arXiv:2301.05964v1 [math.SP] 14 Jan 2023

高亏格双曲曲面能级的几乎必然高斯正交系综涨落

´ZEEV RUDNICK 和 IGOR WIGMAN

Abstract. 我们研究双曲曲面上拉普拉斯特征值线性统计量的方差，其中曲面在固定亏格的所有曲面的模空间中变化，并按照魏尔-彼得森测度随机抽样。最近的研究表明，在先取大亏格、再缩小能量窗口的双重极限下，该线性统计量的系综方差与随机矩阵理论中高斯正交系综（GOE）对应统计量的方差一致。本文证明，在相同的极限下，典型曲面的能量方差接近 GOE 的结果；这一特征在随机矩阵理论文献中称为“遍历性”。

1. Introduction

1.1. 结果陈述。设 X 是亏格为 $g \geq 2$ 的紧致双曲曲面，$\lambda_j = 1/4 + r_j^2$ 是 X上的拉普拉斯特征值。设$\backsim f$ 是一个测试函数，其傅里叶变换 f 是偶的、光滑且紧支撑的， $L \geq 1$， $\tau > 0$，并定义光滑线性统计量

$$N_{L,\tau}(X) := \sum_{j\geq 0} f(L(r_j - \tau)) + f(L(r_j + \tau)),$$

从而有效地统计 τ^2附近大小为 $\approx \tau/L$的窗口内的特征值，如 [10, 11, 7, 12]中所示。我们将 $N_{f,L,\tau}(X)$写成光滑项与波动项之和

$$N_{L,\tau}(X) = \overline{N} + \widetilde{N}_{L,\tau}(X),$$

其中

$$\overline{N} := 2(g-1)\int_{-\infty}^{\infty} f(L(r-\tau))r\tanh(\pi r)dr \sim \frac{2\tau(g-1)}{L}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

日期：2023年1月18日。本研究得到欧洲研究理事会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划（资助协议编号：786758）以及以色列科学基金会（资助编号：1881/20）的资助。

在 [11] 中，研究表明，对于亏格为 g 的 $\mathcal{M}_g$曲面模空间，按魏尔-彼得森测度取平均后，$N_{L,\tau}(X)$ 的方差~与随机矩阵理论中高斯正交系综（GOE）对应统计量的方差相匹配；这一结论在双重极限下成立，先取 $g\to\infty$，再取 $L\to\infty$:

$$\lim_{L\to\infty}\lim_{g\to\infty}\mathbb{E}_g^{\mathrm{WP}}\left(\left|\widetilde{N}_{L,\tau}-\mathbb{E}_g^{\mathrm{WP}}(\widetilde{N}_{L,\tau})\right|^2\right)=\Sigma^2_{\mathrm{GOE}}(f) \tag{1.1}$$

其中 $\Sigma^2_{\mathrm{GOE}}(f)=2\int_{-\infty}^{\infty}|x|\widehat{f}(x)^2dx$。

现在我们考虑能量平均。设 ω 为非负偶权函数，且经过归一化使得 $\int_{-\infty}^{\infty}\omega(x)dx=1$，其傅里叶变换 $\widehat{\omega}$ 光滑且支撑于 $[-1,1]$。对于 $T>0$，定义平均算子

$$\mathbb{E}_T[F]:=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}F(\tau)\omega\left(\frac{\tau}{T}\right)dt \tag{1.2}$$

以及相应的方差

$$\mathrm{Var}_T(F)=\mathbb{E}_T\left[\left|F-\mathbb{E}_T(F)\right|^2\right]. \tag{1.3}$$

~记 $\mathcal{V}_{T,L}(X)$ 为 $N_{L,\tau}(X)$ 的能量方差，并将其视为定义在 $\mathcal{M}_g$ 上的随机变量:

$$\mathcal{V}_{T,L}(X):=\mathrm{Var}_T(\widetilde{N}_{L,\tau}(X)).$$

根据 Berry [1], 的观点，人们相信，对于一般曲面[1] $X\in\mathcal{M}_g$，当亏格[2] $g>2$固定时，能量方差 $\mathcal{V}_{T,L}(X)$ 将在 $T\to\infty$ 时收敛到高斯正交系综方差 $\Sigma^2_{\mathrm{GOE}}(f)$，而 $L\to\infty$但 $L=o(T)$。我们的主要结果表明，若先取大亏格极限$g\to\infty$，再取高能极限 $T\to\infty$，并将能量窗口限制为 $L\to\infty$且满足 $L=o(\log T)$，则这一结论成立；更准确地说，在此极限下，随机变量$\mathcal{V}_{T,L}(X)$依分布收敛到常数 $\Sigma^2_{\mathrm{GOE}}(f)$:

定理 1.1。对于每个 $\epsilon>0$,

$$\lim_{\substack{L,T\to\infty\\ L=o(\log T)}}\limsup_{g\to\infty}\mathrm{Prob}_g^{WP}\left(\left|\mathcal{V}_{L,T}-\Sigma^2_{GOE}(f)\right|>\epsilon\right)=0. \tag{1.4}$$

这可以看作随机矩阵理论中一种称为“遍历性”的性质的类比：当矩阵维数趋于无穷时，对于几乎所有矩阵，能量方差等于系综方差，见 [9]。

[1]算术曲面是例外情况，参见 [2, 6]。[2]由于存在双曲对合，亏格 $g=2$ 需要进行修改。

1.2. 证明方法。利用塞尔伯格迹公式，我们有 [11]

$$N_{L,\tau}(X) = \overline{N} + \widetilde{N}_{L,\tau}(X)$$

with

$$\overline{N} = 2(g-1)\int_{-\infty}^{\infty} f(L(r-\tau))r\tanh(\pi r)dr \sim \frac{2\tau(g-1)}{L}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,$$

and

$$\widetilde{N}_{L,\tau}(X) = \frac{2}{L}\sum_{\ell_\gamma\in\mathcal{L}_g(X)}\sum_{k\geq 1}\frac{\ell_\gamma}{\sinh(k\ell_\gamma/2)}\widehat{f}\left(\frac{k\ell_\gamma}{L}\right)\cos(\tau k\ell_\gamma) \tag{1.5}$$

其中求和遍及本原长度谱

$$\mathcal{L}_g(X) \subset (0,\infty),$$

X的本原无向闭测地线的长度集合。

我们将本原长度谱视为由随机变量 $X \in \mathcal{M}_g$ 参数化的随机点集 $\mathcal{L}_g$，即一个随机点过程，而方差 $\mathcal{V}_{T,\,L}(X)$ 是连续泛函 φ 在 $\mathcal{L}_g$ 上的一个应用 $\varphi(\mathcal{L}_g)$，其中连续性是相对于某种适当拓扑而言的。Mirzakhani 和 Petri 的一项基本结果 [8] 表明，点过程 $\mathcal{L}_g$ 在 $g\to\infty$ 时依分布收敛到一个泊松点过程，记作 $\mathcal{L}_\infty$，定义在正实数上，其强度测度为

$$d\nu_{MP}(x) = \frac{2\sinh^2 x}{x}dx.$$

根据点过程理论可知，$\mathcal{V}_{T,\,L}(X) = \varphi(\mathcal{L}_g)$ 在 $g\to\infty$ 时依分布收敛到随机变量 $\mathcal{V}^{\infty}_{T,\,L} = \varphi(\mathcal{L}_\infty)$，见命题 2.2。为证明定理 1.1，我们论证只需证明 $\mathcal{V}^{\infty}_{T,\,L}$ 在 L 时依分布收敛到常数 $\Sigma^2_{\mathrm{GOE}}(f)$，其中 $T\to\infty$ 满足 $L = o(\log T)$（见定理 2.3）。这一结果的证明构成了本文的主要部分，并在 § 4 中完成。

2. Outline of the proof of the main result

我们将 (1.5) 改写为

$$\widetilde{N}_{L,\tau}(X) = \sum_{\ell\in\mathcal{L}_g} H_{L,\tau}(\ell), \tag{2.1}$$

其中

$$H_{L,\tau}(x) = 2\frac{x}{L}\sum_{k\geq 1}\frac{\widehat{f}(\frac{kx}{L})\cos(kx\tau)}{\sinh(kx/2)} \tag{2.2}$$

我们将其视为长度谱的一个泛函，而长度谱被看作随机点过程，如下文的记号所示。

记号 2.1. i.) 对于 $g \geq 1$，令 $\mathcal{L}_g = \mathcal{L}_g(X) = \{\ell_j\}_{j\geq 1}$ 表示 $X \in \mathcal{M}_g$的（随机）本原无向长度谱，并将其视为定义在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上的随机点过程。

ii.) 令 $\mathcal{L}_\infty = \{\ell_j\}_{j\geq 1}$ 为强度为

$$\nu_{MP}(dt) := \frac{2\sinh(t/2)^2}{t}dt. \tag{2.3}$$

Mirzakhani-Petri [8], 证明了，当 $\mathcal{L}_g$ 作为点过程序列时，它收敛于 $\mathcal{L}_\infty$，见下文 § 3。因此，自然可以~考虑$_{,\tau}(X)$的类似物，其中 $\mathcal{L}_g$ 由 $\mathcal{L}_\infty$替代。也就是说，定义随机变量

$$S_{L,\tau} = \sum_{\ell\in\mathcal{L}_\infty} H_{L,\tau}(\ell), \tag{2.4}$$

其中 $H_{L,\tau}(x)$由 (2.2) 给出。回顾 (1.2) 中的平均算子 $\mathbb{E}_T[\cdot]$，并在 $S_{L,\tau}$ 上应用相应的方差算子 $\mathrm{Var}_T(\cdot)$，如 (1.3) 所示:

$$\mathcal{V}^\infty_{T,L} := \mathrm{Var}_T(S_{L,\tau}) = \mathbb{E}_T\left[|N_{L,\tau}(X) - \mathbb{E}_T\left(N_{L,\tau}\left(X\right)\right)|^2\right].$$

我们的目标是将 $\mathcal{V}^\infty_{T,\,L}$ 直接用 $\mathcal{L}_\infty$表示。

为此，将 (2.4) 两边平方，并对所得表达式进行一些简单的变形，可得

$$\mathcal{V}^\infty_{T,L} = \left(\frac{2}{L}\right)^2 \sum_{\ell_1,\ell_2\in\mathcal{L}_\infty}\sum_{k_1,k_2\geq 1}\frac{H_L(k_1\ell_1)H_L(k_2\ell_2)}{k_1k_2}U_T(k_1\ell_1,k_2\ell_2) \tag{2.5}$$

with

$$H_L(x) = \frac{x\widehat{f}\left(\frac{x}{L}\right)}{\sinh(x/2)} \tag{2.6}$$

and

$$\begin{aligned} U_T(x,y) &= \mathbb{E}_T\left[\cos\left(\tau x\right)\cos\left(\tau y\right)\right] - \mathbb{E}_T\left[\cos\left(\tau x\right)\right]\cdot\mathbb{E}_T\left[\cos\left(\tau y\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\widehat{w}\left(T\left(x-y\right)\right) + \frac{1}{2}\widehat{w}\left(T\left(x+y\right)\right) - \widehat{w}\left(Tx\right)\cdot\widehat{w}\left(Ty\right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

注意，由于 $w(x)$ 是实值且为偶函数，因此 $U_T(x,y)$ 也是实值的。以 (2.1) 替代 (2.4) 出发，同样可得

$$\mathcal{V}_{T,L}(X) = \left(\frac{2}{L}\right)^2 \sum_{\ell_1,\ell_2\in\mathcal{L}_g}\sum_{k_1,k_2\geq 1}\frac{H_L(k_1\ell_1)H_L(k_2\ell_2)}{k_1k_2}U_T(k_1\ell_1,k_2\ell_2). \tag{2.8}$$

下面我们将从以下两个结果推出定理 1.1：命题 2.2（在 § 3 末尾证明）断言随机变量 $\mathcal{V}_{T,\,L}(X)$ 依分布收敛到 $\mathcal{V}^{\infty}_{T,\,L}$；定理 2.3（在 § 4 中证明）断言，在定理 1.1 的情形下，$V^{\infty}_{T,\,L}$ 依分布收敛到常数 $\Sigma^2_{\mathrm{GOE}}(f)$。

命题 2.2. 对每个 $T, L > 0$，随机变量 $\mathcal{V}_{T,L} = \mathcal{V}_{T,L}(X)$ 在 $X \in \mathcal{M}_g$ 相对于 WP 测度均匀随机时，随着 $g \to \infty$，依分布收敛到随机变量 $\mathcal{V}^{\infty}_{T,L}$。

定理 2.3. 有

$$\lim_{\substack{L,T\to\infty \\ L=o(\log T)}} \mathbb{E}_{\mathrm{Pois}}\left[\left|\mathcal{V}^{\infty}_{T,L} - \Sigma^2_{\mathrm{GOE}}(f)\right|\right] = 0.$$

定理 2.3 与马尔可夫不等式表明，$\mathrm{Var}_T(S^2_{L,\tau})$ 与 $\Sigma^2_{\mathrm{GOE}}(f)$ 相差较大的概率趋于零：对每个 $\epsilon > 0$,

$$\lim_{\substack{L,T\to\infty \\ L=o(\log T)}} \mathrm{Prob}_{\mathrm{Pois}}\left(\left|\mathcal{V}^{\infty}_{T,L} - \Sigma^2_{\mathrm{GOE}}(f)\right| > \epsilon\right) = 0. \tag{2.9}$$

3. 点过程背景

令 $\mathcal{N}$ 为测度 μ 在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上的空间，使得 $\mu(0) = 0$，对每个$t \geq 0$，$\mu(t) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，其中 $\mu(t) := \mu((0, t])$，并假设其在 0 处右连续。测度 $\mu \in \mathcal{N}$ 有如下表示

$$\mu = \sum_{j=1}^{k} \delta_{\xi_j}, \tag{3.1}$$

其中 $0 \leq k \leq +\infty$，以及 $0 < \xi_1 \leq \xi_2 \leq \ldots$，有时将 μ 视为一个离散多重集会更方便

$$\mu = \{\xi_j\}_{j\geq 1} \subseteq \mathbb{R} \tag{3.2}$$

给定一个序列 $\{\mu_n\} \subseteq \mathcal{N}$ 和 $\mu \in \mathcal{N}$，我们称 μ_n 模糊收敛于 μ，记作 $\mu_n \to \mu$，若对于所有满足 $\mu(\cdot)$ 在 t处连续的 $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，

$$\mu^n(t) \to \mu(t). \tag{3.3}$$

等价地，对于每个具有紧支集的非负连续测试函数 $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$，有

$$\int_0^{\infty} f(x)\mu^n(dx) \to \int_0^{\infty} f(x)\mu(dx).$$

点过程（采用一种对我们的目的而言足够、但略具限制性的定义）是一个随机元素 $\mu \in \mathcal{N}$（关于 $\mathcal{N}$ 上的模糊拓扑，

在 $\mathcal{N}$ 上生成 Borel σ-代数）。（等价地，它是 $\mathcal{N}$ 上的一个概率测度。）我们将把点过程视为 $\mathcal{N}$ 的一个随机元素。

若对每个博雷尔集 $B \subseteq \mathbb{R}$，N(B) 的分布都是参数为 $\nu(B)$ 的泊松分布，且对于任意 $k \geq 2$ 以及任意一组互不相交的博雷尔集B_1、.....、B_k，随机变量 N(B_1)、.....、N(B_k) 相互独立，则称点过程 N 在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上服从强度测度为 ν on$\mathbb{R}_{>0}$ 的泊松分布。若点过程序列 N_n on $\mathbb{R}_{>0}$ 收敛（按分布）到点过程 N（记作 $\mathrm{N}_n \xrightarrow{d} \mathrm{N}$），则称该序列收敛；这里，若对所有 $k \geq 1$ 以及边界满足 N(∂B_i) $= 0$ 几乎必然成立的博雷尔集 B_i，随机向量 ($\mathrm{N}_n(B_1)$、.....、$\mathrm{N}_n(B_k)$) 都按分布收敛到随机向量 (N(B_1)、.....、N(B_k))。N_n 收敛到 N 意味着，根据第 521] 页的 [3, 定理23，随机元素 N_n 按分布收敛到 N。

对于如 (3.1) 中的测度 $\mu \in \mathcal{N}$，若 $k \geq 1$ 有限且 $1 \leq m \leq k$，则定义 [5, p. 28] μ 在 $\mathbb{R}^{(m)}_{\geq 0}$ 上的第 m 阶阶乘测度 $\mu^{(m)}$ 为

$$\mu^{(m)} = \sum_{i_1,\dots i_m \text{ distinct}} \delta_{(x_{i_1},\dots x_{i_m})}.$$

接下来，对于点过程 η，我们将第 [5, 阶阶乘矩测度定义为 9] Definition4. m

$$\alpha_m(C) = \alpha_{\eta;m}(C) := \mathbb{E}\left[\eta^{(m)}(C)\right]$$

对于 $C \subseteq \mathbb{R}^m_{\geq 0}$ 可测（博雷尔）集合。于是，强度为 λ 的泊松点过程 η 的第 m 阶阶乘测度为 [5, Corollary 4.10] 强度为 λ^m 的泊松点过程在 $\mathbb{R}^m_{\geq 0}$ 上的第 m 阶乘积测度 λ，也就是 η 的第 m 阶阶乘矩测度。

下文采用测度 $\mu \in \mathcal{N}$ 的识别方式 (3.2)。因此，适当点过程 η（包括任意泊松点过程）的阶乘矩测度以如下意义计算 $\{\xi_j\}$ 的关联函数：对于函数 f： $\mathbb{R}^m_{\geq 0} \to \mathbb{R}$,

(3.4)

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{\substack{(\xi_1,\dots,\xi_m)\in\eta^m \\ \text{distinct}}} f(\xi_1,\dots,\xi_m)\Big] = \int_{\mathbb{R}^m_{\geq 0}} f(\xi_1,\dots,\xi_m) d\alpha_m(\xi_1,\dots,\xi_m),$$

参见 [5, 定义 4.9 及其后文]。特别地，对于 $m = 1$，这就是坎贝尔公式 [5,命题 2.7]。

我们以如下观察作为本节的结尾。通过比较 (2.5) 和 (2.8)，可将二者都表示为

$$\mathcal{V}_{T,L}(X) = \varphi_{T,L}(\mathcal{L}_g); \quad \mathcal{V}^{\infty}_{T,L} = \varphi_{T,L}(\mathcal{L}_{\infty}),$$

其中泛函 $\varphi_{T,L}\colon \mathcal{N}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\varphi_{T,L}(\mu) := \left(\frac{2}{L}\right)^2 \sum_{\ell_1,\ell_2\in\mu}\sum_{k_1,k_2\geq 1} \frac{H_L(k_1\ell_1)H_L(k_2\ell_2)}{k_1k_2} U_T(k_1\ell_1,k_2\ell_2). \tag{3.5}$$

这显然是连续的，见 [12,引理 2.1]。

命题 2.2 的证明。我们将 Mirzakhani-Petri [8,定理 4.1] 的结果解释为，当 $g\to\infty$时，点过程 $\mathcal{L}_g$收敛到泊松点过程 $\mathcal{L}_\infty$（记号 2.1）；并回顾一下，该结果蕴含随机元素 $\mathcal{L}_g\in\mathcal{N}$ 依分布收敛到$\mathcal{L}_\infty\in\mathcal{N}$。因此，应用连续映射定理，取连续泛函 $\varphi\colon\ \mathcal{N}\to\mathbb{R}$，如式 (3.5) 所示，可得当$g\to\infty$时，随机变量

$$\mathcal{V}_{T,L}(X)=\varphi(\mathcal{L}_g)$$

依分布收敛到

$$\mathcal{V}^{\infty}_{T,L}=\varphi(\mathcal{L}_\infty),$$

也就是说，这就是命题 2.2 的陈述。

□

4. GOE fluctuations for the Poisson model: Proof of Theorem 2.3

我们需要计算$\left|\mathcal{V}^{\infty}_{T,\ L}-\Sigma^2_{\mathrm{GOE}}(f)\right|$ 与$\mathcal{V}^{\infty}_{T,\ L}$ 的期望值，其中 ℓ_1、ℓ_2 按照泊松点过程选取，表达式由 (2.5) 给出。我们根据 $\ell_1=\ell_2$（对角线）是否成立以及 $\ell_1\neq\ell_2$，将 (2.5) 分情况讨论：

$$\mathcal{V}^{\infty}_{T,L}=\sum_{\ell_1=\ell_2}+\sum_{\ell_1\neq\ell_2}=\mathrm{Diag}+\mathrm{Off}$$

于是我们得到

$$\mathbb{E}_{\mathrm{Pois}}\left[\left|\mathcal{V}^{\infty}_{T,L}-\Sigma^2_{\mathrm{GOE}}(f)\right|\right]\leq \mathbb{E}_{\mathrm{Pois}}\left[\left|\mathrm{Diag}-\Sigma^2_{\mathrm{GOE}}(f)\right|\right]+\mathbb{E}_{\mathrm{Pois}}\left[|\mathrm{Off}|\right].$$

我们将证明，当 L、$T\to\infty$、$L=o$（log T）时，这两项都趋于零。

4.1. 对 $\mathbb{E}_{\mathrm{Pois}}\left[|\mathrm{Off}|\right]$的界定。

引理 4.1. 存在某个 $C_0=C_0(f)>0$，使得

$$\mathbb{E}_{\mathrm{Pois}}\left[|\mathrm{Off}|\right]\ll\frac{e^{2C_0L}}{TL}, \tag{4.1}$$

‘$\ll$’记号中涉及的常数绝对值。

证明。我们应用相关公式 (3.4)，并令 $m = 2$，得到

$$f(\xi_1, \xi_2) = \frac{4}{L^2} \sum_{k_1,k_2 \geq 1} \frac{|H_L(k_1\xi_1)||H_L(k_1\xi_1))|}{k_1 k_2} |U_T(k_1\xi_1, k_1\xi_1)|$$

以及强度 $d\nu_{MP}(x) = 2\sinh^2(x/2)/x\, dx$，从而得到

$$\mathbb{E}_{\text{Pois}}\left[|\text{Off}|\right] = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y) d\nu_{MP}(x) d\nu_{MP}(y) \tag{4.2}$$

$$= \frac{4}{L^2} \sum_{k_1,k_2 \geq 1} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|H_L(k_1 x) H_L(k_2 y)|}{k_1 k_2} |U_T(k_1 x, k_2 y)| d\nu_{MP}(x) d\nu_{MP}(y)$$

$$= \frac{16}{L^2} \sum_{k_1,k_2 \geq 1} \int_0^\infty \int_0^\infty \widehat{f}\left(\frac{k_1 x}{L}\right) \widehat{f}\left(\frac{k_2 y}{L}\right) \cdot \frac{\sinh(x/2)^2 \cdot \sinh(y/2)^2}{\sinh\left(\frac{k_1 x}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{k_2 y}{2}\right)} \times$$

$$\times |U_T(k_1 x, k_2 y)| dx dy$$

根据 (2.6)。接下来我们证明，当 $L = o(\log\, T)$ 时，这个表达式趋于零。

注意到 $\widehat{f}$ 具有紧支撑，这意味着在积分范围内有 $0 < x \ll \frac{L}{k_1}$，因此对某个绝对常数 $C_0 > 0$，有 $\sinh(x/2) \leq e^{C_0 \cdot L}$，同理 $\sinh(y/2) \leq e^{C_0 \cdot L}$。由于 $k \geq 1$ 和$t \in \mathbb{R}$

$$\frac{\sinh(t)}{\sinh(kt)} \leq \frac{1}{k},$$

我们有

$$\frac{\sinh(x/2)^2 \cdot \sinh(y/2)^2}{\sinh\left(\frac{k_1 x}{2}\right) \cdot \sinh\left(\frac{k_2 y}{2}\right)} \leq e^{2C_0 \cdot L} \cdot \frac{1}{k_1 k_2}.$$

给定积分区域中的 x（如上所述，$x \ll \frac{L}{k_1}$），$\widehat{\omega}$ 的紧支撑迫使 y 包含在一个长度为 $\frac{1}{k_2 T}$ 的区间内（由 (2.7) 可知）。因此，考虑到 $\widehat{\ }$ 的有界性，f 和 $\widehat{w}$（从而 U_T）也是有界的，我们有

$$\frac{1}{L^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \widehat{f}\left(\frac{k_1 x}{L}\right) \widehat{f}\left(\frac{k_2 y}{L}\right) \frac{\sinh(x/2)^2 \sinh(y/2)^2}{\sinh\left(\frac{k_1 x}{2}\right) \sinh\left(\frac{k_2 y}{2}\right)} |U_T(k_1 x, k_2 y)| dx dy \tag{4.3}$$

$$\ll \frac{1}{L^2} \cdot \frac{e^{2C_0 L}}{k_1 k_2} \cdot \frac{1}{T k_2} \cdot \frac{L}{k_1} = \frac{e^{2C_0 L}}{TL} \cdot \frac{1}{k_1^2 k_2^2}.$$

将 (4.3) 对 k_2、$k_1 \geq 1$ 求和，并代入 (4.2)，即可得到引理 4.1 中的界 (4.1)。□

4.2. 对角项的界。现在我们希望给项$\mathbb{E}_{\text{Pois}}\left[\left|\text{Diag } -\Sigma^2_{\text{GOE}}(f)\right|\right]$取一个上界。回忆

$$\text{Diag} = \frac{4}{L^2}\sum_x \sum_{k_1,k_2\geq 1} \frac{H_L(k_1x)H_L(k_2x)}{k_1k_2} U_T(k_1x, k_2x)$$

我们将配对 $(k_1, k_2) = (1, 1)$ 的贡献与其余部分分开，并使用

(4.4)

$$\mathbb{E}_{\text{Pois}}\left[\left|\text{Diag} - \Sigma^2_{\text{GOE}}(f)\right|\right] \leq \mathbb{E}_{\text{Pois}}\left[\left|\frac{4}{L^2}\sum_x H_L(x)^2 U_T(x,x) - \Sigma^2_{\text{GOE}}(f)\right|\right]$$
$$+ \frac{4}{L^2}\,\mathbb{E}_{\text{Pois}}\left[\sum_x \sum_{k_1+k_2\geq 3} \frac{|H_L(k_1x)H_L(k_2x)|}{k_1k_2} |U_T\left(k_1x, k_2x\right)|\right].$$

4.2.1. 和 $k_1 + k_2 \geq 3$。我们定义

$$D(k_1,k_2) := \frac{4}{L^2}\,\mathbb{E}_{\text{Pois}}\left[\sum_x \frac{|H_L(k_1x)H_L(k_2x)|}{k_1k_2} |U_T\left(k_1x, k_2x\right)|\right]$$

并希望证明

$$\sum_{k_1+k_2\geq 3} D(k_1,k_2) \ll \frac{\log L}{L^2}.$$

我们应用坎贝尔公式（(3.4)，其中 $m = 1$）

$$\mathbb{E}_{\text{Pois}}\left[\sum_x h(x)\right] = \int_0^\infty h(x)\, d\nu_{MP}(x) \tag{4.5}$$

利用 $h(x) = \frac{|H_L(k_1x)\ H_L\ k_2x\ |}{k_1k_2}|U_T{}()(k_1x, k_2x)\ |$ 来求得

$$D(k_1,k_2) = \frac{4}{L^2}\int_0^\infty \frac{|H_L(k_1x)H_L(k_2x)|}{k_1k_2} |U_T\left(k_1x, k_2x\right)|\, d\nu_{MP}(x)$$
$$\ll \int_0^{C_0L} \frac{\sinh^2(Lx/2)}{\sinh(Lk_1x/2)\sinh(Lk_2x/2)}\, x\, dx$$

^利用 U_T 有界且 f 的支撑位于 $[-C_0, C_0]$。容易证明（参见 [11, 引理 5.2] 的证明），最后这个积分有界于

$$\ll \min\left(\frac{1}{L^2(k_1+k_2-2)^2}, \frac{1}{k_1k_2^3}\right)$$

（假设 $k_2 \geq k_1$），由此可得

$$\sum_{k_1+k_2\geq 3} D(k_1,k_2) \ll \frac{\log L}{L^2}$$

这就是我们的结论。

4.2.2. 项 $k_1 = k_2 = 1$。我们还需证明 (4.4) 右端的第一项趋于零。由柯西-施瓦茨不等式，只需对二阶矩给出上界

$$\lim_{L\to\infty} \mathbb{E}_{\mathrm{Pois}} \left[\left| \frac{4}{L^2} \sum_x H_L(x)^2 U_T(x,x) - \Sigma^2_{\mathrm{GOE}}(f) \right|^2 \right] = 0$$

对于 $T \geq 1$。展开平方后，我们要证明

$$\mathbb{E}_{\mathrm{Pois}} \left[\left(\frac{4}{L^2} \sum_x H_L(x)^2 U_T(x,x) \right)^2 \right] - 2\Sigma^2_{\mathrm{GOE}}(f)\, \mathbb{E}_{\mathrm{Pois}} \left[\frac{4}{L^2} \sum_x H_L(x)^2 U_T(x,x) \right] \to (\Sigma^2_{\mathrm{GOE}}(f))^2.$$

我们有

$$\mathbb{E}_{\mathrm{Pois}} \left[\frac{4}{L^2} \sum_x H_L(x)^2 U_T(x,x) \right] = \Sigma^2_{\mathrm{GOE}}(f) + O\left(\frac{1}{TL}\right). \tag{4.6}$$

事实上，由坎贝尔公式 (4.5),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathrm{Pois}} \left[\frac{4}{L^2} \sum_x H_L(x)^2 U_T(x,x) \right] &= \frac{4}{L^2} \int_0^\infty H_L(x)^2 U_T(x,x) d\nu_{MP}(x) \\ &= \frac{4}{L^2} \int_0^\infty \frac{x^2 \widehat{f}\left(\frac{x}{L}\right)}{\sinh^2(x/2)} \frac{1}{2} \left(1 + \widehat{w}(2Tx) - 2\widehat{w}(Tx)^2\right) 2\frac{\sinh^2(x/2)}{x} dx \\ &= 4\int_0^\infty \widehat{f}(y)^2 y dy + 4\int_0^\infty \widehat{f}(y)^2 y \left(\widehat{w}(2TLy) - 2\widehat{w}(TLy)^2\right) dy, \end{aligned}$$

使用

$$U_T(x,x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\widehat{w}(2Tx) - \widehat{w}(Tx)^2.$$

第一项为 $2\int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(y)^2 |y| dy = \Sigma^2_{\mathrm{GOE}}(f)$。对于第二项，注意到由于 Supp $\widehat{w} \subseteq [-1,1]$，该积分有界于

$$\int_0^\infty \widehat{f}(y)^2 y \left(|\widehat{w}(2TLy)| + 2|\widehat{w}(TLy)^2|\right) dy \ll \int_0^{1/2TL} \widehat{f}(y)^2 y dy \ll \frac{1}{TL},$$

因此我们得到 (4.6)

因此，只需证明

$$\mathbb{E}_{\text{Pois}}\left[\left(\frac{4}{L^2}\sum_x H_L(x)^2 U_T(x,x)\right)^2\right] \to (\Sigma^2_{\text{GOE}}(f))^2.$$

再次展开平方，得到一个对角和与一个非对角和。

我们利用坎贝尔公式 (4.5) 对角和进行估计

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\text{Pois}}\left[\frac{16}{L^4}\sum_x H_L(x)^4 U_T(x,x)^2\right] &= \frac{16}{L^4}\int_0^\infty H_L(x)^4 U_T(x,x)^2 d\nu_{MP}(x)\\ &= \frac{16}{L^4}\int_0^\infty \frac{x^4 \widehat{f}\left(\frac{x}{L}\right)^4}{\sinh^4(x/2)}\frac{2\sinh^2(x/2)}{x}U_T(x,x)^2 dx\\ &\ll \frac{1}{L^4}\int_0^{cL}\frac{x^3}{\sinh^2(x/2)}dx \ll \frac{1}{L^4}.\end{aligned}$$

我们利用相关公式 (3.4) 计算非对角项，其中 $m=2$ 对应泊松过程

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\text{Pois}}\left[\frac{16}{L^4}\sum_{x\neq y} H_L(x)^2 U_T(x,x) H_L(y)^2 U_T(y,y) 2\right]\\ &= \frac{16}{L^4}\iint H_L(x)^2 U_T(x,x) H_L(y)^2 U_T(y,y) d\nu_{MP}(x) d\nu_{MP}(y)\\ &= \left(\frac{4}{L^2}\int_0^\infty H_L(x)^2 U_T(x,x) d\nu_{MP}(x)\right)^2 = \left(\Sigma^2_{\text{GOE}}(f)\right)^2 + O\left(\frac{1}{TL}\right)\end{aligned}$$

由 (4.6) 可知，证毕。

5. Almost sure GOE fluctuations: Concluding the proof of Theorem 1.1

证明。设给定 $\epsilon > 0$，并且暂且考虑随机变量 $\mathcal{V}_{T,\,L} = \mathcal{V}_{T,\,L}(X)$ 和 $\mathcal{V}^{\infty}_{T,\,L}$，其中 T、L 足够大但固定，且处于允许的范围 $L = o(\log\, T)$ 内。由此可得，当 $g \to \infty$ 时，

$$\text{Prob}\left(\left|\mathcal{V}_{T,L} - \Sigma^2_{GOE}(f)\right| > \epsilon\right) \to \text{Prob}\left(\left|\mathcal{V}^{\infty}_{T,L} - \Sigma^2_{GOE}(f)\right| > \epsilon\right), \tag{5.1}$$

前提是 $\Sigma^2_{GOE}(f) \pm \epsilon$ 不是 $\mathcal{V}^{\infty}_{T,L}$的分布中的原子。否则，使用 (5.1)，并令

$$\epsilon/2 < \epsilon' = \epsilon'(T,L) < \epsilon$$

使得对于给定的 T、L，$\mathcal{V}^{\infty}_{T,L}$ 的分布在 $\Sigma^2_{GOE}(f) \pm \epsilon'$处没有原子，并利用当可容许的$T$、$L$充分大时，.....的概率

$$\left\{\left|\mathcal{V}^{\infty}_{T,L} - \Sigma^2_{GOE}(f)\right| > \epsilon'\right\} \subseteq \left\{\left|\mathcal{V}^{\infty}_{T,L} - \Sigma^2_{GOE}(f)\right| > \frac{\epsilon}{2}\right\}$$

根据 (2.9)（定理 2.3 的一个推论），它可以任意小。最后，双重极限陈述 (1.4) 由此得出，因为

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Prob}\left(\left|\mathcal{V}_{T,L} - \Sigma^2_{GOE}(f)\right| > \epsilon\right) \le \mathrm{Prob}\left(\left|\mathcal{V}_{T,L} - \Sigma^2_{GOE}(f)\right| > \epsilon'\right)\\
&= \mathrm{Prob}\left(\left|\mathcal{V}^{\infty}_{T,L} - \Sigma^2_{GOE}(f)\right| > \epsilon'\right)\\
&+ \left(\mathrm{Prob}\left(\left|\mathcal{V}_{T,L} - \Sigma^2_{GOE}(f)\right| > \epsilon'\right) - \mathrm{Prob}\left(\left|\mathcal{V}^{\infty}_{T,L} - \Sigma^2_{GOE}(f)\right| > \epsilon'\right)\right)\\
&\le \mathrm{Prob}\left(\left|\mathcal{V}^{\infty}_{T,L} - \Sigma^2_{GOE}(f)\right| > \frac{\epsilon}{2}\right)\\
&+ \left(\mathrm{Prob}\left(\left|\mathcal{V}_{T,L} - \Sigma^2_{GOE}(f)\right| > \epsilon'\right) - \mathrm{Prob}\left(\left|\mathcal{V}^{\infty}_{T,L} - \Sigma^2_{GOE}(f)\right| > \epsilon'\right)\right),
\end{aligned}$$

其中第一项由 (2.9) 可知很小，而差值则趋于零，因为$g \to \infty$ $\Sigma^2_{GOE}(f) \pm \epsilon'$ 不是 $\mathcal{V}^{\infty}_{T}$ 的原子，L。□

References

[1] Berry, M. V. 能级数量的涨落。载于《经典与量子系统中的随机过程》（阿斯科纳，1985），47–53，物理学讲义，262，Springer，柏林，1986。[2] Bogomolny, E.B., Georgeot, B., Giannoni, M.J. 和 Schmit, C. 算术群生成的混沌台球。《物理评论快报》，69(10)，第1477页（1992）。[3] Grandell, J. 点过程与随机测度。《应用概率进展》，9(3)，第502–526页（1977）。[4] Kallenberg, O.《随机测度：理论与应用》（第1卷）。瑞士沙姆：Springer International Publishing（2017）。[5] Last, G. 和 Penrose, M.《泊松过程讲义》（第7卷）。剑桥大学出版社（2017）。[6]Luo, W. 和 Sarnak, P. 特征函数的量子遍历性，定义于PSL_2(Z)/H²。《IH´ES 数学出版物》，81，第207–237页（1995）。[7] Naud, F. 紧曲面的随机覆盖与光滑线性谱统计。arXiv:2209.07941 [math.SP][8] Mirzakhani, M. 和 Petri, B. 大亏格随机曲面上的闭测地线长度。《海尔维提数学评论》94（2019），第4期，869–889。[9] Pandey, A. 多粒子谱的统计性质。III. 随机矩阵系综中的遍历行为。《物理学年刊》119（1979），第1期，170–191。[10] Rudnick Z. 模群谱的中心极限定理，《亨利·庞加莱年刊》6（2005），863–883。[11] Rudnick, Z. 大亏格曲面模空间上的高斯正交系综统计。arXiv:2202.06379 [math.SP][12] Rudnick, Z. 和 Wigman, I. 关于大亏格随机曲面上线性特征值统计的中心极限定理。arXiv:2301.00685 [math.SP]

School of Mathematical Sciences, Tel Aviv University, Tel Aviv69978, Israel电子邮箱：rudnick@tauex.tau.ac.il

Department of Mathematics, King's College London, UK电子邮箱：igor.wigman@kcl.ac.uk