arXiv:2301.06006v1 [math.GM] 11 Jan 2023

# 局部共形凯勒流形中的半斜子流形作为扭曲积*

**Umar Mohd Khan& Viqar Azam Khan**阿里格尔穆斯林大学数学系，印度阿里格尔-202002 电子邮箱：umar.007.morpheus@gmail.com,viqarster@gmail.com

**摘要**

我们研究局部共形凯勒流形中的半斜子流形浸入，考察其作为扭曲积的情形，其中全纯分布（分别为斜分布）的叶被扭曲，并在这两种情况下建立刻画定理以及第二基本形式平方长度的估计。

## 1 引言

Vaisman 将局部共形凯勒（lcK）流形引入为凯勒流形的一种推广 [33, 34, 35,36, 21, 37, 38]。局部共形凯勒流形是厄米流形，可表示为凯勒流形的并，使得局部共形凯勒度量与这些凯勒度量局部共形。局部共形凯勒流形的特征是存在一个全局定义的闭 1-形式 $\omega$，称为李形式，使得局部共形凯勒度量的基本 2-形式满足 $d\Omega = \Omega \wedge \omega$。李形式及其对应的李向量场在局部共形凯勒流形的几何中起着重要作用。

从外在几何的角度来看，复全纯子流形和全实子流形是近似厄米流形中的重要研究对象。Bejancu [5, 6]将CR子流形定义为复全纯子流形和全实子流形的推广，随后Chen [11, 12]对其进行了进一步研究。后来，Chen [13, 14]通过引入斜子流形的概念，扩展了复全纯子流形和全实子流形的范畴。同一作者又将这一概念推广为逐点斜子流形 [20] 。此后，多位作者将对CR子流形和斜子流形的研究推广到各种环境流形中的半斜子流形、半斜子流形（亦称伪斜子流形）和双斜子流形。

Papaghiuc [28] 研究了近似厄米流形中的半斜子流形。Cabrerizo等人 [9, 10]研究了Sasakian流形中的半斜子流形。文献 [2, 24, 29]研究了近似乘积黎曼流形中的斜子流形和半斜子流形。文献 [4], 还研究了近似Kenmotsu流形中的半斜子流形、LCS流形 [3] 以及局部乘积黎曼流形 [31]中的半斜子流形。

Bishop 和 O'Neill [7] 在研究具有负截面曲率的流形实例时，通过对积流形上的积度量进行齐次扭曲，定义了扭曲积流形。扭曲积是黎曼积的自然推广，并已在相对论中得到广泛应用。最值得注意的是，在一定假设下描述球形质量体外部引力场的史瓦西度规，以及 Robertsen Walker度规（FLRW度规），都是扭曲积

*关键词与子流形**2020 年 AMS 学科** **词组：**扭曲积子流形、局部共形凯勒流形（lcK）、半斜子流形 **分类：**53C15,53C40, 53C42

度量。扭曲积流形的一个自然实例是旋转曲面。Hiepko [22] 给出了一个黎曼流形成为其子流形的扭曲积的刻画，将积流形的 de Rham 分解定理加以推广。后来，Nölker [27]和 Chen [15, 16, 19]开始研究扭曲积流形的外蕴几何。

Chen [17, 18] 开创了将 CR 子流形作为扭曲积浸入凯勒流形的研究。Bonanzinga 和 Matsumoto [8, 26, 25] 将这一研究拓展到局部共形凯勒流形的情形。Nargis Jamal 等人 [23] 研究了局部共形凯勒流形中的广义扭曲积。文献 [1, 30, 32] 进一步研究了局部共形凯勒流形中的半斜子流形和半斜子流形。文献 [23, 1] 研究了作为扭曲积浸入局部共形凯勒流形的广义子流形、 CR 子流形和半斜子流形。

我们通过考察局部共形凯勒流形中的半斜子流形，继续开展这项研究。具体而言，我们给出了刻画定理，并对作为扭曲积浸入局部共形凯勒流形的半斜子流形的第二基本形式的长度进行了估计。

## 2 预备知识

**定义 2.1**。 若厄米流形 $(\widetilde{M}^{2n}, J, g)$ 存在 $\widetilde{}$的一个开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$ 和一族 $C^\infty$ 函数 $f_i\colon U_i \to \mathbb{R}$，使得对每个 $i \in I$，度量都满足 $M^{2n}$，则称其为局部共形凯勒 (l.c.K.) 流形。

$$g_i = e^{-f_i} g|_{U_i} \tag{2.1}$$

在 $U_i$ 上的度量是凯勒度量。

给定一个局部共形凯勒流形 $(\widetilde{M}^{2n}, J, g)$，令 $U, V$表示 $T\widetilde{M}^{2n}$的光滑截面，则局部 1-形式 $df_i$可拼接成一个全局定义的闭 1-形式 $\omega$，称为李形式，它满足以下方程

$$d\Omega = \Omega \wedge \omega \tag{2.2}$$

其中 $\Omega(U, V) = g(JU, V)$ 是与 $(J, g)$ 相关联的基本 2-形式。

记 $\Theta$ 为由 $\Theta = \omega \circ J$定义的全局闭 1-形式。于是， $\Theta$ 称为反 *Lee* 形式。

记 b y $B$ 和 $A$ 为向量场 e q价于 $\omega$ 和 $\Theta$ 分别 p别 y 分别为 p到 $g$, 即 $\omega(U) = g(B, U)$ 及 $\Theta(U) = g(A, U)$。$B$ and $A$ 分别称为李向量场和反李向量场，它们之间的关系为

$$A = -JB \tag{2.3}$$

设 $\overline{\nabla}$ 表示 $(\widetilde{M}^{2n}, g)$ 的 Levi-Civita 联络， $\widetilde{\nabla}_i$ 表示对所有 $i \in I$ 的局部度量 $g_i$ 的 Levi-Civita 联络。那么， $\widetilde{\nabla}_i$ 拼接成定义在 $\widetilde{M}^{2n}$ 上的全局无挠线性联络 $\widetilde{\nabla}$，其定义为

$$\widetilde{\nabla}_U V = \overline{\nabla}_U V - \frac{1}{2}\{\omega(U)V + \omega(V)U - g(U, V)B\} \tag{2.4}$$

其中 $U, V \in T\widetilde{M}^{2n}$ 并满足

$$\widetilde{\nabla} g = \omega \otimes g \tag{2.5}$$

$\widetilde{\nabla}$ 称为局部共形凯勒流形 $(\widetilde{M}^{2n}, J, g)$ 的韦伊尔联络 。由于 $g_i$ 是凯勒度量，几乎复~结构 $J$ 关于韦伊尔联络是平行的，即 $\nabla J = 0$。这给出

$$\overline{\nabla}_U JV = J\overline{\nabla}_U V + \frac{1}{2}\{\Theta(V)U - \omega(V)JU - g(U, V)A + \Omega(U, V)B\} \tag{2.6}$$

现在，由于 $\omega$ 是 $\widetilde{M}^{2n}$ 上的闭形式，我们有

$$(\overline{\nabla}_U \omega)V = (\overline{\nabla}_V \omega)U \tag{2.7}$$

因此，利用 (2.6) 和 (2.7)，我们有

$$(\overline{\nabla}_U\Theta)V = U\omega(JV) - \omega(\overline{\nabla}_U JV) + \frac{1}{2}\Theta(V)\omega(U) - \frac{1}{2}\omega(V)\Theta(U) + g(JU,V)||B||^2$$

根据 $\omega(A) = g(B,A) = 0$ 式（2.3）以及 $\omega(B) = g(B,B) = ||B||^2$
因此，我们有

$$(\overline{\nabla}_U\Theta)V = (\overline{\nabla}_U\omega)V + \frac{1}{2}\Theta(V)\omega(U) - \frac{1}{2}\omega(V)\Theta(U) + g(JU,V)||B||^2 \tag{2.8}$$

设 $M^m$ 是等距浸入局部共形凯勒流形（$\widetilde{M}^{2n}, J, g$）中的一个黎曼流形。令 $U, V, W$ 表示 $TM^m$ 的光滑截面， $\xi, \eta$ 表示 $T^\perp M^m$ 的光滑截面。

关于.....的黎曼联络，高斯与温加滕公式 $\widetilde{M}^{2n}$ 可写为

$$\overline{\nabla}_U V = \nabla_U V + h(U,V) \tag{2.9}$$
$$\overline{\nabla}_U \xi = -\mathfrak{A}_\xi U + \nabla^\perp_U \xi \tag{2.10}$$

其中， $h$ 是第二基本形式， $\mathfrak{A}$ 是形算子， $\nabla, \nabla^\perp$ 分别是 $M^m$ 的切丛和法丛上的诱导联络，它们均相对于 $\nabla$ 定义。

T关于.....的韦伊尔联络，高斯与温加滕公式 $\widetilde{M}^{2n}$ 给定一个 s

$$\widetilde{\nabla}_U V = \hat{\nabla}_U V + \widetilde{h}(U,V) \tag{2.11}$$
$$\widetilde{\nabla}_U \xi = -\widetilde{\mathfrak{A}}_\xi U + \widetilde{\nabla}^\perp_U \xi \tag{2.12}$$

其中， $\widetilde{h}$ 是第二基本形式， $\widetilde{\mathfrak{A}}$ 是形算子，$\hat{\nabla}$， $\widetilde{\nabla}^\perp$ 分别是关于 $\nabla$在 $M^m$ 的切丛和法丛上诱导的~联络。

令 $H$ 表示 $h$的迹，则 $H$ 称为 $M^m$ 在($\widetilde{M^{2n}}$， $J$， $g$)中的平均曲率向量，并且是 $T^\perp M^m$的一个~光滑截面。若 $h(U,\ V) = g(U,\ V)H$，则称 $M^m$是($M^{2n}$， $J$， $g$)中的全脐子流形。~若 $h(U,\ V) = 0$，则称 $M^m$是($M^{2n}$， $J$， $g$)中的全测地子流形。

令 $B^T$， $B^N$表示李向量场 $B$的切向分量和法向分量，并令 $A^T$， $A^N$表示反李向量场 $A$的切向分量和法向分量。

由 (2.4) 可得以下关系

$$\hat{\nabla}_U V = \nabla_U V - \frac{1}{2}\left\{\omega(U)V + \omega(V)U - g(U,V)B^T\right\} \tag{2.13}$$
$$\widetilde{h}(U,V) = h(U,V) + \frac{1}{2}g(U,V)B^N \tag{2.14}$$
$$\widetilde{\mathfrak{A}}_\xi U = \mathfrak{A}_\xi U + \frac{1}{2}\omega(\xi)U \tag{2.15}$$
$$\widetilde{\nabla}^\perp_U \xi = \nabla^\perp_U \xi - \frac{1}{2}\omega(U)\xi \tag{2.16}$$

现在定义

$$JU = PU + FU \qquad\qquad J\xi = t\xi + f\xi \tag{2.17}$$

其中， $PU, t\xi$和 $FU, f\xi$分别是切向部分和法向部分。于是，我们有

$$\begin{aligned} P^2 + tF &= -I & f^2 + Ft &= -I \\ FP + fF &= 0 & tf + Pt &= 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

现在由 (2.3) 和 (2.17) 可得

$$A^T = -PB^T - tB^N \qquad A^N = -FB^T - fB^N \tag{2.19}$$

定义协变 微分 $P$、 $F$、 $t$ 和 $f$ 关于 $\overline{M}^{2n}$ a s

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_U P)V &= \nabla_U PV - P\nabla_U V\\ (\overline{\nabla}_U F)V &= \nabla^\perp_U FV - F\nabla_U V\\ (\overline{\nabla}_U t)\xi &= \nabla_U t\xi - t(\nabla^\perp_U \xi)\\ (\overline{\nabla}_U f)\xi &= \nabla^\perp_U f\xi - f(\nabla^\perp_U \xi)\end{aligned} \tag{2.20}$$

类似地，定义 $P$、 $F$、 $t$ 和 $f$ 关于 $\widetilde{M}^{2n}$ 的韦伊尔联络的协变微分为

$$\begin{aligned}(\widetilde{\nabla}_U P)V &= \hat{\nabla}_U PV - P\hat{\nabla}_U V\\ (\widetilde{\nabla}_U F)V &= \widetilde{\nabla}^\perp_U FV - F\hat{\nabla}_U V\\ (\widetilde{\nabla}_U t)\xi &= \hat{\nabla}_U t\xi - t\widetilde{\nabla}^\perp_U \xi\\ (\widetilde{\nabla}_U f)\xi &= \widetilde{\nabla}^\perp_U f\xi - f\widetilde{\nabla}^\perp_U \xi\end{aligned} \tag{2.21}$$

于是，当 $\nabla J = 0$ 时，利用（2.13）、（2.14）、（2.15）、（2.16），可得

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_U P)V &= \mathfrak{A}_{FV}U + th(U,V) + \frac{1}{2}\left\{\Theta(V)U - \omega(V)PU + g(PU,V)B^T - g(U,V)A^T\right\}\\ (\overline{\nabla}_U F)V &= fh(U,V) - h(U,PV) + \frac{1}{2}\left\{g(PU,V)B^N - g(U,V)A^N - \omega(V)FU\right\}\\ (\overline{\nabla}_U t)\xi &= \mathfrak{A}_{f\xi}U - P\mathfrak{A}_\xi U + \frac{1}{2}\left\{g(FU,\xi)B^T - \omega(\xi)PU + \Theta(\xi)U\right\}\\ (\overline{\nabla}_U f)\xi &= -h(U,t\xi) - F\mathfrak{A}_\xi U + \frac{1}{2}\left\{g(FU,\xi)B^N - \omega(\xi)FU\right\}\end{aligned} \tag{2.22}$$

定义黎曼联络 $\nabla$ 的第二基本形式 $h$ 的协变导数为

$$(\overline{\nabla}_U h)(V,W) = \nabla^\perp_U h(V,W) - h(\nabla_U V,W) - h(V,\nabla_U W) \tag{2.23}$$

令 $\overline{R}$, $R$, $R^\perp$ 分别表示与 $\nabla$, $\nabla$, $\nabla^\perp$ 相关联的曲率张量。则 Gauss 方程、Codazzi 方程和 Ricci 方程分别为

$$g(\overline{R}(U,V)W,S) = g(R(U,V)W,S) + g(h(V,S),h(U,W)) - g(h(U,S),h(V,W)) \tag{2.24}$$

$$(\overline{R}(U,V)W)^\perp = (\nabla_U h)(V,W) - (\nabla_V h)(U,W) \tag{2.25}$$

$$g(\overline{R}(U,V)\xi,\eta) = g(R^\perp(U,V)\xi,\eta) - g([A_\xi,A_\eta]U,V) \tag{2.26}$$

Bishop 和 O'Neill [7]将扭曲积定义为

**定义 2.2.** 设 $(M_1^{n_1}, g_1)$ 和 $(M_2^{n_2}, g_2)$ 为黎曼流形，且 $\pi_1: M_1\times M_2 \to M_1$ 和 $\pi_2: M_1\times M_2 \to M_2$ 为典范投影。设 $\lambda: M_1 \to (0,\infty)$ 为光滑函数。则扭曲积流形 $(M, g) = M_1 \times_\lambda M_2$ 定义为赋有黎曼度量的流形 $M_1\times M_2$

$$g = \pi_1^\star g_1 + \lambda^2\pi_2^\star g_2 \tag{2.27}$$

扭曲积流形是两个黎曼流形通常积的推广。事实上，我们有如下刻画定理。

**定理 2.1** ([22])。 设$(M^m, g)$是一个连通黎曼流形，配备了正交、互补且可积的分布 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$。进一步设 $\mathcal{D}_1$ 的叶是全测地的，且 $\mathcal{D}_2$ 的叶是 $M^m$中的外在球面，这里外在球面指平均曲率向量在法丛中平行的全脐子流形。则$(M^m, g)$局部是一个扭曲积$(M, g) = M_1 \times {}_\lambda M_2$，其中 $M_1$ 和 $M_2$ 分别表示 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 的叶，而 $\lambda: M_1 \to (0, \infty)$ 是一个光滑函数，使得 $grad(\ln \lambda)$ 是 $M$中 $M_2$ 的平均曲率向量。

$Furt$其中，若$(M^m, g)$是单连通且完备的，则$(M^m, g)$整体上是一个扭曲积 .

对于 $(M_1^{n_1}, g_1)$、$(M_2^{n_2}, g_2)$ 和 $(M, g)$，分别用 $\nabla^1$、 $\nabla^2$ 和 $\nabla$ 表示其 Levi-Civita 联络。给定任意光滑函数 $\lambda: M_1 \to \mathbb{R}$，令 grad(λ) 表示 $\lambda$ 的梯度向量场在 $(M, g)$ 上的提升。

**定理 2.2** ([22])。 给定黎曼流形 $(M_1^{n_1}, g_1)$ 和 $(M_2^{n_2}, g_2)$ 的扭曲积流形 $(M, g) = M_1 \times {}_\lambda M_2$，对于所有 $X$、$Y \in \mathcal{L}(M_1)$ 以及 $Z$、 $W \in \mathcal{L}(M_2)$，有:

$$\nabla_X Y = \nabla^1_X Y \tag{2.28}$$
$$\nabla_X Z = \nabla_Z X = X(\ln \lambda) Z \tag{2.29}$$
$$\nabla_Z W = \nabla^2_Z W - g(Z, W) grad(\ln \lambda) \tag{2.30}$$

由定理 2.2 可知， $\mathcal{H} = -\text{grad}(\ln \lambda)$ 是 $M_2$ 在 $M$ 中的平均曲率向量。设 $M^m$ 是一个等距浸入局部共形凯勒流形 $(M^{2n}, J, g)$ 的 $\widetilde{\ }$ 黎曼流形。

$M^m$ 称为半斜子流形，如果它具有两个正交互补分布 $\mathcal{D}^\perp$和 $\mathcal{D}^\theta$，使得 $\mathcal{D}^\perp$是全实的，即 $J\mathcal{D}^\perp \subseteq T^\perp M^m$，而 $\mathcal{D}^\theta$是斜分布，其斜角为 $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$，也就是说，对于每个光滑向量场 $Z \in \mathcal{D}^\theta$，都有 $P^2 Z = -\cos^2 \theta Z$。 $^-$

半斜子流形的切丛和法丛可正交分解为

$$TM^m = \mathcal{D}^\perp \oplus \mathcal{D}^\theta \qquad\qquad T^\perp M^m = J\mathcal{D}^\perp \oplus F\mathcal{D}^\theta \oplus \mu \tag{2.31}$$

其中， $\mu$是 $T^\perp M^m$中 $J\mathcal{D}^\perp \oplus F\mathcal{D}^\theta$的正交互补分布，并且相对于 $J$是 $T^\perp M^m$的不变子丛。容易看出，

$$\begin{array}{ccc} P\mathcal{D}^\perp = \{0\} & P\mathcal{D}^\theta = \mathcal{D}^\theta & F\mathcal{D}^\perp = J\mathcal{D}^\perp \\ t(J\mathcal{D}^\perp) = \mathcal{D}^\perp & t(F\mathcal{D}^\theta) = \mathcal{D}^\theta & t(\mu) = \{0\} \\ f(F\mathcal{D}^\perp) = \{0\} & f(F\mathcal{D}^\theta) = F\mathcal{D}^\theta & f(\mu) = \mu \end{array} \tag{2.32}$$

设 $M^m$是等距浸入局部共形凯勒流形（$\widetilde{M^{2n}}$， $J$， $g$）中的半斜流形，且全实分布 $\mathcal{D}^\perp$和斜分布 $\mathcal{D}^\theta$均可积。分别记 $\mathcal{D}^\perp$和 $\mathcal{D}^\theta$的叶为 $M_\perp^{n_1}$和 $M_\theta^{2n_2}$，其中$_{\mathbb{R}}\mathcal{D}^\perp$dim $n_1 =$且$_{\mathbb{R}}\mathcal{D}^\theta$dim $2n_2 =$。称 $M^m$为

- 混合全测地半斜子流形 若 $h(\mathcal{D}^\perp, \mathcal{D}^\theta) = \{0\}$。
- 半斜乘积子流形 若 $M^m$ 可局部表示为 $M_\perp \times M_\theta$。
- 半斜扭曲积子流形 若 $M^m$ 可局部表示为 $M_\perp \times {}_\lambda M_\theta$，其中存在光滑函数 $\lambda: M_\perp \to (0, \infty)$。
- 扭曲乘积半斜子流形 若 $M^m$ 可局部表示为 $M_\theta \times {}_\lambda M_\perp$，其中存在光滑函数 $\lambda: M_\theta \to (0, \infty)$。

从此处开始，我们用 $X, Y, X_1$表示 $\mathcal{L}(M_\perp)$ 中的光滑向量场，并用 $Z, W$表示 $\mathcal{L}(M_\theta)$ 中的光滑向量场。

**定理 2.3.** *[30]*设 $M^m$ 是局部共形凯勒流形 $\widetilde{M}^{2n}$中的半斜子流形。该 $n$

- 全实分布 $\mathcal{D}^\perp$ 是可积的。
- 当且仅当.....时，全实分布 $\mathcal{D}^\perp$ 的叶在 $M^m$ 中是全测地的

$$g(\mathfrak{A}_{JX}Z-\mathfrak{A}_{FZ}X,Y)=\frac{1}{2}\omega(PZ)g(X,Y) \tag{2.33}$$

- 当且仅当.....时，全实分布 $\mathcal{D}^\perp$ 的叶在 $M^m$ 中是全脐的

$$g(\mathfrak{A}_{JX}Z-\mathfrak{A}_{FZ}X,Y)=\left(\frac{1}{2}\omega(PZ)+g(\mathcal{H},PZ)\right)g(X,Y) \tag{2.34}$$

对某个光滑向量场 $\mathcal{H}\in\mathcal{D}^\theta$成立。

**定理 2.4**。 *[30]*设 $M^m$ 是局部共形凯勒流形 $\widetilde{M}^{2n}$中的一个半斜子流形。该 $n$

- 斜分布 $\mathcal{D}^\theta$ 是可积的，当且仅当.....

$$g(\mathfrak{A}_{FPZ}X,W)+g(\nabla^\perp_WFZ,JX)=g(\mathfrak{A}_{FPW}X,Z)+g(\nabla^\perp_ZFW,JX) \tag{2.35}$$

- 斜分布的 $\mathcal{D}^\theta$ 叶在 $M^m$ 中是全测地的，当且仅当

$$\omega(\mathcal{D}^\perp)=\{0\}\ and\ g(\mathfrak{A}_{FPZ}X,W)+g(\nabla^\perp_WFZ,JX)=0 \tag{2.36}$$

- 斜分布的 $\mathcal{D}^\theta$ 叶在 $M^m$ 中是全脐的，当且仅当

$$g(\mathfrak{A}_{FPZ}X,W)+g(\nabla^\perp_WFZ,JX)=\sin^2\theta\left(\frac{1}{2}\omega(X)+g(\mathcal{H},X)\right)g(Z,W) \tag{2.37}$$

对于某个光滑向量场 $\mathcal{H}\in\mathcal{D}^\perp$。

记号：设 $\mathcal{D}^\perp$ 和 $\mathcal{D}^\theta$ 分别为半斜子流形 $M^m$ 上的全实分布和斜分布，其中$\widetilde{}$局部共形凯勒 $M^{2n}$ 流形，且两个分布均可积；设 $M_\perp$ 和 $M_\theta$ 分别表示分布 $\mathcal{D}^\perp$ 和 $\mathcal{D}^\theta$ 的叶。于是， $\mathcal{D}^\perp(p,q)=T_{(p,q)}(M_\perp\times\{q\})$，且 $\mathcal{D}^\theta(p,q)=T_{(p,q)}(\{p\}\times M_\theta)$。令$\mathcal{L}(M_\perp)$和 $\mathcal{L}(M_\theta)$分别表示从 $M_\perp$ 和 $M_\theta$ 到 $M$的向量场的提升。则 $X\in\mathcal{L}(M_\perp)$当且仅当对于每个 $p\in M_\perp$， $X|_{\{p\}\times M_\theta}$ 为常数。类似地， $Z\in\mathcal{L}(M_\theta)$当且仅当对于每个 $q\in M_\theta$， $Z|_{M_\perp\times\{q\}}$ 为常数。此外，若 $\pi_\perp$： $M_\perp\times M_\theta\to M_\perp$ 和 $\pi_\theta$： $M_\perp\times M_\theta\to M_\theta$ 为典范投影，则有 $d\pi_\perp(\mathcal{L}(M_\perp))=TM_\perp$ 以及 $d\pi_\theta(\mathcal{L}(M_\theta))=TM_\theta$。显然， $\mathcal{D}^\perp$ 中的一般向量场（分别在$\mathcal{D}^\theta$中）不一定属于 $\mathcal{L}(M_\perp)$（分别属于 $\mathcal{L}(M_\theta)$）。

# 3 局部共形凯勒流形中的半斜扭曲积子流形

**引理 3.1**。 设 $M=M_\perp\times{}_\lambda M_\theta$为局部共形凯勒流形 $(\widetilde{M}^{2n},J,g)$中的半斜扭曲积子流形，则对任意 $X,Y,X_1\in\mathcal{L}(M_\perp)$ 以及 $Z,W\in\mathcal{L}(M_\theta)$，有

$$g(h(X,Z),JY)=g(h(Y,Z),JX) \tag{3.1}$$
$$g(h(X,Z),FW)=g(h(X,W),FZ) \tag{3.2}$$
$$g(h(Z,W),JX)=g(h(X,Z),FW)+\frac{1}{2}g(Z,W)g(JB,X) \tag{3.3}$$
$$X(\ln\lambda)=\frac{1}{2}g(B,X) \tag{3.4}$$
$$g(h(X,Y),JX_1)=g(h(X,X_1),JY)-\frac{1}{2}g(X,Y)g(B,JX_1)+\frac{1}{2}g(X,X_1)g(B,JY) \tag{3.5}$$

证明。对于任意 $X$，$Y$，$X_1 \in \mathcal{L}(M_\perp)$ 和 $Z$，$W \in \mathcal{L}(M_\theta)$，利用 (2.6) 和 (2.29)，有

$$\begin{aligned} g(h(X,Z),JY) &= g(\overline{\nabla}_Z X, JY) = -g(J\overline{\nabla}_Z X, Y) = -g(\overline{\nabla}_Z JX, Y) = g(\mathfrak{A}_{JX} Z, Y) \\ &= g(h(Y,Z),JX) \end{aligned}$$

这意味着（3.1）。类似地,

$$\begin{aligned} g(h(X,Z),FW) &= g(\overline{\nabla}_X Z, JW) - g(\overline{\nabla}_X Z, PW) \\ &= -g(J\overline{\nabla}_X Z, W) - g(\nabla_X Z, PW) \\ &= -g(\overline{\nabla}_X JZ, W) - X(\ln\lambda) g(Z, PW) \\ &= -X(\ln\lambda) g(PZ, W) + g(\mathfrak{A}_{FZ} X, W) - X(\ln\lambda) g(Z, PW) \end{aligned}$$

这意味着（3.2）。重复上述计算可得

$$\begin{aligned} g(h(X,Z),FW) &= -g(J\overline{\nabla}_Z X, W) - g(\nabla_Z X, PW) \\ &= -g(\overline{\nabla}_Z JX, W) - \frac{1}{2} g(JB, X) g(Z, W) - \frac{1}{2} g(B, X) g(JZ, W) - X(\ln\lambda) g(Z, PW) \\ &= g(\mathfrak{A}_{JX} Z, W) - \frac{1}{2} g(JB, X) g(Z, W) - \frac{1}{2} g(B, X) g(PZ, W) - X(\ln\lambda) g(Z, PW) \end{aligned}$$

利用（3.2），并比较 $Z$ 和 $W$ 中的对称项与反对称项，可得:

$$g(h(X,Z),FW) = g(h(Z,W),JX) - \frac{1}{2} g(JB, X) g(Z, W)$$

这证明了（3.3），并且

$$0 = \left( X(\ln\lambda) - \frac{1}{2} g(B, X) \right) g(PZ, W)$$

这证明了（3.4）。最后,

$$\begin{aligned} g(h(X,Y),JX_1) &= g(\overline{\nabla}_X Y, JX_1) \\ &= -g(J\overline{\nabla}_X Y, X_1) \\ &= -g(\overline{\nabla}_X JY, X_1) - \frac{1}{2} g(X, X_1) g(JB, Y) + \frac{1}{2} g(X, Y) g(JB, X_1) \\ &= g(\mathfrak{A}_{JY} X, X_1) - \frac{1}{2} g(X, X_1) g(JB, Y) + \frac{1}{2} g(X, Y) g(JB, X_1) \end{aligned}$$

这给出了（3.5）。 □

**注 3.1**。设 $M_\perp \times_\lambda M_\theta$ 是局部共形凯勒流形 $\widetilde{M^{2n}}$中的半斜扭曲积子流形，令 $\{X_i\}_{i=1}^p$和 $\{Z_j, \beta P Z_j\}_{j=1}^q$ 分别为 $TM_\perp$ 和 $TM_\theta$的局部标准正交标架。那么， $M^{2n}$ 的局部标准正交标架$\widetilde{\ }$为

$$\begin{aligned} &\left\{ \widehat{X_i} = X_i \right\} \cup \left\{ \widehat{Z_j} = \frac{Z_j}{\lambda}, \widehat{PZ_j} = \frac{\beta P Z_j}{\lambda} \right\} \cup \left\{ \widehat{JX_i} = JX_i \right\} \\ &\qquad \cup \left\{ \widehat{FZ_j} = \frac{\alpha F Z_j}{\lambda}, \widehat{FPZ_j} = \frac{\alpha\beta F P Z_j}{\lambda} \right\} \cup \left\{ \widehat{\xi_k}, \widehat{J\xi_k} \right\} \end{aligned}$$

其中 $\alpha=\csc\theta$， $\beta=\sec\theta$，且

$$\left\{\widehat{X_i}:1\le i\le n_1\right\} \text{ is an orthonormal basis of } \mathcal{D}^{\perp}$$
$$\left\{\widehat{Z_j},\widehat{PZ_j}:1\le j\le n_2\right\} \text{ is an orthonormal basis of } \mathcal{D}^{\theta}$$
$$\left\{\widehat{JX_i}:1\le i\le n_1\right\} \text{ is an orthonormal basis of } J\mathcal{D}^{\perp}$$
$$\left\{\widehat{FZ_j},\widehat{FPZ_j}:1\le j\le n_2\right\} \text{ is an orthonormal basis of } F\mathcal{D}^{\theta}$$
$$\left\{\widehat{\xi_k},\widehat{J\xi_k}:1\le k\le \frac{n-n_1-2n_2}{2}\right\} \text{ is an orthonormal basis of } \mu$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$然而，尽管 $Z_j,\beta PZ_j\in\mathcal{L}(M_\theta)$，一般而言我们有 $Z_j,PZ_j\notin\mathcal{L}(M_\theta)$，因为 $\lambda$是定义在 $M_\perp$上的函数。此外，注意到

$$J\left(\widehat{Z_j}\right)=J\left(\frac{Z_j}{\lambda}\right)=\frac{PZ_j}{\lambda}+\frac{FZ_j}{\lambda}=\cos\theta\widehat{PZ_j}+\sin\theta\widehat{FZ_j}$$
$$J\left(\widehat{PZ_j}\right)=J\left(\sec\theta\frac{PZ_j}{\lambda}\right)=\frac{\sec\theta P^2Z_j}{\lambda}+\frac{\sec\theta FPZ_j}{\lambda}=-\cos\theta\widehat{Z_j}+\sin\theta\widehat{FPZ_j}$$

W现在我们给出局部共形凯勒流形上的半斜扭曲积子流形的一个刻画 ds.

**定理3.1**。 设 $M^m$是局部共形凯勒流形 $\widetilde{M}^{2n}$上的一个半斜子流形。那么，以下条件等价

1. $M^m$是 $\widetilde{M}^{2n}$的半斜扭曲积子流形 $M_\perp\times{}_\lambda M_\theta$
2. 对任意 $X,Y\in\mathcal{L}(M_\perp)$和 $Z,W\in\mathcal{L}(M_\theta)$，有

$$\begin{aligned} g(\mathfrak{A}_{JX}Z-\mathfrak{A}_{FZ}X,Y)&=\frac{1}{2}\omega(PZ)g(X,Y)\\ g(\mathfrak{A}_{FPZ}X,W)+g(\nabla^{\perp}_W FZ,JX)&=\sin^2\theta\left(\frac{1}{2}\omega(X)-X(\ln\lambda)\right)g(Z,W)\end{aligned}\tag{3.6}$$

对于某个光滑函数 $\lambda:M_\perp\to(0,\infty)$。

3. 对于每个 $X\in\mathcal{L}(M_\perp)$ 和 $Z\in\mathcal{L}(M_\theta)$，我们有

$$\nabla_X Z=\nabla_Z X=\frac{1}{2}\omega(X)Z\tag{3.7}$$

此外，在这种情况下， $M_\theta$ 在 $M^m$ 中的平均曲率向量 $\mathcal{H}$ 为

$$\mathcal{H}=-grad(\ln\lambda)=-\frac{1}{2}B|_{\mathcal{D}^{\perp}}\tag{3.8}$$

其中，$B|_{\mathcal{D}^{\perp}}$ 是 $B$ 沿 $\mathcal{D}^{\perp}$的分量。

证明。 (1)⇔(2) 由定理 2.3、定理 2.4 以及 $\nabla\ln\lambda\in\mathcal{L}(M_\perp)$ 这一事实可得，这意味着对所有 $X\in\mathcal{L}(M_\perp)$ 和 $Z\in\mathcal{L}(M_\theta)$

$$g(\nabla_Z(\nabla\ln\lambda),X)=ZX(\ln\lambda)-g(\nabla\ln\lambda,\nabla_Z X)$$

$$
\begin{aligned}
&= [Z, X](\ln\lambda) - \nabla_Z X(\ln\lambda) \quad (\text{as } Z(\ln\lambda) = 0)\\
&= -\nabla_X Z(\ln\lambda)\\
&= g(Z, \nabla_X(\nabla \ln\lambda))\\
&= 0
\end{aligned}
$$

因为 $\mathcal{D}^{\perp}$ 是全测地的。此外，(3.8) 由引理 3.1 (3.4) 得出。
(1)⇔(3) 设 $M = M_{\perp} \times {}_{\lambda}M_{\theta}$ 是一个半斜扭曲积子流形。由 (2.29) 和引理 3.1 (3.4) 可得 (3.7) 和 (3.8)。

反之，设 $M^m$ 是局部共形凯勒流形 $\widetilde{M}^{2n}$ 中的一个半斜子流形，且满足 (3.7)。那么对于所有 $X$， $Y \in \mathcal{L}$ $(M_{\perp})$ 和 $Z$， $W \in \mathcal{L}(M_{\theta})$，我们有

$$
\begin{aligned}
g([X, Y], Z) &= g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z)\\
&= -g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y Z, X)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

这意味着 $\mathcal{D}^{\perp}$ 是可积的。

$$
g(\nabla_X Y, Z) = -g(\nabla_X Z, Y) = 0
$$

这意味着 $\mathcal{D}^{\perp}$ 的叶在 $M$中是全测地的。

$$
\begin{aligned}
g([Z, W], X) &= g(\nabla_Z W - \nabla_W Z, X)\\
&= -g(\nabla_Z X, W) + g(\nabla_W X, Z)\\
&= -\frac{1}{2}\omega(X) g(Z, W) + \frac{1}{2}\omega(X) g(W, Z) = 0
\end{aligned}
$$

这意味着 $\mathcal{D}^{\theta}$ 是可积的。

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_Z W, X) &= -g(\nabla_Z X, W)\\
&= -\frac{1}{2}\omega(X) g(Z, W)\\
&= -\frac{1}{2} g(Z, W) g(B^T, X)
\end{aligned}
$$

这意味着 $\mathcal{D}^{\theta}$的叶在 $M$中是全脐的，其平均曲率向量为 $-\frac{1}{2}B|_{\mathcal{D}^{\perp}}$ – .

$$
g\left(\nabla_Z B|_{\mathcal{D}^{\perp}}, X\right) = \frac{1}{2}\omega\left(B|_{\mathcal{D}^{\perp}}\right) g(Z, X) = 0
$$

这意味着 $B|_{\mathcal{D}^{\perp}}$ 在 $M$中 $M_{\theta}$ 的法丛内平行。
He因此，由定理 2.1可知， $M = M_{\perp} \times {}_{\lambda}M_{\theta}$ 是一个半斜扭曲积子流形 d. □

最后，我们通过给出第二基本形式范数的不等式，结束对局部共形凯勒流形中半斜扭曲积子流形的研究。

**定理 3.2**。 设 $M = M_{\perp} \times {}_{\lambda}M_{\theta}$是局部共形凯勒流形 $(\widetilde{M}^{2n}, J, g)$中的半斜扭曲积子流形。则第二基本形式的范数满足不等式

$$
||h||^2 \geq \frac{(n_1 + n_2 - 1)}{2}\|B|_{J\mathcal{D}^{\perp}}\|^2 + 2g\left(H_{\mathcal{D}^{\perp}}|_{J\mathcal{D}^{\perp}}, B|_{J\mathcal{D}^{\perp}}\right) + g\left(H_{\mathcal{D}^{\theta}}|_{J\mathcal{D}^{\perp}}, B|_{J\mathcal{D}^{\perp}}\right) - K \tag{3.9}
$$

其中 $n_1 = $ 维数$_{\mathbb{R}}\mathcal{D}^{\perp}$, $2n_2 = $ 维数$_{\mathbb{R}}\mathcal{D}^{\theta}$, $H_{\mathcal{D}^{\perp}}$ 分别是 $M$ 在 $\widetilde{M}^{2n}$ 中的平均曲率向量 $H$ 沿 $\mathcal{D}^{\perp}$ 和 $\mathcal{D}^{\theta}$ 的分量；给定 $\mathcal{D}^{\perp}$的任意标准正交基 $\left\{\widehat{X_i}:\ 1\leq i\leq n_1\right\}$，
$K=2\sum_i g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{X_i}\right),\widehat{JX_i}\right)g\left(B,\widehat{JX_i}\right)$ .
*If*等式经常有波动$h$ $h$

- 像（$h$） $\subseteq$ （$J\mathcal{D}^{\perp}\oplus F\mathcal{D}^{\theta}$），并且
- $M_{\theta}$在 $\widetilde{M}^{2n}$ 中是全脐的（平均曲率向量为 $\mathcal{H}=-\frac{1}{2}B|_{\mathcal{D}^{\perp}}$），当且仅当 $M$ 在 $M^{2n}$ 中是混合-$\widetilde{\ }$全测地的。

证明。

$$\begin{aligned}||h||^2=&\left\|h(\mathcal{D}^{\perp},\mathcal{D}^{\perp})|_{J\mathcal{D}^{\perp}}\right\|^2+\left\|h(\mathcal{D}^{\perp},\mathcal{D}^{\theta})|_{J\mathcal{D}^{\perp}}\right\|^2+\left\|h(\mathcal{D}^{\theta},\mathcal{D}^{\theta})|_{J\mathcal{D}^{\perp}}\right\|^2+\left\|h(\mathcal{D}^{\perp},\mathcal{D}^{\perp})|_{F\mathcal{D}^{\theta}}\right\|^2+\left\|h(\mathcal{D}^{\perp},\mathcal{D}^{\theta})|_{F\mathcal{D}^{\theta}}\right\|^2\\&+\left\|h(\mathcal{D}^{\theta},\mathcal{D}^{\theta})|_{F\mathcal{D}^{\theta}}\right\|^2+\left\|h(\mathcal{D}^{\perp},\mathcal{D}^{\perp})|_{\mu}\right\|^2+\left\|h(\mathcal{D}^{\perp},\mathcal{D}^{\theta})|_{\mu}\right\|^2+\left\|h(\mathcal{D}^{\theta},\mathcal{D}^{\theta})|_{\mu}\right\|^2\end{aligned}$$

由 (3.5) 和注 3.1 可得

$$\begin{aligned}\left\|h(\mathcal{D}^{\perp},\mathcal{D}^{\perp})|_{J\mathcal{D}^{\perp}}\right\|^2=&\sum_i g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{X_i}\right),\widehat{JX_i}\right)^2+\sum_{i\neq j}\left\{g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{X_i}\right),\widehat{JX_j}\right)^2+2g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{X_j}\right),\widehat{JX_i}\right)^2\right\}\\&+\sum_{i\neq j\neq k}g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{X_j}\right),\widehat{JX_k}\right)^2\\\geq&\frac{2}{\lambda^6}\sum_{i\neq j}g\left(h\left(X_i,X_j\right),JX_i\right)^2\\=&\frac{2}{\lambda^6}\sum_{i\neq j}\left\{g\left(h\left(X_i,Z_i\right),JX_j\right)+\frac{1}{2}g\left(X_i,X_i\right)g\left(B,JX_j\right)\right\}^2\\=&2\sum_{i\neq j}g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{X_i}\right),\widehat{JX_j}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}g\left(\widehat{X_i},\widehat{X_i}\right)^2g\left(B,\widehat{JX_j}\right)^2\\&+2\sum_{i\neq j}g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{X_i}\right),\widehat{JX_j}\right)g\left(\widehat{X_i},\widehat{X_i}\right)g\left(B,\widehat{JX_j}\right)\\\geq&\frac{p-1}{2}\left\|B|_{J\mathcal{D}^{\perp}}\right\|^2+2g\left(\sum_i h\left(\widehat{X_i},\widehat{X_i}\right)\Big|_{J\mathcal{D}^{\perp}},B|_{J\mathcal{D}^{\perp}}\right)\\&-2\sum_i g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{X_i}\right),\widehat{JX_i}\right)g\left(B,\widehat{JX_i}\right)\\=&\frac{p-1}{2}\left\|B|_{J\mathcal{D}^{\perp}}\right\|^2+2g\left(H_{\mathcal{D}^{\perp}}|_{J\mathcal{D}^{\perp}},B|_{J\mathcal{D}^{\perp}}\right)-K\end{aligned}$$

由 (3.3) 和注 3.1 可得

$$\begin{aligned}g\left(h\left(\widehat{Z_p},\widehat{Z_q}\right),\widehat{JX_i}\right)=&\frac{1}{\lambda^2}g\left(h\left(Z_p,Z_q\right),JX_i\right)=\frac{1}{\lambda^2}\left\{g\left(h\left(X_i,Z_p\right),FZ_q\right)+\frac{1}{2}\lambda^2\delta_{pq}g\left(JB,X_i\right)\right\}\\=&\sin\theta g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{Z_p}\right),\widehat{FZ_q}\right)+\frac{1}{2}\delta_{pq}g\left(JB,\widehat{X_i}\right)\\g\left(h\left(\widehat{Z_p},\widehat{PZ_q}\right),\widehat{JX_i}\right)=&\frac{\sec\theta}{\lambda^2}g\left(h\left(Z_p,PZ_q\right),JX_i\right)=\frac{\sec\theta}{\lambda^2}g\left(h\left(X_i,Z_p\right),FPZ_q\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sin\theta g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{Z_p}\right),\widehat{FPZ_q}\right)\\
g\left(h\left(\widehat{PZ_p},\widehat{Z_q}\right),\widehat{JX_i}\right) &= \sin\theta g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{PZ_p}\right),\widehat{FZ_q}\right)\\
g\left(h\left(\widehat{PZ_p},\widehat{PZ_q}\right),\widehat{JX_i}\right) &= \frac{\sec^2\theta}{\lambda^2} g\left(h\left(PZ_p,PZ_q\right),JX_i\right)\\
&= \frac{\sec^2\theta}{\lambda^2}\left\{g\left(h\left(X_i,PZ_p\right),FPZ_q\right)+\frac{1}{2}\lambda^2\cos^2\theta\delta_{pq}g\left(JB,X_i\right)\right\}\\
&= \sin\theta g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{PZ_p}\right),\widehat{FPZ_q}\right)+\frac{1}{2}\delta_{pq}g\left(JB,\widehat{X_i}\right)
\end{aligned}
$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
\left\|h(\mathcal{D}^\theta,\mathcal{D}^\theta)\big|_{J\mathcal{D}^\perp}\right\|^2 = &\sum_{i,p,q}\left\{g\left(h\left(\widehat{Z_p},\widehat{Z_q}\right),\widehat{JX_i}\right)^2+g\left(h\left(\widehat{Z_p},\widehat{PZ_q}\right),\widehat{JX_i}\right)^2+g\left(h\left(\widehat{PZ_p},\widehat{Z_q}\right),\widehat{JX_i}\right)^2\right.\\
&\left.+g\left(h\left(\widehat{PZ_p},\widehat{PZ_q}\right),\widehat{JX_i}\right)^2\right\}\\
= &\sin^2\theta\sum_{i,p,q}\left\{g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{Z_p}\right),\widehat{FZ_q}\right)^2+g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{Z_p}\right),\widehat{FPZ_q}\right)^2+g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{PZ_p}\right),\widehat{FZ_q}\right)^2\right.\\
&\left.+g\left(h\left(\widehat{X_i},\widehat{PZ_p}\right),\widehat{FPZ_q}\right)^2\right\}-\frac{1}{2}\sum_{i,p}g\left(JB,\widehat{X_i}\right)^2+\sum_{i,p}\left\{g\left(h\left(\widehat{Z_p},\widehat{Z_p}\right),\widehat{JX_i}\right)g\left(JB,\widehat{X_i}\right)\right.\\
&\left.+g\left(h\left(\widehat{PZ_p},\widehat{PZ_p}\right),\widehat{JX_i}\right)g\left(JB,\widehat{X_i}\right)\right\}\\
= &\sin^2\theta\left\|h(\mathcal{D}^\perp,\mathcal{D}^\theta)\big|_{F\mathcal{D}^\theta}\right\|^2-g\left(\sum_p\left\{h\left(\widehat{Z_p},\widehat{Z_p}\right)+h\left(\widehat{PZ_p},\widehat{PZ_p}\right)\right\}\Big|_{J\mathcal{D}^\perp},B|_{J\mathcal{D}^\perp}\right)\\
&-\frac{2q}{4}\left\|B\big|_{J\mathcal{D}^\perp}\right\|^2\\
= &\sin^2\theta\left\|h(\mathcal{D}^\perp,\mathcal{D}^\theta)\big|_{F\mathcal{D}^\theta}\right\|^2-g\left(H_{\mathcal{D}^\theta}|_{J\mathcal{D}^\perp},B|_{J\mathcal{D}^\perp}\right)-\frac{q}{2}\left\|B\big|_{J\mathcal{D}^\perp}\right\|^2
\end{aligned}
$$

综合可得（3.9）。

若（3.9）取等号，则 $||h||$的唯一非零分量为 $\left\|h(\mathcal{D}^\perp,\ \mathcal{D}^\perp)|_{J\mathcal{D}^\perp}\right\|^2$、$\left\|h(\mathcal{D}^\perp,\ \mathcal{D}^\theta)|_{F\mathcal{D}^\theta}\right\|^2$和 $\left\|h(\mathcal{D}^\theta,\ \mathcal{D}^\theta)|_{J\mathcal{D}^\perp}\right\|^2$。此外，由上述计算可得，$\left\|h(\mathcal{D}^\perp,\ \mathcal{D}^\theta)|_{F\mathcal{D}^\theta}\right\|^2=0$当且仅当$\left\|h(\mathcal{D}^\theta,\ \mathcal{D}^\theta)|_{J\mathcal{D}^\perp}\right\|^2=0$。因此，结论得证。

□

# 4 扭曲 l.c.K. 流形的扭曲积半斜子流形 ds

**引理 4.1.** 设 $M=M_\theta\times_\lambda M_\perp$ 是局部共形凯勒流形 $(\widetilde{M}^{2n},J,g)$ 中的一个扭曲乘积半斜子流形，则对所有 $X,Y\in\mathcal{L}(M_\perp)$ 和 $Z,W\in\mathcal{L}(M_\theta)$,

$$
g(h(X,Z),JY)=g(h(Y,Z),JX) \tag{4.1}
$$

$$
g(h(X,Z),FW)=g(h(X,W),FZ) \tag{4.2}
$$

$$
g(h(Z,W),JX)=g(h(X,Z),FW)+\frac{1}{2}g(Z,W)g(JB,X) \tag{4.3}
$$

$$g(B,X)=0 \tag{4.4}$$

$$g(h(X,Y),JX_1)=g(h(X,X_1),JY)-\frac{1}{2}g(X,Y)g(B,JX_1)+\frac{1}{2}g(X,X_1)g(B,JY) \tag{4.5}$$

证明. 对于所有 $X,Y\in\mathcal{L}(M_\perp)$ 和 $Z,W\in\mathcal{L}(M_\theta)$，利用 (2.6) 和 (2.29)，有：

$$\begin{aligned}g(h(X,Z),JY)&=g(\overline{\nabla}_ZX,JY)=-g(J\overline{\nabla}_ZX,Y)=-g(\overline{\nabla}_ZJX,Y)=g(\mathfrak{A}_{JX}Z,Y)\\&=g(h(Y,Z),JX)\end{aligned}$$

这意味着（4.1）。类似地，

$$\begin{aligned}g(h(X,Z),FW)&=g(\overline{\nabla}_XZ,JW)-g(\overline{\nabla}_XZ,PW)\\&=-g(J\overline{\nabla}_XZ,W)-g(\nabla_XZ,PW)\\&=-g(\overline{\nabla}_XJZ,W)\\&=g(\mathfrak{A}_{FZ}X,W)\end{aligned}$$

这意味着（4.2）。重复上述计算，可得

$$\begin{aligned}g(h(X,Z),FW)&=g(\overline{\nabla}_ZX,JW-PW)\\&=-g(J\overline{\nabla}_ZX,W)-g(\nabla_ZX,PW)\\&=-g(\overline{\nabla}_ZJX,W)-\frac{1}{2}g(JB,X)g(Z,W)-\frac{1}{2}g(B,X)g(JZ,W)\\&=g(\mathfrak{A}_{JX}Z,W)-\frac{1}{2}g(JB,X)g(Z,W)-\frac{1}{2}g(B,X)g(PZ,W)\end{aligned}$$

利用（4.2），并比较 $Z$ 和 $W$ 中的对称项与反对称项，可得：

$$g(h(X,Z),FW)=g(h(Z,W),JX)-\frac{1}{2}g(JB,X)g(Z,W)$$

这表明（4.3），并且

$$0=\frac{1}{2}g(B,X)g(PZ,W)$$

这表明（4.4）。最后，

$$\begin{aligned}g(h(X,Y),JX_1)&=g(\overline{\nabla}_XY,JX_1)\\&=-g(J\overline{\nabla}_XY,X_1)\\&=-g(\overline{\nabla}_XJY,X_1)-\frac{1}{2}g(X,X_1)g(JB,Y)+\frac{1}{2}g(X,Y)g(JB,X_1)\\&=g(\mathfrak{A}_{JY}X,X_1)-\frac{1}{2}g(X,X_1)g(JB,Y)+\frac{1}{2}g(X,Y)g(JB,X_1)\end{aligned}$$

由此得到（4.5）。 □

**注 4.1**。 设 $M_\theta \times_\lambda M_\perp$ 是局部共形凯勒流形 $\widetilde{M}^{2n}$ 中的一个扭曲乘积半斜子流形，令 $\{X_i\}_{i=1}^p$ 和 $\{Z_j, \beta PZ_j\}_{j=1}^q$ 分别为 $TM_\perp$ 和 $TM_\theta$ 的局部标准正交标架。那么， $M^{2n}$ 的一个局部标准正交标架 $\widehat{\ }$ 为

$$\begin{aligned}\left\{\widehat{X_i} = \frac{X_i}{\lambda}\right\} \cup \left\{\widehat{Z_j} = Z_j, \widehat{PZ_j} = \beta PZ_j\right\} \cup \left\{\widehat{JX_i} = \frac{JX_i}{\lambda}\right\} \\ \cup \left\{\widehat{FZ_j} = \alpha FZ_j, \widehat{FPZ_j} = \alpha\beta FPZ_j\right\} \cup \left\{\widehat{\xi_k}, \widehat{J\xi_k}\right\}\end{aligned}$$

其中 $\alpha = \csc\theta$, $\beta = \sec\theta$ and

$$\begin{aligned}&\left\{\widehat{X_i} : 1 \le i \le n_1\right\} \text{ is an orthonormal basis of } \mathcal{D}^\perp \\ &\left\{\widehat{Z_j}, \widehat{PZ_j} : 1 \le j \le n_2\right\} \text{ is an orthonormal basis of } \mathcal{D}^\theta \\ &\left\{\widehat{JX_i} : 1 \le i \le n_1\right\} \text{ is an orthonormal basis of } J\mathcal{D}^\perp \\ &\left\{\widehat{FZ_j}, \widehat{FPZ_j} : 1 \le j \le n_2\right\} \text{ is an orthonormal basis of } F\mathcal{D}^\theta \\ &\left\{\widehat{\xi_k}, \widehat{J\xi_k} : 1 \le k \le \frac{n - n_1 - 2n_2}{2}\right\} \text{ is an orthonormal basis of } \mu\end{aligned}$$

$\widehat{\ }$然而，尽管一般而言有 $X_i \in \mathcal{L}(M_\perp)$，但我们有 $X_i \notin \mathcal{L}(M_\perp)$，因为 $\lambda$ 是 $M_\theta$ 上的函数。

现在我们给出局部共形凯勒流形中扭曲乘积半斜子流形的一个刻画。

**定理 4.1.** 设 $M^m$ 是局部共形凯勒流形 $\widetilde{M}^{2n}$ 的一个半斜子流形。则以下条件等价

1. $M^m$ 是 $\widetilde{M}^{2n}$ 中的一个扭曲乘积半斜子流形 $M_\theta \times_\lambda M_\perp$
2. 对任意 $X, Y \in \mathcal{L}(M_\perp)$ 和 $Z, W \in \mathcal{L}(M_\theta)$，有

$$\begin{aligned}g(\mathfrak{A}_{JX}Z - \mathfrak{A}_{FZ}X, Y) = \left(\frac{1}{2}\omega(JZ) - Z(\ln\lambda)\right) g(X, Y) \\ \omega(\mathcal{D}^\perp) = \{0\} \text{ and } g(\mathfrak{A}_{FPZ}X, W) + g(\nabla^\perp_W FZ, JX) = 0\end{aligned} \tag{4.6}$$

   对于某个光滑函数 $\lambda: M_\theta \to (0, \infty)$。

3. 对于每个 $X \in \mathcal{L}(M_\perp)$ 和 $Z \in \mathcal{L}(M_\theta)$，我们有

$$\omega(\mathcal{D}^\perp) = \{0\} \text{ and } \nabla_X Z = \nabla_Z X = Z(\ln\lambda)X \tag{4.7}$$

此外，在这种情况下， $M^m$ 中 $M_\perp$ 的平均曲率向量 $\mathcal{H}$ 为

$$\mathcal{H} = -grad(\ln\lambda) \tag{4.8}$$

证明. (1)⇔(2) 这由定理 2.3、定理 2.4 以及 $\operatorname{grad}\ln\lambda \in \mathcal{L}(M_\theta)$ 这一事实可得，这意味着对于所有 $X \in \mathcal{L}(M_\perp)$ 和 $Z \in \mathcal{L}(M_\theta)$

$$\begin{aligned}g(\nabla_X(\operatorname{grad}\ln\lambda), Z) &= XZ(\ln\lambda) - g(\operatorname{grad}\ln\lambda, \nabla_X Z) \\ &= [X, Z](\ln\lambda) - \nabla_X Z(\ln\lambda) \quad (\text{as } X(\ln\lambda) = 0) \\ &= -\nabla_Z X(\ln\lambda)\end{aligned}$$

$$= g(X, \nabla_Z(\mathrm{grad}(\ln\lambda)))$$
$$= 0$$

因为 $\mathcal{D}^\theta$ 是全测地的。
(1)⇔(3) 设 $M = M_\theta \times {}_\lambda M_\perp$ 为一个扭曲乘积半斜子流形。则 (4.7) 和 (4.8) 由 (2.29) 得出。

反之，设 $M^m$ 为局部共形凯勒流形 $\widetilde{M}^{2n}$ 中的一个半斜子流形，且满足 (4.7)。则对所有 $X, Y \in \mathcal{L}(M_\perp)$ 和 $Z, W \in \mathcal{L}(M_\theta)$，有

$$\begin{aligned} g([X,Y],Z) &= g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) \\ &= -g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y Z, X) \\ &= -Z(\ln\lambda)g(X,Y) + Z(\ln\lambda)g(Y,X) = 0 \end{aligned}$$

这意味着 $\mathcal{D}^\perp$ 是可积的。

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= -g(\nabla_X Z, Y) \\ &= -Z(\ln\lambda)g(X,Y) \\ &= -g(X,Y)g(\mathrm{grad}(\ln\lambda), Z) \end{aligned}$$

w这意味着 $\mathcal{D}^\perp$ 的叶在 $M$ 中是全脐的，其平均曲率向量为 –grad(ln $\lambda$ ).

$$\begin{aligned} g([Z,W],X) &= g(\nabla_Z W - \nabla_W Z, X) \\ &= -g(\nabla_Z X, W) + g(\nabla_W X, Z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

这意味着 $\mathcal{D}^\theta$ 是可积的。

$$g(\nabla_Z W, X) = -g(\nabla_Z X, W) = 0$$

这意味着 $\mathcal{D}^\theta$ 的叶在 $M$中是全测地的。

$$g\left(\nabla_X \mathrm{grad}(\ln\lambda), Z\right) = \mathrm{grad}(\ln\lambda)(\ln\lambda)g(X,Z) = 0$$

这意味着 grad(ln $\lambda$) 在 $M$ 中 $M_\perp$ 的法丛内是平行的。
H因此，由定理 2.1 可知， $M = M_\theta \times {}_\lambda M_\perp$ 是一个扭曲乘积半斜子流形 . □

通过给出第二基本形式范数的一个不等式，我们结束对局部共形凯勒流形中的扭曲乘积半斜子流形的研究。

**定理 4.2**。 设 $M = M_\perp \times {}_\lambda M_\theta$ 是局部共形凯勒流形 $(\widetilde{M}^{2n}, J, g)$ 中的一个扭曲乘积半斜子流形。则第二基本形式的范数满足不等式

$$||h||^2 \geq \frac{n_1 + n_2 - 1}{2}\|B|_{J\mathcal{D}^\perp}\|^2 + 2g\left(H_{\mathcal{D}^\perp}|_{J\mathcal{D}^\perp}, B|_{J\mathcal{D}^\perp}\right) + g\left(H_{\mathcal{D}^\theta}|_{J\mathcal{D}^\perp}, B|_{J\mathcal{D}^\perp}\right) - K \tag{4.9}$$

其中， $n_1 =$ 维数$_{\mathbb{R}}\mathcal{D}^\perp$、 $2n_2 =$ 维数$_{\mathbb{R}}\mathcal{D}^\theta$、 $H_{\mathcal{D}^\perp}$ 和 $H_{\mathcal{D}^\theta}$ 分别是 $M$ 在 $\widetilde{M}^{2n}$ 中沿 $\mathcal{D}^\perp$ 和 $\mathcal{D}^\theta$ 的平均曲率向量 $H$ 的分量，并且对 $\mathcal{D}^\perp$ 的任意一个标准正交基 $\left\{\widehat{X_i}: \quad 1 \leq i \leq n_1\right\}$，
$K = 2\sum_i g\left(h\left(\widehat{X_i}, \widehat{X_a}\right), \widehat{JX_i}\right) g\left(B, \widehat{JX_i}\right)$ 。
若等号成立，则有

- 像（$h$）$\subseteq$（$J\mathcal{D}^{\perp}\oplus F\mathcal{D}^{\theta}$），且
- $M_{\theta}$在 $M^{2n}$ 中是全测地的，当且仅当 $M$在 $\widetilde{M^{2n}}$ 中是混合全测地的。

证明过程与定理 3.2 的证明类似。

**致谢：** 作者谨向审稿人表示感谢，感谢他们提出宝贵的批评意见和建议，帮助改进本文。

## 参考文献

[1] Fatimah Alghamdi、Bang-Yen Chen 和 Siraj Uddin，《局部共形凯勒流形中逐点半斜扭曲积的几何》，Results Math. **76** (2021年)，第4期，论文编号204，共25页。MR4318461[2] Mehmet Atçeken，《黎曼乘积流形的斜子流形》，Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.)**30** (2010年)，第1期，215–224。MR2658956[3] Mehmet Atçeken 和 Shyamal Kumar Hui，《LCS流形中的斜子流形与伪斜子流形》，Czechoslovak Math. J.**63**(138) (2013年)，第1期，177–190。MR3035505[4] Mehmet Atçeken 和 Süleyman Dirik，《近似 Kenmotsu 流形的伪斜子流形》，Serdica Math. J. **41** (2015年)，第2–3期，243–262。MR3363604[5] Aurel Bejancu，《凯勒流形的CR子流形（一）》，Proc. Amer. Math. Soc. **69** (1978年)，第1期，135–142。MR0467630[6] Aurel Bejancu，《凯勒流形的CR子流形（二）》，Trans. Amer. Math. Soc. **250**(1979年)，333–345。MR0530059[7] R. L. Bishop 和 B. O'Neill，《负曲率流形》，Trans. Amer. Math. Soc. **145** (1969年)，1–49。MR0251664[8] Vittoria Bonanzinga 和 Koji Matsumoto，《局部共形凯勒流形中的扭曲积CR子流形》，Period. Math. Hungar. **48** (2004年)，第1–2期，207–221。MR2077697[9] J. L. Cabrerizo、A. Carriazo、L. M. Fernández 和 M. Fernández，《Sasakian流形的半斜子流形》，Geom. Dedicata**78** (1999年)，第2期，183–199。MR1722833[10] J. L. Cabrerizo、A. Carriazo、L. M.Fernández 和 M. Fernández，《Sasakian流形中的斜子流形》，Glasg. Math. J.**42** (2000年)，第1期，125–138。MR1739684[11] Bang-yen Chen，《凯勒流形的CR子流形（一）》，J. Differential Geometry **16** (1981年)，第2期，305–322。MR0638795[12] Bang-yen Chen，《凯勒流形的CR子流形（二）》，J. Differential Geometry **16** (1981年)，第3期，493–509（1982年）。MR0654640[13] Bang-Yen Chen，《斜浸入》，Bull. Austral. Math. Soc. **41** (1990年)，第1期，135–147。MR1043974[14] Bang-Yen Chen，《斜子流形的几何》，鲁汶天主教大学，鲁汶，1990年。123页。MR1099374[15] Bang-Yen Chen，《凯勒流形中的扭积CR子流形》，Tamsui Oxf. J. Math. Sci. **16**(2000年)，第2期，105–121。MR1833002

[16] Bang-Yen Chen, 《复扩张体、扭曲积与拉格朗日浸入》, 东吴数学杂志**26**(2000年), 第1期, 1–17。MR1755131[17] Bang-Yen Chen, 《凯勒流形中扭曲积CR子流形的几何》, 数学月刊**133** (2001年), 第3期, 177–195。MR1861136[18] Bang-Yen Chen, 《凯勒流形中扭曲积CR子流形的几何（二）》, 数学月刊**134** (2001年), 第2期, 103–119。MR1878074[19] Bang-YenChen, 《扭曲积作为黎曼子流形的几何及相关问题》, 东吴数学杂志**28** (2002年), 第2期, 125–156。MR1897183[20] Bang-Yen Chen 和 Oscar J. Garay, 《近似厄米流形中的逐点斜子流形》, 土耳其数学杂志**36** (2012年), 第4期, 630–640。MR2993593[21] Samuel I. Goldberg 和 Izu Vaisman, 《具有非负截面曲率的紧致局部共形凯勒流形》, 图卢兹数学科学院年刊（第5辑）**2** (1980年), 第2期, 117–123。MR0595194[22] Sönke Hiepko, 《扭曲积的内在刻画》（德语）, 数学年刊**241** (1979年), 第3期, 209–215。MR0535555[23] Nargis Jamal、Khalid Ali Khan 和 Viqar Azam Khan, 《局部共形凯勒流形的一般扭曲积子流形》, Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.) **30** (2010年), 第5期, 1457–1468。MR2778614[24] Hongxia Li 和 Ximin Liu, 《局部乘积流形的半斜子流形》, 格鲁吉亚数学杂志**12**(2005年), 第2期, 273–282。MR2174183[25] Koji Matsumoto 和 Vittoria Bonanzinga, 《局部共形凯勒空间形式中的双重扭曲积CR子流形（二）》, 亚历山德鲁·伊万·库扎大学数学科学年刊（新丛刊）**53** (2007年), 增刊1, 235–248。MR2522397[26] Koji Matsumoto 和 Vittoria Bonanzinga, 《局部共形凯勒空间形式中的双重扭曲积CR子流形》, 尼赖吉哈佐师范学院数学学报（新丛刊）**24** (2008年), 第1期, 93–102。MR2430238[27] Stefan Nölker, 《扭曲积的等距浸入》, 微分几何及其应用**6** (1996年), 第1期, 1–30。MR1384876[28] Neculai Papaghiuc, 《凯勒流形的半斜子流形》, 亚历山德鲁·伊万·库扎大学数学科学年刊 Secţ. I a Mat. **40** (1994年), 第1期, 55–61。MR1328947[29] Bayram Sahin, 《近似乘积黎曼流形的斜子流形》, 韩国数学会志**43**(2006年), 第4期, 717–732。MR2234930[30] Hakan Mete Taştan 和 Sibel Gerdan, 《局部共形凯勒流形的半斜子流形》, 国际电子几何杂志**8** (2015年), 第2期, 46–56。MR3418457[31] Hakan Mete Taştan 和 Fatma Özdemir, 《局部乘积黎曼流形半斜子流形的几何》, 土耳其数学杂志**39** (2015年), 第2期, 268–284。MR3311690[32] H. M. Taştan 和 M. M. Tripathi, 《局部共形凯勒流形的半斜子流形》, 亚历山德鲁·伊万·库扎大学数学科学年刊（新丛刊）**62** (2016年), 第2期, 第1卷, 337–347。MR3680211[33] Izu Vaisman, 《论局部共形近似凯勒流形》, 以色列数学杂志**24** (1976年), 第3–4期, 338–351。MR0418003

[34] Izu Vaisman, 《局部共形凯勒流形上的全纯向量场》, An. Ştiinţ. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi Secţ. I a Mat. (N.S.) **24** (1978年), 第2期, 357–362页。MR0533764[35] Izu Vaisman, 《李形式平行的局部共形凯勒流形》, Rend. Mat. (6) **12** (1979年), 第2期, 263–284页。MR0557668[36] Izu Vaisman, 《关于紧局部共形凯勒流形的一个定理》, Proc. Amer. Math. Soc. **75** (1979年), 第2期, 279–283页。MR0532151[37] Izu Vaisman, 《关于局部与整体共形凯勒流形》, Trans. Amer. Math. Soc. **262** (1980年), 第2期, 533–542页。MR0586733[38] Izu Vaisman, 《局部共形凯勒流形的一些曲率性质》, Trans. Amer. Math. Soc.**259** (1980年), 第2期, 439–447页。MR0567089