B-中心的定义，并将其划分为有限多个类。结合迄今为止收集的所有工具，本文在 § 11 中证明主要结果，同时讨论其逆命题可能不成立的情形。最后，在 § 12 中，根据命题 4.5 对吊床完备化的描述，将左 $\mathbb{N}$-字符串分为三类，并描述它们在完备化中的位置。

致谢。第三作者感谢印度科学与工业研究委员会（CSIR）提供的研究资助编号 09/092(1090)/2021-E MR-I。全体作者感谢 Naivedya Amarnani、Dawood Bin Mansoor 和 Nupur Jain 就该主题展开讨论。他们还感谢 Suyash Srivastava 仔细阅读稿件。

数据可用性声明。由于本研究未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

2. Finite description linear orders

我们在 § 1 中介绍了线性序的基本记号、约定和运算。我们还需要定义两个在线性序上进行的有限元运算。若 L_1 和 L_2 是非空线性序，则定义 $L_1 + L_2$ 为如下得到的线性序：若 L_1 的最大元和 L_2的最小元都存在，则在 $L_1 + L_2$ 中将二者认作同一元素；否则令 $L_1 + L_2 := L_1 + L_2$。

另一个有限元运算是对有限个线性序进行洗牌，下面我们将从[8] 回顾这一运算，以方便读者。该运算将用于构造有限描述线性序。

康托尔证明了，在同构意义下，η 是唯一一个没有最大元和最小元的可数无限稠密线性序（见 [8, 定理 2.8]）。证明这一结果所用的技巧称为来回法，它也可用于证明以下命题。

命题 2.1。 [8, 定理 7.11，7.13] 对于每个 $n \in \omega$， η 都有一个划分，分成若干集合 $\{D_i \mid 1 \le i \le n\}$，使得每个 D_i 在 η 中都是稠密的。此类划分在以下意义下是唯一的：若（A， $<$）和（A'， $<'$）是可数、无界、稠密的线性序， A 被划分为 n 个子集 $\{D_i \mid 1 \le i \le n\}$ ，且每个子集在 A中都是稠密的；而 A' 被划分为 n 个子集 $\{D'_i \mid 1 \le i \le n\}$ ，且每个子集在 A' 中都是稠密的，那么存在一个序同构 f：（A， $<$）$\to$（A'， $<'$），使得对于每个 $1 \le i \le n$， f（D_i）$= D'_i$。

上述结果中所描述的划分具有唯一性，因此我们可以将有限个线性序的数据合并为一个线性序，如下所述。

定义 2.2. [8, 定义 7.14] 设 $n \in \mathbb{N}$。假设 $L_1, \cdots, L_n$ 是有限个线性序。若 $n \in \mathbb{N}^+$，则令 $\{D_1, \cdots, D_n\}$ 为命题 2.1 所保证的 η 的一个划分，其中每个 D_i 在 η中稠密。将线性序 $L_1, \cdots, L_n$ 的洗牌记作 Ξ，定义如下：

$$\Xi(L_1, \cdots, L_n) := \begin{cases} \mathbf{0} & \text{if } n = 0, \\ \sum_{i \in \eta} L'_i, \text{ where } L'_i = L_j \text{ when } i \in D_j & \text{otherwise.} \end{cases}$$

洗牌算子是反字典序积在 η情形下的推广，即 $\Xi(L_1) \cong L_1 \cdot \eta$，并且不考虑重复项、0 和置换，即

$$\Xi(L_1, L_1, L_2, \cdots, L_n) \cong \Xi(L_1, L_2, \cdots, L_n) \cong \Xi(L_1, L_2, \cdots, L_n, \mathbf{0}) \cong \Xi(L_{\pi(1)}, L_{\pi(2)}, \cdots, L_{\pi(n)})$$

对于 $\{1, 2, \cdots, n\}$的一个置换 π。

由于 $\eta + \mathbf{1} + \eta = \eta$，对于任意 $1 \le j \le n$，我们也得到

$$\Xi(L_1, L_2, \cdots, L_n) + L_j + \Xi(L_1, L_2, \cdots, L_n) \cong \Xi(L_1, L_2, \cdots, L_n). \tag{2.1}$$

若 $L_j = L_{j1} + L_{j2}$，则利用 $\eta \cdot \zeta = \eta$ 以及上述恒等式，我们得到

$$(L_{j2} + \Xi(L_1, L_2, \cdots, L_n) + L_{j1}) \cdot \zeta \cong \Xi(L_1, L_2, \cdots, L_n). \tag{2.2}$$

定义 2.3. [8, 定义 7.19]有限描述线性序的类 $\mathrm{LO}_{\mathrm{fd}}$ 定义为：在同构下封闭且满足以下条件的最小线性序子类

(1) $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathrm{LO}_{\mathrm{fd}}$；(2) 若 $L_1, L_2 \in \mathrm{LO}_{\mathrm{fd}}$，则 $L_1 + L_2 \in \mathrm{LO}_{\mathrm{fd}}$；(3) 若 $L \in \mathrm{LO}_{\mathrm{fd}}$，则 $L \cdot \omega, L \cdot \omega^* \in \mathrm{LO}_{\mathrm{fd}}$；(4) 若对于 $n \in \mathbb{N}^+$，$L_1, L_2, \cdots, L_n \in \mathrm{LO}_{\mathrm{fd}}$，则 $\Xi(L_1, L_2, \cdots, L_n) \in \mathrm{LO}_{\mathrm{fd}}$。

有限呈示线性序的类 $\mathrm{LO}_{\mathrm{fp}}$ 是 $\mathrm{LO}_{\mathrm{fd}}$ 的子类，其定义省略了上述第 (4) 条。记号 $\mathrm{dLO}_{\mathrm{fd}}$ 表示 $\mathrm{LO}_{\mathrm{fd}}$ 中仅包含离散线性序的子类。离散有限描述线性序的类 $\mathrm{dLO}_{\mathrm{fd}}$ 还可进一步划分为四个子类，即 $\mathrm{dLO}^{ij}{}_{\mathrm{fd}}$，其中 $i, j \in \{0, 1\}$，其中 $L \in \mathrm{dLO}^{ij}{}_{\mathrm{fd}}$ 当且仅当它具有 i 个最小元和 j 个最大元。特别地，$\mathrm{dLO}^{11}_{\mathrm{fd}}$ 是 有界离散有限描述线性序的类。序 $(\omega + \Xi(\underbrace{\zeta\ \zeta\ \cdots \zeta}_{n\text{ 倍}}, ,) + \omega^*)$

为 $n \in \mathbb{N}$ 构成 $\mathrm{dLO}^{11}_{\mathrm{fd}}$中一类简单族的序的例子。类似地，我们将 $\mathrm{dLO}_{\mathrm{fp}}$ 划分为四个子类。

我们将采用引言中描述的递归重构方法，在 $\mathrm{dLO}^{11}_{\mathrm{fd}}$中构造复杂序。证明主要结果（定理 11.9）的一项不可或缺的工具是以下引理，它表明，在适当条件下，如果 L 存在一个凝缩 $c\colon\ L \twoheadrightarrow (\omega + \Xi(\underbrace{\zeta\ \zeta\ \cdots \zeta}_{n\text{ 次}}, ,) + \omega^*)$，且具有 $\mathrm{dLO}^{11}_{\mathrm{fd}}$ 中的纤维，那么 $L \in \mathrm{dLO}^{11}_{\mathrm{fd}}$。

引理 2.4。固定 $n \in \mathbb{N}$。给定任意 $(n+2)$ 个函数 $L_j\colon \zeta \to \mathrm{dLO}^{11}_{\mathrm{fd}}$，其中 $j \in \{0, 1, \cdots, n+1\}$，满足

- $L_0(-k) = L_{n+1}(k) = \mathbf{0}$ 对每个 $k > 0$均成立；
- 对于每个 $j \in \{0, 1, \cdots, n\}$，存在 $s_j \geq 0$ 和 $p_j > 0$，使得对于每个 $k \in \mathbb{N}$，$L_j(s_j + p_j + k) \cong L_j(s_j + k)$；
- 对于每个 $j \in \{1, \cdots, n+1\}$，存在 $s'_j \leq 0$ 和 $p'_j > 0$，使得对于每个 $k \in \mathbb{N}$，$L_j(s'_j - p'_j - k) \cong L_j(s'_j - k)$，

我们有

$$L := \sum_{k \in \zeta} L_0(k) + \Xi(\sum_{k \in \zeta} L_1(k), \cdots, \sum_{k \in \zeta} L_n(k)) + \sum_{k \in \zeta} L_{n+1}(k) \in \mathrm{dLO}^{11}_{\mathrm{fd}}.$$

证明。令

$$H := \sum_{k \in \zeta} L_0(k) \cong L_0(0) + \cdots + L_0(s_0 - 1) + (L_0(s_0) + \cdots + L_0(s_0 + p_0 - 1)) \cdot \omega,$$

$$R := \sum_{k \in \zeta} L_{n+1}(k) \cong (L_{n+1}(s'_{n+1} - p'_{n+1} + 1) + \cdots + L_{n+1}(s'_{n+1})) \cdot \omega^* + L_{n+1}(s'_{n+1} + 1) + \cdots + L_{n+1}(0),$$

并且对于每个 $1 \leq j \leq n$,

$$M_j := \sum_{k \in \zeta} L_j(k) \cong (L_j(s'_j - p'_j + 1) \cdot \omega^* + \cdots + L_j(s'_j)) + L_j(s'_j + 1) + \cdots + L_j(s_j - 1) + (L_j(s_j) + \cdots + L_j(s_j + p_j - 1)) \cdot \omega.$$

显然，对于每个 $1 \leq j \leq n$，$H \in \mathrm{dLO}^{10}_{\mathrm{fd}}$、$R \in \mathrm{dLO}^{01}_{\mathrm{fd}}$ 且 $M_j \in \mathrm{dLO}^{00}_{\mathrm{fd}}$。因此可得，$L = H + \Xi(M_1, \cdots, M_n) + R \in \mathrm{dLO}^{11}_{\mathrm{fd}}$。□

推论 2.5。沿用上述命题中的记号，若我们有 $n = 0$，且 L_0 和 L_1的像都属于 $\mathrm{dLO}^{11}_{\mathrm{fp}}$，则 $L \in \mathrm{dLO}^{11}_{\mathrm{fp}}$。

3. Completions of linear orders

回顾 [8, 定义 2.19]: 线性序 L 是完备的，当且仅当它的每个有上界的子序都有最小上界。线性序的完备性是一种序理论性质，即在序同构下保持且反映 [8, 引理 2.21]。线性序 L 的一个戴德金分割 [8, 定义 2.22] 是由 L 的两个非空区间组成的有序对 (X,Y)，它们的并集为 L，且 X的每个元素都先于 Y的每个元素。若戴德金分割 (X,Y) 满足： L 没有最大元，且 Y 没有最小元，则称其为 L 中的一个间隙。用 $\mathcal{G}(L)$ 表示 L 中所有间隙的集合。线性序 L 完备的一个等价判据 [8, 引理 2.23] 是： L 是戴德金完备的，即 $\mathcal{G}(L) = \emptyset$。

L [8, 的完备化，记作 $\mathcal{C}(L)$，是一个包含 L 的完备线性序，且 $\mathcal{C}(L)$中包含 L 的任何真子序都不完备。L 存在完备化 $\mathcal{C}(L)$；构造完备化时，需要“填补”其间隙（见证明 [8, 定理 2.32(1)]），且该完备化在序同构意义下唯一[8, 定理 2.32(2)]。集合 $\mathcal{G}(L)$是 $\mathcal{C}(L)$的子集，因此继承了 $\mathcal{C}(L)$的序结构。

为了确定线性序 L的间隙（X,Y），只需找出 X中的一个余终序列以及 Y中的一个余始序列。其中，如果对于每个 $a \in X$，都存在 $b \in X'$使得 $a \leq b$，则称 $X' \subseteq X$ 在 X 中余终；对偶地，如果对于每个 $a \in Y$，都存在 $b \in Y'$ 使得 $b \leq a$，则称 Y' 在 Y中余始。

例3.1. 显然可以注意到 $\mathcal{C}(\omega) \cong \omega$, $\mathcal{C}(\omega^*) \cong \omega^*$, $\mathcal{C}(\zeta) \cong \zeta$. 此外，实数是通过使用余终/余始序列对 η 进行完备化而构造的，即 $\mathcal{C}(\eta) \cong \lambda$.

我们将在命题4.5和12.4中使用寻找余终/余始序列的技巧，来计算某些线性序的完备化。

本节的主要目标是计算 $\mathbf{dLO}^{11}_{\mathrm{fd}}$ 中两类序型的完备化，它们在本文语境中很重要，分别是 $(\omega + \omega^*) \cdot \mathbf{n}$ 和 $(\omega + \Xi(\zeta) + \omega^*) \cdot \mathbf{n} \cong (\omega + \zeta \cdot \eta + \omega^*)$。第一类序型的完备化很容易计算。

例 3.2. $\mathcal{C}((\omega + \omega^*) \cdot \mathbf{n}) \cong (\omega + \mathbf{1} + \omega^*) \cdot \mathbf{n}$。

给定 $n \in \mathbb{N}^+$ 以及非空线性序 L_1、 $\cdots$、 L_n，回顾定义 2.2 中洗牌 $\Xi(L_1, \cdots, L_n)$ 的构造。使用这些记号，可以很容易验证以下四种戴德金分割属于 $\mathcal{G}(\Xi(L_1, \cdots, L_n))$。

G1. $(\sum_{r\in(-\infty,r_0)\cap\mathbb{Q}} L'_r, \sum_{r\in(r_0,\infty)\cap\mathbb{Q}} L'_r)$，适用于 $r_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$；G2. $(\sum_{r\in(-\infty,r_0)\cap\mathbb{Q}} L'_r, \sum_{r\in[r_0,\infty)\cap\mathbb{Q}} L'_r)$，适用于 $r_0 \in D_j$，条件是 L_j 没有最小元；G3. $(\sum_{r\in(-\infty,r_0]\cap\mathbb{Q}} L'_r, \sum_{r\in(r_0,\infty)\cap\mathbb{Q}} L'_r)$，适用于 $r_0 \in D_j$，条件是 L_j 没有最大元；G4. $(\sum_{r\in(-\infty,r_0)\cap\mathbb{Q}} L'_r + L^1_j, L^2_j + \sum_{r\in(r_0,\infty)\cap\mathbb{Q}} L'_r)$，适用于 $r_0 \in D_j$，条件是 $(L^1_j, L^2_j) \in \mathcal{G}(L_j)$。

下面的结果表明，事实上这些就是所有的间隙。

命题 3.3. 给定 $n \in \mathbb{N}^+$ 和非空线性序 $L_1, \cdots, L_n$，如果 $(X,Y) \in \mathcal{G}(\Xi(L_1, \cdots, L_n))$，那么 (X,Y) 属于上文列出的四种类型之一。

证明. 定义映射 $\mathrm{proj} : \sum_{r\in\mathbb{Q}} L'_r \to \mathbb{Q}$，其中当 $x \in L'_r$ 时 $\mathrm{proj}(x) = r$。因此，如果 $(X,Y) \in \mathcal{G}(\Xi(L_1, \cdots, L_n))$，那么 $\mathrm{proj}(X) \cup \mathrm{proj}(Y) = \mathbb{Q}$，并且只要 $r_1 \in \mathrm{proj}(X)$ 且 $r_2 \in \mathrm{proj}(Y)$，就有 $r_1 \leq r_2$。因此，$\mathrm{proj}(X) \cap \mathrm{proj}(Y)$ 要么为空，要么是单元素集。若对于某个 $r_0 \in \mathbb{Q}$，$\mathrm{proj}(X) \cap \mathrm{proj}(Y) = \{r_0\}$，则 $(X \cap L'_{r_0}, Y \cap L'_{r_0})$ 是L'_{r_0}中的一个间隙；这个间隙属于 G4 中描述的形式。

现在假设 $\mathrm{proj}(X) \cap \mathrm{proj}(Y) = \emptyset$。共有三种情况。

- 如果 $\mathrm{proj}(X)$ 没有最大元，且 $\mathrm{proj}(Y)$ 没有最小元，那么存在 $r_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$，使得 $r_1 < r_0 < r_2$ 对每个 $r_1 \in \mathrm{proj}(X)$ 以及每个 $r_2 \in \mathrm{proj}(Y)$ 都成立。这个间隙的形式如 G1 所述。
- 如果 $\mathrm{proj}(X)$ 有最大元，设为 r_0，那么 (X,Y) 是一个间隙，当且仅当 L'_{r_0} 没有最大元。这个间隙的形式如 G2 所述。
- 如果 $\mathrm{proj}(Y)$ 有一个最小元，设为 r_0，那么 (X,Y) 是一个间隙，当且仅当 L'_{r_0} 没有最小元。这个间隙属于 G3 中所描述的形式。

□

As a 因此，我们得到以下结果，它计算了 $\Xi(L_1, \cdots, L_n)$ 的完备化 .

推论 3。 4. 给定 $n \in \mathbb{N}^+$ 和非空线性序 $L_1, \cdots, L_n$，使用定义 2.2 中的记号 ，

$$\mathcal{C}(\Xi(L_1, \cdots, L_n)) \cong \sum_{r \in \mathbb{R}} T_r, \ \textit{where } T_r := \begin{cases} \mathbf{1} \dot{+} \mathcal{C}(L_j) \dot{+} \mathbf{1} & \textit{if } r \in D_j \textit{ for some } j \in \{1, 2, \cdots, n\}, \\ \mathbf{1} & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

使用标准 嵌入 η 于 λ，我们计算 $\mathsf{dLO}^{11}_{\mathrm{fd}}$ 中一个标准序型的完备化 .

推论 3.5。假设 $\mathcal{O} := \omega + \zeta \cdot \eta + \omega^*$。那么

$$\mathcal{C}(\mathcal{O}) \cong \omega + \mathbf{1} + \left(\sum_{r \in \lambda} T_r \right) + \mathbf{1} + \omega^*, \ \textit{where } T_r = \begin{cases} \mathbf{1} + \zeta + \mathbf{1} & \textit{if } r \in \eta, \\ \mathbf{1} & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

Th这一结果将在第 12 节中发挥作用，同时也会用到下文给出的将 $\mathcal{G}(\mathcal{O})$ 划分为三个子集的划分 w.

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}^+(\mathcal{O}) \colon = \{x \in \mathcal{G}(\mathcal{O}) \mid x \text{ 是 } \mathcal{G}(\mathcal{O}) \text{ 的最小元，或当 } r \in \eta\} \text{ 时，} x \text{ 是 } T_r \text{ 的最大元;} \\ &\mathcal{G}^-(\mathcal{O}) \colon = \{x \in \mathcal{G}(\mathcal{O}) \mid x \text{ 是 } \mathcal{G}(\mathcal{O}) \text{ 的最大元，或当 } r \in \eta\} \text{ 时，} x \text{ 是 } T_r \text{ 的最小元;} \\ &\mathcal{G}^0(\mathcal{O}) \colon = \mathcal{G}(\mathcal{O}) \setminus (\mathcal{G}^+(\mathcal{O}) \cup \mathcal{G}^-(\mathcal{O})) = \{T_r \mid r \in \vartheta\}. \end{aligned}$$

4. Fundamentals of string algebras

固定一个代数闭域 $\mathcal{K}$。字符串代数是一个 $\mathcal{K}$-代数 $\Lambda \colon = \mathcal{K}\mathcal{Q}/\langle \rho \rangle$ 表示为有限箭图 $\mathcal{Q} = (Q_0, Q_1, s, t)$ 的路径代数的某个商，其中 Q_0 是有限顶点集， Q_1是有限箭集，而 $s, t \colon Q_1 \to Q_0$ 分别是源函数和目标函数，并取由一组 ρ 单项式关系生成的理想作商。出于技术原因，我们还选择并固定一对映射$\sigma, \varepsilon \colon Q_1 \to \{1, -1\}$，它们满足某些条件。关于字符串代数的定义，以及与称为字符串和带的某些组合实体相关的记号和约定，请参阅 [3, § 2.1]。我们使用记号 $\mathsf{St}(\Lambda)$ 表示 Λ 的字符串集合，并使用 $\mathsf{Ba}(\Lambda)$ 表示其带的集合，其中按其音节的循环置换视为等同。令 $\mathcal{Q}_0^{\mathrm{Ba}}$为 $\mathsf{Ba}(\Lambda)$ 中的一个固定代表元集合。称 $\mathcal{Q}_0^{\mathrm{Ba}}$中元素的循环置换为一个循环。用 $\mathsf{Cyc}(\Lambda)$ 表示 Λ 中所有循环的集合。我们还固定$\mathfrak{x}_0 \in \mathsf{St}(\Lambda)$以及一个奇偶性 $i \in \{-1, 1\}$，并在需要时使用它们。

字符串从右向左读取。例如，若 $\mathfrak{x} = \alpha_3\alpha_2\alpha_1$，则 α_1 是 $\mathfrak{x}$ 的第一个音节，而 α_3 是 $\mathfrak{x}$的最后一个音节。对于字符串 $\mathfrak{x}$ 和 $\mathfrak{y}$，若存在某个（分别为正长度的）字符串 $\mathfrak{u}$，使得 $\mathfrak{y} = \mathfrak{u}\mathfrak{x}$，则称 $\mathfrak{x}$ 是 $\mathfrak{y}$的左子串（分别为真左子串），记作 $\mathfrak{x} \sqsubseteq_l \mathfrak{y}$ （分别记作 $\mathfrak{x} \sqsubset_l \mathfrak{y}$）。对偶地，若存在某个（分别为正长度的）字符串 $\mathfrak{u}$，使得 $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}\mathfrak{u}$，则称 $\mathfrak{x}$ 是 $\mathfrak{y}$的右子串（分别为真右子串），记作 $\mathfrak{x} \sqsubseteq_r \mathfrak{y}$ （分别记作 $\mathfrak{x} \sqsubset_r \mathfrak{y}$）。

设 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}(\Lambda)$ 且 $|\mathfrak{x}| > 0$。其符号记作 $\theta(\mathfrak{x}) \in \{1, -1\}$，定义为：当且仅当 $\mathfrak{x}$ 的第一个音节是逆元时， $\theta(\mathfrak{x}) = 1$。为判断 $\mathfrak{x}$ 是否有符号变化，我们定义

$$\delta(\mathfrak{x}) := \begin{cases} 1 & \text{if all syllables of } \mathfrak{x} \text{ are inverse,} \\ -1 & \text{if all syllables of } \mathfrak{x} \text{ are direct,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

吊床是由 Brenner [2] 引入的偏序集，用于研究有限维不可分解模之间映射的分解。Schr¨oer [12,§ 3] 在字符串代数的语境下引入的最简单版本的吊床是线性序。下面我们回顾这一版本吊床的定义，它是本文研究的主要对象。

定义 4.1. 字符串 $\mathfrak{x}_0$ 的左、右吊床集定义为

$$H_l(\mathfrak{x}_0) \colon = \{\mathfrak{x} \in \mathsf{St}(\Lambda) \mid \mathfrak{x} = \mathfrak{u}\mathfrak{x}_0 \textit{ for some string } \mathfrak{u}\}, \ H_r(\mathfrak{x}_0) := \{\mathfrak{x} \in \mathsf{St}(\Lambda) \mid \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0\mathfrak{u} \textit{ for some string } \mathfrak{u}\}.$$

左吊床 $H_l(\mathfrak{x}_0)$ 可配备一个线性序 $<_l$，其中对于 $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathsf{St}(\Lambda)$，若满足以下条件之一，则有 $\mathfrak{x} <_l \mathfrak{y}$：

- $\mathfrak{y} = \mathfrak{u}\alpha\mathfrak{x}$ 对某个字符串 $\mathfrak{u}$ 和 $\alpha \in Q_1^-$成立;
- $\mathfrak{x} = \mathfrak{v}\beta\mathfrak{y}$ 对某个字符串 $\mathfrak{v}$ 和 $\beta \in Q_1$成立;
- $\mathfrak{x} = \mathfrak{v}\beta\mathfrak{w}$ 以及对于某些 $\alpha \in Q_1^-$、 $\beta \in Q_1$ 和字符串 $\mathfrak{u}$、 $\mathfrak{v}$、 $\mathfrak{w}$ 的 $\mathfrak{y} = \mathfrak{u}\alpha\mathfrak{w}$。

在 $H_r(\mathfrak{x}_0)$ 上的序 $<_r$ 定义为：当且仅当 $\mathfrak{x}^{-1} <_l \mathfrak{y}^{-1}$ 属于 $(H_l(\mathfrak{x}_0^{-1}) <_l)$ 时， $\mathfrak{x} <_r \mathfrak{y}$。

本文仅研究左吊床——对偶的结果对于右吊床同样成立。

对于 $\mathfrak{x},\mathfrak{y}\in H_l(\mathfrak{x}_0)$，用 $\mathfrak{x}\sqcap_l\mathfrak{y}$ 表示 $\mathfrak{x}$ 和 $\mathfrak{y}$ 的最大公共左子串。若 $\mathfrak{x}=\mathfrak{w}(\mathfrak{x}\sqcap_l\mathfrak{y})$ 且 $|\mathfrak{w}|>0$，则定义 $\theta(\mathfrak{x}\mid\mathfrak{y}):=\theta(\mathfrak{w})$，以及 $\delta(\mathfrak{x}\mid\mathfrak{y}):=\delta(\mathfrak{w})$。

左吊床中的几乎所有字符串都有直接后继和直接前驱。

命题 4.2. [11, § 2.5] 线性序 $(H_l(\mathfrak{x}_0),<_l)$ 是有界离散线性序。其最小元记作 $\mathfrak{m}_{-1}(\mathfrak{x}_0)$，是 $H_l(\mathfrak{x}_0)$ 中满足 $\delta(\mathfrak{m}_{-1}(\mathfrak{x}_0)\mid\mathfrak{x}_0)=-1$ 或 $\mathfrak{m}_{-1}(\mathfrak{x}_0)=\mathfrak{x}_0$ 的最长字符串；其最大元则是满足 $\delta(\mathfrak{M}_1(\mathfrak{x}_0)\mid\mathfrak{x}_0)=1$或 $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{x}_0)=\mathfrak{x}_0$ 的最长字符串，记作 $\mathfrak{M}_1(\mathfrak{x}_0)$。

对于 $\mathfrak{x}\in H_l(\mathfrak{x}_0)$，记号 $\bar{l}(\mathfrak{x})$ 和 $l(\mathfrak{x})$ 于 [3, § 2.4] 中引入，方法是比较 $\mathfrak{x}$ 与其直接后继和直接前驱的长度。如果 $\mathfrak{x}$ 的直接后继比 $\mathfrak{x}$ 长，那么存在一个逆音节 α，使得 $\alpha\mathfrak{x}$ 是一个字符串，而 $\mathfrak{x}$ 的直接后继是字符串 $\bar{l}(\mathfrak{x}):=\mathfrak{w}\alpha\mathfrak{x}$，其中 $\mathfrak{w}$ 是满足 $|\mathfrak{w}|=0$ 或 $\delta(\mathfrak{w})=-1$ 且使 $\mathfrak{w}\alpha\mathfrak{x}$ 为字符串的最长字符串。另一方面，如果 $\mathfrak{x}$ 的直接前驱比 $\mathfrak{x}$ 长，那么存在一个正向音节 β，使得 $\beta\mathfrak{x}$ 是一个$\bar{}$字符串，而 $\mathfrak{x}$ 的直接前驱是字符串 $l(\mathfrak{x}):=\mathfrak{w}'\beta\mathfrak{x}$，其中 $\mathfrak{w}'$ 是满足 $|\mathfrak{w}'|=0$ 或 $\delta(\mathfrak{w}')=1$ 且使 $\mathfrak{w}'\beta\mathfrak{x}$ 为字符串的最长字符串。

下一个结果表明，吊床中的区间包含唯一一个“关键”字符串。

命题 4.3. 给定一个非空区间 I in $(H_l(\mathfrak{x}_0),<_l)$，存在唯一一个字符串 $\mathfrak{u}$ in I with 最小长度。此外，$I\subseteq H_l(\mathfrak{u})$。

证明. 由于 $\{|\mathfrak{x}|:\mathfrak{x}\in I\}$ is $\mathbb{N}$ 的非空子集，它有一个最小元，记为 m。若可能，设 $\mathfrak{u}_1<_l\mathfrak{u}_2$ be I 中满足 $|\mathfrak{u}_1|=|\mathfrak{u}_2|=m$ 的字符串。则 $\mathfrak{u}_1<_l\mathfrak{u}_1\sqcap_l\mathfrak{u}_2<_l\mathfrak{u}_2$ and $|\mathfrak{u}_1\sqcap_l\mathfrak{u}_2|<m$。由于 I is 一个区间，$\mathfrak{u}_1\sqcap_l\mathfrak{u}_2\in I$，这与 m 的极小性矛盾，从而说明 I contains 唯一一个满足 $|\mathfrak{u}|=m$ 的字符串 $\mathfrak{u}$。

对于 $\mathfrak{x}\in I$，字符串 $\mathfrak{x}\sqcap_l\mathfrak{u}$ 位于 $\mathfrak{u}$ 和 $\mathfrak{x}$ 之间，因此属于 I。因此，$m\le|\mathfrak{x}\sqcap_l\mathfrak{u}|\le|\mathfrak{u}|=m$。由于$\mathfrak{u}$ is I 中具有最小长度的唯一字符串，我们得出 $\mathfrak{x}\sqcap_l\mathfrak{u}=\mathfrak{u}$，即 $\mathfrak{u}\sqsubseteq_l\mathfrak{x}$。□

回顾 [3, § 2.1]，左 $\mathbb{N}$-字符串是一个音节序列 $\cdots\alpha_3\alpha_2\alpha_1$，其中每个 $\alpha_n\cdots\alpha_2\alpha_1$都是一个字符串。称 α_i 的 i^{th} 音节。用 $\mathbb{N}$-St(Λ) 表示左 $\mathbb{N}$-字符串的集合。形如 $^\infty\mathfrak{b}\mathfrak{u}$ 的左 $\mathbb{N}$-字符串（其中 $\mathfrak{b}$ 是一个循环串，$\mathfrak{u}$ 是一个有限字符串）称为几乎周期串。

定义 4。 4. 若 $H_l(\mathfrak{x}_0)$ 中的字符串序列 $(\mathfrak{x}_n)_{n\ge1}$ 满足存在 $\mathfrak{y}\in\mathbb{N}$-St(Λ)，使得 t

(1) 当 $n\to\infty$ 时，$|\mathfrak{x}_n|\to\infty$；(2) 存在一个序列 $\{n_k\mid k\in\mathbb{N}^+\}$，使得对于 $n\ge n_k$，$\mathfrak{y}$ 和 $\mathfrak{x}_n$ 的 k^{th} 音节相同 .

显然，收敛序列的极限唯一，我们记作 $\lim_{n\to\infty}\mathfrak{x}_n:=\mathfrak{y}$。

如果 $H_l(\mathfrak{x}_0)$ 是在 $H_l(\mathfrak{x}_0)$ 的基础上添加所有包含 $\mathfrak{x}_0$ 作为左子串的左 $\mathbb{N}$-字符串后得到的扩展，那么很容易注意到，序 $<_l$ 可以扩展为 $H_l(\mathfrak{x}_0)$ 上的线性序。

命题 4.5. 线性序 $(H_l(\mathfrak{x}_0),<_l)$ 是 $(H_l(\mathfrak{x}_0),<_l)$ 的完备化。

证明。设 $\mathfrak{z}$ 是 $H_l(\mathfrak{x}_0)$ 中的一个左 $\mathbb{N}$-字符串。令 $X:=\{\mathfrak{x}\in H_l(\mathfrak{x}_0)\mid\mathfrak{x}<_l\mathfrak{z}\}$，并令 $Y:=\{\mathfrak{y}\in H_l(\mathfrak{x}_0)\mid\mathfrak{z}<_l\mathfrak{y}\}$。显然，$\mathfrak{m}_{-1}(\mathfrak{x}_0)\in X$，$\mathfrak{M}_1(\mathfrak{x}_0)\in Y$，且 $H_l(\mathfrak{x}_0)=X\sqcup Y$。此外，对于每个 $\mathfrak{x}\in X$ 和 $\mathfrak{y}\in Y$，都有 $\mathfrak{x}<_l\mathfrak{y}$。因此，$(X,Y)$ 是 $H_l(\mathfrak{x}_0)$ 中的一个戴德金分割。我们证明 (X,Y) 实际上是 $H_l(\mathfrak{x}_0)$ 中的一个间隙。

由于集合 $\{\mathfrak{v}\in\text{St}(\Lambda):\delta(\mathfrak{v})\neq0\}$ 是有限的，因此 $\mathfrak{z}$ 中既有无限多个逆向音节，也有无限多个正向音节。因此，$X_1:=\{\mathfrak{x}\in H_l^i(\mathfrak{x}_0)\mid\mathfrak{x}\sqsubset_l\mathfrak{z},\theta(\mathfrak{z}\mid\mathfrak{x})=1\}$ 和 $Y_1:=\{\mathfrak{y}\in H_l^i(\mathfrak{x}_0)\mid\mathfrak{y}\sqsubset_l\mathfrak{z},\theta(\mathfrak{z}\mid\mathfrak{y})=-1\}$ 分别是 X 和 Y 的无限子集。

令 $\mathfrak{x}\in X$ 和 $\mathfrak{w}:=\mathfrak{x}\sqcap_l\mathfrak{z}$。由于 $\mathfrak{x}<_l\mathfrak{z}$，我们有 $\mathfrak{x}\le_l\mathfrak{w}<_l\mathfrak{z}$。因此，$\theta(\mathfrak{z}\mid\mathfrak{w})=1$，这意味着 $\mathfrak{w}\in X_1$。这表明 X_1 是 X 的一个无限共尾子集，这意味着 X 没有最大元。对偶论证表明，Y_1 是 Y 的一个共初子集，因此 Y 没有最小元。由此证明了 (X,Y) 是 $H_l(\mathfrak{x}_0)$ 中的一个间隙。

反过来，假设 (X,Y) 是 $H_l(\mathfrak{x}_0)$ 中的一个间隙。由于 $X\neq\emptyset$ 和 X 在上方无界，[8, 定理 3.36]保证存在一个可数无限单调递增序列 $(\mathfrak{x}_n)_{n\in\omega}$，它属于 X，且在 X 中共尾。对偶地，我们可以论证存在一个可数无限单调递减序列 $(\mathfrak{y}_n)_{n\in\omega}$，它属于 Y，且在 Y 中共初。于是 $[\mathfrak{x}_n,\mathfrak{y}_n]\supseteq[\mathfrak{x}_{n+1},\mathfrak{y}_{n+1}]$ 和 $\bigcap_{n\in\omega}[\mathfrak{x}_n,\mathfrak{y}_n]=\emptyset$。

对于每个 $n \in \omega$，命题 4.3 保证存在唯一的最短字符串 $\mathfrak{z}_n \in [\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_n]$，使得 $\mathfrak{z}_n \sqsubseteq_l \mathfrak{z}_{n+1}$。由于 $\bigcap_{n\in\omega}[\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_n] = \emptyset$，对每个 $n_k \in \omega$，都存在一个最小的 $n_{k+1} > n_k$，使得$\mathfrak{z}_{n_k} \notin [\mathfrak{x}_{n_{k+1}}, \mathfrak{y}_{n_{k+1}}]$。因此 $\mathfrak{z}_{n_k} \sqsubset_l \mathfrak{z}_{n_{k+1}}$。于是，当 $n \to \infty$ 时，$|\mathfrak{z}_n| \to \infty$；结合每个 $n \in \omega$ 都有 $\mathfrak{z}_n \sqsubseteq_l \mathfrak{z}_{n+1}$，可知 $(\mathfrak{z}_n)_{n\in\omega}$ 是一个收敛序列，其极限是一个具有左侧 $\mathbb{N}$-字符串的对象，记作 $\mathfrak{z}$。显然，对每个 $n \in \omega$，都有$\mathfrak{x}_n <_l \mathfrak{z} <_l \mathfrak{y}_n$。

设 $\mathfrak{x} \in X$。由于 $\bigcap_{n\in\omega}[\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_n] = \emptyset$，存在某个 $k \in \omega$ 使得 $\mathfrak{x} \notin [\mathfrak{x}_k, \mathfrak{y}_k]$。因此 $\mathfrak{x} <_l \mathfrak{x}_k <_l \mathfrak{z}$。对偶地，我们可以证明对每个 $\mathfrak{y} \in Y$，都有 $\mathfrak{z} <_l \mathfrak{y}$。

如果 $\mathfrak{z}' <_l \mathfrak{z}''$ 是两个不同的左 $\mathbb{N}$-字符串，满足 $\mathfrak{x} <_l \mathfrak{z}' <_l \mathfrak{y}$，并且对每个 $\mathfrak{x} \in X$ 和 $\mathfrak{y} \in Y$ 都有 $\mathfrak{x} <_l \mathfrak{z}'' <_l \mathfrak{y}$，那么 $\mathfrak{z}' <_l \mathfrak{z}' \sqcap_l \mathfrak{z}'' <_l \mathfrak{z}''$，从而 $\mathfrak{z}' \sqcap_l \mathfrak{z}'' \in H_l(\mathfrak{x}_0) \setminus (X \cup Y)$，这就产生矛盾。因此，对于 $H_l(\mathfrak{x}_0)$ 中的每个间隙 (X, Y)，都存在唯一的左 $\mathbb{N}$-字符串 $\mathfrak{z}$，满足对每个 $\mathfrak{x} \in X$ 和 $\mathfrak{y} \in Y$ 都有 $\mathfrak{x} <_l \mathfrak{z} <_l \mathfrak{y}$。如果 (X_1, Y_1) 和 (X_2, Y_2) 是不同的间隙，那么不难验证，与这些间隙对应的左 $\mathbb{N}$-字符串也各不相同。□

吊床 $H_l(\mathfrak{x}_0)$ 可表示为 $H_l(\mathfrak{x}_0) = H_l^{-1}(\mathfrak{x}_0) \dotplus H_l^1(\mathfrak{x}_0)$，其中

$$H_l^i(\mathfrak{x}_0) := \{\mathfrak{x} \in H_l(\mathfrak{x}_0) \mid \text{ either } \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 \text{ or } \theta(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x}_0) = i\}$$

是 $H_l(\mathfrak{x}_0)$ 的有界离散线性子序，其最小元为 $\mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0)$，最大元为 $\mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)$。显然，$\mathfrak{M}_{-1}(\mathfrak{x}_0) = \mathfrak{m}_1(\mathfrak{x}_0) = \mathfrak{x}_0$。

较小的左吊床可以作为区间嵌入较大的吊床中。

注 4.6. 若 $\mathfrak{y}(\neq \mathfrak{x}_0) \in H_l^i(\mathfrak{x}_0)$，则 $H_l(\mathfrak{y})$ 是 $H_l^i(\mathfrak{x}_0)$ 中的一个区间。

H-等价的概念在 [9, § 5] 中被引入，用于判断两个左吊床何时同构。称两个字符串 $\mathfrak{x}$ 和 $\mathfrak{y}$ 是 H-等价的，记作 $\mathfrak{x} \equiv_H \mathfrak{y}$，如果对于每个字符串 $\mathfrak{u}$，$\mathfrak{u}\mathfrak{x} \in \mathsf{St}(\Lambda)$ 当且仅当 $\mathfrak{u}\mathfrak{y} \in \mathsf{St}(\Lambda)$。事实上，若 $\mathfrak{x} \equiv_H \mathfrak{y}$，则 $(H_l(\mathfrak{x}) <_l) \cong (H_l(\mathfrak{y}) <_l)$。根据 [9, 命题 5.3], 中用于检验 H-等价的判据，我们注意到一个有用的观察，之后将不再特别说明。

注 4.7. 若 $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ 是字符串，且 $\delta(\mathfrak{y}) = 0$，使得 $\mathfrak{y}\mathfrak{x}$ 是字符串，则 $\mathfrak{y} \equiv_H \mathfrak{y}\mathfrak{x}$。因此，若 $\mathfrak{z}$ 是字符串，且 $\mathfrak{z}\mathfrak{y}$ 是字符串，则 $\mathfrak{z}\mathfrak{y}\mathfrak{x}$ 是字符串。

一些有限性结果是证明主定理的关键。主定理断言 $(H_l^i(\mathfrak{x}_0) <_l) \in \mathsf{dLO}_{\mathrm{fd}}^{11}$。回忆 [3, 定义 3.1.1] 中素带的定义。 [3, 定理 3.1.6] 已证明，$\mathsf{Ba}(\Lambda)$ 中只有有限多个素带。

对于 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$，若不存在 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Cyc}(\mathsf{B})$ 及字符串$\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$ 使得 $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_2\mathfrak{b}\mathfrak{y}_1$，则称字符串 $\mathfrak{y}$ 相对于 B 无带。回忆 [3, 命题 3.1.7]，任意字符串代数中只有有限多个无带字符串。若 $\mathfrak{z}$ 无带，则称字符串 $\mathfrak{y} = \mathfrak{z}\mathfrak{x}_0 \in H_l^i(\mathfrak{x}_0)$ 相对于 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 无带。下述结论可由 [3, 命题 3.1.7] 直接推出。

推论 4.8. 相对于 $(\mathfrak{x}_0, i)$，无带字符串只有有限多个。

我们以提及一个关于带的基本结果来结束本节：带 $\mathfrak{b}$ 恰有$|\mathfrak{b}|$ 个不同的循环置换。若 $\mathfrak{x} = \alpha_n \cdots \alpha_2\alpha_1$ 是带的循环置换的有限幂，则称$1 \le k \le n$ 为 $\mathfrak{x}$的周期，当且仅当 $k = n$ 或 $\mathfrak{x} = \alpha_k \cdots \alpha_1\alpha_n \cdots \alpha_{k+1}$。

命题 4.9. [4, 引理 1] 设 $\mathfrak{x}$ 是带的循环置换的有限幂，且 p 和 q 是 $\mathfrak{x}$的周期，满足 $p + q \le |\mathfrak{x}| + gcd(p, q)$。那么， $gcd(p, q)$是 $\mathfrak{x}$的周期。

推论 4.10. 若 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Cyc}(\Lambda)$ 满足 $\mathfrak{b} = \alpha_n ... \alpha_1$，则对任意$1 \le r < n$，都有 $\alpha_r \cdots \alpha_1\alpha_n \cdots \alpha_{r+1} \neq \alpha_n \cdots \alpha_1$。

证明。否则， r 是 $\mathfrak{b}$的一个周期。由于 $|\mathfrak{b}|$ 也是 $\mathfrak{b}$的一个周期，根据命题 4.9，我们有 $gcd(|\mathfrak{b}|, r) =: t$ 是 $\mathfrak{b}$ 的一个周期。因此，我们得到 $\alpha_n \cdots \alpha_1 = (\alpha_t \cdots \alpha_1)^{|\mathfrak{b}|/t}$，这与 $\mathfrak{b}$是一个本原循环字符串这一事实矛盾。□

5. A finite poset

区分非国内字符串代数与国内字符串代数的性质，是其桥箭图中存在元带 [3, 命题 3.4。2]。下面定义的广义元带，完整地体现了字符串代数的一个构件的本质。

回顾 [3, 定义 3.2。1]，(弱)桥箭图的顶点是素带，而 e 箭是（我 ak）桥。

定义 5.1。广义元带（简称 GMB），记作 B，是桥箭图的一个强连通分量。

若 B 只有一个顶点，则称 GMB B 为国内型；否则称其为非国内型。注意，当且仅当其桥箭图中存在一个非国内型 GMB 时，字符串代数 Λ 才是非国内型（参见 [3, 命题 3.4.2]）。

回顾 [3, § 3.3]中桥箭图路径生成字符串的定义。若一个字符串属于 Cyc(Λ)，且由 B 中的一条路径生成，则称其为 B-循环。将所有 B-循环组成的集合记为 Cyc(B)。若一个字符串是某个 B-循环的幂的子串，则称其为 B-可扩展字符串。将所有 B-可扩展字符串组成的集合记为 Ext(B)。最后，令 $\mathrm{Ba(B)} := \mathcal{Q}_0^{\mathrm{Ba}} \cap \mathrm{Cyc(B)}$。

值得注意的是，B-可扩展字符串具有以下平凡性质，我们将始终不加说明地使用这一性质。

注记 5.2. 给定 $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \in \mathrm{Ext(B)}$，存在一个字符串 $\mathfrak{u}$，使得 $\mathfrak{x}_2\mathfrak{u}\mathfrak{x}_1 \in \mathrm{Ext(B)}$。

在带的集合 $\mathcal{Q}_0^{\mathrm{Ba}}$上定义关系 $\preceq$：若存在一个字符串 $\mathfrak{u}$，使得 $\mathfrak{b}_2\mathfrak{u}\mathfrak{b}_1$ 是一个字符串，则规定 $\mathfrak{b}_1 \preceq \mathfrak{b}_2$。显然，这一关系是自反且传递的。

命题 5.3. 上述定义的关系 $\preceq$ 是反对称的，当且仅当字符串代数 Λ 是国内型的。

证明。假设关系 $\preceq$ 是反对称的。若可能，设该字符串代数是非 domestic。根据 [3,命题 3.4.2], Λ 含有一个元带。分两种情况讨论。

若元带的长度大于 1，则考虑其中两个不同的素带 $\mathfrak{b}_1$ 和 $\mathfrak{b}_2$。元带的定义保证存在字符串 $\mathfrak{u}$ 和 $\mathfrak{v}$，使得 $\mathfrak{b}_2\mathfrak{u}\mathfrak{b}_1$ 和 $\mathfrak{b}_1\mathfrak{v}\mathfrak{b}_2$ 都是字符串。这与 $\preceq$ 是反对称的相矛盾。

另一方面，若该元带是一个非平凡桥 $\mathfrak{b} \xrightarrow{\mathfrak{u}} \mathfrak{b}$，那么根据 [3, 命题 3.41], ，我们有 $\mathfrak{b}$ 是一个元带的顶点，而该元带至少包含两个素带。其余论证与上一段类似。

反过来，假设 $\preceq$ 不是反对称的。那么存在不同的带 $\mathfrak{b}_1$ 和 $\mathfrak{b}_2$，以及字符串 $\mathfrak{u}$ 和$\mathfrak{v}$，使得 $\mathfrak{b}_2\mathfrak{u}\mathfrak{b}_1$ 和 $\mathfrak{b}_1\mathfrak{v}\mathfrak{b}_2$ 是字符串。现在，对于 $k \geq 1$，字符串 $\mathfrak{v}\mathfrak{b}_2\mathfrak{u}\mathfrak{b}_1^k$ 包含由不同带构成的一个无限族循环置换，由此证明 Λ 是非 domestic。□

若 $\mathfrak{b}_1 \preceq \mathfrak{b}_2$ 且 $\mathfrak{b}_2 \preceq \mathfrak{b}_1$，则称 $\mathfrak{b}_1 \approx \mathfrak{b}_2$，并令 $\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}} := \mathcal{Q}_0^{\mathrm{Ba}}/\approx$。注意，当且仅当存在一个 GMB B，使得 $\mathfrak{b}_1$，$\mathfrak{b}_2 \in \mathrm{Ba(B)}$ 时，$\mathfrak{b}_1 \approx \mathfrak{b}_2$ 才成立。因此，我们将使用 B（必要时加上修饰）表示 $\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 中的元素。借用描述 GMB 的形容词，若 $\mathrm{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 且 $|\mathrm{B}|=1$，则称 B 为国内型，否则称其为非 domestic。

通过对循环置换进行适当操作，很容易得出以下结论。设 $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_1', \mathfrak{b}_2' \in \mathrm{Cyc}(\Lambda)$，使得 $\mathfrak{b}_1'$ 和 $\mathfrak{b}_2'$ 分别是 $\mathfrak{b}_1$ 和 $\mathfrak{b}_2$ 的循环置换。若 $\mathfrak{b}_2\mathfrak{u}\mathfrak{b}_1$ 是某个字符串 $\mathfrak{u}$ 的字符串，则 $\mathfrak{b}_2'\mathfrak{v}\mathfrak{b}_1'$ 是某个字符串 $\mathfrak{v}$的字符串。因此，我们可以将集合 Cyc(Λ) 上的关系 $\preceq$ 扩展为：对于任意 $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \in \mathcal{Q}_0^{\mathrm{Ba}}$，当且仅当 $\mathfrak{b}_1' \preceq \mathfrak{b}_2'$ 时，有 $\mathfrak{b}_1 \preceq \mathfrak{b}_2$，其中 $\mathfrak{b}_1'$ 和 $\mathfrak{b}_2'$ 分别是 $\mathfrak{b}_1$ 和 $\mathfrak{b}_2$ 的循环置换。

命题 5.4. 若 $\mathfrak{b} \in \mathcal{Q}_0^{\mathrm{Ba}}$是可合成的，则存在 $\mathfrak{b}_1 \in \mathcal{Q}_0^{\mathrm{Ba}}$，使得 $|\mathfrak{b}_1| < |\mathfrak{b}|$，且满足 $\mathfrak{b} \approx \mathfrak{b}_1$。

证明。若 $\mathfrak{b} \in \mathcal{Q}_0^{\mathrm{Ba}}$ 是可合成的，则存在 $\mathfrak{b}$ 的一个循环置换 $\mathfrak{b}'$，可写为 $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}_k' \cdots \mathfrak{b}_1'$，其中 $k > 1$，且 $\mathfrak{b}_j \in \mathcal{Q}_0^{\mathrm{Ba}}$ 的循环置换为 $\mathfrak{b}_j'$。于是显然有 $|\mathfrak{b}_1'| < |\mathfrak{b}'| = |\mathfrak{b}|$和 $\mathfrak{b}_1 \approx \mathfrak{b}_1' \approx \mathfrak{b}' \approx \mathfrak{b}$。□

这个简单的结果有一个直接推论。

推论 5.5。若 $\mathrm{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$，则 B 含有一个素带。

证明。令 $\mathfrak{b} \in \mathrm{Ba(B)}$。若 $\mathfrak{b}$ 是素的，则证毕。否则，根据命题 5.4，存在 $\mathfrak{b}_1 \in \mathcal{Q}_0^{\mathrm{Ba}}$，使得 $|\mathfrak{b}_1| < |\mathfrak{b}|$ 且 $\mathfrak{b}_1 \approx \mathfrak{b}$。若 $\mathfrak{b}_1$ 是素带，则证毕。否则，我们对 $\mathfrak{b}_1$ 重复这一过程，得到 $\mathfrak{b}_2 \in \mathcal{Q}_0^{\mathrm{Ba}}$，使得 $|\mathfrak{b}_2| < |\mathfrak{b}_1|$ 且 $\mathfrak{b}_2 \approx \mathfrak{b}_1$。因此，我们得到一列带 $\mathfrak{b}_1$、$\mathfrak{b}_2$、$\cdots$，满足 $\mathfrak{b} \approx \mathfrak{b}_1 \approx \mathfrak{b}_2 \approx \cdots$ 且 $|\mathfrak{b}| > |\mathfrak{b}_1| > |\mathfrak{b}_2| > \cdots$。由于 $|\mathfrak{b}|$ 是有限的，这一过程必定在有限步后终止，从而得到 B 中的一个素带。□

由于 [3, 定 理 3.1.6] 表明素带只有有限多个，因此上述推论得出 s
以下结 有限性结果。

命题 5.6. 偏序集 $(\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}, \preceq)$ 是一个有限偏序集。

对于固定的字符串 $\mathfrak{x}_0$ 和奇偶性 $i \in \{1, -1\}$，若存在字符串$\mathfrak{u}$ 使得 $\mathfrak{bux}_0 \in H_l^i(\mathfrak{x}_0)$，则称带 $\mathfrak{b}$ 可由 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 到达。若 $\mathfrak{b}_1 \approx \mathfrak{b}_2$，则 $\mathfrak{b}_1$ 可由 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 到达，当且仅当 $\mathfrak{b}_2$ 可由 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 到达。因此， $\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 中可由 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 到达的元素子集 $\mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{x}_0)$ 也是有限的。若 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$是 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 的极小元，则称其为 $(\mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{x}_0)\ \preceq)$ 的极小元。由于每个有限偏序集都含有极小元，因此保证存在一个对应于有序对 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 的极小 B。

例 5.7。考虑图 1 中的字符串代数 Γ_0 。 $\mathcal{Q}_1^{\mathrm{Ba}}(a_0)$ 中有四个元素，分别是 $\mathsf{B}_1 = \{b_1B_4b_3B_2\}$、包含带 d_1D_2 和 d_3D_4的 B_2 、包含带 $e_3E_2E_1$、 $g_4G_3g_2G_1$ 和 k_1K_2的 B_3 ，以及 $\mathsf{B}_4 = \{m_1M_2\}$。其中 B_1 和 B_4 是国内型；而 B_2 和 B_3 是非国内型。$(\mathcal{Q}_1^{\mathrm{Ba}}(a_0)\ \prec)$ 中仅有 $\mathsf{B}_1 \prec \mathsf{B}_2$和 $\mathsf{B}_3 \prec \mathsf{B}_4$ 这两个序关系。只有 B_1 和 B_3 是 $(a_0, 1)$ 的极小元。

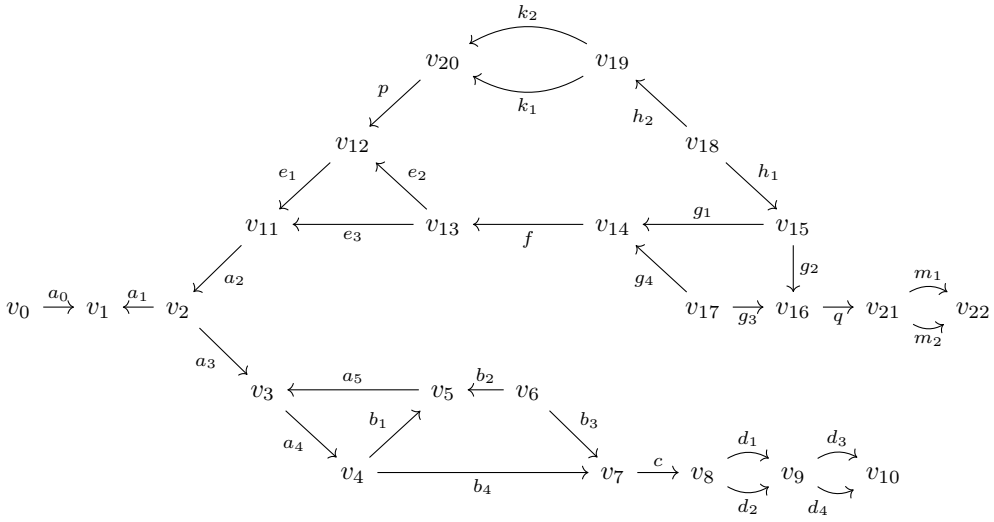

FIGURE 1. Γ_0 与
$\rho = \{a_3a_2, a_4a_5, b_4a_4, a_5b_1, cb_4, d_2c, d_4d_1, d_3d_2, a_2e_3, e_3f, fg_4, g_2h_1, k_2h_2, qg_3, m_2q, pk_2, e_1p\}$

6. SOME FINITENESS RESULTS

我们引入吊床中一些字符串的集合，这些字符串接近于 $\mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{x}_0)$中的一个元素，并证明在适当条件下，这些集合的某些子集是有限的。

给定 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 和 $j \in \{-1, 1\}$，下面的集合刻画了带有符号 j且与 B“接触”的字符串。

$$\mathsf{St}j(\mathsf{B}) := \{\mathfrak{x} \in \mathsf{St}(\Lambda) \mid \mathfrak{bx} \text{ 是某个 } \mathfrak{b} \in \mathsf{Cyc}(\mathsf{B}) \text{ 的字符串，使得 } \theta(\mathfrak{b}) = j\}.$$

进一步定义

$$\mathsf{St}(\mathsf{B}) := \mathsf{St}_1(\mathsf{B}) \cup \mathsf{St}_{-1}(\mathsf{B}),\ \mathsf{St}_{\pm 1}(\mathsf{B}) := \mathsf{St}_1(\mathsf{B}) \cap \mathsf{St}_{-1}(\mathsf{B}).$$

若 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{x}_0)$，则定义

$\mathsf{St}j(\mathfrak{x}_0, i;\ \mathsf{B}) := \mathsf{St}j(\mathsf{B}) \cap H_l^i(\mathfrak{x}_0)$、$\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i;\ \mathsf{B}) := \mathsf{St}(\mathsf{B}) \cap H_l^i(\mathfrak{x}_0)$ 和 $\mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i;\ \mathsf{B}) := \mathsf{St}_{\pm 1}(\mathsf{B}) \cap H_l^i(\mathfrak{x}_0)$.

现在，我们将上述字符串集合对左子串封闭。对于 $j \in \{1, -1\}$，定义

$$\overline{\mathsf{St}}_j(\mathsf{B}) := \{\mathfrak{x} \in \mathsf{St}(\Lambda) \mid \mathfrak{ux} \in \mathsf{St}(\mathsf{B}) \text{ for some string } \mathfrak{u} \text{ with } \theta(\mathfrak{u}) = j\},$$

$$\overline{\mathsf{St}}(\mathsf{B}) := \overline{\mathsf{St}}_1(\mathsf{B}) \cup \overline{\mathsf{St}}_{-1}(\mathsf{B}) \text{ and } \overline{\mathsf{St}}_{\pm 1}(\mathsf{B}) := \overline{\mathsf{St}}_1(\mathsf{B}) \cap \overline{\mathsf{St}}_{-1}(\mathsf{B}).$$

进一步，若 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{x}_0)$，则定义

$\overline{}$ 对于某个字符串 $\mathfrak{u}$，有 $\mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0, i;\ \mathsf{B}) := \{\mathfrak{x} \in H_l^i(\mathfrak{x}_0) \mid \mathfrak{ux} \in \mathsf{St}(\mathsf{B}) \cup \{\mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)\}$，其中 $\theta(\mathfrak{u}) = 1\} \cup \{\mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)\}$；

~~对~~于某个字符串 $\mathfrak{u}$，有 $\mathsf{St}_{-1}(\mathfrak{x}_0, i;\ \mathsf{B}) := \{\mathfrak{x} \in H_l^i(\mathfrak{x}_0) \mid \mathfrak{ux} \in \mathsf{St}(\mathsf{B}) \cup \{\mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0)\}$，其中 $\theta(\mathfrak{u}) = -1\} \cup \{\mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0)\}$；

$\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, ~~i;~~ \mathsf{B}) := \mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; ~~\mathsf{B})~~ \cup \mathsf{St}_{-1}(\mathfrak{x}_0, i; ~~\mathsf{B})~~$，且 $\mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i;\ \mathsf{B}) ~~:=~~ \mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0, i;\ \mathsf{B}) \cap \mathsf{St}_{-1}(\mathfrak{x}_0, i;\ \mathsf{B})$。 $\overline{}$

当我们使用记号 $\mathrm{St}_j(\mathfrak{x}_0,i;\mathrm{B})$ 和 $\mathrm{St}_j(\mathfrak{x}_0,i;\mathrm{B})$ 时，便隐含地假设 $\mathrm{B}\in\mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{x}_0)$。

显然，对于任意 $j\in\{-1,1\}$，$\mathrm{St}_j(\mathrm{B})\subseteq\mathrm{St}_j(\mathrm{B})$。下面的评注简单明了，但很有用。

注 6.1. 对任意 $\mathfrak{x}\in H_l^i(\mathfrak{x}_0)$，$\mathfrak{x}\in\mathrm{St}_1(\mathfrak{x}_0,i;\mathrm{B})$ 当且仅当 $\mathfrak{x}\in\mathrm{St}_1(\mathrm{B})$ 或 $\mathfrak{x}\sqsubseteq_l\mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)$。对偶地，对任意$\mathfrak{x}\in H_l^i(\mathfrak{x}_0)$，$\mathfrak{x}\in\mathrm{St}_{-1}(\mathfrak{x}_0,i;\mathrm{B})$ 当且仅当 $\mathfrak{x}\in\mathrm{St}_{-1}(\mathrm{B})$ 或 $\mathfrak{x}\sqsubseteq_l\mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0)$。

注释 6.2. 若 $\mathfrak{x}\in\mathrm{St}(\mathrm{B})$ 且 $\mathfrak{y}\sqsubset_l\mathfrak{x}$，则 $\mathfrak{y}\in\mathrm{St}^{\theta(\mathfrak{x}|\mathfrak{y})}(\mathrm{B})$。

注记 6.3. 若 $\mathfrak{x}\in\mathrm{St}(\mathfrak{x}_0,i;\mathrm{B})$，$\mathfrak{y}\sqsubset_l\mathfrak{x}$ 且 $\mathfrak{y}\in H_l^i(\mathfrak{x}_0)$，则 $\mathfrak{y}\in\mathrm{St}^{\theta(\mathfrak{x}|\mathfrak{y})}(\mathfrak{x}_0,i;\mathrm{B})$。

命题 6.4. 若 $\mathfrak{x}\in\mathrm{St}_1(\mathfrak{x}_0,i;\mathrm{B})$，$\mathfrak{y}\in\mathrm{St}_{-1}(\mathfrak{x}_0,i;\mathrm{B})$，且 $\mathfrak{x}<_l\mathfrak{y}$，则 $\mathfrak{x}\in\mathrm{St}_1(\mathrm{B})$ 且 $\mathfrak{y}\in\mathrm{St}_{-1}(\mathrm{B})$。

证明. 若可能，设 $\mathfrak{x}\notin\mathrm{St}_1(\mathrm{B})$。那么注 6.1 推出 $\mathfrak{x}\sqsubseteq_l\mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)$。

若 $\mathfrak{x}_0=\mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)$，则 $i=-1$ 且 $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}_0=\mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)$，这与 $\mathfrak{y}>_l\mathfrak{x}$ 的存在相矛盾。

因此设 $\mathfrak{x}_0\sqsubset_l\mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)$。这与 $\mathfrak{x}<_l\mathfrak{y}$ 一起推出，对某些字符串 $\mathfrak{w},\mathfrak{v}$，有 $\mathfrak{y}=\mathfrak{w}\mathfrak{v}\mathfrak{x}$，且 $\delta(\mathfrak{v})=1$。由于 $\mathfrak{y}\in\mathrm{St}_{-1}(\mathfrak{x}_0,i;\mathrm{B})$ 且 $\mathfrak{x}\sqsubset_l\mathfrak{y}$，注记 6.3 推出 $\mathfrak{x}\in\mathrm{St}^{\theta(\mathfrak{y}|\mathfrak{x})}(\mathfrak{x}_0,i;\mathrm{B})=\mathrm{St}_1(\mathfrak{x}_0,i;\mathrm{B})$。由于 $\mathfrak{x}_0=\mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0)\sqsubset_l\mathfrak{y}$，由注 6.1 可得 ~~$\mathfrak{y}\in$~~ $\mathrm{St}(\mathrm{B})$。现在，$\mathfrak{x}\sqsubset_l\mathfrak{y}$ 与注释 6.2 一起推出 $\mathfrak{x}\in\mathrm{St}^{\theta(\mathfrak{y}|\mathfrak{x})}(\mathrm{B})=\mathrm{St}_1(\mathrm{B})$，~~这~~与我们的假设矛盾。因此 $\mathfrak{x}\in\mathrm{St}_1(\mathrm{B})$~~。~~ 同理可证 $\mathfrak{y}\in\mathrm{St}_{-1}(\mathrm{B})$。□

一般来说，与 $\mathrm{St}(\mathfrak{x}_0,i;\mathrm{B})$ 相比，$\mathrm{St}(\mathfrak{x}_0,i;\mathrm{B})$ 可能大得多；但当 B 对于 $(\mathfrak{x}_0,i)$ 是极小的时，可以控制这种差异。

命题 6.5. 对于 $\mathrm{B}\in\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 和 $j\in\{-1,1\}$，若 $\mathfrak{x}\in\mathrm{St}_j(\mathrm{B})\setminus\mathrm{St}_j(\mathrm{B})$，则 $\mathfrak{x}$ 相对于 B 是无带的。

证明. 若不然，设对于某些字符串 $\mathfrak{x}_1$、$\mathfrak{x}_2$ 和 $\mathfrak{b}\in\mathrm{Cyc}(\mathrm{B})$，有 $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}_2\mathfrak{b}\mathfrak{x}_1$。由于 $\mathfrak{x}\in\mathrm{St}_j(\mathrm{B})$，存在一个字符串$\mathfrak{u}$ 以及 $\mathfrak{b}_1\in\mathrm{Cyc}(\mathrm{B})$，使得 $\theta(\mathfrak{b}_1\mathfrak{u})=j$，从而 $\mathfrak{b}_1\mathfrak{u}\mathfrak{x}_2\mathfrak{b}\mathfrak{x}_1$ 是一个字符串。现在，$\mathfrak{b}$、$\mathfrak{b}_1\in\mathrm{Cyc}(\mathrm{B})$ 意味着存在一个字符串 $\mathfrak{v}$，使得 $\mathfrak{b}\mathfrak{v}\mathfrak{b}_1$ 是一个字符串。由于 $\delta(\mathfrak{b})=\delta(\mathfrak{b}_1)=0$，我们得到 $\mathfrak{b}\mathfrak{v}\mathfrak{b}_1\mathfrak{u}\mathfrak{x}_2\mathfrak{b}$ 是一个字符串，这意味着$\mathfrak{x}_2\mathfrak{b}\mathfrak{v}\mathfrak{b}_1\mathfrak{u}$ 是一个 B-循环的幂。因此 $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}_2\mathfrak{b}\mathfrak{x}_1\in\mathrm{St}_j(\mathrm{B})$，这与假设矛盾。□

推论 6.6. 若 $\mathrm{B}\in\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 对于 $(\mathfrak{x}_0,\ i)$ 是极小的，且 $j\in\{-1,1\}$ 和 $\mathfrak{x}\in\mathrm{St}_j(\mathfrak{x}_0,\ i;\ \mathrm{B})\setminus\mathrm{St}_j(\mathfrak{x}_0,\ i;\ \mathrm{B})$，则 $\mathfrak{x}$ 相对于 $(\mathfrak{x}_0,\ i)$ 是无带的。

证明。令 $\mathfrak{x}\in\mathrm{St}_j(\mathfrak{x}_0,\ i;\ \mathrm{B})\setminus\mathrm{St}_j(\mathfrak{x}_0,\ i;\ \mathrm{B})$。根据注 6.1，有三种情形。由于 $\delta(\mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)\mid\mathfrak{x}_0)\neq0$，若 $\mathfrak{x}\sqsubseteq_l\mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)$，则 $\mathfrak{x}$ 相对于 $(\mathfrak{x}_0,\ i)$ 是无带的。当 $\mathfrak{x}\sqsubseteq_l\mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0)$ 时，应用对偶论证即可。

最后，若 $\mathfrak{x}\in\mathrm{St}_j(\mathrm{B})$，则存在一个字符串 $\mathfrak{u}$ 以及 $\mathfrak{b}_1\in\mathrm{Cyc}(\mathrm{B})$，使得 $\theta(\mathfrak{b}_1\mathfrak{u})=j$，且 $\mathfrak{b}_1\mathfrak{u}\mathfrak{x}$ 是一个字符串。若可能，令 $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}_2\mathfrak{b}\mathfrak{x}_1$，其中 $\mathfrak{x}_1$、$\mathfrak{x}_2$ 是某些字符串，且 $\mathfrak{b}\in\mathrm{Cyc}(\Lambda)$，使得 $\mathfrak{x}_0\sqsubseteq_l\mathfrak{x}_1$。那么 $\mathfrak{b}_1\mathfrak{u}\mathfrak{x}_2\mathfrak{b}\mathfrak{x}_1$ 是一个字符串，由此可得 $\mathfrak{b}\preceq\mathfrak{b}_1$。由于 B 对 $(\mathfrak{x}_0,\ i)$ 是极小的，故有 $\mathfrak{b}\approx\mathfrak{b}_1$，这与命题 6.5 矛盾。□

回想推论 4.8，$H_l^i(\mathfrak{x}_0)$ 中相对于 $(\mathfrak{x}_0,i)$ 无带的字符串只有有限多个。经过简单的集合论操作可得

$$\mathrm{St}(\mathfrak{x}_0,i;\mathrm{B})\setminus\mathrm{St}(\mathfrak{x}_0,i;\mathrm{B})\subseteq(\mathrm{St}_1(\mathfrak{x}_0,i;\mathrm{B})\setminus\mathrm{St}_1(\mathfrak{x}_0,i;\mathrm{B}))\cup(\mathrm{St}_{-1}(\mathfrak{x}_0,i;\mathrm{B})\setminus\mathrm{St}_{-1}(\mathfrak{x}_0,i;\mathrm{B})).$$

因此，我们得到推论 6.6 的以下推论。

推论 6.7. 若 $\mathrm{B}\in\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 对 $(\mathfrak{x}_0,i)$ 是极小的，则集合 $\mathrm{St}(\mathfrak{x}_0,i;\mathrm{B})\setminus\mathrm{St}(\mathfrak{x}_0,i;\mathrm{B})$ 是有限的。

例6.8. 继续例 5.7，回想 B_1 和 B_3 对 $(a_0,1)$ 是极小的。我们有 $\mathrm{St}(a_0,1;\mathrm{B}_1)\setminus\mathrm{St}(a_0,1;\mathrm{B}_1)=\{a_0,A_1a_0,a_3A_1a_0\}$，且 $\mathrm{St}(a_0,1;\mathrm{B}_3)\setminus\mathrm{St}(a_0,1;\mathrm{B}_3)=\{a_0,A_1a_0\}$。

We 证明另一个条件有限性结果。

命题6.9. 假设 $\mathrm{B}\in\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 是国内型的，并且对于 $(\mathfrak{x}_0,i)$ 是极小的。若 $\mathfrak{x}\in\mathrm{St}_{\pm1}(\mathfrak{x}_0,i;\mathrm{B})$，则 $\mathfrak{x}$ 相对于 $(\mathfrak{x}_0,i)$ 是无带的。

证明. 由于 $\mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)$ 和 $\mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0)$ 相对于 $(\mathfrak{x}_0,i)$ 是无带的，根据注 6.1，只需假设 $\mathfrak{x}\in\mathrm{St}_{\pm1}(\mathrm{B})\cap H_l^i(\mathfrak{x}_0)$。

若可能，令 $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}_2\mathfrak{b}\mathfrak{x}_1$ for $\mathfrak{b}\in\mathrm{Cyc}(\Lambda)$ 和字符串 $\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_2$，使得 $\mathfrak{x}_0\sqsubseteq_l\mathfrak{x}_1$。由于 $\mathfrak{x}\in\mathrm{St}_{\pm1}(\mathrm{B})$，存在字符串 $\mathfrak{u}$ 和 $\mathfrak{v}$，满足 $\theta(\mathfrak{b}_1\mathfrak{u})=-\theta(\mathfrak{b}_1\mathfrak{v})$，使得 $\mathfrak{b}_1\mathfrak{u}\mathfrak{x}_2\mathfrak{b}\mathfrak{x}_1$ 和 $\mathfrak{b}_1\mathfrak{v}\mathfrak{x}_2\mathfrak{b}\mathfrak{x}_1$ 是字符串，其中 $\mathfrak{b}_1$ 是唯一的

元素。由于 B 是国内型，因此它属于 B。这给出 $\mathfrak{b} \preceq \mathfrak{b}_1$，进而意味着 $\mathfrak{b} \approx \mathfrak{b}_1$，因为对于 $(\mathfrak{x}_0, i)$，B 是极小的。此外，B 是国内型，这意味着 $\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{b}_1$的循环置换。于是 $^{\infty}\mathfrak{b}_1\mathfrak{u}\mathfrak{x}_2\mathfrak{b} = {}^{\infty}\mathfrak{b} = {}^{\infty}\mathfrak{b}_2\mathfrak{v}\mathfrak{x}_2\mathfrak{b}$，这意味着 $\theta(\mathfrak{b}_1\mathfrak{u}) = \theta(\mathfrak{b}_1\mathfrak{v})$，矛盾。□

再次利用无带字符串集合的有限性，可得以下推论。

推论 6.10. 若 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 是国内型的，且是 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 的极小对象，则集合 $\mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \overline{\mathsf{B}})$ 是有限的。

例 6.11. 继续讨论例 5.7，回顾一下，B_1 是国内型的，且是 $(a_0, 1)$ 的极小对象。字符串$a_3A_1a_0$是 $\mathsf{St}_{\pm 1}(a_0, 1; \mathsf{B}_1)$ 中唯一的元素。另一方面，B_3 是非 domestic 的，且是 $(a_0, 1)$ 的极小对象，并且对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $E_2E_1(e_3E_2E_1)^nA_2A_1a_0 \in \mathsf{St}_{\pm 1}(a_0, 1; \mathsf{B}_3)$。

命题 6.12. 设 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 是 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 的极小对象。则 $\mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 作为$(H_l^i(\mathfrak{x}_0) <_l)$ 的子序是有界的。

证明。首先注意到 $\mathfrak{x}_0 \in \{\mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)\ \mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0)\}$。不失一般性，假设 $\mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0) <_l \mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)$。那么 $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0$) 当且仅当 y if $i = -1$。

不失一般性，假设 $i = -1$。显然，$\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0) \in \mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \overline{\mathsf{B}})$。另一方面，由于 B 对于 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 是极小的，存在 $\mathfrak{b} \in \mathrm{Ba}(\mathsf{B})$ 以及一个字符串 $\mathfrak{u}$，使得 $\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x}_0 \in H_l^i(\mathfrak{x}_0)$，由此得到 $\mathfrak{x}_0 \in \mathsf{St}_{-1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。因此 $\mathfrak{x}_0 \in \mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。另一方面，我们有 $\theta(\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x}_0 \mid \mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0)) = 1$。因此，$\mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0)$ 的某个左子串属于 $\mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。由于 $\delta(\mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0) \mid \mathfrak{x}_0) = -1$，最长的此类左子串将是 $\mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 的最小元素。□

7. The condensation operator c_{B}

回顾 § 2 中凝缩的概念。本节定义一个特定的凝缩算子c_{B}，作用于吊床，以帮助将其分解为更小的吊床。

注意，$\mathfrak{x}_0 \in \{\mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0)\ \mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)\} \subseteq \mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，并且 $\mathfrak{x}_0$ 是 $H_l^i(\mathfrak{x}_0)$ 中每个字符串的左子串。因此，$H_l^i(\mathfrak{x}_0)$ 中的每个字符串都在 $\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 中有一个左子串。现在我们利用这一观察，定义相对于 B 的吊床中字符串的局部化/凝缩。

定义 7.1. 若 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{x}_0)$，则定义 B-凝缩映射

$$c_{\mathsf{B}} : H_l^i(\mathfrak{x}_0) \to \overline{\mathsf{St}}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$$

将每个 $\mathfrak{x} \in H_l^i(\mathfrak{x}_0)$ 对应到它在 $\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 中最长的左子串。

注 7.2. 注意，若 $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \overline{\mathsf{B}})$，则 $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\} \subseteq c_{\mathsf{B}}([\mathfrak{x}, \mathfrak{y}]) = [\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] \cap \mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。因此，映射 c_{B} 是满射。此外，对于任意 $\mathfrak{x} \in H_l^i(\mathfrak{x}_0)$，我们有 $c_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}$ 当且仅当 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。

现在定义函数 $\varphi_{\mathsf{B}} \colon H_l^i(\mathfrak{x}_0) \to \{-1, 0, 1\}$ 为

$$\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) := \begin{cases} 0 & \text{if } c_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) \in \overline{\mathsf{St}}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}), \\ 1 & \text{if } c_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) \in \overline{\mathsf{St}}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \setminus \overline{\mathsf{St}}_{-1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}), \\ -1 & \text{if } c_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) \in \overline{\mathsf{St}}_{-1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \setminus \overline{\mathsf{St}}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}). \end{cases}$$

注 7.3. 对每个 $\mathfrak{x} \in H_l^i(\mathfrak{x}_0) \setminus \mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \overline{\mathsf{B}})$，都有 $c_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) \sqsubset_l \mathfrak{x}$。若 $\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) = 0$ 且 $\alpha c_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) \sqsubseteq_l \mathfrak{x}$，其中某个音节为 α，则 $\alpha c_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) \in \overline{\mathsf{St}}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，因为 $c_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) \in \mathsf{St}^{\theta(\alpha)}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。这与$c_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})$的定义矛盾，因此 $\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) \neq 0$。

约定 $H_l^0(\mathfrak{y}) := \{\mathfrak{y}\}$。

若 $\mathfrak{y} \in \mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，则 $\mathfrak{y} \in H_l^{-\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{y})}(\mathfrak{y})$。另一方面，若 $\mathfrak{x} \in H_l^i(\mathfrak{x}_0) \setminus \mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \overline{\mathsf{B}})$ 且 $j := \theta(\mathfrak{x} \mid c_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}))$，则根据 $c_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})$的定义可知，$c_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) \notin \mathsf{St}^j(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。因此 $\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) = \overline{\varphi}_{\mathsf{B}}(c_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})) = -j$。我们在下面的结果中记录这一观察。

命题 7.4. 如果 $\mathfrak{x} \in H_l^i(\mathfrak{x}_0)$，那么 $\mathfrak{x} \in H^{-\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})\, l}(c_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}))$。

函数 φ_{B} 的定义方式保证以下陈述成立。这将是证明用于计算吊床序型的算法在有限步后终止的关键。

注 7.5. 对每个 $\mathfrak{y} \in \mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \overline{\mathsf{B}})$，都有 $H^{-\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{y})\, l}(\mathfrak{y}) \cap \mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \overline{\mathsf{B}}) = \{\mathfrak{y}\}$。

命题 7.6. 若 $\mathfrak{x},\mathfrak{y}\in \mathsf{St}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})$，且 $\mathfrak{x}<_l\mathfrak{y}$，则对每个 $\mathfrak{x}'\in H_l^{-\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})}(\mathfrak{x})$ 和 $\mathfrak{y}'\in H_l^{-\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{y})}(\mathfrak{y})$，都有$\mathfrak{x}'<_l\mathfrak{y}'$。

证明。若 $\mathfrak{x}\sqsubset_l\mathfrak{y}$，则对每个 $\mathfrak{y}'\in H_l^{-\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{y})}(\mathfrak{y})$，$\mathfrak{x}\sqsubset_l\mathfrak{y}\sqsubseteq_l\mathfrak{y}'$。因此 $\theta(\mathfrak{y}'\mid\mathfrak{x})=\theta(\mathfrak{y}\mid\mathfrak{x})=1$。此外，由于 $\mathfrak{x}\sqsubset_l\mathfrak{y}\in\overline{\mathsf{St}}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})$，我们得出 $\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})\neq -1$。若 $\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})=0$，则结论成立。另一方面，若 $\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})=1$，则对每个 $\mathfrak{x}'\in H^{-\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})}\,\iota(\mathfrak{x})\setminus\{\mathfrak{x}\}$，$\theta(\mathfrak{x}'\mid\mathfrak{x})=-1$。因此 $\theta(\mathfrak{y}'\mid\mathfrak{x}')=\theta(\mathfrak{y}'\mid\mathfrak{x})=1$，结论也就成立。

当 $\mathfrak{x}\sqsupset_l\mathfrak{y}$ 时，也可以给出一个对偶论证。

最后，当 $\mathfrak{x}$ 和 $\mathfrak{y}$ 不可比较时，$\mathfrak{x}\sqcap_l\mathfrak{y}\in\mathsf{St}_{\pm1}(\mathsf{B})$。根据以上两段中的论证，对于每个 $\mathfrak{x}'\in H^{-\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})}\,\iota(\mathfrak{x})$ 和 $\mathfrak{y}'\in H_l^{-\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{y})}(\mathfrak{y})$，可得 $\mathfrak{x}'<_l\mathfrak{x}\sqcap_l\mathfrak{y}<_l\mathfrak{y}'$，因此结论成立。□

因此，我们得到某些吊床彼此不相交。

推论 7.7. 若 $\mathfrak{x},\mathfrak{y}\in\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})$ 且 $\mathfrak{x}<_l\mathfrak{y}$，则 $H^{-\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})}\,\iota(\mathfrak{x})\cap H^{-\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{y})}\,\iota(\mathfrak{y})=\emptyset$。

下面是本节的主要结果，也是本文主定理（定理 11.9）的一个组成部分。粗略地说，该结果表明，当我们将吊床远离 $\mathsf{B}\in\mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{x}_0)$ 的部分局部化／凝聚时，任何吊床都可以分解为更小的吊床。该结果给出了一个递归算法，用于计算吊床的序型。

引理 7.8. 设 $\mathsf{B}\in\mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{x}_0)$。则

$$(H_l^i(\mathfrak{x}_0),<_l)\cong\sum_{\mathfrak{x}\in c_{\mathsf{B}}(H_l^i(\mathfrak{x}_0))}(H_l^{-\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})}(\mathfrak{x}),<_l).$$

证明. 回顾注 7.2，$c_{\mathsf{B}}(H_l^i(\mathfrak{x}_0))=\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})$。对于任意 $\mathfrak{x}\in H_l^i(\mathfrak{x}_0)$ 和 $j\in\{1,0,-1\}$，注 4.6 表明 $H_l^j(\mathfrak{x})$ 是 $H_l^i(\mathfrak{x}_0)$ 中的一个区间。因此

$$H_l^i(\mathfrak{x}_0)\supseteq\bigcup_{\mathfrak{x}\in c_{\mathsf{B}}(H_l^i(\mathfrak{x}_0))}H_l^{-\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})}(\mathfrak{x}).$$

另一方向的包含关系由命题 7.4 给出，而推论 7.7 确保右侧的并集互不相交。最后，命题 7.6 确保上述双射确实是序同构。□

8. Neighbours of strings in B-condensation

本节旨在定义 $\mathsf{St}(\mathsf{B})$ 上的算子 ℓ_{B} 和 $\overline{\ell}_{\mathsf{B}}$，将其限制在 $\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})$ 上时，有助于我们找出其中字符串的直接邻居。在此过程中，我们定义 B 中素带集合的两个子集 $\mathrm{Ba}_l(\mathsf{B})$ 和 $\mathrm{Ba}_{\bar{l}}(\mathsf{B})$，并发现这类迭代直接后继（分别为前驱）序列的极限是形如 $^\infty\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x}_0$ 的几乎周期字符串，其中 $\mathfrak{b}\in\mathrm{Ba}_l(\mathsf{B})$（分别为 $\mathrm{Ba}_{\bar{l}}(\mathsf{B})$）。

带的出口音节和桥的出口这一概念是在 [3, § 3] 中引入的。稍作修改后，我们在下文引入带的出口。

定义8.1. 给定一个带 $\mathfrak{b}$，称有序对 $(\beta,\mathfrak{b}')$ 是 $\mathfrak{b}$ 的出口，如果 β 是一个音节，并且 $\mathfrak{b}'$ 是 $\mathfrak{b}$ 的一个循环置换，使得 $\beta\mathfrak{b}'$ 是一个字符串，但 $\beta\mathfrak{b}'\not\sqsubseteq_l\mathfrak{b}'^2$。

显然，如果 $(\beta,\mathfrak{b}')$ 是带 $\mathfrak{b}$ 的一个出口，那么 β 就是 $\mathfrak{b}$ 的出口音节。对于非国内型 $\mathsf{B}\in\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$，B-带存在一些出口；相应出口音节的符号对于吊床序型的计算很重要。

定义8. 2. 如果 $\mathsf{B}\in\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 且 $\mathfrak{b}\in$ 属于 $\mathrm{Ba}(\mathsf{B})$，称 $\mathfrak{b}$ 的出口 $(\beta,\mathfrak{b}')$ 为非国内出口，如果 $\beta\mathfrak{b}'\in$ 属于 $\mathrm{Ext}(\mathsf{B}$).

备注 8.3. 对于非国内型 $\mathsf{B}\in\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 且 $\mathfrak{b}\in$ 属于 $\mathrm{Ba}(\mathsf{B})$ 的情形，存在 $\mathfrak{b}'\in$ 属于 $\mathrm{Ba}(\mathsf{B})$，使得 $\mathfrak{b}\neq\mathfrak{b}'$。设 $\mathfrak{u}$ 是一个字符串，且 $\mathfrak{b}'\mathfrak{u}\mathfrak{b}\in$ 属于 $\mathrm{Ext}(\mathsf{B})$。那么 $^\infty\mathfrak{b}'\mathfrak{u}\mathfrak{b}$ 和 $^\infty\mathfrak{b}$ 分叉。因此，$\mathfrak{b}$ 有一个非国内出口。

定义 8.4. 用 $\mathrm{Ba}_l(\mathsf{B})$ 表示所有不存在满足 $\beta\in Q_1$ 的非国内出口 $(\beta,\mathfrak{b}')$ 的 B-带的集合。对偶地，用 $\mathrm{Ba}_{\bar{l}}(\mathsf{B})$ 表示所有不存在满足 $\beta\in Q_1^-$ 的非国内出口 $(\beta,\mathfrak{b}')$ 的 B-带的集合。

例8.5。接续例 5.7，我们有 $\mathrm{Ba}_l(\mathsf{B}_3)=\{e_3e_2E_1,g_4G_3g_2G_1\}$ 和 $\mathrm{Ba}_{\bar{l}}(\mathsf{B}_3)=\{k_1K_2\}$。

鉴于备注 8.3，很容易看出，如果 B 是非 domestic，那么 $\mathrm{Ba}_l(\mathsf{B}) \cap \mathrm{Ba}_{\bar{l}}(\mathsf{B}) = \emptyset$。我们将在推论 8.26 和推论 8.28 中证明，集合 $\mathrm{Ba}_l(\mathsf{B})$ 和 $\mathrm{Ba}_{\bar{l}}(\mathsf{B})$ 非空且有限。

以下命题是定义算子 ℓ_{B} 的关键。

命题 8.6. 若 $\mathfrak{x} \in \mathrm{St}_1(\mathsf{B})$，则存在 $\mathfrak{y} \in \mathrm{St}_1(\mathsf{B})$，使得 $\mathfrak{x} \sqsubset_l \mathfrak{y} \sqsubseteq_l l(\mathfrak{x})$。

证明。若可能，假设对每个 $\mathfrak{x} \sqsubset_l \mathfrak{y} \sqsubseteq_l l(\mathfrak{x})$，都有 $\mathfrak{y} \notin \mathrm{St}_1(\mathsf{B})$。设 $\mathfrak{b} \in \mathrm{Cyc}(\mathsf{B})$，使得 $\mathfrak{b}\mathfrak{x}$ 是一个字符串，且 $\theta(\mathfrak{b}) = 1$。设 $\mathfrak{z} := \mathfrak{b}\mathfrak{x} \sqcap_l l(\mathfrak{x})$。由于 $\theta(\mathfrak{b}) = 1$，我们得到 $\mathfrak{x} \sqsubset_l \mathfrak{z} \sqsubseteq_l l(\mathfrak{x})$。因此，根据我们的假设，$\mathfrak{z} \notin \mathrm{St}_1(\mathsf{B})$。这意味着 $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{b}\mathfrak{x}$。由于 $\mathfrak{x} \sqsubset_l \mathfrak{z} \sqsubset_l \mathfrak{b}\mathfrak{x}$，对 $\mathfrak{b}$ 作适当的循环置换 $\mathfrak{b}'$ 后，$\mathfrak{b}'\mathfrak{z}$ 是一个字符串。此外，$\mathfrak{z} \notin \mathrm{St}_1(\mathsf{B})$ 意味着 $\theta(\mathfrak{b}') = -1$。因此 $\alpha\mathfrak{z} \sqsubseteq_l \mathfrak{b}\mathfrak{x}$，其中 $\alpha \in Q_1$ 是 $\mathfrak{b}'$ 的第一个音节。由于 $\mathfrak{x} \sqsubset_l \mathfrak{z} \sqsubseteq_l l(\mathfrak{x})$，我们得到 $\alpha\mathfrak{z} \sqsubseteq_l l(\mathfrak{x})$，这与 $\mathfrak{z} = \mathfrak{b}\mathfrak{x} \sqcap_l l(\mathfrak{x})$ 矛盾。□

定义 8.7. 通过选取 $\ell_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})$ 为满足 $\ell_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) \in \mathrm{St}_1(\mathsf{B})$ 的 $l(\mathfrak{x})$ 的最大（可能相等的）左子串，定义 $\ell_{\mathsf{B}} : \mathrm{St}_1(\mathsf{B}) \to \mathrm{St}_1(\mathsf{B})$。

注记 8.8. 对任意 $\mathfrak{x} \in \mathrm{St}_1(\mathsf{B})$，都有 $\ell_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) \notin \mathrm{St}_{-1}(\mathsf{B})$。

对于 $\mathfrak{x} \in \mathrm{St}_1(\mathsf{B})$，我们归纳地将函数 ℓ_{B} 的幂定义为 $\ell^0_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) := \mathfrak{x}$，以及 $\ell^{n+1}{}_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) := \ell_{\mathsf{B}}(\ell^n_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}))$，其中 $n \in \mathbb{N}$。由于对于每个 n，$\ell^n_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) \sqsubset_l \ell^{n+1}{}_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})$，我们得到 $\lim_{n\to\infty} \ell^n_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})$ 是一个左 $\mathbb{N}$-字符串。将此极限记为 $\langle 1, \ell_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{x})$。

下面的注记指出，如果 $|\mathfrak{x}| > 0$，那么 $\ell_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})$ 仅取决于 $\mathfrak{x}$ 的最后一个音节。因此，限制在 $\mathrm{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 上的函数 ℓ_{B} 的像包含于 $\mathrm{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 中。

注 8.9. 如果对于某个 $\alpha \in Q_1 \cup Q_1^-$，$\alpha\mathfrak{x}, \alpha\mathfrak{y} \in \mathrm{St}_1(\mathsf{B})$，那么 $\ell^n_{\mathsf{B}}(\alpha\mathfrak{x}) = \mathfrak{u}\alpha\mathfrak{x}$ 当且仅当 $\ell^n_{\mathsf{B}}(\alpha\mathfrak{y}) = \mathfrak{u}\alpha\mathfrak{y}$。此外，如果 $\ell^n_{\mathsf{B}}(\alpha)$ 存在，那么 $\ell^n_{\mathsf{B}}(1_{(t(\alpha),\varepsilon(\alpha))})$ 也存在，并且 $\ell^n_{\mathsf{B}}(\alpha) = \ell^n_{\mathsf{B}}(1_{(t(\alpha),\varepsilon(\alpha))})\alpha$。

命题 8.10. 对于 $\mathfrak{x} \in \mathrm{St}_1(\mathsf{B})$，存在 $\langle 1, \ell_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{x}) = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x}$，其中带 $\mathfrak{b}$ 和字符串 $\mathfrak{u}$。

证明. 定义一个函数 $f : \mathbb{N}^+ \to Q_1 \cup Q_1^-$，使得 $f(k)$ 是 $\ell^k_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})$ 的最后一个音节。由于 $Q_1 \cup Q_1^-$ 是有限的，存在 $m, n \in \mathbb{N}^+$，使得 $f(m) = f(m+n)$。鉴于对于任意 $\mathfrak{w} \in \mathrm{St}_1(\mathsf{B})$，$\ell^k_{\mathsf{B}}(\mathfrak{w}) \sqsubset_l \ell^{k+1}\mathsf{B}(\mathfrak{w})$，令 $\mathfrak{y}\mathfrak{x} := \ell^n_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})$，且 $\mathfrak{z}\mathfrak{y}\mathfrak{x} := \ell^{m+n}\mathsf{B}(\mathfrak{x})$，其中 $\mathfrak{z}$ 是一个满足 $|\mathfrak{z}| > 0$ 的字符串。由于 $\ell^n_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})$ 和 $\ell^{m+n}\mathsf{B}(\mathfrak{x})$ 的最后一个音节相同，由注 8.9 和归纳法可得，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，$\ell^{m+kn}\mathsf{B}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{z}^k\mathfrak{y}\mathfrak{x}$。由于对于每个 $k \in \mathbb{N}$，$\mathfrak{z}^k$ 都是一个字符串，$\mathfrak{z}$ 是一个带的循环置换的有限次幂，记作 $\mathfrak{b}$。由于 $\langle 1, \ell_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{x}) = {}^{\infty}\mathfrak{z}\mathfrak{y}\mathfrak{x}$，因此对于某个字符串 $\mathfrak{y}'$，有 $\langle 1, \ell_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{x}) = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{y}'\mathfrak{x}$。□

例 8.11. 回想例 5.7，$e_3E_2E_1$ 是一个位于 B_3 中的带。对于 $A_2A_1a_0 \in \mathrm{St}(\mathsf{B}_3)$，经过常规计算可得 $\langle 1, \ell_{\mathsf{B}_3}\rangle(A_2A_1a_0) = {}^{\infty}(e_3E_2E_1)A_2A_1a_0$。

命题 8.10 的结论与 [3, 命题 3.4.5], 的假设相似，后者的证明用到了 l-字符串的概念。然而，证明中用到的关于 l-字符串的陈述 [3, 备注 3.4.4] 有误，如例 8.12 所示。尽管如此，这并不意味着 [3, 命题 3.4.5] 是错误的，因为仍可使用与命题 8.21 证明中类似的技巧来证明它。

例 8.12. 考虑图 2 中的字符串代数 Γ。对于适当的 $j \in \{1, -1\}$，有

$$\langle 1, l\rangle(1_{(v,j)}) = {}^{\infty}(cbaEbafcbD).$$

这里，$Ebafcb$、$DcbaEb$和 $fcbDcb$是首音节相同且长度相同的 l-字符串。

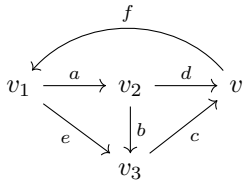

FIGURE 2. Γ 与 $\rho = \{ce, da, ef, fd, cbaf, fcba\}$

受……启发 我们在 [3, § 3.4], 中引入了 l-字符串这一概念，受此启发，现在定义 ℓ_{B}-字符串以证明类似的 r 结果，其中 l 被替换为 ℓ_{B}。

定义 8.13. 若存在某个 $1_{(v,i)} \in \mathsf{St}_1(\mathsf{B})$，使得 $\delta(\mathfrak{u}) = 0$ 且 $\mathfrak{u} \sqsubseteq \langle 1, \ell_{\mathsf{B}}\rangle(1_{(v,i)})$，则字符串 $\mathfrak{u}$ 是一个 ℓ_{B}-字符串。

注 8.14. 若 $\ell_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{x}) = \mathfrak{u}\mathfrak{y}\mathfrak{x}$，其中 $\mathfrak{y}$ 和 $\mathfrak{u}$ 是满足 $|\mathfrak{u}| > 0$的字符串，那么 $\theta(\mathfrak{u}) = 1$ 当且仅当存在$0 \leq k < n$ 使得 $\ell_{\mathsf{B}}^k(\mathfrak{x}) = \mathfrak{y}\mathfrak{x}$。

命题 8.15. 设 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_1(\mathsf{B})$，且对某个字符串 $\mathfrak{u}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，有 $\ell_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{x}) = \mathfrak{u}\mathfrak{x}$。那么存在 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Cyc}(\mathsf{B})$、$m \in \mathbb{N}^+$ 和 $\alpha \in Q_1^-$，使得 $\alpha\mathfrak{u} \sqsubseteq_l \mathfrak{b}^m$，且 $\mathfrak{b}^m\mathfrak{x}$ 是一个字符串。

证明。对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $\mathfrak{u}_n\mathfrak{x} := \ell_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{x})$。令 $\alpha_n \in Q_1^-$满足 $\alpha_n\mathfrak{u}_n\mathfrak{x} \sqsubseteq_l \ell^{n+1}$ B $(\mathfrak{x})$。我们将对 n使用归纳法证明该结论。

对于 $n = 0$，有 $\ell_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}$。由于 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_1(\mathsf{B})$，存在 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Cyc}(\mathsf{B})$，使得 $\theta(\mathfrak{b}) = 1$，且 $\mathfrak{b}\mathfrak{x}$ 是一个字符串。令 α 为 $\mathfrak{b}$ 的第一个音节，即可证明该结论。F

或 $n > 0$，根据归纳假设，存在 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Cyc}(\mathsf{B})$ 和 $m \in \mathbb{N}^+$，使得 $\alpha_{n-1}\mathfrak{u}_{n-1} \sqsubseteq_l \mathfrak{b}^m$ an d $\mathfrak{b}^m\mathfrak{x}$ 是一个字符串。设 $\mathfrak{u}_n := \mathfrak{y}\alpha_{n-1}\mathfrak{u}_{n-1}$，使得若 $|\mathfrak{y}| > 0$，则 $\delta(\mathfrak{y}) = -1$。分两种情况讨论。

- 若 $|\mathfrak{y}| > 0$，设 $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \in \mathsf{Cyc}(\mathsf{B})$，使得 $\alpha_{n-1}\mathfrak{u}_{n-1} \sqsubseteq_r \mathfrak{b}_1$, $\theta(\mathfrak{b}_2) = 1$，且 $\mathfrak{b}_2\mathfrak{y}\alpha_{n-1}\mathfrak{u}_{n-1}\mathfrak{x}$ 是一个字符串。由于 $\delta(\mathfrak{y}) = -1$ 且 $\alpha_{n-1} \in Q_1^-$，我们得到 $\mathfrak{b}_2\mathfrak{y}\mathfrak{b}_1$ 是一个字符串。由于 $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \in \mathsf{Cyc}(\mathsf{B})$，我们得到对于某个字符串 $\mathfrak{w}$，$\mathfrak{b}_1\mathfrak{w}\mathfrak{b}_2$ 是一个字符串。因此 $\mathfrak{w}\mathfrak{b}_2\mathfrak{y}\mathfrak{b}_1 \in \mathsf{Cyc}(\mathsf{B})$ 且 $\alpha_n\mathfrak{u}_n \sqsubseteq \mathfrak{w}\mathfrak{b}_2\mathfrak{y}\mathfrak{b}_1$。设 $\mathfrak{b}'$ 是 $\mathfrak{w}\mathfrak{b}_2\mathfrak{y}\mathfrak{b}_1$ 的一个循环置换，使得 $\alpha_n\mathfrak{u}_n = \alpha_n\mathfrak{y}\alpha_{n-1}\mathfrak{u}_{n-1} \sqsubseteq_l \mathfrak{b}'$。由于 $\delta(\mathfrak{y}) = -1$ 且 $\theta(\alpha_n) = 1$，我们得到 $\delta(\alpha_n\mathfrak{u}_n) = \delta(\alpha_n\mathfrak{y}\alpha_{n-1}\mathfrak{u}_n) = 0$。因此 $\alpha_n\mathfrak{u}_n \sqsubseteq_l \mathfrak{b}'$，且 $\mathfrak{b}'\mathfrak{x}$ 是一个字符串。

- 若 $|\mathfrak{y}| = 0$，则 $\mathfrak{u}_n \sqsubseteq_l \mathfrak{b}$。设 $\mathfrak{w}\mathfrak{u}_n := \mathfrak{b}^m$，其中 $\mathfrak{w}$ 是某个字符串。设 α 为 $\mathfrak{b}\mathfrak{w}$ 的第一个音节。根据注记 8.8，我们有 $\mathfrak{u}_n\mathfrak{x} \notin \mathsf{St}_{-1}(\mathsf{B})$。因此，$\alpha \in Q_1^-$ 和 $\mathfrak{b}^{m+1}$ 满足结论的条件。

证明至此完成。 □

推论 8.16。若 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_1(\mathsf{B})$，且对于某些字符串 $\mathfrak{u}$ 和 $\mathfrak{y}$，有 $\mathfrak{u}\mathfrak{y}\mathfrak{x} \sqsubset_l \langle 1, \ell_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{x})$，则存在 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Cyc}(\mathsf{B})$，使得 $\mathfrak{b}\mathfrak{y}\mathfrak{x}$ 是一个字符串，并且对于某个 $m \in \mathbb{N}^+$，有 $\mathfrak{u} \sqsubseteq_l \mathfrak{b}^m$。

推论 8.17。若 $\mathfrak{u}$ 是一个 ℓ_{B}-字符串，则 $\mathfrak{u} \in \mathsf{Ext}(\mathsf{B})$。

命题 8.18。若对于某个 $\alpha \in Q_1 \cup Q_{-1}$，$\mathfrak{x}$ 和 $\alpha\mathfrak{x}$ 是 ℓ_{B}-字符串，则 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_{-1}(\mathsf{B})$ 当且仅当 $\alpha \in Q_1$.

证明。假设 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_{-1}(\mathsf{B})$。由于 $\alpha\mathfrak{x}$ 是一个 ℓ_{B}-字符串，存在字符串 $\mathfrak{y}$、$n \in \mathbb{N}^+$、$v \in Q_0$ 和 $j \in \{1, -1\}$，使得 $\alpha\mathfrak{x}\mathfrak{y} \sqsubseteq_l \ell^{n+1}$ B $(1_{(v,j)})$ 且 ℓ^{n-1} B $(1_{(v,j)}) \sqsubset_l \mathfrak{x}\mathfrak{y} \sqsubseteq_l \ell_{\mathsf{B}}^n(1_{(v,j)})$。令 $\mathfrak{u} := \ell^{n-1}$ B $(1_{(v,j)})$。因此 $\mathfrak{x}\mathfrak{y} \sqsubseteq_l \ell_{\mathsf{B}}(\mathfrak{u})$。由于 $\mathfrak{x}\mathfrak{y} \in \mathsf{St}_{-1}(\mathsf{B})$，存在 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Cyc}(\mathsf{B})$，满足 $\theta(\mathfrak{b}) = -1$，且 $\mathfrak{b}\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ 是一个字符串。令 β 为 $\mathfrak{b}$ 的第一个音节。于是 $\beta \in Q_1$ 给出 $\beta\mathfrak{x}\mathfrak{y} \sqsubseteq_l \ell_{\mathsf{B}}(\mathfrak{u})$。令 $\mathfrak{z} := \ell_{\mathsf{B}}(\mathfrak{u}) \sqcap_l \mathfrak{b}\mathfrak{x}\mathfrak{y}$。由于 $\mathfrak{u} \sqsubset_l \beta\mathfrak{x}\mathfrak{y} \sqsubseteq_l \mathfrak{z} \sqsubset_l \mathfrak{b}\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ 且$\mathfrak{u} <_l \ell_{\mathsf{B}}(\mathfrak{u}) <_l \mathfrak{b}\mathfrak{x}\mathfrak{y}$，我们得到，对于某个$\gamma \in Q_1^-$，$\mathfrak{x}\mathfrak{y} \sqsubset_l \gamma\mathfrak{z} \sqsubseteq_l \mathfrak{b}\mathfrak{x}\mathfrak{y}$。这表明 $\mathfrak{z} \in \mathsf{St}_1(\mathsf{B})$。由于 $\beta\mathfrak{x}\mathfrak{y} \sqsubseteq_l \mathfrak{z}$，我们得到 $\beta\mathfrak{x}\mathfrak{y} \sqsubseteq_l \ell_{\mathsf{B}}(\mathfrak{u})$。因此 $\beta\mathfrak{x}\mathfrak{y} \sqsubseteq_l \ell^{n+1}$ B $(1_{(v,j)})$，从而得到 $\alpha = \beta \in Q_1$。

反过来，若 $\alpha\mathfrak{x}$ 是 ℓ_{B} 对应的字符串，则由推论 8.17 可得 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Cyc}(\mathsf{B})$，使得 $\alpha\mathfrak{x} \sqsubseteq_l \mathfrak{b}$。因此，$\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_{-1}(\mathsf{B})$。□

推论 8.19. 对于字符串 $\mathfrak{x}$、$\mathfrak{u}$、$\mathfrak{v}$，若 $\mathfrak{x}$、$\mathfrak{u}\mathfrak{x}$ 和 $\mathfrak{v}\mathfrak{x}$ 是 ℓ_{B} 对应的字符串，则 $\mathfrak{u}\mathfrak{x}$ 和 $\mathfrak{v}\mathfrak{x}$ 不会分叉。

证明。假设 $\mathfrak{u}\mathfrak{x}$ 和 $\mathfrak{v}\mathfrak{x}$ 可能分叉。令 $\mathfrak{z}\mathfrak{x} := \mathfrak{u}\mathfrak{x} \sqcap_l \mathfrak{v}\mathfrak{x}$，其中 $\theta(\mathfrak{v}\mathfrak{x} \mid \mathfrak{z}\mathfrak{x}) = 1$ 且 $\theta(\mathfrak{u}\mathfrak{x} \mid \mathfrak{z}\mathfrak{x}) = -1$。由于 $\mathfrak{x} \sqsubseteq \mathfrak{z}\mathfrak{x} \sqsubset \mathfrak{u}\mathfrak{x}$，我们有 $\mathfrak{z}\mathfrak{x}$ 是一个 ℓ_{B} 对应的字符串。由命题 8.18 可得 $\mathfrak{z}\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_{\pm 1}(\mathsf{B})$，这与备注 8.8 和 8.14 的结合矛盾。□

备注 8.20. 若 $\mathfrak{x}$ 是一个 ℓ_{B} 对应的字符串，则存在 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Ba}(\mathsf{B})$ 以及一个字符串 $\mathfrak{y}$，使得 $\mathfrak{b}\mathfrak{y}\mathfrak{u}$ 是一个字符串。

命题 8.21. 如果一个带 $\mathfrak{b}$ 的每个循环置换都是 ℓ_{B}-字符串，那么 $\mathfrak{b}$ 是素带。

证明。假设 $\mathfrak{b}$ 是复合带。则存在 $n > 1$、a_1、$\cdots$、$a_n \in \mathbb{N}^+$、$\mathfrak{b}_1$、...、$\mathfrak{b}_n \in \mathsf{Cyc}(\Lambda)$，满足 $\mathfrak{b}_n \neq \mathfrak{b}_1$，并且对任意 $j \in \{1, \cdots, n-1\}$ 都有 $\mathfrak{b}_j \neq \mathfrak{b}_{j+1}$；此外，还存在 $\mathfrak{b}$ 的一个循环置换 $\mathfrak{b}'$，使得$\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}_n^{a_n} \cdots \mathfrak{b}_2^{a_2}\mathfrak{b}_1^{a_1}$。根据假设，$\mathfrak{b}'$ 是一个 ℓ_{B}-字符串。注意，对于 $v = s(\mathfrak{b}')$ 以及适当的 $j \in \{1, -1\}$、$\mathfrak{b}_1$、$\mathfrak{b}_2$、$\cdots$、$\mathfrak{b}_n \in (H_l(1_{(v,j)}) <_l)$。由推论 8.17，$\mathfrak{b}_1$、$\mathfrak{b}_2$、$\cdots$、$\mathfrak{b}_n \in \mathsf{Cyc}(\mathsf{B})$。

断言。若 $j \neq k$ and $\mathfrak{b}_j\mathfrak{b}_k$ 是一个 ℓ_{B}-字符串，则 $\mathfrak{b}_j <_l \mathfrak{b}_k$ 属于 $(H_l(1_{(v,j)}) <_l)$。

该断言的证明。设 $\mathfrak{y} := \mathfrak{b}_k \sqcap_l \mathfrak{b}_j$。若 $\delta(\mathfrak{y}) = 0$，则 $\mathfrak{y}$ 是一个 ℓ_{B}-字符串。根据推论 4.10，字符串$\mathfrak{b}_{j-1}^{a_{j-1}} \cdots \mathfrak{b}_1^{a_1}\mathfrak{b}_n^{a_n} \cdots \mathfrak{b}_j^{a_j}$和 $\mathfrak{b}_{k-1}^{a_{k-1}} \cdots \mathfrak{b}_1^{a_1}\mathfrak{b}_n^{a_n} \cdots \mathfrak{b}_k^{a_k}$分叉，这与推论 8.19 矛盾。因此 $\delta(\mathfrak{y}) \neq 0$，并且特别地，由于 $\delta(\mathfrak{b}_i) = \delta(\mathfrak{b}_j) = 0$，但 $\delta(\mathfrak{y}) \neq 0$，我们得到 $\mathfrak{b}_i$ 和 $\mathfrak{b}_j$ 分叉。

若可能，假设我们有 $\mathfrak{b}_k <_l \mathfrak{b}_j$。令 $\mathfrak{x} := \mathfrak{b}_j\mathfrak{b}_k \sqcap_l \mathfrak{b}_k^2$，使得 $\mathfrak{x}$ 是一个 ℓ_{B}-字符串。于是，对某个 $\alpha \in Q_1^-$ 和 $\beta \in Q_1$，有 $\alpha\mathfrak{x} \sqsubseteq_l \mathfrak{b}_j\mathfrak{b}_k$ 和 $\beta\mathfrak{x} \sqsubseteq_l \mathfrak{b}_k^2$。由于 $\mathfrak{b}_k^2 \in \mathsf{Ext}(\mathsf{B})$ 且 $\beta\mathfrak{x} \sqsubseteq_l \mathfrak{b}_k^2$，我们有 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_{-1}(\mathsf{B})$。进一步

由于 $\alpha\mathfrak{x}$ 是一个 ℓ_{B}-字符串，命题 8.18 给出 $\alpha \in Q_1$，矛盾。至此断言的证明完成。■

由于 $\mathfrak{b}_{j+1}\mathfrak{b}_j$ 是一个 ℓ_{B}-字符串，根据断言可知，对于每个 $j \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$，都有 $\mathfrak{b}_{j+1} <_l \mathfrak{b}_j$。利用 $<_l$ 的传递性，我们得到 $\mathfrak{b}_n <_l \mathfrak{b}_1$。然而，$\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_n$ 是 $\mathfrak{b}$ 的某个循环置换的子串，也因此是一个 ℓ_{B}-字符串，于是断言给出 $\mathfrak{b}_1 <_l \mathfrak{b}_n$，这就产生了矛盾。因此，$n = 1$ 且 $a_1 = 1$，这表明 $\mathfrak{b}$ 是素的。□

推论 8.22. 如果 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_l(\mathsf{B})$，那么对于某个素 B-带 $\mathfrak{b}$，有 $\langle 1, \ell_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{x}) = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x}$。

证明。由命题 8.10，存在某个带 $\mathfrak{b}$，使得 $\langle 1, \ell_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{x}) = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x}$。由注 8.9 可知，$\langle 1, \ell_{\mathsf{B}}\rangle(1_{(t(\mathfrak{x}),\varepsilon(\mathfrak{x}))}) = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}$。因此，$\mathfrak{b}$ 的每个循环置换都是一个 ℓ_{B}-字符串。但由命题 8.21 可得，$\mathfrak{b}$ 是一个素带。最后，由推论 8.17 得到 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Ba}(\mathsf{B})$。□

事实上，推论 8.22 中出现的带不仅仅是素带。现在我们证明它属于 $\mathsf{Ba}_l(\mathsf{B})$。

命题 8.23. 若 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_l(\mathsf{B})$，且 $\langle 1, \ell_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{x}) = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x}$，其中带 $\mathfrak{b}$ 和字符串 $\mathfrak{u}$ 满足上述条件，则 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Ba}_l(\mathsf{B})$。

证明. 命题 8.10 保证了 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{u}$ 的存在，而推论 8.22 表明 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Ba}(\mathsf{B})$。反设 $\mathfrak{b} \notin \mathsf{Ba}_l(\mathsf{B})$。那么存在 $\mathfrak{b}$ 的一个出口 $(\beta, \mathfrak{b}')$，使得 $\theta(\beta) = -1$。将 ${}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x}$ 改写为 ${}^{\infty}\mathfrak{b}'\mathfrak{v}\mathfrak{x}$，其中 $\mathfrak{v}$ 是某个字符串。由于 $\theta(\mathfrak{b}') = 1$，注 8.14 得出 $n \in \mathbb{N}$，使得 $\ell_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{x}) = \mathfrak{b}'\mathfrak{v}\mathfrak{x}$。由于$\beta\mathfrak{b}'\mathfrak{v}\mathfrak{x} \in \mathsf{Ext}(\mathsf{B}) \subseteq \mathsf{St}(\mathsf{B})$，我们有 $\mathfrak{b}'\mathfrak{v}\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_{-1}(\mathsf{B})$，这与注记 8.8 矛盾。□

例 8.24. 接续例 8.11，确实 $e_3E_2E_1 \in \mathsf{Ba}_l(\mathsf{B}_3)$，且 $e_3E_2E_1$ 是一个素带 d.

结合命题 8.10、8.23 和推论 8.22，可得以下结果。

推论 8.25. 若 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_l(\mathsf{B})$，则 $\langle 1, \ell_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{x}) = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x}$ 对于某个字符串 $\mathfrak{u}$，且 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Ba}_l(\mathsf{B})$。

由于 $\mathsf{St}_l(\mathsf{B}) \neq \emptyset$，上述结果保证 $\mathsf{Ba}_l(\mathsf{B})$ 中存在一个带。

推论 8.26. 若 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$，则 $\mathsf{Ba}_l(\mathsf{B}) \neq \emptyset$。

事实上, 我们可以保证，每个 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Ba}_l(\mathsf{B})$ 都会出现在命题 8.23 的结论中，且对应某个 $\mathfrak{x}$.

命题 8.27。若 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Ba}_l(\mathsf{B})$，则存在 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_l(\mathsf{B})$ 和一个字符串 $\mathfrak{u}$，使得 $\langle 1, \ell_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{x}) = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x}$。

证明。由于 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Ba}(\mathsf{B})$，我们有 $\theta(\mathfrak{b}) = 1$，且 $\mathfrak{b} \in \mathsf{St}_l(\mathsf{B})$。因此，根据命题 8.23，存在 $\mathfrak{b}_1 \in \mathsf{Ba}_l(\mathsf{B})$ 和一个字符串 $\mathfrak{u}$，使得 $\langle 1, \ell_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{b}) = {}^{\infty}\mathfrak{b}_1\mathfrak{u}\mathfrak{b}$。若可能，假设 ${}^{\infty}\mathfrak{b}_1\mathfrak{u}\mathfrak{b} \neq {}^{\infty}\mathfrak{b}$。由于 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Ba}_l(\mathsf{B})$，我们得到 $\theta({}^{\infty}\mathfrak{b}_1\mathfrak{u}\mathfrak{b} \mid {}^{\infty}\mathfrak{b}) = 1$。令 $\mathfrak{z}\mathfrak{b} := {}^{\infty}\mathfrak{b}_1\mathfrak{u}\mathfrak{b} \sqcap_l {}^{\infty}\mathfrak{b}$。根据注 8.14，存在 $n \geq 0$，使得$\ell_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{b}) = \mathfrak{z}\mathfrak{b}$。由于 $\theta({}^{\infty}\mathfrak{b}_1\mathfrak{u}\mathfrak{b}) = \theta(\mathfrak{b}) = 1$，我们得到 $|\mathfrak{z}| > 0$。因此 $n > 0$，特别是 $\mathfrak{z}\mathfrak{b} \in \mathsf{St}_{-1}(\mathsf{B})$，这与注记 8.8 矛盾。□

集合 $\mathsf{Ba}_l(\mathsf{B})$ 的有限性可由下述结果得出，该结果结合了命题 8.23 和 8.27。

推论 8.28。如果 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 且 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Ba}_l(\mathsf{B})$，那么 $\mathfrak{b}$ 是素的。

注 8.29。 如果 B $\in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 是非 domestic 的，那么根据备注 8.3，$\mathsf{Ba}_l(\mathsf{B}) \cap \mathsf{Ba}_{\bar{l}}(\mathsf{B}) = \emptyset$。另一方面，如果 B 是 d r hand, omestic，那么 $\mathsf{Ba}_l(\mathsf{B}) = \mathsf{Ba}_{\bar{l}}(\mathsf{B})$ =B。

9. Extending the B-neighbour operators

在第 6 节中，我们定义了集合 $\mathsf{St}_l(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，其中 $j \in \{-1, 1\}$ 包含最终到达 B $\in \mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{x}_0)$ 的字符串。我们希望将函数 ℓ_{B} 扩展到这个更大的集合 $\mathsf{St}_l(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，并得到类似于推论 8.25 的结果。

命题 9.1. 若 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_l(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \setminus \{\mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)\}$，则存在 $\mathfrak{z} \in \mathsf{St}_l(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，使得 $\mathfrak{x} \sqsubset_l \mathfrak{z} \sqsubseteq_l l(\mathfrak{x})$。

证明. 若 $\mathfrak{x} \sqsubset_l \mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)$，则结论显然成立。因此假设 $\mathfrak{x} \not\sqsubset_l \mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)$。由注 6.1 可得$\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_l(\mathsf{B})$。若可能，假设对每个 $\mathfrak{x} \sqsubset_l \mathfrak{y} \sqsubseteq_l l(\mathfrak{x})$，都有 $\mathfrak{y} \notin \mathsf{St}_l(\mathsf{B})$。

由于 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_l(\mathsf{B})$，存在 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Cyc}(\mathsf{B})$ 和 $\mathfrak{u} \in \mathsf{St}(\Lambda)$，使得 $\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x} \in \mathsf{St}(\Lambda)$ 以及 $\theta(\mathfrak{b}\mathfrak{u}) = 1$。令$\mathfrak{z} := \mathfrak{b}^2\mathfrak{u}\mathfrak{x} \sqcap_l l(\mathfrak{x})$。显然 $\mathfrak{z} \sqsubset_l \mathfrak{b}^2\mathfrak{u}\mathfrak{x}$。由于 $\theta(\mathfrak{b}\mathfrak{u}) = 1$，我们有 $\mathfrak{x} \sqsubset_l \mathfrak{z} \sqsubseteq_l l(\mathfrak{x})$。根据我们的假设，$\mathfrak{z} \notin \mathsf{St}_l(\mathsf{B})$。因此 $\theta(\mathfrak{b}^2\mathfrak{u}\mathfrak{x} \mid \mathfrak{z}) = -1$。令 $\alpha \in Q_1$ 使得 $\alpha\mathfrak{z} \sqsubseteq_l \mathfrak{b}^2\mathfrak{u}\mathfrak{x}$。由于 $\mathfrak{x} \sqsubset_l \mathfrak{z} \sqsubseteq_l l(\mathfrak{x})$，我们得到 $\alpha\mathfrak{z} \sqsubseteq_l l(\mathfrak{x})$，这与 $\mathfrak{z} = \mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x} \sqcap_l l(\mathfrak{x})$ 矛盾。□

它立即　　由命题 9.1 可直接推出 $\mathfrak{x} \sqsubset_l c_{\mathsf{B}}(l(\mathfrak{x}))$，这促使我们给出以下定义。

定义 9.2。定义 $l_{\mathsf{B}} : \mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \setminus \{\mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)\} \to \mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，其中 $l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) := c_{\mathsf{B}}(l(\mathfrak{x}))$；也就是说，选取 $l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})$，使其为 $l(\mathfrak{x})$ 的最大（可以相等）左子串，并满足 $l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) \in \mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。

命题 9.3. 若 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \setminus \{\mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)\}$，则 $\mathfrak{x} <_l l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})$、$\varphi_{\mathsf{B}}(l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})) = 1$ 以及 $H_l^{-1}(l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})) = (\mathfrak{x}, l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}]$。

证明。根据 $l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})$ 的定义，显然 $\mathfrak{x} <_l l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})$、$l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) \notin \mathsf{St}_{-1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，因此 $\varphi_{\mathsf{B}}(l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})) = 1$。

令 $\mathfrak{z} \in (\mathfrak{x}, l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}))$。若 $\mathfrak{x} \not\sqsubseteq_l \mathfrak{z}$，则 $\mathfrak{z} \sqcap_l \mathfrak{x} = \mathfrak{z} \sqcap_l l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})$。这意味着 $\mathfrak{x}$ 和 $l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})$ 都位于吊床中 $\mathfrak{z}$ 的同一侧，矛盾。因此 $\mathfrak{x} \sqsubset_l \mathfrak{z}$。由于 $\theta(\mathfrak{z} \mid \mathfrak{x}) = 1$，我们得到 $a \in Q_1$，使得 $A\mathfrak{x} \sqsubseteq_l \mathfrak{z}$。根据定义，$A\mathfrak{x} \sqsubseteq_l l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})$。因此 $A\mathfrak{x} \sqsubseteq_l l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) \sqcap_l \mathfrak{z}$，并且 $\theta(l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) \mid \mathfrak{z}) = 1$。若 $l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}' A\mathfrak{x}$，则要么 $|\mathfrak{x}'| = 0$，要么 $\delta(\mathfrak{x}') = -1$。因此我们得出 $l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) \sqsubset_l \mathfrak{z}$；结合 $\theta(\mathfrak{z} \mid l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})) = -1$，便得到所需的 $\mathfrak{z} \in H_l^{-1}(l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}))$。□

结合上述内容与注 7.5，我们得出 $l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})$ 是 $\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 中 $\mathfrak{x}$ 的直接后继。

推论 9.4. 若 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \setminus \{\mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)\}$，则 $(\mathfrak{x}, l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})) \cap \mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) = \emptyset$。

Now 我们证明，函数 l_{B} 确实是在更大定义域上对函数 ℓ_{B} 的扩展　　.

命题 9.5. 若 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，则 $\ell_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) = l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})$。

证明。令 $\ell_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) =: \mathfrak{z}'\mathfrak{x}$，且 $l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) =: \mathfrak{z}\mathfrak{x}$。由于 $\ell_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) \in \mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \subseteq \mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，我们有 $\ell_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) \sqsubseteq_l \mathfrak{z}\mathfrak{x} \sqsubseteq_l l(\mathfrak{x})$。若 $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}'$，则无须证明。因此假设 $\mathfrak{z}' \sqsubset_l \mathfrak{z}$。根据注 8.9，$1_{(t(\mathfrak{x}), \varepsilon(\mathfrak{x}))} \in \mathsf{St}_1(\mathsf{B})$ 且 $\ell_{\mathsf{B}}(1_{(t(\mathfrak{x}), \varepsilon(\mathfrak{x}))}) = \mathfrak{z}'$。于是推论 8.17 得出存在 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Cyc}(\mathsf{B})$，使得对于某个 $n \in \mathbb{N}^+$，有 $\mathfrak{z}' \sqsubseteq_l \mathfrak{b}^n$。

由于 $\mathfrak{z}'\mathfrak{b}$ 是一个字符串，$\theta(\mathfrak{z}') = 1$ 且 $\theta(\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z}') = -1$，我们得到 $\mathfrak{z}\mathfrak{b}$ 是一个字符串。由于 $\mathfrak{z}' \sqsubset_l \mathfrak{z} \sqsubseteq_l l(1_{(t(\mathfrak{x}), \varepsilon(\mathfrak{x}))})$，我们得到 $\delta(\mathfrak{z}) = 0$。因为 $\mathfrak{z}\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，所以存在 $\mathfrak{b}' \in \mathsf{Cyc}(\mathsf{B})$ 以及一个字符串 $\mathfrak{u}$，使得 $\mathfrak{b}'\mathfrak{u}\mathfrak{z}\mathfrak{x} \in \mathsf{St}(\Lambda)$ 且 $\theta(\mathfrak{b}'\mathfrak{u}) = 1$。此外，$\delta(\mathfrak{z}) = 0$ 表明 $\mathfrak{b}'\mathfrak{u}\mathfrak{z}\mathfrak{b}$ 是一个字符串。因此，$\mathfrak{z}\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{z}\mathfrak{b}'\mathfrak{u}$ 是一个 B-循环的幂，$\theta(\mathfrak{z}\mathfrak{b}\mathfrak{y}\mathfrak{b}'\mathfrak{u}) = 1$ 且 $(\mathfrak{z}\mathfrak{b}\mathfrak{y}\mathfrak{b}'\mathfrak{u})\mathfrak{z}$ 是一个字符串。于是 $\mathfrak{z} \in \mathsf{St}_1(\mathsf{B})$。由于 $\delta(\mathfrak{z}) = 0$，我们有 $\mathfrak{z}\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_1(\mathsf{B})$。由于 $\mathfrak{z}\mathfrak{x} \sqsubseteq_l l(\mathfrak{x})$，这与 $\ell_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})$ 的定义矛盾。□

对于 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，我们归纳地将函数 l_{B} 的幂定义为 $l_{\mathsf{B}}^0(\mathfrak{x}) := \mathfrak{x}$，以及 $l^{n+1}{}_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) := l_{\mathsf{B}}(l_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{x}))$，其中 $n \in \mathbb{N}$，若 $l_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{x}) \neq \mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)$。注意到，当且仅当 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_1(\mathsf{B})$ 时，对每个 n，$l_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{x})$ 都存在。在此情况下，利用 $l_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{x}) \sqsubset_l l^{n+1}{}_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})$，可得 $\lim_{n\to\infty} l_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{x})$ 是一个左 $\mathbb{N}$-字符串；将此极限记为 $\langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{x})$。

注记 9.6。如果 $l_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{x}) = \mathfrak{u}\mathfrak{y}\mathfrak{x}$，其中 $\mathfrak{y}$ 和 $\mathfrak{u}$ 是满足 $|\mathfrak{u}| > 0$的字符串，那么 $\theta(\mathfrak{u}) = 1$ 当且仅当存在 $0 \le k < n$ 使得 $l_{\mathsf{B}}^k(\mathfrak{x}) = \mathfrak{y}\mathfrak{x}$。

以下结果的证明与命题 8.10 的证明类似。

命题 9.7。如果 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \cap \mathsf{St}_1(\mathsf{B})$，那么对于某个带 $\mathfrak{b}$ 和某个字符串 $\mathfrak{u}$，有 $\langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{x}) = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x}$。

然而　　如以下例子所示，上述得到的带 $\mathfrak{b}$ 可能不是 B-带　　.

例 9.8。接续例 5.7，对于 $a_0 \in \mathsf{St}_1(a_0, 1; \mathsf{B}_2) \cap \mathsf{St}_1(\mathsf{B}_2)$，我们有 $\langle 1, l_{\mathsf{B}_2}\rangle(a_0) = {}^{\infty}(b_1 B_4 b_3 B_2) b_1 a_4 a_3 A_1 a_0$，但 $b_1 B_4 b_3 B_2 \notin \mathsf{B}_2$。

若 B 对 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 是极小的，则此问题便可解决。

命题 9.9。设 B 对 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 是极小的。如果 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \cap \mathsf{St}_1(\mathsf{B})$，那么对于某个 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Ba}_l(\mathsf{B})$ 和某个字符串 $\mathfrak{u}$，有 $\langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{x}) = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x}$。

证明。根据推论 6.7，对于某个 $n \in \mathbb{N}$，有 $l_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{x}) \in \mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。因此 $\langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{x}) = \langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(l_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{x})) = \langle 1, \ell_{\mathsf{B}}\rangle(l_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{x}))$，其中最后一个等式由命题 9.5 得出。结论随即由推论 8.25 得证。□

我们以一个有用的结果结束本节，该结果将用于证明命题 10.12 中某些特殊字符串（称为 B-中心）的稠密性。

命题 9.10。假设 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{x}_0)$ 是非 domestic 的，并且对于 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 是极小的。若 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 且 $\mathfrak{y} \in \mathsf{St}_{-1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，使得 $\mathfrak{x} <_l \mathfrak{y}$，则 $\langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{x}) <_l \langle 1, \bar{l}_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{y})$。

证明。由命题 6.4 可得 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_1(\mathsf{B})$ 和 $\overline{\mathfrak{y}} \in \mathsf{St}_{-1}(\mathsf{B})$。根据命题 9.9，设 $\langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{x}) =: {}^{\infty}\mathfrak{b}_1\mathfrak{u}_1\mathfrak{x}$ 且 $\langle 1, \bar{l}_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{y}) =: {}^{\infty}\mathfrak{b}_2\mathfrak{u}_2\mathfrak{y}$，其中 $\mathfrak{b}_1 \in \mathsf{Ba}_l(\mathsf{B})$、$\mathfrak{b}_2 \in \mathsf{Ba}_{\bar{l}}(\mathsf{B})$，并且 $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2$ 是字符串。由于 $\mathsf{Ba}_l(\mathsf{B}) \cap \mathsf{Ba}_{\bar{l}}(\mathsf{B}) = \emptyset$，我们得到 $\mathfrak{b}_1$ 不是 $\mathfrak{b}_2$ 的循环置换，这意味着 ${}^{\infty}\mathfrak{b}_1\mathfrak{u}_1\mathfrak{x} \neq {}^{\infty}\mathfrak{b}_2\mathfrak{u}_2\mathfrak{y}$。设 $\mathfrak{w} := {}^{\infty}\mathfrak{b}_1\mathfrak{u}_1\mathfrak{x} \sqcap_l {}^{\infty}\mathfrak{b}_2\mathfrak{u}_2\mathfrak{y}$，使得 $\mathfrak{w} \in \mathsf{St}_{\pm 1}(\mathsf{B})$。若 $\theta({}^{\infty}\mathfrak{b}_1\mathfrak{u}_1\mathfrak{x} \mid \mathfrak{w}) = 1$，则注记 9.6 给出 $n \in \mathbb{N}^+$，使得 $l^n_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{w}$，这与命题 9.3 矛盾。因此 $\theta({}^{\infty}\mathfrak{b}_1\mathfrak{u}_1\mathfrak{x} \mid \mathfrak{w}) = -1$，证明完毕。□

10. B-CENTERS

给定 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$，$\mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 中某些特殊字符串的存在性——我们将其称为 B-中心——刻画了 B 的非 domestic 性。这类字符串构成的子序是一个稠密线性序，并且它决定了非国内串代数的吊床中的洗牌结构（参见定义 2.3 的条款 (4)）。因此，国内串代数中不存在 B-中心（命题 10.11），从而禁止国内串代数具有洗牌结构。

为了定义 B- 中心，我们需要一个称为 B-等价的概念，它保证最大的散 d 区间位于 $\mathsf{St}(\overline{\ \ \mathfrak{x}_0, i;\ \mathsf{B})}$ 围绕 B-中心是典范同构的。

定义 10.1。设 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{x}_0)$。若存在不同的音节 α 和 β，使得 $\alpha\mathfrak{x}$、$\beta\mathfrak{x}$、$\alpha\mathfrak{y}$ 和 $\beta\mathfrak{y}$ 都是字符串，则称 $\mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 中的两个字符串 $\mathfrak{x}$ 和 $\mathfrak{y}$ 是 B-等价的，记作 $\mathfrak{x} \equiv_{\mathsf{B}} \mathfrak{y}$。

显然，$\equiv_{\mathsf{B}}$ 是 $\mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 上的一个等价关系。下面的注记指出，$\equiv_{\mathsf{B}}$-等价类只有有限多个。

注记 10.2。对于 B-等价类中的每个字符串 $\mathfrak{x}$，都存在唯一的有序对 $(\alpha, \beta) \in Q_1 \times Q_1^-$，使得 $\alpha\mathfrak{x}$ 和 $\beta\mathfrak{x}$ 都是字符串。因此，将每个 B-等价类映射到 $Q_1 \times Q_1^-$ 中对应的有序对，这一映射是单射。由于每个字符串代数中的 $Q_1 \times Q_1^-$ 都是有限的，因此 B-等价类只有有限多个。

例 10.3. 回顾例 5.7，$\mathsf{B}_3 \in \mathcal{Q}_1^{\mathrm{Ba}}(a_0)$ 是非 domestic。$\mathsf{St}_{\pm 1}(a_0, 1; \mathsf{B})$ 中有三个 B_3-等价类，其代表分别为字符串 $E_1A_2\overline{A_1}a_0$、$G_1FE_2E_1A_2A_1a_0$、$k_1h_2H_1G_1FE_2E_1A_2A_1a_0$。

如例10.4所示，B-等价的概念严格弱于 H-等价。不过，在温和串代数的情形下，这两个概念是一致的。

例10.4. 考虑图3中的字符串代数 Γ'。取 $j \in \{1, -1\}$，使得 $f1_{(v_5,j)}$ 是一个字符串。只有一个非 domestic B $\in \mathcal{Q}_{-1}^{\mathrm{Ba}}(1_{(v_5,j)})$。考虑字符串 f、$feDf \in \mathsf{St}_{\pm 1}(1_{(v_5,j)}-1; \mathsf{B})$。由于 cf、$cfeDf$、Df、$DfeDf$都是字符串，我们有 $f \equiv_{\mathsf{B}} feDf$。另一方面，$f \not\equiv_H feDf$，因为 acf是一个字符串，而 $acfeDf$ 不是。

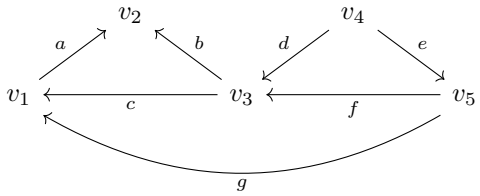

FIGURE 3. Γ' 与 $\rho = \{bf, cd, ge, ag, acfe\}$

命题 10.5. 设 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{x}_0)$。对于字符串 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，以下陈述等价。

(1) 存在 $\mathfrak{b}' \in \mathsf{Cyc}(\mathsf{B})$，使得 $\mathfrak{b}'\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 且 $\mathfrak{b}'\mathfrak{x} \equiv_{\mathsf{B}} \mathfrak{x}$。(2) 存在字符串 $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ 以及 $\mathfrak{b}' \in \mathsf{Cyc}(\mathsf{B})$，使得 $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_1$，$\mathfrak{x}_2\mathfrak{b}'\mathfrak{x}_1 \in \mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，$\mathfrak{x}_2\mathfrak{b}'\mathfrak{x}_1 \equiv_{\mathsf{B}} \mathfrak{x}$ 且 $\mathfrak{x}_2\mathfrak{b}' \in \mathsf{Ext}(\mathsf{B})$。(3) 存在字符串 $\mathfrak{z}, \mathfrak{u}$，使得 $\delta(\mathfrak{z}) = 0$，$\mathfrak{z} \in \mathsf{Ext}(\mathsf{B})$，$\mathfrak{z}\mathfrak{u} \in \mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 且 $\mathfrak{z}\mathfrak{u} \equiv_{\mathsf{B}} \mathfrak{x}$。(4) 存在一个音节 $\gamma \in \mathsf{St}_{\pm 1}(\mathsf{B})$，使得 $1_{(t(\mathfrak{x}),\varepsilon(\mathfrak{x}))}\gamma$ 是字符串，$\alpha\gamma, \beta\gamma \in \mathsf{Ext}(\mathsf{B})$ 对于不同的音节 α, β，使得 $\alpha\mathfrak{x}, \beta\mathfrak{x} \in \mathsf{St}(\Lambda)$。

证明。(1) $\Longrightarrow$ (2)：这是显然的，因为我们可以取 $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}$ 和 $\mathfrak{x}_2 = 1_{(v,j)}$ 作为适当的 (v, j)，使得$1_{(v,j)}\mathfrak{x}_1$ 是字符串。

(2) $\Longrightarrow$ (3)：取 $\mathfrak{z} = \mathfrak{x}_2\mathfrak{b}'$ 和 $\mathfrak{u} = \mathfrak{x}_{1^\infty}$。由于 $\mathfrak{b}'$ 是一个带的循环置换，且 $\mathfrak{b}' \sqsubset_l \mathfrak{z}$，我们有$\delta(\mathfrak{z}) = 0$。此外，$\mathfrak{z}\mathfrak{u} = \mathfrak{x}_2\mathfrak{b}'\mathfrak{x}_{1^\infty} \equiv_{\mathsf{B}} \mathfrak{x}$。

(3) $\Longrightarrow$ (4)：由于 $\delta(\mathfrak{z}) = 0$，我们有 $|\mathfrak{z}| > 0$。令 γ 为 $\mathfrak{z}$的最后一个音节。不失一般性，假设$\theta(\alpha) = 1 = -\theta(\beta)$。由于 $\mathfrak{z}\mathfrak{u} \in \mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，存在 $\mathfrak{b}'_1, \mathfrak{b}'_2 \in \mathsf{Cyc}(\mathsf{B})$，使得 $\theta(\mathfrak{b}'_1) = 1 = -\theta(\mathfrak{b}'_2)$，且$\mathfrak{b}'_1\mathfrak{z}\mathfrak{u}$ 和 $\mathfrak{b}'_2\mathfrak{z}\mathfrak{u}$ 都是字符串。注意，$\mathfrak{b}'_1$ 和 $\mathfrak{b}'_2$ 的第一个音节分别为 α 和 β。又由于$\mathfrak{z} \in \mathsf{Ext}(\mathsf{B})$，存在 $\mathfrak{b}' \in \mathsf{Cyc}(\mathsf{B})$，使得对于某个字符串 $\mathfrak{w}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，有 $\mathfrak{b}'^n = \mathfrak{w}\mathfrak{z}$。令 $\mathfrak{v}$ 为一个字符串，使得 $\mathfrak{b}'\mathfrak{v}\mathfrak{b}'_1$ 是一个字符串。由于 $\delta(\mathfrak{z}) = 0$，且 $\mathfrak{z}\mathfrak{b}'$ 和 $\mathfrak{b}'_1\mathfrak{z}$ 都是字符串，我们得出 $\mathfrak{z}\mathfrak{b}'\mathfrak{v}\mathfrak{b}'_1$ 是某个 B-带循环置换的幂。由于 $\mathfrak{z}$ 的最后一个音节是 γ，而 $\mathfrak{b}'_1$ 的第一个音节是 α，因此 $\alpha\gamma \in$Ext(B)。同理可证 $\beta\gamma \in \mathsf{Ext}(\mathsf{B})$。

(4) $\Longrightarrow$ (1)：不失一般性，设 θ $(\gamma) = \theta(\alpha) = -\theta(\beta)$。共有两种情况。

情况 1：要么 $|\mathfrak{x}| = 0$，要么 $\theta(\gamma') = \theta(\gamma)$，其中 γ' 是 $\mathfrak{x}$的最后一个音节。由于 $\beta\gamma \in \mathsf{Ext}(\mathsf{B})$，存在 $\mathfrak{b}' \in \mathsf{Cyc}(\mathsf{B})$ 和 $n \in \mathbb{N}^+$，使得对于某个字符串 $\mathfrak{w}$，有 $\gamma\mathfrak{w}\beta = \mathfrak{b}'^n$。此外，由于$\alpha\gamma \in \mathsf{Ext}(\mathsf{B})$，存在一个字符串 $\mathfrak{w}'$，使得 $\alpha\gamma\mathfrak{w}'\mathfrak{b}'$ 是一个字符串。由于 $\mathfrak{b}'$ 的第一个音节是 β，且$\theta(\mathfrak{b}') = -\theta(\gamma)$，我们得出 $\gamma\mathfrak{w}'\mathfrak{b}'$ 是一个 B-循环的幂，记作 $\mathfrak{b}''$，使得 $\alpha\mathfrak{b}''\mathfrak{x}$ 和 $\beta\mathfrak{b}''\mathfrak{x}$ 都是字符串。

情况 2：$\theta(\gamma') = -\theta(\gamma)$，其中 γ' 是 $\mathfrak{x}$的最后一个音节。由于 $\alpha\gamma \in \mathsf{Ext}(\mathsf{B})$，存在 $\mathfrak{b}' \in \mathsf{Cyc}(\mathsf{B})$ 和 $n \in \mathbb{N}^+$，使得对于某个字符串 $\mathfrak{w}$，有 $\gamma\mathfrak{w}\alpha = \mathfrak{b}'^n$。由于 $\mathfrak{b}'$ 的第一个音节是 α，因此 $\theta(\mathfrak{b}') = -\theta(\gamma')$，由此得出 $\mathfrak{b}'\mathfrak{x}$ 是一个字符串。此外，由于 $\mathfrak{b}'$ 的最后一个音节是 γ，且 $\theta(\gamma) = -\theta(\beta)$，我们得出 $\beta\mathfrak{b}'$ 是一个字符串。由于 $\delta(\mathfrak{b}') = 0$，可知 $\beta\mathfrak{b}'\mathfrak{x}$ 也是一个字符串，从而完成证明。□

定义 10.6. 如果 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 满足以下等价条件之一，则称其为 B-中心 of f

命题 10.5. 用 $\mathsf{Cent}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 表示所有 B-中心组成的集合。

以下示例表明，$\mathsf{Cent}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 可能是 $\mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 的真子集。

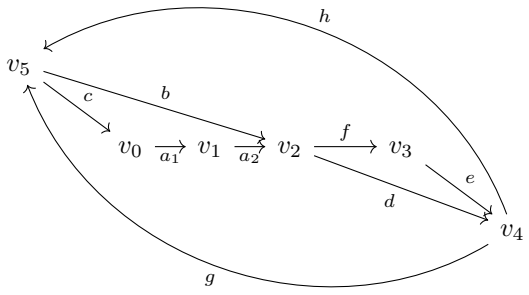

FIGURE 4. Γ''其中 $\rho = \{fa_2, db, ge, hd, bg, ch, da_2a_1c, efb\}$

例 10.7。考虑图 4 中的字符串代数 Γ''。存在唯一的非 domestic $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}_{-1}(a_1)$，使得 $a_2a_1 \in \mathsf{St}_{\pm 1}(a_1, -1; \mathsf{B}) \setminus \mathsf{Cent}(a_1, -1; \mathsf{B})$。

注记 10.8。鉴于注 8.9，若 $\mathfrak{x} \equiv_{\mathsf{B}} \mathfrak{y}$ 且 $\langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{x}) = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x}$，其中某个 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Ba}_l(\mathsf{B})$ 和字符串 $\mathfrak{u}$，则 $\langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{y}) = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{y}$。

给定 $\mathfrak{x} \in \mathsf{Cent}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，我们称 $\mathfrak{x}$ 为区间 $\mathcal{I}_{(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})}(\mathfrak{x}) := (\langle 1, \overline{l}_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{x})\ \langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{x})$ 在吊床 $(H^i_l(\mathfrak{x}_0)\ <_l)$ 中的中心。下面的结果表明，上述形式的两个区间典范同构，当且仅当它们的中心是 B-等价的。

命题 10.9. 假设 $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathsf{Cent}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。若 $\mathfrak{x} \equiv_{\mathsf{B}} \mathfrak{y}$，则对于任意字符串 $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}\mathfrak{x} \in \mathcal{I}_{(\mathfrak{x}_0,i;\ \mathsf{B})}(\mathfrak{x})$ 当且仅当 $\mathfrak{u}\mathfrak{y} \in \mathcal{I}_{(\mathfrak{x}_0,i;\ \mathsf{B})}(\mathfrak{y})$。

证明。由于 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_1(\mathsf{B})$，推论 8.25 和命题 9.5 一起推出 $\langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{x}) = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}_1\mathfrak{x}$，其中某个字符串为$\mathfrak{u}_1$，且 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Ba}_l(\mathsf{B})$。接着，注记 10.8 给出 $\langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{y}) = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}_1\mathfrak{y}$。假设 $\mathfrak{u}\mathfrak{x} \in \mathcal{I}_{(\mathfrak{x}_0,i;\ \mathsf{B})}(\mathfrak{x})$。不妨设 $|\mathfrak{u}| > 0$ 且 $\theta(\mathfrak{u}) = 1$，于是 $\mathfrak{u}\mathfrak{x} \in (\mathfrak{x}, {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}_1\mathfrak{x})$。若 $\mathfrak{u}\mathfrak{y}$ 是一个字符串，则 $\mathfrak{u}\mathfrak{x} \in (\mathfrak{x}, {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}_1\mathfrak{x})$ 立即推出 $\mathfrak{u}\mathfrak{y} \in (\mathfrak{y}, {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}_1\mathfrak{y})$。因此，只需证明 $\mathfrak{u}\mathfrak{y}$ 是一个字符串。这里有两种可能。

由于 ${}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}_1\mathfrak{y}$ 是一个左 $\mathbb{N}$-字符串，若 $\mathfrak{u} \sqsubset_l {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}_1$，则 $\mathfrak{u}\mathfrak{y}$ 是一个字符串。

若 $\mathfrak{u}$ 和 $^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}_1$ 分叉，则令 $\mathfrak{z} := \mathfrak{u} \sqcap_l {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}_1$。由于 $\theta({}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}_1) = \theta(\mathfrak{u}) = 1$，我们有 $|\mathfrak{z}| > 0$。因此，根据上文，$\mathfrak{z}\mathfrak{y}$ 是一个字符串。由于 $\mathfrak{u} <_l {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}_1$，我们得到对于某个 $\alpha \in Q_1$，$\alpha\mathfrak{z} \sqsubseteq_l \mathfrak{u}$。由于 $\theta(\mathfrak{z}) = 1$，$\mathfrak{z}\mathfrak{y}$ 是一个字符串，且 $\delta(\alpha\mathfrak{z}) = 0$，所以我们得到 $\mathfrak{u}\mathfrak{y}$ 是一个字符串。□

现在我们使用备注 8.3，证明当 B 为非 domestic 时 B-中心的存在性。

命题 10.10. 设 $\mathfrak{x} \in H_l^i(\mathfrak{x}_0)$、$\mathfrak{b} \in \mathrm{Ba(B)}$，且 $(\beta, \mathfrak{b}')$ 是 $\mathfrak{b}$ 的一个非国内出口，其中 $\theta(\beta) = 1$。若 $\beta\mathfrak{b}'\mathfrak{x} \in H_l^i(\mathfrak{x}_0)$，则 $\mathfrak{b}'\mathfrak{x} \in \mathrm{Cent}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B})$。

证明。由于 $\theta(\beta) = 1$，我们有 $\theta((\mathfrak{b}')^2\mathfrak{x} \mid \mathfrak{b}'\mathfrak{x}) = -1$。由于 $\beta\mathfrak{b}' \in \mathrm{Ext(B)}$，存在 $\mathfrak{b}'' \in \mathrm{Cyc(B)}$ 使得 $\beta\mathfrak{b}' \sqsubseteq_l \mathfrak{b}''$。因此，对 $\mathfrak{b}''$的适当循环置换 $\mathfrak{b}'''$，我们有 $\mathfrak{b}'''\mathfrak{b}'\mathfrak{x}$ 是一个字符串，且 $\theta(\mathfrak{b}''') = \theta(\beta) = 1$，从而证明了 $\mathfrak{b}'\mathfrak{x} \in \mathrm{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B})$。此外，$\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'\mathfrak{x}$ 是一个字符串，且 $\theta(\mathfrak{b}') = -1$，这给出 $\mathfrak{b}'\mathfrak{x} \in \mathrm{St}_{-1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B})$。最后，由于 $\delta(\mathfrak{b}') = 0$，我们有 $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'\mathfrak{x} \equiv_{\mathrm{B}} \mathfrak{b}'\mathfrak{x}$。根据命题 10.5(1)，我们得出 $\mathfrak{b}'\mathfrak{x} \in \mathrm{Cent}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B})$。□

与上述结果相反，对于任何国内 B，都不存在 B-中心 $\in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$。

命题 10.11。如果 $\mathrm{B} \in \mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{x}_0)$ 是国内型的，则 $\mathrm{Cent}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B}) = \emptyset$。

证明。若可能，设 $\mathfrak{y} \in \mathrm{Cent}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B})$。则由命题 10.5(1) 可得 $\mathfrak{b}' \in \mathrm{Cyc(B)}$，使得 $\mathfrak{b}'\mathfrak{y} \in \mathrm{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B})$ 且 $\mathfrak{b}'\mathfrak{y} \equiv_{\mathrm{B}} \mathfrak{y}$。由于 $\mathfrak{b}'\mathfrak{y} \in \mathrm{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B})$，存在 $\mathfrak{b}'' \in \mathrm{Cyc(B)}$，使得 $\theta(\mathfrak{b}') = -\theta(\mathfrak{b}'')$，从而$\mathfrak{b}''\mathfrak{b}'\mathfrak{y}$ 是一个字符串。由于 $\mathfrak{b}', \mathfrak{b}'' \in \mathrm{Ext(B)}$，对于某个字符串 $\mathfrak{u}$，$\mathfrak{b}'\mathfrak{u}\mathfrak{b}''$ 是一个字符串。由于 B 是国内型的，且 $\mathfrak{u}\mathfrak{b}''\mathfrak{b}'$是一个混合循环字符串，我们得到 $\mathfrak{u}\mathfrak{b}''\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}_1^n$，其中 $n \in \mathbb{N}^+$ 以及 $\mathfrak{b}'$的一个循环置换 $\mathfrak{b}_1$。根据推论 4.10，我们得到 $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}_1$，这与 $\theta(\mathfrak{b}') = -\theta(\mathfrak{b}'')$ 矛盾。□

我们以以下命题结束本节。该命题是研究 B-中心集合序型的关键。

命题 10.12. 假设 $\mathrm{B} \in \mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{x}_0)$ 是非 domestic 的，且对于 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 是极小的，并且 $\mathfrak{x} <_l \mathfrak{y}$ 对于某个$\mathfrak{x} \in \mathrm{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B})$ 和 $\mathfrak{y} \in \mathrm{St}_{-1}(\overline{\mathfrak{x}_0}, i; \mathrm{B})$。那么，对于任意 $\mathfrak{z} \in \mathrm{Cent}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B})$，都存在 $\mathfrak{z}' \in \mathrm{Cent}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B})$，使得 $\mathfrak{z}' \equiv_{\mathrm{B}} \mathfrak{z}$ 并且 $\langle 1, l_{\mathrm{B}}\rangle(\mathfrak{x}) <_l \mathfrak{z}' <_l \langle 1, \overline{l}_{\mathrm{B}}\rangle(\mathfrak{y})$。

证明. 命题 9.10 给出 $\langle 1, l_{\mathrm{B}}\rangle(\mathfrak{x}) <_l \langle 1, \overline{l}_{\mathrm{B}}\rangle(\mathfrak{y})$。令 $\mathfrak{w} := \langle 1, l_{\mathrm{B}}\rangle(\mathfrak{x}) \sqcap_l \langle 1, \overline{l}_{\mathrm{B}}\rangle(\mathfrak{y})$。命题 10.5(3) 表明存在字符串 $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$，使得 $\delta(\mathfrak{z}_2) = 0, \mathfrak{z}_2 \in \mathrm{Ext(B)}$，$\mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_1 \in \mathrm{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B})$ 并且 $\mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_1 \equiv_{\mathrm{B}} \mathfrak{z}$。

根据命题 9.9，令 $\langle 1, l_{\mathrm{B}}\rangle(\mathfrak{x}) = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}_1\mathfrak{x}$，其中 $\mathfrak{b} \in \mathrm{Ba}_l\mathrm{(B)}$，且 $\mathfrak{u}_1$ 是某个字符串。由于$\theta({}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}_1\mathfrak{x} \mid \mathfrak{w}) = -1$，存在 $n \in \mathbb{N}^+$ 使得 $\theta(\mathfrak{b}^n\mathfrak{u}_1\mathfrak{x} \mid \mathfrak{w}) = -1$。由于 $\mathfrak{b} \in \mathrm{Ba}_l\mathrm{(B)}$，考虑 $\mathfrak{b}$ 的一个出口 $(\beta, \mathfrak{b}')$。存在一个字符串 $\mathfrak{u} \sqsubset_l \mathfrak{b}$，使得 $\beta\mathfrak{b}'\mathfrak{u}\mathfrak{b}$ 是一个字符串。由于 $\beta\mathfrak{b}', \mathfrak{z}_2 \in \mathrm{Ext(B)}$，存在一个字符串 $\mathfrak{v}$，使得 $\mathfrak{z}_2\mathfrak{v}\beta\mathfrak{b}'$ 是一个字符串。现在，$\delta(\mathfrak{b}') = 0$ 蕴含 $\mathfrak{z}' := \mathfrak{z}_2\mathfrak{v}\beta\mathfrak{b}'\mathfrak{u}\mathfrak{b}^n\mathfrak{u}_1\mathfrak{x}$ 是一个字符串，$\mathfrak{z}' \in \mathrm{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B})$，且 $\mathfrak{z}' \equiv_{\mathrm{B}} \mathfrak{z}$。由于 $\theta(\mathfrak{b}^n\mathfrak{u}_1\mathfrak{x} \mid \mathfrak{w}) = -1$，我们得到 $\theta(\mathfrak{z}' \mid \mathfrak{w}) = -1$。此外，$\theta(\beta) = 1$ 蕴含 $\theta({}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}_1\mathfrak{x} \mid \mathfrak{z}') = -1$。因此，我们有 $\langle 1, l_{\mathrm{B}}\rangle(\mathfrak{x}) <_l \mathfrak{z}' <_l \mathfrak{w} <_l \langle 1, \overline{l}_{\mathrm{B}}\rangle(\mathfrak{y})$，从而完成证明。□

11. Computation of the order type of hammocks

至此，我们已经收集了证明主要结果（定理 11.9）所需的大部分要素，并将在本节完成其证明。此外，我们还将证明一个部分逆命题，并讨论该逆命题在完全一般的情形下是否可能成立。

由于相对于 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 无带的字符串只有有限多个，回顾推论 6.6：若 $\mathrm{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 是 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 的极小对象，则对每个$j \in \{-1, 1\}$，$\mathrm{St}j(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B}) \setminus \mathrm{St}j(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B})$ 中的字符串只有有限多个。经过简单的集合论运算可得

$$\overline{\mathrm{St}}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B}) \setminus \mathrm{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B}) \subseteq (\overline{\mathrm{St}}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B}) \setminus \mathrm{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B})) \cup (\overline{\mathrm{St}}_{-1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B}) \setminus \mathrm{St}_{-1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B})),$$

因此，$\mathrm{St}_{\pm 1}\overline{(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B})} \setminus \mathrm{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B})$ 是有限集。下面的命题表明，当 B 是 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 的极小对象时，集合 $\mathrm{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B}) \setminus \mathrm{Cent}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B})$ 也是有限的。

命题 11.1. 若 $\mathrm{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 对于 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 是极小的，且 $\mathfrak{x} \in \mathrm{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B}) \setminus \mathrm{Cent}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B})$，则 $\mathfrak{x}$ 相对于 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 是无带的。

证明。若 $\mathfrak{x} \in \mathrm{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B}) \setminus \mathrm{Cent}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B})$，使得 $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2\mathfrak{b}\mathfrak{x}_1$ 对某个 $\mathfrak{b} \in \mathrm{Cyc(B)}$ 成立，则我们有 $\mathfrak{x} \equiv_{\mathrm{B}} \mathfrak{x}_2\mathfrak{b}^2\mathfrak{x}_1$，这由命题 10.5(2) 推出 $\mathfrak{x} \in \mathrm{Cent}(\mathfrak{x}_0, i; \mathrm{B})$，矛盾。这证明了 $\mathfrak{x}$ 相对于 B 是无带的。因此，如果 $\mathrm{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 对于 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 是极小的，那么 $\mathfrak{x}$ 相对于 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 是无带的。□

由于

$$\overline{\mathsf{St}}_{\pm1}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})\setminus \mathrm{Cent}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})=(\overline{\mathsf{St}}_{\pm1}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})\setminus \mathsf{St}_{\pm1}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B}))\cup(\mathsf{St}_{\pm1}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})\setminus \mathrm{Cent}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})),$$

我们得到，$\mathsf{St}_{\pm1}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})\setminus \mathsf{Cent}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})$ 中只有有限多个字符串。这个观察有助于我们将线性序 $(\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B}),<_l)$ 分解为有限多个“不可约”区间。

定义 11.2. 设 $\mathsf{B}\in\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 对 $(\mathfrak{x}_0,i)$ 是极小的。称 $H^i_l(\mathfrak{x}_0)$ 中的一个区间 $[\mathfrak{x},\mathfrak{y}]$ 为 B-束，如果 $\mathfrak{x},\mathfrak{y}\in\overline{\mathsf{St}_{\pm1}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})}\setminus\mathsf{Cent}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})$，$\mathfrak{x}<_l\mathfrak{y}$ 且 $(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\cap\overline{\mathsf{St}_{\pm1}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})}\subseteq\mathsf{Cent}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})$。

由于当 $\mathsf{B}\in\overline{\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}}$ 对 $(\mathfrak{x}_0,i)$ 是极小时，集合 $\mathsf{St}_{\pm1}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})\setminus\mathsf{Cent}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})$ 是有限的，因此我们得到有限多个 B-束。令 n_{B} 表示 B- 束的数量。

若 $\mathsf{B}\in\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 是 $(\mathfrak{x}_0,i)$ 的极小集合，且 $\mathfrak{y}_0<_l\mathfrak{y}_1<_l\cdots<_l\mathfrak{y}_{n_{\mathsf{B}}}$ 是 $\mathsf{St}_{\pm1}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})\setminus\overline{\mathsf{Cent}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})}$ 中元素的完备列表，则

$$(H^i_l(\mathfrak{x}_0),<_l)=[\mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0),\mathfrak{y}_0]\dotplus[\mathfrak{y}_0,\mathfrak{y}_1]\dotplus\cdots\dotplus[\mathfrak{y}_{n_{\mathsf{B}}-1},\mathfrak{y}_{n_{\mathsf{B}}}]\dotplus[\mathfrak{y}_{n_{\mathsf{B}}},\mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)],\tag{11.1}$$

其中每个 $[\mathfrak{y}_j,\mathfrak{y}_{j+1}]$ 都是一个 B-束。

根据注 7.2，我们有

$$(c_{\mathsf{B}}(H^i_l(\mathfrak{x}_0)),<_l)=c_{\mathsf{B}}([\mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0),\mathfrak{y}_0])\dotplus c_{\mathsf{B}}([\mathfrak{y}_0,\mathfrak{y}_1])\dotplus\cdots\dotplus c_{\mathsf{B}}([\mathfrak{y}_{n_{\mathsf{B}}-1},\mathfrak{y}_{n_{\mathsf{B}}}])\dotplus c_{\mathsf{B}}([\mathfrak{y}_{n_{\mathsf{B}}},\mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)]).\tag{11.2}$$

例 11.3。继续例 5.7，由于 B_1 是 $(a_0,1)$ 的极小集合，方程 (11.1) 可写为

$$H^1_l(a_0)=[a_0,a_0]\dotplus[a_0,a_3A_1a_0]\dotplus[a_3A_1a_0,A_1a_0]\dotplus[A_1a_0,H_1G_1FE_2E_1A_2A_1a_0].\tag{11.3}$$

而等式 (11.2) 可写为

$$c_{\mathsf{B}_1}(H^1_l(a_0))=c_{\mathsf{B}_1}([a_0,a_3A_1a_0])\dotplus c_{\mathsf{B}_1}([a_3A_1a_0,A_1a_0])\dotplus c_{\mathsf{B}_1}([A_1a_0,H_1G_1FE_2E_1A_2A_1a_0]).\tag{11.4}$$

命题 11.4。集合 $c_{\mathsf{B}}([\mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0)\ \mathfrak{y}_0])$ 和 $c_{\mathsf{B}}([\mathfrak{y}_{n_{\mathsf{B}}},\mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)])$ 是有限的。

证明。不妨设 $i=-1$。回顾命题 6.12 的证明，$\mathfrak{y}_{n_{\mathsf{B}}}=\mathfrak{x}_0=\mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)$，因此 $|[\mathfrak{y}_{n_{\mathsf{B}}},\mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)]|=1$。另一方面，同一证明将 $\mathfrak{y}_0$ 描述为 $\mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0)$ 中属于 $\mathsf{St}_{\pm1}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})$ 的最长左子串。因此，$\mathfrak{z}\in c_{\mathsf{B}}([\mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0)\ \mathfrak{y}_0])$ 当且仅当 $\mathfrak{y}_0\sqsubseteq_l\mathfrak{z}\sqsubseteq_l\mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0)$。由于 $\mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0)$ 只有有限个左子串，证明完毕。□

回顾 注记 10.2，集合 $\mathsf{St}_{\pm1}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})/\equiv_{\mathsf{B}}$ 是有限的。令 $k_{\mathsf{B}}:=|\mathsf{Cent}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})/\equiv_{\mathsf{B}}|$。命题 10.10 和 10.11 共同推出，$k_{\mathsf{B}}=0$ 当且仅当 B 是国内型的。 s

下一个结果是命题 10.12 的推论，该命题计算了 B-束内 B-中心子序的序型。

推论 11.5. 若 $\mathsf{B}\in\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 对 $(\mathfrak{x}_0,i)$ 是极小的，且 $[\mathfrak{x},\mathfrak{y}]$ 是一个 B-束，则

$$(\mathrm{Cent}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})\cap[\mathfrak{x},\mathfrak{y}],<_l)\cong\Xi(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{k_{\mathsf{B}}\ times}).$$

证明。由于 $H^i_l(\mathfrak{x}_0)$ 是可数的，集合 $\mathsf{Cent}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})\cap[\mathfrak{x},\mathfrak{y}]$ 也是可数的。若 B 是国内型，则命题 10.11 表明两侧都是空线性序。另一方面，若 B 是非 domestic，则命题 10.10 表明 $\mathsf{Cent}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})\neq\emptyset$。因此，只需证明每个 B-中心的 B-等价类都以非空、无界且稠密的方式与束 $[\mathfrak{x},\mathfrak{y}]$ 相交。令 $\mathfrak{w}\in\mathsf{Cent}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})$。非空：由于 $\mathfrak{x}\in\mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})$ 且 $\mathfrak{y}\in\mathsf{St}_{-1}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})$，将命题 10.12 应用于 $\mathfrak{x}<_l\mathfrak{y}$，可得 $\mathfrak{z}\in\mathsf{Cent}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})\cap(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$，使得 $\mathfrak{z}\equiv_{\mathsf{B}}\mathfrak{w}$。无界：令 $\mathfrak{z}\in\mathsf{Cent}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})\cap(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$。由于 $\mathfrak{z}\in\mathsf{St}_{\pm1}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})$，将命题 10.12 分别应用于 $\mathfrak{x}<_l\mathfrak{z}$ 和 $\mathfrak{z}<_l\mathfrak{y}$，可保证分别存在 $\mathfrak{z}_1\in\mathsf{Cent}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})\cap(\mathfrak{z},\mathfrak{y})$ 和 $\mathfrak{z}_2\in\mathsf{Cent}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})\cap(\mathfrak{x},\mathfrak{z})$，使得 $\mathfrak{z}_1\equiv_{\mathsf{B}}\mathfrak{z}_2\equiv_{\mathsf{B}}\mathfrak{w}$。稠密：若 $\mathfrak{z}_1,\mathfrak{z}_2\in\mathsf{Cent}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})\cap(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$，则将命题 10.12 应用于 $\mathfrak{z}_1<_l\mathfrak{z}_2$，可得 $\mathfrak{z}_3\in\mathsf{Cent}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})\cap(\mathfrak{z}_1,\mathfrak{z}_2)$，使得 $\mathfrak{z}_3\equiv_{\mathsf{B}}\mathfrak{w}$。

□

命题 11.6. 设 $\mathsf{B}\in\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 对于 $(\mathfrak{x}_0,i)$ 是极小的。若 $\mathfrak{x}\in\mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})$，则存在 $\mathfrak{y}\in\mathsf{St}_{\pm1}(\mathfrak{x}_0,i;\mathsf{B})$ 和 $n\in\overline{\mathbb{N}}$，使得 $l^n_{\mathsf{B}}(\mathfrak{y})=\mathfrak{x}$。

证明. 根据命题 9.9，设 $\langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{x}) =: {}^{\infty}\mathfrak{bux}$，其中 $\mathfrak{u}$ 是某个字符串，且 $\mathfrak{b} \in \mathrm{Ba}_l(\mathsf{B})$。考虑满足 $\langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{y}) = {}^{\infty}\mathfrak{bux}$ 的最短字符串 $\mathfrak{y} \in \mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。我们断言 $\mathfrak{y} \in \mathsf{St}_{-1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。

If $\mathfrak{y} \in \overline{\mathsf{St}}_{-1}(\mathsf{B})$ th那么我们是 done. Oth否则，鉴于 o f 备注 k 6.1，我们需要 d to show th在 $\mathfrak{y} \sqsubseteq_l \mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0)$.

若可能，令 $\mathfrak{x}_0 \sqsubseteq_l \mathfrak{z} \sqsubset_l \mathfrak{y}$ 为一个字符串，使得 $\theta(\mathfrak{y} \mid \mathfrak{z}) = 1$。不失一般性，取 $\mathfrak{z}$ 为满足条件的最长字符串。于是 $\mathfrak{y} = \mathfrak{w}\alpha\mathfrak{z}$，其中 $\alpha \in Q_1^-$，且 $\mathfrak{w}$ 满足 $|\mathfrak{w}| = 0$ 或 $\delta(\mathfrak{w}) = -1$。显然，$\mathfrak{z} \in \mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，且 $\mathfrak{y} \sqsubseteq_l l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{z})$。

若 $\mathfrak{y} \sqsubset_l l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{z})$，则存在 $\beta \in Q_1$ 使得 $l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{z}) \sqsupseteq_l \beta\mathfrak{y} \in \mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。因此 $\mathfrak{y} \in \mathsf{St}_{-1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。由于 $\delta(l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{z})) = 0$，根据注 6.1，我们得到 $l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{z}) \in \mathsf{St}_1(\mathsf{B})$，这意味着 $\mathfrak{y} \in \mathsf{St}_{-1}(\mathsf{B})$，与我们的假设矛盾。另一方面，若 $\mathfrak{y} = l_{\mathsf{B}}(\mathfrak{z})$，则 $\langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{y}) = \langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{z})$，这与 $|\mathfrak{y}|$ 的极小性矛盾。

因此，不存在任何满足 $\mathfrak{x}_0 \sqsubseteq_l \mathfrak{z} \sqsubset_l \mathfrak{y}$ 且 $\theta(\mathfrak{y} \mid \mathfrak{z}) = 1$ 的字符串 $\mathfrak{z}$，由此得到 $\mathfrak{y} \sqsubseteq_l \mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0)$。

最后，由于 $\mathfrak{y} \sqsubseteq_l \mathfrak{x}$ 且 $\theta(\langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{y}) \mid \mathfrak{x}) = 1$，根据注 8.9，我们有 $l_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{y}) = \mathfrak{x}$。至此证明完成。□

命题 11.6 及其对偶可用于定义另一个凝缩算子

$$C_B : \overline{\mathsf{St}}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \to \overline{\mathsf{St}}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}).$$

下一个结果表明，C_{B} 与等式 (11.2) 给出的划分相容。

命题 11.7. 若 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 对于 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 是极小的，$[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}]$ 是一个 B-束，且 $\mathfrak{z} \in c_{\mathsf{B}}([\mathfrak{x}, \mathfrak{y}])$，则 $C_{\mathsf{B}}(\mathfrak{z}) \in [\mathfrak{x}, \mathfrak{y}]$。证明. 不失一般性，假设 $\mathfrak{z} \in \mathsf{St}_1(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。那么命题 11.6 给出某个 $n \in \mathbb{N}$，使得 $l_{\mathsf{B}}^n(C_{\mathsf{B}}(\mathfrak{z})) = \mathfrak{z}$。简记 $\mathfrak{w} := C_{\mathsf{B}}(\mathfrak{z})$，于是 $\mathfrak{w} \leq_l \mathfrak{z}$。我们断言 $\mathfrak{w} \in [\mathfrak{x}, \mathfrak{y}]$。

现在，$\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{z}) = 0$ 当且仅当 $\mathfrak{w} = \mathfrak{z}$。另一方面，若 $\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{z}) = 1$，则假设该断言不成立，即假设 $\mathfrak{w} <_l \mathfrak{x} <_l \mathfrak{z}$。显然，$\mathfrak{w} \sqsubset_l \mathfrak{z}$。令 $\mathfrak{v} := \mathfrak{w} \sqcap_l \mathfrak{x}$。分两种情况讨论。

若 $\mathfrak{v} \sqsubset_l \mathfrak{w}$，则 $\mathfrak{w} \sqsubset_l \mathfrak{z}$ 推出 $\theta(\mathfrak{z} \mid \mathfrak{x}) = \theta(\mathfrak{z} \mid \mathfrak{v}) = -1$，这与 $\mathfrak{x} <_l \mathfrak{z}$ 矛盾。

另一方面，若 $\mathfrak{v} = \mathfrak{w}$，则有 $\mathfrak{w} \sqsubset_l \mathfrak{x}$ 和 $\mathfrak{w} \sqsubset_l \mathfrak{z}$。因此，$\mathfrak{w} \sqsubset_l \mathfrak{x} \sqcap_l \mathfrak{z}$。若 $\mathfrak{x} \sqcap_l \mathfrak{z} = \mathfrak{x}$，则由注记 9.6 可得，对于某个 $k \in \mathbb{N}^+$，有 $l_{\mathsf{B}}^k(\mathfrak{w}) = \mathfrak{x}$；这与命题 9.3 矛盾，因为 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_{-1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。因此，$\mathfrak{x} \sqcap_l \mathfrak{z} \sqsubset_l \mathfrak{x}$。若 $\mathfrak{x} \sqcap_l \mathfrak{z} = \mathfrak{z}$，则 $\mathfrak{z} \sqsubset_l \mathfrak{x}$ 与 $\theta(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{z}) = -1$ 共同推出，根据注记 6.3，$\mathfrak{z} \in \mathsf{St}_{-1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，这与 $\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{z}) = 1$ 矛盾。另一方面，若 $\mathfrak{x} \sqcap_l \mathfrak{z} \sqsubset_l \mathfrak{z}$，则 $\mathfrak{w} \sqsubset_l \mathfrak{x} \sqcap_l \mathfrak{z}$ 与 $\theta(\mathfrak{z} \mid \mathfrak{x} \sqcap_l \mathfrak{z}) = 1$ 共同推出，对于某个 $k \in \mathbb{N}^+$，由注记 9.6 可得 $l_{\mathsf{B}}^k(\mathfrak{w}) = \mathfrak{x} \sqcap_l \mathfrak{z} \in \mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，这与命题 9.3 矛盾。

根据 B-束的定义，有 $\mathfrak{w} \in \mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \cap [\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] = (\mathsf{Cent}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \cup \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}) \cap [\mathfrak{x}, \mathfrak{y}]$。

对偶地，我们可以证明，若 $\mathfrak{z} \in \overline{\mathsf{St}}_{-1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，则存在 $\mathfrak{w} \in \mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \cap [\mathfrak{x}, \mathfrak{y}] = (\mathsf{Cent}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \cup \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}) \cap [\mathfrak{x}, \mathfrak{y}]$，使得 $\overline{l}^n{}_{\mathsf{B}}(\mathfrak{w}) = \mathfrak{z}$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立。□

利用等式 (11.2) 以及命题 11.4、11.5、11.7，可以计算 B-束的 B-凝缩的序型，进而计算 $\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 的序型。

推论 11.8。设 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 对 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 是极小的。若 $[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}]$ 是一个 B-束，则

$$(c_{\mathsf{B}}([\mathfrak{x}, \mathfrak{y}]), <_l) \cong \omega + \Xi(\underbrace{\zeta, \zeta, \cdots, \zeta}_{k_{\mathsf{B}}\ times}) + \omega^*.$$

因此，

$$(c_{\mathsf{B}}(H_l^i(\mathfrak{x}_0)), <_l) \cong (\omega + \Xi(\underbrace{\zeta, \zeta, \cdots, \zeta}_{k_{\mathsf{B}}\ times}) + \omega^*) \cdot \mathbf{n}_{\mathsf{B}}.$$

回顾 $\mathcal{I}_{(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})}(\mathfrak{x})$ 在 $\mathfrak{x} \in \mathsf{Cent}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 中的定义。若 B 对于 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 是极小的，我们可以将此定义扩展到所有 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，如下所示：

$$\mathcal{I}_{(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})}(\mathfrak{y}_k) := \begin{cases} [\mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0), \mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)] & \text{if } 0 = k = n_{\mathsf{B}}, \\ [\mathfrak{m}_i(\mathfrak{x}_0), \langle 1, \ell_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{y}_0)) & \text{if } 0 = k < n_{\mathsf{B}}, \\ (\langle 1, \overline{\ell}_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{y}_0), \mathfrak{M}_i(\mathfrak{x}_0)] & \text{if } 0 < k = n_{\mathsf{B}}, \\ (\langle 1, \overline{\ell}_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{y}_k), \langle 1, \ell_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{y}_k)) & \text{if } 0 < k < n_{\mathsf{B}}. \end{cases}$$

令 $\mathsf{c}_{\mathsf{B}} := C_{\mathsf{B}} \circ c_{\mathsf{B}}$。显然可验证，对于每个 $\mathfrak{x} \in \mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，都有 $\mathsf{c}^{-1}{}_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x}) = \mathcal{I}_{(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})}(\mathfrak{x})$。Thu s

$$H_l^i(\mathfrak{x}_0) \cong \sum_{\mathfrak{x} \in \overline{\mathsf{St}}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})} \mathbf{c}_{\mathsf{B}}^{-1}(\mathfrak{x}) \cong \sum_{\mathfrak{x} \in \overline{\mathsf{St}}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})} \mathcal{I}_{(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})}(\mathfrak{x}). \tag{11.5}$$

现在，我们已经具备证明本文主要结果所需的一切工具。

定理 11.9。给定字符串 $\mathfrak{r}_0$ 和奇偶性 $i \in \{1,-1\}$，我们有 $(H_l^i(\mathfrak{r}_0) <_l) \in \mathrm{dLO}_{\mathrm{fd}}^{11}$.

证明。该证明对 $\mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{r}_0)$ 的大小使用归纳法；根据命题 5.6，它是一个有限偏序集。

Base Step. I f $\mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{r}_0) = \emptyset$ then the 字符串 in $H_l^i(\mathfrak{r}_0)$ are band-f^{ree re} l相对于 $(^{\mathfrak{r}_0,\ i})$，这意味着 l即 $H_l^i(\mathfrak{r}_0)$ 鉴于推论 4.8，它是有限的。因此 $H^i{}_l(\mathfrak{r}_0) \in \mathrm{dLO}_{\mathrm{fd}}^{11}$.

归纳步骤。假设 $\mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{r}_0) \neq \emptyset$，并且对任意 $\mathfrak{x} \in \mathrm{St}(\Lambda)$ 以及满足 $|\mathcal{Q}_j^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{x})| \lhd \mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{r}_0)|$ 的 $j \in \{1,-1\}$，我们有 $H_l^j(\mathfrak{x}) \in \mathrm{dLO}_{\mathrm{fd}}^{11}$。

由于 $\mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{r}_0) \neq \emptyset$，选取一个对于 $(\mathfrak{r}_0, i)$ 为极小的 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$。于是引理 7.8 给出

$$(H_l^i(\mathfrak{r}_0), <_l) \cong \sum_{\mathfrak{x} \in c_{\mathsf{B}}(H_l^i(\mathfrak{r}_0))} (H_l^{-\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})}(\mathfrak{x}), <_l).$$

若 $\mathfrak{x} \in c_{\mathsf{B}}(H_l^i(\mathfrak{r}_0)) \subseteq H_l^i(\mathfrak{r}_0)$，则 $\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}_{-\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})}(\mathfrak{x}) \subseteq \mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{r}_0)$。此外，对于任意这样的 $\mathfrak{x}$，根据注 7.5，我们有 $\mathsf{B} \notin \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}_{-\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})}(\mathfrak{x})$，因此 $\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}_{-\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})}(\mathfrak{x}) \subsetneq \mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{r}_0)$。所以由归纳假设，对于每个 $\mathfrak{x} \in c_{\mathsf{B}}(H_l^i(\mathfrak{r}_0))$，我们得到$H^{-\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})}{}_l(\mathfrak{x}) \in \mathrm{dLO}_{\mathrm{fd}}^{11}$。

鉴于等式 (11.2)、命题 7.6，以及对每个$0 \leq p \leq n_{\mathsf{B}}$都有 $H^{-\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{y}_p)}{}_l(\mathfrak{y}_p) = H_l^0(\mathfrak{y}_p) = \{\mathfrak{y}_p\}$，我们可以写成

$$H_l^i(\mathfrak{r}_0) = \widetilde{L}_0 \dotplus \widetilde{L}_1 \dotplus \cdots \dotplus \widetilde{L}_{n_{\mathsf{B}}+1},$$

其中

$$\widetilde{L}_k := \begin{cases} \sum_{\mathfrak{x} \in [\mathfrak{m}_i(\mathfrak{r}_0), \mathfrak{y}_0]} (H_l^{-\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})}(\mathfrak{x}), <_l) & \text{if } k = 0, \\ \sum_{\mathfrak{x} \in [\mathfrak{y}_{k-1}, \mathfrak{y}_k]} (H_l^{-\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})}(\mathfrak{x}), <_l) & \text{if } 1 \leq k \leq n_{\mathsf{B}}, \\ \sum_{\mathfrak{x} \in [\mathfrak{y}_{n_{\mathsf{B}}}, \mathfrak{M}_i(\mathfrak{r}_0)]} (H_l^{-\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})}(\mathfrak{x}), <_l) & \text{if } k = n_{\mathsf{B}}+1. \end{cases}$$

由于 $\mathrm{dLO}_{\mathrm{fd}}^{11}$ 中线性序的有限序和属于 $\mathrm{dLO}_{\mathrm{fd}}^{11}$，利用归纳假设和命题 11.4，我们得到 $\widetilde{L}_0, \widetilde{L}_{n_{\mathsf{B}}+1} \in \mathrm{dLO}_{\mathrm{fd}}^{11}$。我们将利用引理 2.4 证明，对于$1 \leq k \leq n_{\mathsf{B}}$，$\widetilde{L}_k \in \mathrm{dLO}_{\mathrm{fd}}^{11}$。

命题 11.7 表明 $c_{\mathsf{B}}([\mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_1]) = [\mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_1] \cap \mathrm{St}(\mathfrak{r}_0, i; \mathsf{B})^{\overline{\ }} \cong (\omega + \Xi(\zeta, \zeta, \cdots, \zeta) + \omega^*)$。其证明与$\underbrace{\qquad}_{k_{\mathsf{B}} \text{ 次}}$

结合等式 (11.5) 可帮助我们写出

$$\widetilde{L}_1 = \overline{L}_1 + \overline{L}_2 + \overline{L}_3,$$

其中

$$\begin{aligned} \overline{L}_1 &:= \mathcal{I}_{(\mathfrak{r}_0, i; \mathsf{B})}(\mathfrak{y}_0) \cap [\mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_1] = \sum_{n \in \omega} H_l^{-\varphi_{\mathsf{B}}(l_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{y}_0))}(l_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{y}_0)), \\ \overline{L}_2 &:= \sum_{\mathfrak{x} \in \mathrm{Cent}(\mathfrak{r}_0, i; \mathsf{B}) \cap [\mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_1]} \mathcal{I}_{(\mathfrak{r}_0, i; \mathsf{B})}(\mathfrak{x}) \\ &= \sum_{\mathfrak{x} \in \mathrm{Cent}(\mathfrak{r}_0, i; \mathsf{B}) \cap [\mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_1]} \left(\sum_{n \in \omega^*,\, n \neq 0} H_l^{-\varphi_{\mathsf{B}}(\overline{l}_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{x}))}(\overline{l}_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{x})) + \sum_{n \in \omega} H_l^{-\varphi_{\mathsf{B}}(l_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{x}))}(l_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{x})) \right), \\ \overline{L}_3 &:= \mathcal{I}_{(\mathfrak{r}_0, i; \mathsf{B})}(\mathfrak{y}_1) \cap [\mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_1] = \sum_{n \in \omega^*} H_l^{-\varphi_{\mathsf{B}}(\overline{l}_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{y}_1))}(\overline{l}_{\mathsf{B}}^n(\mathfrak{y}_1)). \end{aligned}$$

设 $\{\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_{k_{\mathsf{B}}}\}$ 是 $\mathrm{Cent}(\mathfrak{r}_0, i; \mathsf{B}) \cap [\mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_1]$ 中不同 B-等价类的代表元集合。命题 10.9 表明，$H_l^i(\mathfrak{r}_0)$ 中区间 $\mathcal{I}_{(\mathfrak{r}_0, i; \mathsf{B})}(\mathfrak{x}_j)$ 的序型与每个 $j \in \{1, \cdots, k_{\mathsf{B}}\}$ 所选代表元 $\mathfrak{x}_j$ 无关。因此，若 L_j 表示 $\mathcal{I}_{(\mathfrak{r}_0, i; \mathsf{B})}(\mathfrak{x}_j)$ 的序型，则

$$\overline{L}_2 \cong \Xi(L_1, \cdots, L_{k_{\mathsf{B}}}).$$

对于任意满足 $\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{z}) \neq -1$ 的字符串 $\mathfrak{z} \in c_{\mathsf{B}}([\mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_1])$，命题 9.9 保证存在一个字符串 $\mathfrak{u}$ and$\mathfrak{b} \in \mathrm{Ba}_l(\mathsf{B})$，使得 $\langle 1, l_{\mathsf{B}} \rangle(\mathfrak{z}) = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{z}$。由于 $\theta(\mathfrak{b}) = 1$，注记 9.6 给出 $s' \in \mathbb{N}$ and $p \in \mathbb{N}^+$ such that$l^{s'}\,\mathsf{B}(\mathfrak{z}) = \mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{z}$ and $l^{s'+p}\,\mathsf{B}(\mathfrak{z}) = \mathfrak{b}^2\mathfrak{u}\mathfrak{z} = \mathfrak{b}l^{s'}\,\mathsf{B}(\mathfrak{z})$。由于 $\delta(\mathfrak{b}) = 0$，我们有 $l^{s'+p}\,\mathsf{B}(\mathfrak{z}) \equiv_H l^{s'}\,\mathsf{B}(\mathfrak{z})$。由于 $\mathfrak{b} \in \mathrm{St}_1(\mathsf{B})$，注 8.9 和命题 9.5 一起推出，对每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $l^{s'+p+k}\,\mathsf{B}(\mathfrak{z}) \equiv_H l^{s'+k}\,\mathsf{B}(\mathfrak{z})$。由于对每个 $q \in \mathbb{N}^+$，$\varphi_{\mathsf{B}}(l^q\,\mathsf{B}(\mathfrak{z})) = 1$，我们得到 $H^{-\varphi_{\mathsf{B}}(l^{s'+p+k}\,\mathsf{B}(\mathfrak{z}))}{}_l(l^{s'+p+k}\,\mathsf{B}(\mathfrak{z})) \cong H^{-\varphi_{\mathsf{B}}(l^{s'+k}\,\mathsf{B}(\mathfrak{z}))}{}_l(l^{s'+k}\,\mathsf{B}(\mathfrak{z}))$。可以证明一个对偶结果

对于满足 $\varphi_{\mathsf{B}}(\mathfrak{z}) \neq 1$ 的 $\mathfrak{z} \in c_{\mathsf{B}}([\mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_1])$。由此我们证明了引理 2.4 的所有假设均得到满足，因此可得 $\widetilde{L}_1 = \overline{L}_1 + \overline{L}_2 + \overline{L}_3 \in \mathsf{dLO}^{11}_{\mathrm{fd}}$。类似的论证表明，对每个$1 \leq k \leq n_{\mathsf{B}}$，都有 $\widetilde{L}_k \in \mathsf{dLO}^{11}_{\mathrm{fd}}$，至此证明完毕。□

例 11.10。我们计算例 5.7 中 $H^1_l(a_0)$ 的序型。接续例 11.3，回顾一下，B_1 对于 $(a_0, 1)$ 是极小且国内型的。由 B_1，的国内型性质可知 $k_{\mathsf{B}_1} = 0$，因此由推论 11.8 可得

$$c_{\mathsf{B}_1}([a_0, a_3A_1a_0]) = \sum_{k\in\omega}\{l^k_{\mathsf{B}_1}(a_0)\} + \sum_{k\in\omega^*}\{\overline{l}^k_{\mathsf{B}_1}(a_3A_1a_0)\} \cong \omega + \omega^*. \tag{11.6}$$

利用引理 7.8，我们得到

$$[a_0, a_3A_1a_0] = H^0_l(a_0) + \sum_{k\in\omega,\ k\neq 0} H^{-1}_l(l^k_{\mathsf{B}_1}(a_0)) + \sum_{k\in\omega^*,\ k\neq 0} H^1_l(\overline{l}^k_{\mathsf{B}_1}(a_3A_1a_0)) + H^0_l(a_3A_1a_0). \tag{11.7}$$

注意，对任意 $k \geq 0$ 和 $0 \leq r \leq 1$，只要 $(k, r) \neq (0, 0)$，就有 $l^{2k+r}{}_{\mathsf{B}_1}(a_0) \equiv_H l^{2+r}{}_{\mathsf{B}_1}(a_0)$。此外，对任意 $k \in \omega^*$、 $k \neq 0$，均有 $H^1_l(\overline{l}^k_{\mathsf{B}_1}(a_3A_1a_0)) = \{\overline{l}^k_{\mathsf{B}_1}(a_3A_1a_0)\}$，且 $H^{-1}_l(l_{\mathsf{B}_1}(a_0)) = \{l_{\mathsf{B}_1}(a_0)\}$。将这些代入等式 (11.7)，得到

$$[a_0, a_3A_1a_0] \cong \mathbf{1} + (\mathbf{1} + H^{-1}_l(l^2_{\mathsf{B}_1}(a_0))) \cdot \omega + \omega^*. \tag{11.8}$$

为了计算 $H^{-1}_l(l^2_{\mathsf{B}_1}(a_0))$，注意到非 domestic B_2 是 $\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}_{-1}(l^2_{\mathsf{B}_1}(a_0))$ 中唯一的元素，因此是 $(l^2_{\mathsf{B}_1}(a_0) - 1)$ 的极小元。由于 $k_{\mathsf{B}_2} = 1$，借助定理 11.9 证明的基例，对推论 11.8 应用引理 7.8，可得 $H^{-1}_l(l^2_{\mathsf{B}_1}(a_0)) \cong \omega + \Xi(\zeta) + \omega^*$，因此等式 (11.7) 可写为

$$[a_0, a_3A_1a_0] \cong \mathbf{1} + (\mathbf{1} + \omega + \Xi(\zeta) + \omega^*) \cdot \omega + \omega^* \cong (\omega + \Xi(\zeta) + \omega^*) \cdot \omega + \omega^*. \tag{11.9}$$

类似地，我们可以得到

$$[a_3A_1a_0, A_1a_0] \cong (\omega + \Xi(\zeta) + \omega^*) \cdot \omega + \omega^*. \tag{11.10}$$

再次 对等式 (11.4) 右端的最后一项应用引理 7.8，可得

$$\begin{aligned}[A_1a_0, H_1G_1FE_2E_1A_2A_1a_0] &= \{A_1a_0\} + \{A_2A_1a_0\} + \{E_1A_2A_1a_0\} + H^{-1}_l(E_2E_1A_2A_1a_0)\\ &\quad + \{FE_2E_1A_2A_1a_0\} + H^{-1}_l(G_1FE_2E_1A_2A_1a_0) + H^{-1}_l(H_1G_1FE_2E_1A_2A_1a_0).\end{aligned} \tag{11.11}$$

为了计算 $H^{-1}_l(E_2E_1A_2A_1a_0)$，注意到 B_3 是非 domestic 的，且是 $(E_2E_1A_2A_1a_0, -1)$ 的极小元。回想例 10.3， $k_{\mathsf{B}_3} = 3$。容易验证

$$\begin{aligned}&\mathcal{I}_{(E_2E_1A_2A_1a_0,-1;\mathsf{B}_3)}(G_1FE_2E_1A_2A_1a_0) \cong \mathcal{I}_{(E_2E_1A_2A_1a_0,-1;\mathsf{B}_3)}(k_1h_2H_1G_1FE_2E_1A_2A_1a_0) \cong \zeta,\\ &\mathcal{I}_{(E_2E_1A_2A_1a_0,-1;\mathsf{B}_3)}(E_2E_1e_3E_2E_1A_2A_1a_0) \cong (\omega^* + (\omega + \omega^*) \cdot \omega).\end{aligned} \tag{11.12}$$

利用等式 (11.12)、推论 11.8 和引理 7.8，我们得到

$$\begin{aligned}H^{-1}_l(E_2E_1A_2A_1a_0) &\cong \omega + \Xi(\zeta, \zeta, \omega^* + (\omega + \omega^*) \cdot \omega) + \omega^*,\\ H^{-1}_l(G_1FE_2E_1A_2A_1a_0) &\cong (\omega + \omega^*) \cdot \omega + \Xi(\zeta, \zeta, \omega^* + (\omega + \omega^*) \cdot \omega) + \omega^*,\\ H^{-1}_l(H_1G_1FE_2E_1A_2A_1a_0) &\cong \omega + \Xi(\zeta, \zeta, \omega^* + (\omega + \omega^*) \cdot \omega) + \omega^*.\end{aligned} \tag{11.13}$$

将等式 (11.13) 代入等式 (11.11)，并利用等式 (2.1)，我们得到

$$\begin{aligned}[A_1a_0, H_1G_1FE_2E_1A_2A_1a_0] &\cong \mathbf{3} + \omega + \Xi(\zeta, \zeta, \omega^* + (\omega + \omega^*) \cdot \omega) + \omega^*\\ &\quad + \mathbf{1} + (\omega + \omega^*) \cdot \omega + \Xi(\zeta, \zeta, \omega^* + (\omega + \omega^*) \cdot \omega) + \omega^*\\ &\quad + \omega + \Xi(\zeta, \zeta, \omega^* + (\omega + \omega^*) \cdot \omega) + \omega^*\\ &\cong \omega + \Xi(\zeta, \zeta, \omega^* + (\omega + \omega^*) \cdot \omega) + \omega^*.\end{aligned} \tag{11.14}$$

将等式 (11.9)、(11.10) 和 (11.14) 代入等式 (11.3)，我们得到

$$H^1_l(a_0) \cong ((\omega + \Xi(\zeta) + \omega^*) \cdot \omega + \omega^*) \cdot \mathbf{2} + \omega + \Xi(\zeta, \zeta, \omega^* + (\omega + \omega^*) \cdot \omega) + \omega^*. \tag{11.15}$$

由于定理 11.9 推广了 [10, 推论 10.14]，而后者对于 $\mathsf{dLO}^{11}_{\mathrm{fp}}$ 中的线性序在 [10, 命题 10.18] 中有一个逆命题，因此自然会问，前者的逆命题是否成立。命题 11.12 证明了该逆命题的一个特殊情形，而下一条结果对此至关重要。

命题 11.11。设 $L(\neq \mathbf{0}) \in \mathsf{dLO}_{\mathrm{fp}}$。

- 若存在 $L \in \mathsf{dLO}^{01}{}_{\mathrm{fp}}$、$L_1 \in \mathsf{dLO}^{11}{}_{\mathrm{fp}}$ 和 $L_2 \in \mathsf{dLO}^{11}{}_{\mathrm{fp}} \cup \{\mathbf{0}\}$，使得 $L \cong L_1 \cdot \omega^* + L_2$;
- 若 $L \in \mathsf{dLO}^{10}{}_{\mathrm{fp}}$，则存在 $L_2 \in \mathsf{dLO}^{11}{}_{\mathrm{fp}}$ 和 $L_1 \in \mathsf{dLO}^{11}{}_{\mathrm{fp}} \cup \{\mathbf{0}\}$，使得 $L \cong L_1 + L_2 \cdot \omega$;
- 若 $L \in \mathsf{dLO}^{00}{}_{\mathrm{fp}}$，则存在 L_1、$L_3 \in \mathsf{dLO}^{11}{}_{\mathrm{fp}}$ 和 $L_2 \in \mathsf{dLO}^{11}{}_{\mathrm{fp}} \cup \{\mathbf{0}\}$，使得 $L \cong L_1 \cdot \omega^* + L_2 + L_3 \cdot \omega$。

证明。我们使用 [1] 中的记号和结果来证明第一个结果；其余结果的证明类似。根据 [1, 命题 5.6]，回忆可知，对于任意 $L \in \mathsf{LO}_{\mathrm{fp}}$，存在 $(T, s_T) \in 3\mathsf{ST}_\omega$，使得 $\mathsf{LIN}(T, s_T) \cong L$。设对于 $n \in \mathbb{N}^+$，记号 0^n 表示 $\underbrace{00\cdots0}_{}$。容易注意到，$L$ 有最小元，当且仅当 n 次

每当 $0^n \in T$ 对某个 $n \in \mathbb{N}^+$ 成立时，则 $s_T(0^n) \neq -$。

现在，若 $L \in \mathsf{dLO}^{01}_{\mathrm{fp}}$，则选取最小的 $N(T) \in \mathbb{N}^+$，使得 $0^{N(T)} \in T$ 且 $s_T(0^{N(T)}) = -$。我们对 $N(T)$ 运用归纳法，得到所需的 L_1 和 L_2。

基础步骤（$N(T) = 1$）：令 w 为 (T, s_T) 的宽度。于是 $L \cong L_1' \cdot \omega^* + L_2'$，其中 $L_1' := \mathsf{LIN}(T_0, {}^{s}\widehat{T_0})$ 且 $L_2' := \sum_{1<k<w} \mathsf{LIN}(T_k, s_{T_k})$。若 $L_2' \neq \mathbf{0}$，则它有最大元。

若 L_1' 有最大元，则根据 L 的离散性，它也有最小元。此外，若 $L_2' \neq \mathbf{0}$，它也有最小元。因此，无论 $L_2' = \mathbf{0}$ 是否成立，我们都可以选取 $L_1 := L_1'$ 和 $L_2 := L_2'$。

另一方面，如果 $L_2' \neq \mathbf{0}$ 和 L_1' 没有最大元，那么取任意一个元素 $x \in L_1'$。由于 $L_1' \cdot \omega^*$ 是离散的，x 有一个直接后继，记作 y。因此我们可以写成 $L_1' = L_{11}' + L_{12}'$，其中 x 是 L_{11}' 的最大元，而 y 是 L_{12}' 的最小元。于是 $L \cong L_1' \cdot \omega^* + L_2 \cong (L_{12}' + L_{11}') \cdot \omega^* + (L_{12}' + L_2')$，因此 $L_1 := L_{12}' + L_{11}'$ 和 $L_2 := L_{12}' + L_2'$ 符合要求。

归纳步骤（$N(T) > 1$）：这里 $s_T(0^{N(T)-1}) = +$。注意，$N(\mathsf{EXUDE}((T, s_T); 0^{N(T)-1})) < N(T)$。此外，回想命题 6.5] 中的 [1,, $\mathsf{LIN}(\mathsf{EXUDE}((T, s_T); 0^{N(T)-1})) \cong L$。因此，将归纳假设应用于 $\mathsf{EXUDE}((T, s_T); 0^{N(T)-1})$，即可得到所需的序 L_1 和 L_2。□

命题 11.12. 若 $L_0 \in \mathsf{dLO}^{10}_{\mathrm{fp}}$、$L_1 \in \mathsf{dLO}^{00}_{\mathrm{fp}}$ 且 $L_2 \in \mathsf{dLO}^{01}_{\mathrm{fp}}$，则存在一个非国内串代数 Λ、一个适用于 Λ 的字符串 $\mathfrak{x}_0$，以及一个奇偶性 $i \in \{1, -1\}$，使得 $(H_l^i(\mathfrak{x}_0) <_l) \cong L_0 + \Xi(L_1) + L_2$。

证明。由命题 11.11 可得 L_{00}、L_{01}、L_{10}、L_{11}、L_{12}、L_{20}、$L_{21} \in \mathsf{dLO}^{11}_{\mathrm{fp}}$，使得

$$L_0 = L_{00} + L_{01} \cdot \omega,\ L_1 = L_{11} \cdot \omega^* + L_{10} + L_{12} \cdot \omega,\ \text{and}\ L_2 = L_{21} \cdot \omega^* + L_{20}.$$

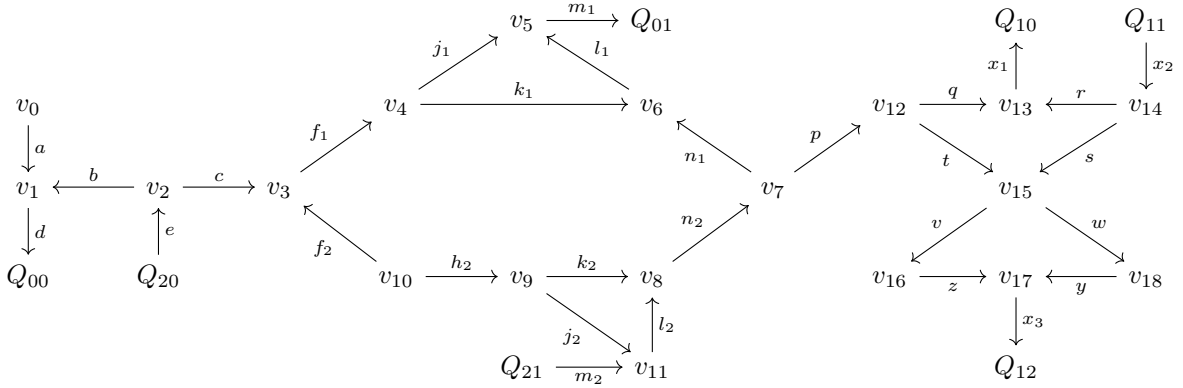

FIGURE 5. Γ''' 与 $\rho = \{db, ce, f_1f_2, j_1f_1, l_1n_1, n_1n_2, m_1j_1, k_2h_2, l_2m_2, n_2k_2, tp, x_1r, sx_2, wt, vs, x_3z\}$

考虑图 5 中的字符串代数 Γ'''，根据 [10, 命题 10.18]，我们可以为国内温和代数选取带关系的箭图 (Q_{00}, ρ_{00})、(Q_{01}, ρ_{01})、(Q_{20}, ρ_{20})、(Q_{21}, ρ_{21})、(Q_{10}, ρ_{10})、(Q_{10}, ρ_{10})、(Q_{11}, ρ_{11}) 和 (Q_{12}, ρ_{12})，使得

$$\begin{gathered} H_l^{-1}(a) \cong L_{00},\ H_l^{-1}(l_1) \cong L_{01}, \\ H_l^{-1}(q) \cong L_{10},\ H_l^1(R) \cong L_{11},\ H_l^{-1}(y) \cong L_{12}, \\ H_l^1(B) \cong L_{20}, \text{ and } H_l^1(j_2) \cong L_{21}. \end{gathered} \tag{11.16}$$

由于由 (Q_{mn}, ρ_{mn}) 给出的代数是温和代数，且 ρ 中的 Γ''' 仅由长度为 2 的路径构成，因此我们得出 Γ''' 是一个温和代数。

我们将证明，对于适当的 $j \in \{-1, 1\}$，有 $H_l^{-1}(1_{(v_0,j)}) \cong L_0 + \Xi(L_1) + L_2$。

由于 Γ''' 是温和的，对于任意满足 $|\mathfrak{u}| > 0$ 的字符串 $\mathfrak{u} \in H_l^{-1}(1_{(v_0,j)})$，我们有 $\mathfrak{u} \equiv_H \alpha$，其中 α 是 $\mathfrak{u}$ 的最后一个音节。因此，$H_l(\mathfrak{u}) \cong H_l(\alpha)$。

我们有 $\mathsf{B}_1 = \{l_1 k_1 J_1\}$ 和 $\mathsf{B}_2 = \{k_2 J_2 L_2\}$ 对 $(1_{(v_0,j)}, -1)$ 是极小的。取 B_1 为 $(1_{(v_0,j)}, -1)$ 的极小对象，我们有

$$H_l^{-1}(1_{(v_0,j)}) = [\mathfrak{m}_{-1}(1_{(v_0,j)}), a] \dotplus [a, (1_{(v_0,j)})] \cong H_l^{-1}(a) \dotplus [a, (1_{(v_0,j)})] \cong L_{00} \dotplus [a, (1_{(v_0,j)})]. \tag{11.17}$$

由于 B_1 是国内型的，利用推论 11.8，我们有

$$c_{\mathsf{B}_1}([a, 1_{(v_0,j)}]) = \sum_{k \in \omega} \{l_{\mathsf{B}_1}^k(a)\} + \sum_{k \in \omega^*} \{\overline{l}_{\mathsf{B}_1}^k(1_{v_0,j})\} \cong \omega + \omega^*. \tag{11.18}$$

将引理 7.8 应用于上述等式，

$$[a, 1_{(v_0,j)}] \cong \sum_{k \in \omega, k \neq 0} H_l^{-1}(l_{\mathsf{B}_1}^k(a)) + \sum_{k \in \omega^*, k \neq 0} H_l^1(\overline{l}_{\mathsf{B}_1}^k(1_{v_0,j})). \tag{11.19}$$

利用适当的 H-等价，我们得到

$$\begin{aligned} [a, 1_{(v_0,j)}] &\cong \{j_1 f_1 c B a\} + H_l^{-1}(l_1) \cdot \omega + H_l^1(k_1) \cdot \omega^* + H_l^1(c) + H_l^1(B) + \{a\} \\ &\cong L_{01} \cdot \omega + H_l(N_1) \cdot \omega^* + H_l^1(c) + L_{20} + \mathbf{1}. \end{aligned} \tag{11.20}$$

为计算 $H_l^1(c)$，注意到 B_2 对于 $(c, 1)$ 是极小的。利用适当的 H-等价，我们有

$$H_l^1(c) \cong \{cBa\} + H_l^{-1}(l_2) \cdot \omega + H_l^1(j_2) \cdot \omega^* \cong \mathbf{1} + H_l(n_2) \cdot \omega + L_{21} \cdot \omega^*. \tag{11.21}$$

注意到 $N_1 \equiv_H n_1$，因此 $H_l(N_1) \cong H_l(n_2) \cong H_l^{-1}(N_1)$，我们现在来计算它。

令 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}_{-1}^{\mathrm{Ba}}(1_{(v_0,j)})$ 为唯一满足 $\mathrm{Ba}_l(\mathsf{B}) = \{ywVZ\}$ 且 $\mathrm{Ba}_{\bar{l}}(\mathsf{B}) = \{qTsR\}$ 的非 domestic 元素。由于 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 对于 $(N_1, -1)$ 是极小的，且 $k_{\mathsf{B}} = 1$ 中 $\mathfrak{z} := sRqpN_1$ 是唯一 B-等价类的一个代表，因此不难验证

$$\mathcal{I}_{(N_1,-1;\mathsf{B})}(\mathfrak{z}) \cong H_l^1(R) \cdot \omega^* + H_l^{-1}(q) + H_l^{-1}(y) \cdot \omega \cong L_{11} \cdot \omega^* + L_{10} + L_{12} \cdot \omega. \tag{11.22}$$

利用推论 11.8 和引理 7.8，我们得到

$$\begin{aligned} H_l(N_1) &\cong H_l^{-1}(q) + H_l^{-1}(y) \cdot \omega + \Xi(\mathcal{I}_{(N_1,-1;\mathsf{B})}(\mathfrak{z})) + H_l^1(r) \cdot \omega^* \\ &\cong L_{10} + L_{12} \cdot \omega + \Xi(L_{11} \cdot \omega^* + L_{10} + L_{12} \cdot \omega) + L_{11} \cdot \omega^*. \end{aligned} \tag{11.23}$$

利用同构 $H_l(N_1) \cong H_l(n_1)$ 和方程 2.2，并将方程 (11.20)、(11.21) 和 (11.23) 代入方程 (11.17)，我们得到

$$\begin{aligned} H_l(1_{(v_0,j)}) &\cong L_{00} + L_{01} \cdot \omega + H_l(N_1) \cdot \omega^* + \mathbf{1} + H_l(n_2) \cdot \omega + L_{21} \cdot \omega^* + L_{20} + \mathbf{1} \\ &\cong L_{00} + L_{01} \cdot \omega + H_l(N_1) \cdot (\omega^* + \omega) + L_{21} \cdot \omega^* + L_{20} \\ &\cong L_0 + (L_{10} + L_{12} \cdot \omega + \Xi(L_{11} \cdot \omega^* + L_{10} + L_{12} \cdot \omega) + L_{11} \cdot \omega^*) \cdot (\omega^* + \omega) + L_2 \\ &\cong L_0 + \Xi(L_{11} \cdot \omega^* + L_{10} + L_{12} \cdot \omega) + L_2 \\ &\cong L_0 + \Xi(L_1) + L_2. \end{aligned} \tag{11.24}$$

这就完成了证明。 □

问题 11.13。是否存在一个非国内字符串代数 Λ、一个字符串 $\mathfrak{x}_0$ for Λ 以及一个奇偶性 $i \in \{1, -1\}$，使得 $(H_l^i(\mathfrak{x}_0) <_l) \cong \omega + \Xi((\omega + \omega^*) \cdot \omega^* + \omega, \omega^* + (\omega + \omega^*) \cdot \omega) + \omega^*$?

我们认为上述问题的答案是否定的；然而，目前我们还没有任何方法证明这一点。事实上，确定 dL $\mathsf{O}_{\mathrm{fd}}^{11}$ 中仅由字符串代数的吊床序型构成的子类，是一个有趣的问题。

12. Locating left $\mathbb{N}$-strings in the completion of a hammock

最后一节致力于计算吊床的 B-凝缩完备化的序型，并描述其中一些左 $\mathbb{N}$-字符串的位置。由此，我们用凝缩的散布子区间刻画（命题 12.7）一些几乎周期的左 $\mathbb{N}$-字符串。给定 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$，我们确定与 B 相关的 $\mathbb{N}$-St(Λ) 的两个子集。

$$\mathbb{N}\text{-St}(\mathsf{B}) := \{\mathfrak{x} \in \mathbb{N}\text{-St}(\Lambda) \mid \text{除有限多个外，}\ \mathfrak{x}\ \text{的所有左子串都属于 St(B)}\}.$$

$$\mathbb{N}\text{-}\overline{\text{St}}(\mathsf{B}) := \{\mathfrak{x} \in \mathbb{N}\text{-St}(\Lambda) \mid \text{所有真左子串都属于 St(B)}\}.$$

进一步，令 $\mathbb{N}\text{-St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) := \mathbb{N}\text{-St}(\mathsf{B}) \cap \widehat{H}^i_l(\mathfrak{x}_0)$，以及 $\mathbb{N}\text{-}\overline{\text{St}}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) := \mathbb{N}\text{-}\overline{\text{St}}(\mathsf{B}) \cap \widehat{H}^i_l(\mathfrak{x}_0)$。

以下评论显而易见。

注 12.1. 注意，$\mathbb{N}\text{-St}(\mathsf{B}) \subseteq \mathbb{N}\text{-St}(\mathsf{B})$，因此 $\mathbb{N}\text{-}\overline{\text{St}}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \subseteq \mathbb{N}\text{-St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。此外，由推论 6.7 可知，$\mathbb{N}\text{-St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) = \mathbb{N}\text{-}\overline{\text{St}}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 当且仅当 B 对于 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 是极小的。

注 12.2. 若 $\mathfrak{x} \in H^i_l(\mathfrak{x}_0) \setminus \{\mathfrak{x}_0\}$ 且 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}_j(\mathfrak{x})$，则对于任意 $j \in \{-1, 1\}$，有 $\mathbb{N}\text{-St}(\mathfrak{x}, j; \mathsf{B}) \subseteq \mathbb{N}\text{-St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，并且 $\mathbb{N}\text{-St}(\mathfrak{x}, j; \overline{\mathsf{B}}) \subseteq \mathbb{N}\text{-St}(\mathfrak{x}_0, i; \overline{\mathsf{B}})$。

现在我们证明，每个 $\widehat{H}^i_l(\mathfrak{x}_0)$ 中的左 $\mathbb{N}$-字符串，对于某个满足 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}_i(\mathfrak{x}_0)$ 的 B，都属于 $\mathbb{N}\text{-St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。

命题 12.3. 给定 $\mathfrak{x} \in \widehat{H}^i_l(\mathfrak{x}_0) \setminus H^i_l(\mathfrak{x}_0)$，存在 $\mathfrak{z} \in H^i_l(\mathfrak{x}_0)$，使得 $\mathfrak{z} \sqsubset_l \mathfrak{x}$ and $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}_i(\mathfrak{x}_0)$ 是关于 $(\mathfrak{z}, \theta(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{z}))$ 的极小元，且 $\mathfrak{x} \in \mathbb{N}\text{-St}(\mathfrak{z}, \theta(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{z}); \mathsf{B})$。

证明. 由于 $\mathfrak{x}_0 \sqsubset_l \mathfrak{x}$ and $\mathfrak{x}$ 是左 $\mathbb{N}$-字符串，存在无穷多个字符串 $\mathfrak{v}$，使得 $\mathfrak{v}\mathfrak{x}_0$ 是一个字符串。因此，根据定理 11.9 证明的基例中的观察，我们有 $\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}_i(\mathfrak{x}_0) \neq \emptyset$。

显然，若 $\mathfrak{v} \sqsubset_l \mathfrak{v}'$，则对每个 $j \in \{-1, 1\}$ 都有 $\mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}_j(\mathfrak{v}') \subseteq \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}_{\theta(\mathfrak{v}' \mid \mathfrak{v})}(\mathfrak{v})$。对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $\mathfrak{x}_n \sqsubset_l \mathfrak{x}$ 满足 $|\mathfrak{x}_n| = |\mathfrak{x}_0| + n$。因此，集合序列 $\mathcal{B}_n := \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}_{\theta(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x}_n)}(\mathfrak{x}_n)$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都满足 $\mathcal{B}_{n+1} \subseteq \mathcal{B}_n$。由于 $\mathcal{B}_0$ 是有限的，根据命题 5.6，我们得到存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对每个 $n \geq N$ 都有 $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_N$。选取 $\mathcal{B}_N$ 中关于 $\preceq$ 的一个极小元 B。这意味着 B 是关于 $(\mathfrak{x}_N, \theta(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x}_N))$ 的极小元，并且对每个 $n \geq N$ 都有 $\mathfrak{x}_n \in \mathrm{St}(\mathfrak{x}_N, \theta(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x}_N); \overline{\mathsf{B}})$。因此 $\mathfrak{x} \in \mathbb{N}\text{-St}(\mathfrak{x}_N, \theta(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x}_N); \mathsf{B})$。最后，由于 B 是关于 $(\mathfrak{x}_N, \theta(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x}_N))$ 的极小元，根据注 12.1 可得 $\mathfrak{x} \in \mathbb{N}\text{-St}(\mathfrak{x}_N, \theta(\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x}_N); \mathsf{B})$。□

回顾命题 4.5，$\mathcal{G}(H^i_l(\mathfrak{x}_0)) \cong \widehat{H}^i_l(\mathfrak{x}_0) \setminus H^i_l(\mathfrak{x}_0)$。命题 12.3 与注 12.2 使我们能够用两种方式描述后一个集合。

$$\widehat{H}^i_l(\mathfrak{x}_0) \setminus H^i_l(\mathfrak{x}_0) = \bigcup_{\substack{\mathfrak{x} \in H^i_l(\mathfrak{x}_0) \setminus \{\mathfrak{x}_0\},\ j \in \{-1,1\},\\ \mathsf{B}\ \text{is minimal for}\ (\mathfrak{x}, j)\\ j = i\ \text{if}\ \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0}} \mathbb{N}\text{-St}(\mathfrak{x}, j; \mathsf{B}), \tag{12.1}$$

$$\widehat{H}^i_l(\mathfrak{x}_0) \setminus H^i_l(\mathfrak{x}_0) = \bigsqcup_{\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}_i(\mathfrak{x}_0)} \mathbb{N}\text{-St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}). \tag{12.2}$$

方程 (12.1) 将用于确定扩展吊床 $\widehat{H}^i_l(\mathfrak{x}_0)$ 中左侧 $\mathbb{N}$-字符串的位置，而方程 (12.2) 则是 [7, 命题 2] 的推广，该命题指出，国内型字符串代数中的每个左侧 $\mathbb{N}$-字符串都是几乎周期的。

作为命题 12.3 的推论，我们证明，吊床 $H^i_l(\mathfrak{x}_0)$ 中的每个间隙都对应于 $\mathrm{St}(\mathfrak{x}, j; \mathsf{B})$ 中的一个间隙，其中某个 $\mathfrak{x} \in H^i_l(\overline{\mathfrak{x}_0})$、某种奇偶性 $j \in \{-1, 1\}$ 以及对 $(\mathfrak{x}, j)$ 极小的 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$。

命题 12.4。如果 (X, Y) 是 $H^i_l(\mathfrak{x}_0)$ 中的一个间隙，那么存在一个字符串 $\mathfrak{x} \in H^i_l(\mathfrak{x}_0)$、某种奇偶性 $j \in \{-1, 1\}$，以及对 $(\mathfrak{x}, j)$ 极小的 $B \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$，使得 $(X \cap \mathrm{St}(\mathfrak{x}, j; \mathsf{B})\ Y \cap \mathrm{St}(\mathfrak{x}, j; \mathsf{B}))$ 是 $\mathrm{St}(\mathfrak{x}, j; \mathsf{B})$ 中的一个间隙。

证明。$H^i_l(\mathfrak{x}_0)$ 中的间隙 (X, Y) 根据命题 4.5 对应于唯一的 $\mathfrak{y} \in \widehat{H}^i_l(\mathfrak{x}_0) \setminus H^i_l(\mathfrak{x}_0)$。此外，命题 12.3 给出 $\mathfrak{x} \in H^i_l(\mathfrak{x}_0)$，使得 $\mathfrak{x} \sqsubset_l \mathfrak{y}$ and B 是 $(\mathfrak{x}, \theta(\mathfrak{y} \mid \mathfrak{x}))$ 和 $\mathfrak{x} \in \mathbb{N}\text{-St}(\mathfrak{x}, \theta(\mathfrak{y} \mid \mathfrak{x}); \mathsf{B})$ 的极小值。

令 $\mathfrak{y} =: \mathfrak{z}\mathfrak{x}$ 和 $j := \theta(\mathfrak{y} \mid \mathfrak{x})$。由于集合 $\{\mathfrak{v} \in \mathrm{St}(\Lambda) : \delta(\mathfrak{v}) \neq 0\}$ 是有限的，因此在 $\mathfrak{z}$ 中存在无穷多个逆向音节和正向音节。容易看出，集合 $\{\mathfrak{v}\mathfrak{x} \in \mathrm{St}(\Lambda) : \mathfrak{v}\mathfrak{x} \sqsubset_l \mathfrak{y}, \theta(\mathfrak{y} \mid \mathfrak{v}\mathfrak{x}) = 1\}$ 是 $X \cap \mathrm{St}(\mathfrak{x}, j; \mathsf{B})$ 的一个共尾子集，且没有最大元；集合 $\{\mathfrak{v}\mathfrak{x} \in \mathrm{St}(\Lambda) : \mathfrak{v}\mathfrak{x} \sqsubset_l \mathfrak{y}, \theta(\mathfrak{y} \mid \mathfrak{v}\mathfrak{x}) = -1\}$ 是 $Y \cap \mathrm{St}(\mathfrak{x}, j; \mathsf{B})$ 的一个共初子集，且没有最小元。因此我们得出结论：$(X \cap \mathrm{St}(\mathfrak{x}, j; \mathsf{B})\ Y \cap \mathrm{St}(\mathfrak{x}, j; \mathsf{B}))$ 是 $\mathrm{St}(\mathfrak{x}, j; \mathsf{B})$ 中的一个间隙。□

反过来，我们证明 $\mathsf{St}(\mathfrak{x}, j; \mathsf{B})$ 的每个间隙都对应于 $H_l^i(\mathfrak{x}_0)$ 中的一个间隙，其中 $\mathfrak{x} \in H_l^i(\mathfrak{x}_0)$、$j \in \{-1, 1\}$ 以及 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}_j^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{x})$，并满足如下限制：$j = i$ if $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0$。注意，对于 $(\mathfrak{x}, j)$，我们不要求 B 是极小的。

命题 12.5。设 $\mathfrak{x} \in H_l^i(\mathfrak{x}_0)$、$j \in \{-1, 1\}$ 和 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{x}_0)$。若 (X, Y) 是 $\mathsf{St}(\mathfrak{x}, j; \mathsf{B})$ 中的一个间隙，则存在唯一的 $X' \supseteq X$ 和唯一的 $Y' \supseteq Y$，使得 (X', Y') 是 $H_l^i(\mathfrak{x}_0)$ 中的一个间隙。

证明。鉴于命题 4.5，只需证明存在唯一的左 $\mathbb{N}$-字符串 $\mathfrak{y}$，使得 $X \subseteq \{\mathfrak{v} \in H_l^i(\mathfrak{x}_0) \mid \mathfrak{v} <_l \mathfrak{y}\}$ 且 $Y \subseteq \{\mathfrak{v} \in H_l^i(\mathfrak{x}_0) \mid \mathfrak{y} <_l \mathfrak{v}\}$。

通过“填补”$\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 中的间隙 (X, Y) 来获得左 $\mathbb{N}$-字符串 $\mathfrak{y}$ 的技巧，与命题 4.5 逆向部分的证明类似。请注意，得益于注记 6.3，$\mathsf{St}(\mathfrak{x}, j; \mathsf{B})$ 在 $H_l^j(\mathfrak{x})$ 中对所有子串封闭。构造 $\mathfrak{y}$ 可确保 $\mathfrak{y} \in \mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}(\mathfrak{x}, j; \mathsf{B})$。

如果 $\mathfrak{y}_1$ 和 $\mathfrak{y}_2$ 是 $\mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}(\mathfrak{x}, j; \mathsf{B})$ 中两个不同的左 $\mathbb{N}$-字符串，那么字符串 $\mathfrak{y}_3 := \mathfrak{y}_1 \sqcap_l \mathfrak{y}_2$ 位于 $\mathsf{St}(\mathfrak{x}, j; \mathsf{B})$ 中，并且处于 $(\widehat{H}_l^i(\mathfrak{x}_0) <_l)$ 中的 $\mathfrak{y}_1$ 和 $\mathfrak{y}_2$ 之间。因此，$\mathfrak{y}_1$ 和 $\mathfrak{y}_2$ 不可能对应于 $\mathsf{St}(\mathfrak{x}, j; \mathsf{B})$ 中的同一个间隙，从而证明了 $\mathfrak{y}$ 的唯一性。□

注意，命题 12.5 中产生的、对应于 $\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 中一个间隙的左 $\mathbb{N}$-字符串位于 $\mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 中。反过来，给定 $\mathfrak{x} \in \mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，命题 12.4 中使用的技术会在 $\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 中产生一个间隙。

推论 12.6。假设 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{x}_0)$。那么 $\mathcal{C}(\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})) \cong \mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \sqcup \mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。特别地，如果 B 对于 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 是极小的，那么根据注 12.1，$\mathcal{C}(\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})) \cong \mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \sqcup \mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。

作为上述推论的结果，映射 $c_{\mathsf{B}} \colon H_l^i(\mathfrak{x}_0) \to \mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 可以扩展为映射 $\widehat{H}_l^i(\mathfrak{x}_0) \to \mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \sqcup \mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，我们仍将其记作 c_{B}；其中 $c_{\mathsf{B}}(\mathfrak{x})$ 是 $\mathfrak{x}$ 中最长的左（可能带左$\mathbb{N}$-）子串，且该子串属于 $\mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \sqcup \mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。因此，$\mathcal{C}(\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}))$ 是通过复合映射对 $\mathcal{C}(H_l^i(\mathfrak{x}_0))$ 的一种凝缩

$$\mathcal{C}(H_l^i(\mathfrak{x}_0)) \xrightarrow{\cong} \widehat{H}_l^i(\mathfrak{x}_0) \xrightarrow{c_{\mathsf{B}}} \mathbb{N}\text{-}\overline{\mathsf{St}}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \sqcup \overline{\mathsf{St}}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}(\overline{\mathsf{St}}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})).$$

命题 12.4 和 12.5 给出了双射

$$\mathcal{C}(H_l^i(\mathfrak{x}_0)) \cong \bigcup_{\substack{\mathfrak{x} \in H_l^i(\mathfrak{x}_0),\ j \in \{-1,1\},\\ \mathsf{B} \in \mathcal{Q}_j^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{x}),\\ j = i \text{ if } \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0}} \mathcal{C}(\overline{\mathsf{St}}(\mathfrak{x}, j; \mathsf{B})) \cong \bigcup_{\substack{\mathfrak{x} \in H_l^i(\mathfrak{x}_0),\ j \in \{-1,1\},\\ \mathsf{B} \text{ is minimal for } (\mathfrak{x}, j),\\ j = i \text{ if } \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0}} \mathcal{C}(\overline{\mathsf{St}}(\mathfrak{x}, j; \mathsf{B})). \tag{12.3}$$

公式 (12.3) 表明，要理解扩展吊床 $\widehat{H}_l^i(\mathfrak{x}_0)$ 中左 $\mathbb{N}$-字符串的位置（或等价地，$H_l^i(\mathfrak{x}_0)$ 中的间隙），只需研究 $\mathcal{C}(\mathsf{St}(\mathfrak{x}, j; \mathsf{B}))$ 的序型，其中 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 对 $(\mathfrak{x}, j)$ 而言是极小的。以下我们研究 $\mathcal{C}(\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}))$ 的序型，其中 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 对 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 而言是极小的，随后研究其中左 $\mathbb{N}$-字符串的位置。

以下结果有助于确定某种形式的几乎周期左 $\mathbb{N}$-字符串在扩展吊床 $\widehat{H}_l^i(\mathfrak{x}_0)$ 中的位置。

命题 12.7. 设 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{x}_0)$ 且 $\mathfrak{y} \in \mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。则以下陈述等价。

(1) 存在 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Ba}_l(\mathsf{B})$ 以及一个字符串 $\mathfrak{u}$，使得 $\mathfrak{y} = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x}_0$。

(2) 存在 $\mathfrak{x} \in H_l^i(\mathfrak{x}_0)$，满足 $\mathfrak{x} <_l \mathfrak{y}$，使得 $c_{\mathsf{B}}([\mathfrak{x}, \mathfrak{y})) \cong \omega$。

证明。根据命题 12.3，存在 $\mathfrak{y} \sqsupset_l \mathfrak{w} \in H_l^i(\mathfrak{x}_0)$，使得 B 对于 $(\mathfrak{w}, \theta(\mathfrak{y} \mid \mathfrak{w}))$ 是极小的，且 $\mathfrak{y} \in \mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}(\mathfrak{w}, \theta(\mathfrak{y} \mid \mathfrak{w}); \mathsf{B})$。

(1) $\Rightarrow$ (2)。由于 $\mathfrak{y} = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x}_0$，存在 $N \in \mathbb{N}^+$ 使得 $\mathfrak{w} \sqsubset_l \mathfrak{b}^N\mathfrak{u}\mathfrak{x}_0 \sqsubset_l \mathfrak{y}$。由于 $\theta(\mathfrak{b}) = 1$，注记 9.6 结合 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Ba}_l(\mathsf{B})$ 这一事实可知，对于每个 $n \geq N$，$l^{k_n}{}_{\mathsf{B}}(\mathfrak{b}^N\mathfrak{u}\mathfrak{x}_0) = \mathfrak{b}^n\mathfrak{u}\mathfrak{x}_0$，其中某个 $k_n \in \mathbb{N}$。回想命题 11.7 之前给出的 C_{B} 定义。本证明中前面的论证意味着，对每个 $n \geq N$，$C_{\mathsf{B}}(\mathfrak{b}^N\mathfrak{u}\mathfrak{x}_0) = C_{\mathsf{B}}(\mathfrak{b}^n\mathfrak{u}\mathfrak{x}_0)$。因此，$\langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(C_{\mathsf{B}}(\mathfrak{b}^N\mathfrak{u}\mathfrak{x}_0)) = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x}_0$。由注 7.5 可知，区间 $c_{\mathsf{B}}([C_{\mathsf{B}}(\mathfrak{b}^N\mathfrak{u}\mathfrak{x}_0) \ {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x}_0)) \cong \omega$。

(2) $\Rightarrow$ (1)。由于 $\mathfrak{x} <_l \mathfrak{y}$，我们有 $\theta(\mathfrak{y} \mid \mathfrak{x}) = 1$。$\mathfrak{w}$ 和 $\mathfrak{x} \sqcap_l \mathfrak{y}$ 都是 $\mathfrak{y}$ 的左子串。取 $\mathfrak{z} \sqsubset_l \mathfrak{y}$，使得 $\theta(\mathfrak{y} \mid \mathfrak{z}) = 1$，且 $\mathfrak{x} \sqcap_l \mathfrak{y} \sqsubset_l \mathfrak{z}$ 和 $\mathfrak{w} \sqsubset_l \mathfrak{z}$。显然，$\mathfrak{x} <_l \mathfrak{z} <_l \mathfrak{y}$。由于 $\mathfrak{y} \in \mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}(\mathfrak{w}, \theta(\mathfrak{y} \mid \mathfrak{w}); \mathsf{B})$，我们有 $\mathfrak{z} \in \mathsf{St}(\mathfrak{w}, \theta(\mathfrak{y} \mid \mathfrak{w}); \mathsf{B})$。因此，区间 $c_{\mathsf{B}}([\mathfrak{z}, \mathfrak{y}))$ 作为 $c_{\mathsf{B}}([\mathfrak{x}, \mathfrak{y}))$ 的无限子序，

也同构于 ω。注意，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $l_{\mathsf{B}}^{n}(\mathfrak{z}) <_l \mathfrak{y}$，因此 $\langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{z}) \leq_l \mathfrak{y}$。若 $\langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{z}) \neq \mathfrak{y}$，那么字符串 $\mathfrak{z}' := \langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{z}) \sqcap_l \mathfrak{y}$ 满足 $\langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{z}) <_l \mathfrak{z}' <_l \mathfrak{y}$，这与 $c_{\mathsf{B}}([\mathfrak{z}, \mathfrak{y})) \cong \omega$ 矛盾。因此 $\mathfrak{y} = \langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{z})$，由命题 9.9 可知，对某个 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Ba}_l(\mathsf{B})$ 以及某个字符串 $\mathfrak{v}$，有 $\mathfrak{y} = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{v}\mathfrak{z}$。由于 $\mathfrak{z} \in H_l^i(\mathfrak{x}_0)$，存在某个字符串 $\mathfrak{u}$，使得 $\mathfrak{y} = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x}_0$。□

现在我们计算 $\mathcal{C}(\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, \overline{i}; \mathsf{B}))$，其中 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}^{\mathrm{Ba}}$ 是关于 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 的极小对象，并理解间隙的位置以及与之对应的左侧 $\mathbb{N}$-字符串的形式。

当 B 是关于 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 的非 domestic 且极小对象时，推论 11.8 已计算出 $\mathsf{St}(\overline{\mathfrak{x}_0, i}; \mathsf{B})$ 的序型为 $\mathcal{O} := \omega + \zeta \cdot \eta + \omega^*$。回顾推论 3.5 可知，

$$\mathcal{C}(\mathcal{O}) \cong \omega + \mathbf{1} + \left(\sum_{r \in \lambda} T_r\right) + \mathbf{1} + \omega^*, \text{ where } T_r := \begin{cases} \mathbf{1} + \zeta + \mathbf{1} & \text{if } r \in \eta, \\ \mathbf{1} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

回顾 § 3 末尾的内容，我们将集合 $\mathcal{G}(\mathcal{O})$ 划分为 $\mathcal{G}(\mathcal{O}) = \mathcal{G}^{+}(\mathcal{O}) \sqcup \mathcal{G}^{-}(\mathcal{O}) \sqcup \mathcal{G}^{0}(\mathcal{O})$。类似地，我们将集合 $\mathbb{N}$-$\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 划分为以下三类。

$\mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}_l(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) := \{\mathfrak{x} \in \mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \mid \mathfrak{x} = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x}_0$ 对于某个 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Ba}_l(\mathsf{B})$ 以及某个字符串 $\mathfrak{u}\}$,$\mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}_{\overline{l}}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) := \{\mathfrak{x} \in \mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \mid \mathfrak{x} = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x}_0$ 对于某个 $\mathfrak{b} \in \mathsf{Ba}_{\overline{l}}(\mathsf{B})$ 以及某个字符串 $\mathfrak{u}\}$,$\mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}_0(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) := \mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \setminus (\mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}_l(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \cup \mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}_{\overline{l}}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}))$。

以下结论是推论 3.5、命题 12.7 及其对偶的直接推论，并描述了 $\mathbb{N}$-字符串在 $\mathcal{C}(\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}))$ 中的所有位置。

命题 12.8. 设 B 对 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 是非 domestic 且极小的。使用上述记号，序同构 $\mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \cup \mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \cong \mathcal{C}(\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})) \cong \mathcal{C}(\mathcal{O})$ 限制为以下序同构：

$$\mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}_l(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \cong \mathcal{G}^{+}(\mathcal{O}),\ \mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}_{\overline{l}}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \cong \mathcal{G}^{-}(\mathcal{O}) \text{ and } \mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}_0(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \cong \mathcal{G}^{0}(\mathcal{O}).$$

注记 12.9. 当 $\mathsf{B} \in \mathcal{Q}_i^{\mathrm{Ba}}(\mathfrak{x}_0)$ 是国内型且 $\mathfrak{b}$ 是 B 的唯一元素时，$\mathfrak{y} \in \mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 当且仅当存在一个字符串 $\mathfrak{u}$ 使得 $\mathfrak{y} = {}^{\infty}\mathfrak{b}\mathfrak{u}\mathfrak{x}_0$。

此外，如果 B 对 $(\mathfrak{x}_0, i)$ 是极小的，则由命题 6.7 可知集合 $\mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 是有限的。由推论 12.6 可知，$\mathcal{C}(\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})) = \mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \sqcup \mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$，因此 $\mathcal{G}(\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})) \cong \mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$。为了了解有限多个 $\mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 中元素在 $\mathcal{C}(\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}))$ 中的位置，回想推论 11.8：$\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}) \cong (\omega + \omega^*) \cdot \mathsf{n}_{\mathsf{B}}$。后者的完备化为 $(\omega + \mathbf{1} + \omega^*) \cdot \mathsf{n}_{\mathsf{B}}$（例 3.2），其中比 $\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 只多出有限个点。

最后，将命题 12.7 及其对偶应用于 $\mathcal{C}(\mathsf{St}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B}))$ 的序型显式形式，可得每个 $\mathfrak{y} \in \mathbb{N}\text{-}\mathsf{St}(\overline{\mathfrak{x}_0, i}; \mathsf{B})$ 元素都具有某个 $\mathfrak{z} \in \mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 的 $\langle 1, l_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{z})$ 形式，同时也具有某个 $\mathfrak{z}' \in \mathsf{St}_{\pm 1}(\mathfrak{x}_0, i; \mathsf{B})$ 的形式 $\langle 1, \overline{l}_{\mathsf{B}}\rangle(\mathfrak{z}')$；这与 $\mathsf{Ba}_l(\mathsf{B}) = \mathsf{Ba}_{\overline{l}}(\mathsf{B}) = \{\mathfrak{b}\}$ 相符，因为 B 是国内型的。

References

[1] Shashwat Agrawal、Amit Kuber 和 Esha Gupta。线性序类的欧几里得算法。 *arXiv:2202.04282*，2022年。[2] Sheila Brenner。有限 Auslander–Reiten 箭图的组合刻画。载于 *Proc. ICRA 4*，

Ottawa 1984 SLNM，第 – 页。

1177 13 49, 1986

[3] Esha Gupta、Amit Kuber 和 Shantanu Sardar。论某些非国内型字符串代数的稳定根。 *Algebras and*

Representation Theory 25 5 1207 1230, 2022 ，（）：–。

[4] Donald E Knuth、James H Morris, Jr 和 Vaughan R Pratt。字符串中的快速模式匹配。 *SIAM journal on computing*，6 2 323（）：–350，1977年。[5] Hans L

¨

Fundamenta Mathematicae 59 1 109 116, auchli 和

1966

John Leonard。论线性序的初等理论。，（）：–。[6] Mike Prest。有限表示模之间的态射与无限维表示。载于

Canad. Math. Soc.，第 卷，第

Conf. Proc 24, 447 455, 1998

– 页。[7] Claus Michael Ringel。若干代数紧模 I。载于 *Abelian groups and modules*，第 419–439 页。施普林格，1995 年。[8] Joseph G Rosenstein。 *Linear orderings*。学术出版社，1982年。[9] Shantanu Sardar 和 Amit Kuber。国内型字符串代数桥箭图的变体。 *arXiv:2109.06592*，2021年。[10] Shantanu Sardar 和 Amit Kuber。论国内型字符串代数吊床序型的计算。*arXiv:2210.17077*，2022年。[11] Jan Schr¨oer。 *Hammocks for string algebras*。博士论文，比勒费尔德大学（德国），1998年。

[12] Jan Schr ¨ 2000 *Proceedings of the London Mathematical Society* 81 3 651 674, oer。论模范畴的无限根。， ()：–。

VINIT SINHA 坎普尔印度理工学院，北方邦，印度 邮箱：vinitsinha20@iitk.ac.in

通讯作者：Amit Kuber 坎普尔印度理工学院，北方邦，印度 邮箱：askuber@iitk.ac.in 电话：(+91) 512 259 6721 传真：(+91) 512 259 7500

ANNOY SENGUPTA 坎普尔印度理工学院，北方邦，印度 邮箱：annoysgp20@iitk.ac.in

BHARGAV KALE 坎普尔印度理工学院，北方邦，印度 邮箱：kalebhargav@gmail.com