arXiv:2301.06023v1 [math.SG] 15 Jan 2023

# 具有勒让德边界条件的接触瞬子：先验估计、渐近收敛与指标公式

YONG-GEUN OH、SEUNGOOK YU

Abstract. 本文通过证明具有勒让德边界条件的接触瞬子所满足的先验椭圆强制估计，建立了穿孔黎曼曲面上具有勒让德边界条件的接触瞬子方程的非线性椭圆性，并证明了在一致 $C^1$ 界条件下，穿孔处具有渐近指数 $C^\infty$-收敛的结果。我们证明，接触瞬子在穿孔处的渐近荷*under the Legendrian boundary condition* 为零。这排除了 *spiraling cusp instanton along a Reeb core*现象的出现，从而消除了开弦情形下接触瞬子模空间紧化和 Fredholm 理论所面临的唯一剩余障碍；这一障碍在闭弦情形中一直存在。我们将 $C^1$-估计及接触瞬子的 Gromov-Floer-Hofer 型紧化细节留待 [Oh21b], 研究，同时还导出了一个计算模空间虚维数的指标公式。这些结果为后续论文 [Oh21b]–[Oh22b] 和 [OYb] 奠定了分析基础，后续论文将介绍其在接触拓扑和接触哈密顿动力学中的应用。

Contents

1. 引言 2 1.1. 接触三元组与接触瞬子 3 1.2. 勒让德边值问题的先验估计 4 1.3. 渐近收敛与渐近荷的消失 6 1.4. Fredholm 理论与指标公式 7 1.5. 与辛化上伪全纯曲线相关的其他文献之间的联系 10

第 1 部分。先验估计、渐近收敛与电荷消失 12

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：53D42；次要分类：58J32。
*Key words and phrases.* 接触流形、勒让德子流形、接触瞬子、渐近接触荷、接触三元组联络、Fredholm 理论。本研究得到 IBS 项目 # IBS-R003-D1 的支持。

2. 接触三元组联络回顾 12 3. 勒让德边界条件下的局部强制 $W^{2,2}$ 估计 13 3.1. 来自 [OW18a] 13的基本微分不等式3.2. $W^{1,2}$ 边界估计 14 4. $C^{k,\delta}$ 的强制估计 4.1. 交替自举的起始： $dw$的 $W^{1,2}$-估计。 20 4.2. $w^*\lambda = f\,dx + g\,dy$ 21的$C^{1,\delta}$-估计4.3. $d^\pi w$的$C^{1,\delta}$-估计。 21 4.4. $w^*\lambda$ 21的$C^{2,\delta}$-估计4.5. $d^\pi w$ 22的$C^{2,\delta}$-估计4.6. 交替自举论证的总结 22 5. 渐近荷的消失与子列收敛 22 6. 指数 $C^\infty$ 收敛 28 6.1. $dw$ 28 的 Reeb 分量的 $L^2$- 指数衰减 6.2. $C^0$ 指数收敛 29 6.3. $dw - R_\lambda(w)$的$C^\infty$-指数衰减 $d\tau$ 30

第 2 部分：指标公式 30

7. 模空间的离壳框架 31 8. 锚定勒让德链环 33 9. 多边形马斯洛夫指标 36 10. Fredholm指标的计算 37 10.1. 粘接算子的计算 38 10.2. 半条带上的指标计算 38 10.3. 总结 40 附录 A. 向量值形式的外微分演算概要 41 参考文献 42

## 1. Introduction

这是系列论文的第一部分，系列论文包括 [Oh21b]–[Oh22b] 、 [OYb] ，以及其他正在准备中的论文；这些论文研究（经哈密顿扰动的）具有勒让德边界条件的接触瞬子及其应用。我们研究这一问题的动机有两个。首先，我们希望构造一种 Floer 理论方法，在一阶喷射丛上定义勒让德谱不变量。这些不变量由 Th´eret 在 [Th´e95], Bhupal [Bhu01] 和 Sandon [San], 中提出，并通过无穷远处为二次型的生成函数（GFQI）构造。这是 Viterbo 的 GFQI 谱不变量的勒让德版本；后者由 [Vit92] 构造，用于余切丛中的拉格朗日子流形。

回顾一下，Viterbo 不变量的 Floer 理论构造由本文作者在 [Oh97, Oh99] 中给出。这一 Floer 理论构造的出发点是 Weinstein [Wei87] 的一个重要观察：经典作用泛函是零截面 $0_{T^*B}$ 在 $H = H(t,x)$ 的哈密顿流作用下经时刻一映射后所得像 $\phi_H^1(0_{T^*B})$ 的生成函数。

因此，构造 Legendrian 谱不变量的 Floer 理论构造，自然的第一步是为接触版本的

Weinstein 观察找到类似的表述。更确切地说，设

$$\lambda = dz - pdq$$

是 $J^1B$ 和 $R = \psi_H^1$ 上的标准接触1-形式，而 $0_{J^1B}$ 是接触流 $\psi_H^t$ 在时刻 1 的像，即与依赖时间的函数 $H = H(t, y)$ 相关联的勒让德子流形，其中 $y = (x, z) \in J^1B$。我们找到了 Weinstein 观察的接触对应版本，其详细解释见 [OYa]。

1.1. 接触三元组与接触瞬子。设 $(M, \xi)$ 是一个接触流形。接触流形 $(M, \xi)$ 的接触三元组是三元组 $(M, \lambda, J)$，下面解释其含义。给定 $\lambda$ 后，Reeb向量场 $R_\lambda$ 由方程 $R_\lambda \rfloor d\lambda = 0, R_\lambda \rfloor \lambda = 1$ 唯一确定。于是有分解$TM = \xi \oplus \mathbb{R}\{R_\lambda\}$。我们记 $\Pi: TM \to TM$ 为相应的幂等算子，其像为 $\xi$。CR 近复结构 $J$ 是一个端同态 $J: TM \to TM$，满足 $J^2 = -\Pi$，更明确地说，

$$(J|_\xi)^2 = -id|_\xi, \quad J(R_\lambda) = 0.$$

我们称 $J$适配于 $\lambda$，如果对于所有 $Y \in \xi$， $d\lambda(Y, JY) \geq 0$，且仅当$Y = 0$时取等号。相应的接触三元组度量定义为

$$g = g_\xi + \lambda \otimes \lambda.$$

在 [OW14], 中，作者为每个接触三元组（$M, \lambda, J$）引入了与接触三元组度量相关联的接触三元组联络，并证明了其存在性和唯一性。

Let $\dot{\Sigma}$ 一个边界带穿孔黎曼曲面与一个带边紧黎曼曲面（$\Sigma, j$）相关联。对于给定映射 $u: \Sigma \to M$，我们可以将其导数 $du$（视为定义在 $\Sigma$ 上的一个取值于 $u^*TM$ 的 1-形式）分解为

$$du = d^\pi u + u^*\lambda \otimes R_\lambda \tag{1.1}$$

其中 $d^\pi u := \Pi du$。此外， $d^\pi u$ 分解为

$$d^\pi u = \overline{\partial}^\pi u + \partial^\pi u \tag{1.2}$$

其中 $\overline{\partial}^\pi u := du^{\pi(0,1)}$ （分别地， $\partial^\pi u := du^{\pi(1,0)}$）是 $d^\pi u: (T\Sigma, j) \to (\xi, J)$ 的反复线性部分（分别地，复线性部分）。

接触瞬子是一个映射 $w: \dot{\Sigma} \to M$，它满足如下非线性偏微分方程组

$$\overline{\partial}^\pi w = 0, \quad d(w^*\lambda \circ j) = 0 \tag{1.3}$$

定义在接触三元组 $(M, \lambda, J)$ 上。在一系列论文中，第一作者与 Wang 合作撰写了 [OW18a, OW18b]，并在 [Oha], 中开展了不借助辛化的接触瞬子分析。

接下来，为了构造 Legendrian 对应物，以对应于[Oh97，Oh99] 中的构造，我们需要考虑带勒让德边界条件的接触瞬子方程 (1.3) 的边值问题。

1.2. Legendrian 边值问题的先验估计。在 [OW18a, OW18b],对闭弦背景下接触瞬子的研究中，出现了一种现象：即使解具有 $C^1$-界且能量有限为 $\pi$，接触瞬子仍会沿 Reeb 核心螺旋缠绕。

$$E^\pi(u) = \frac{1}{2}\int_{\dot\Sigma} |d^\pi u|^2 < \infty.$$

这是由一个穿孔导致的，在该穿孔处，接触瞬子的渐近荷 $Q$ 非零，而渐近周期 $T$ 为零。（ $T$ 和 $Q$的定义见下文 (1.11) 和 (1.12)。）本文的主要目的是证明两个基本的分析性结果，以构造定义域黎曼曲面$\dot\Sigma$, $j$)上、具有勒让德边界条件并在边界 puncture 处具有指定渐近收敛性质的带边界接触瞬子的模空间。其一是先验椭圆正则性估计，其二是线性化算子的相关 Fredholm 指标公式，该公式以与模空间相关的某种拓扑指标表示。

设$(\dot\Sigma, j)$是具有有限个边界 puncture 的带边黎曼曲面。为简明起见，并着眼于本文的主要目的，我们聚焦于零亏格情形，此时 $\dot\Sigma$ 在共形意义下是带有边界 puncture $z_0$、.....、 $z_k \in \partial D^2$的单位圆盘，且这些 puncture 按逆时针方向排列，即

$$\dot\Sigma \cong D^2 \setminus \{z_0, \ldots, z_k\}$$

那么，对于一个由勒让德子流形组成的 $(k+1)$ 元组 $\vec R = (R_0, R_1, \cdots, R_k)$，我们称其为一个（有序的）Legendrian链环，并考虑以下边值问题

$$\begin{cases} \overline\partial^\pi w = 0, \quad d(w^*\lambda \circ j) = 0, \\ w(\overline{z_i z_{i+1}}) \subset R_i \end{cases} \tag{1.4}$$

通过推导先验强制性椭圆估计，将其视为映射 $w\colon \Sigma \to M$ 的椭圆边值问题。这里，$\overline{z_i z_{i+1}} \subset \partial D^2$ 是 $z_i$ 与 $z_{i+1}$之间的开弧。

注 1.1. 关于将方程推广至以下带勒让德边界条件的 $X_H$ 扰动方程的另一种思路，读者可参阅 [Oh21b, Oh21a]

$$\begin{cases} (du - X_H \otimes \gamma)^{\pi(0,1)} = 0, \quad d(e^{g_H(u)}(u^*\lambda + H\,\gamma) \circ j) = 0 \\ u(z) \in \vec R \quad \text{for } z \in \partial\dot\Sigma. \end{cases} \tag{1.5}$$

这里， $H$ 是依赖于定义域的哈密顿量， $\gamma$ 是定义在 $\Sigma$ 上的 1-形式，而函数$g_H(u)$: $\Sigma \to \mathbb{R}$ 是一个满足以下条件的函数

$$g_H(u)(t,x) := g_{((\psi_H^t(\psi_H^1)^{-1})^{-1}}(u(t,x)) \tag{1.6}$$

在每个穿孔附近用条带型坐标表示。 [Oh21a]证明了方程 (1.5) 也是一个椭圆边值问题，并将其用于接触拓扑中 Sandon-Shelukhin 猜想的证明。（参见 [Oh22a]。）

作为分析上述边值问题 (1.4) 的第一步，我们首先证明，对于任意勒让德子流形，接触瞬子的勒让德边界条件是一个自由边值问题，即它满足

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} \perp TR$$

（参见 [Jos86]，了解自由边界条件对于一般研究极小曲面型方程的椭圆估计的重要性。）随后，我们结合斯托克斯公式与勒让德边界条件，证明如下椭圆 $W^{1,2}$ 估计。推导先验估计的整体张量计算，展示了勒让德边界条件与三元组联络及接触瞬子方程之间的良好配合。

利用分解 (1.1) 以及接触三元组度量的性质 $\xi \perp R_\lambda$ 和 $|R_\lambda| = 1$，我们可以将（完整的）调和能量密度分解为

$$|dw|^2 = |d^\pi w|^2 + |w^*\lambda|^2 \tag{1.7}$$

定理 1.2（带边界的 $W^{2,2}$-估计）。记 $B$ 为接触三元组联络 $\nabla$的第二基本形式。设 $w : \Sigma \to M$ 满足 (1.4)。那么对于 $\Sigma$ 中任意满足 $\overline{D_1} \subset D_2$ 的相对紧区域 $D_1$ 和 $D_2$，有

$$\|dw\|^2_{W^{1,2}(D_1)} \le C_1\|dw\|^2_{L^2(D_2)} + C_2\|dw\|^4_{L^4(D_2)} + \int_{\partial D} |C(\partial D)| \tag{1.8}$$

其中表达式为

$$C(\partial D) := -8\left\langle B\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}\right), \frac{\partial w}{\partial y}\right\rangle \tag{1.9}$$

对于适配于 $\partial\Sigma \cap D_2$的任意等温坐标 $z = x + iy$。

根据边界贡献项的这一显式形式，经过对常数 $C_1, C_2$ 作一些调整（过程中还会出现一些三次项 $\|dw\|^3_{L^2(D_2)}$），通过代数运算比较接触三元组联络 $\nabla$ 与某个黎曼度量的列维-奇维塔联络 $\nabla^{\mathrm{LC}}$，可以很容易地导出以下形式的 $W^{2,2}$-估计；对于该度量，勒让德子流形 $R$ 是全测地的。（参见 [Oh15, 第 8.2 节和第 8.3]节，其中对具有拉格朗日边界条件的伪全纯曲线使用了相同的论证。）

定理 1.3。设 $w : \Sigma \to M$ 满足 (1.4)。那么，对于 $\Sigma$ 中满足 $\overline{D_1} \subset D_2$ 的任意相对紧区域 $D_1$ 和 $D_2$，有

$$\|dw\|^2_{W^{1,2}(D_1)} \le C_4\|dw\|^4_{L^4(D_2)}$$

其中，$C_4$ 是仅依赖于 $D_1$、$D_2$、$(M, \lambda, J)$ 和 $R_i$ 的常数。

建立这一 $W^{2,\,2}$ 估计后，我们先在一般背景下，证明黎曼曲面上具有有限个边界 puncture 的映射 $w : \Sigma \to M$ 满足的下列椭圆型 $W^{2,\,2}$估计，然后进一步证明高阶正则性估计。

从定理 1.3 出发，并利用嵌入 $W^{2,\,2} \hookrightarrow C^{0,\,\delta}$ 及 $0 < \delta < 1/2$，我们还建立了以下关于穿孔曲面 $\dot\Sigma$ 上的高阶局部 $C^{k,\,\delta}$估计，其右端由 $W^{2,\,2}$范数表示，其中 $\ell \le k + 1$。

定理 1.4。设 $w$ 满足 (1.4)。那么对于任意一对区域 $D_1 \subset D_2 \subset \Sigma$，使得 $\overline{D_1} \subset D_2$，

$$\|dw\|_{C^{k,\delta}} \le C_\delta(\|dw\|_{W^{1,2}(D_2)})$$

其中，$C_\delta = C_\delta(r) > 0$ 是一个在 $r = 0$ 处连续的函数，仅取决于 $J$、$\lambda$和 $D_1$、$D_2$，但与 $w$无关。

对函数 $C_\delta$作适当调整，并结合这两个定理，我们得到

推论 1.5. 设 $w$ 满足 (1.4)。那么，对于任意一对满足 $\overline{D_1} \subset D_2$的区域 $D_1 \subset D_2 \subset \Sigma$,

$$\|dw\|_{C^{k,\delta}} \leq C_\delta(\|dw\|_{L^4(D_2)})$$

其中 $C_\delta = C_\delta(r) > 0$ 是一个在 $r = 0$ 处连续的函数，且仅依赖于 $J$、 $\lambda$和 $D_1$， $D_2$ 但与 $w$无关。

特别地，我们证明，(1.4) 的任意弱解在 $W^{1,\,4\,\mathrm{loc}}$ 中都会自动成为经典解。（参见 [Oh15，定理 8.5。5] 其中给出了辛几何中拉格朗日边界条件的类似定理。）

1.3. 渐近收敛与渐近荷的消失。接下来，我们研究黎曼曲面 $\Sigma$的穿孔附近，具有勒让德子流形对 $(R_0, R_1)$ 的有限 $\pi$-能量接触瞬子的渐近收敛结果。

Let $\dot{\Sigma}$ 是一个带有 puncture 的黎曼曲面，其 puncture

$$\{p_i^+\}_{i=1,\cdots,l^+} \cup \{p_j^-\}_{j=1,\cdots,l^-}$$

配备度量 $h$ ，并且在紧子集 $K_\Sigma$之外具有条带状端。令$w:\ \Sigma \to M$ 为任意光滑映射。如 [OW18a], 中所述，我们将总 $\pi$-调和能量 $E^\pi(w)$定义为

$$E^\pi(w) = E^\pi_{(\lambda,J;\dot{\Sigma},h)}(w) = \frac{1}{2}\int_{\dot{\Sigma}} |d^\pi w|^2 \tag{1.10}$$

其中范数是根据 $\Sigma$ 上的给定度量 $h$ 和 $M$上的三元组度量计算的。

我们对有限能量接触瞬子映射 $w$ 的渐近研究作如下假设，参见 [OW18a]:

假设 1.6。设 $\Sigma$ 为上述给出的度量。假设 $w:\ \Sigma \to M$满足接触瞬子方程 (1.4)，且

(1) $E^{\pi\ (\lambda,\ J;\ \dot{\Sigma},\ h)}(w) < \infty$ （有限 $\pi$-能量）；
(2) $\|dw\|_{C^0(\dot{\Sigma})} < \infty$。(3) Image $w \subset \mathrm{K} \subset M$，其中 K 为某个紧子集。

注 1.7。 [Oha], [Oh21b] 表明，只要能够避免泡泡逸出，就可以满足该假设中列出的条件。然而，在此假设以及后文讨论接触瞬子模空间及其 Fredholm 理论时所假定的、收敛至指定渐近条件的指数收敛条件下，对于本文的目的而言，全局能量和泡化的讨论完全无关紧要，因为指标的计算针对的是一个给定的光滑接触瞬子 $w$，其渐近性对应于非退化对 $(\lambda, \vec{R})$。（相关非退化条件的定义见 (5.10)。）

设 $w$ 满足假设 1.6。在非退化假设以及穿孔处渐近收敛的条件下，我们可以在每个穿孔处关联两个自然的渐近不变量，定义如下：

$$T := \lim_{r\to\infty}\int_{\{r\}\times[0,1]}(w|_{\{r\}\times[0,1]})^*\lambda \tag{1.11}$$

$$Q := \lim_{r\to\infty}\int_{\{r\}\times[0,1]}((w|_{\{r\}\times[0,1]})^*\lambda\circ j) \tag{1.12}$$

在每个穿孔处。（这里我们只考察正穿孔。负穿孔的情形类似。）按照 [OW18a], , 我们称 $T$ 为渐近接触作用量，称$Q$ 为接触瞬子 $w$ 在给定穿孔处的渐近接触荷。

定理 1.8（子列收敛）。设 $w$ : $[0,\infty)\times[0,1]\to M$ 满足接触瞬子方程 (1.4) 和假设 1.6。则对于任意序列$s_k\to\infty$，存在一个子列，仍记为 $s_k$，以及一个无质量瞬子$w_\infty(\tau,t)$（即， $E^\pi(w_\infty)=0$），定义在圆柱 $\mathbb{R}\times[0,1]$ 上，使得

$$\lim_{k\to\infty} w(s_k+\tau,t)=w_\infty(\tau,t)$$

在 $C^l(K\times[0,1],M)$ 意义下对任意 $l$成立，其中 $K\subset[0,\infty)$ 是任意紧集。此外， $w_\infty$ 具有 $Q=0$ ，并满足公式 $w_\infty(\tau,t)=\gamma(Tt)$，其渐近作用量为 $T$，其中 $\gamma$ 是一个连接 $R_0$ 和 $R_1$ 、周期为 $|T|$的 Reeb 弦。

推论 1.9（荷消失）。假设对 $(\lambda,\vec{R})$ 是非退化的。令$w$ 如上。设 $w(\tau,\cdot)$ 在穿孔 $p\in\partial\Sigma$ 处的条带型坐标中收敛为 $\tau\to\infty$ ，其关联的勒让德子流形对为 $(R,R')$。那么其渐近荷 $Q$在 $p$处消失。

注 1.10。带有（非空）勒让德子流形边界的无质量接触瞬子 $w$ 的渐近荷消失 $Q=0$ ，与 [OW18a、OW18b、Oha]研究的闭弦情形大相径庭。这种消失排除了唯一剩下的障碍，即所谓沿 Reeb 核心出现螺旋瞬子的问题，从而为接触瞬子的 Fredholm 理论及其模空间的紧化扫清了道路。

本文中的强制椭圆正则性估计以及渐近荷消失定理，将成为 Gromov-Floer-Hofer 紧化分析框架的基础，也将奠定带勒让德子流形边界条件的 Hamilton 扰动接触瞬子 Fredholm 理论的基础；相关应用将在本文后续系列论文 [Ohb]–[Oh22b] 和 [OYb]中展开。

1.4. Fredholm 理论与指标公式。接下来，我们研究另一个关键组成部分：通过将 [Oha], [OS] 中的方法调整到带边界的接触瞬子这一情形，建立方程 (1.4) 的相关 Fredholm 理论与指标公式。第一作者已分别在 [Oha] 中针对闭弦情形，以及在 [Ohb] 中针对带边界的情形，建立了相关的一般 Fredholm 理论。

在本文中，我们证明了具有有限个边界穿孔的广义圆盘瞬子的指标公式 $w$。

我们回顾一下 [Ohb] 中证明的线性化算子的以下 Fredholm 性质。

命题 1.11（命题 3.18 & 3.20 [Ohb]）。设 $w$ 是 (1.4) 的一个解。考虑 $D\Upsilon(w)$ 的完备化，我们仍将其记为 $D\Upsilon(w)$，它是从 $\Omega^0_{k,\,p}(w^*TM, (\partial w)^*T\vec{R})$ 到 $\Omega^{(0,1)}(w^*\xi) \oplus \Omega^2(\Sigma)$ 的有界线性映射，其中 $k \geq 2$ 和 $p \geq 2$。那么

(1) $D\Upsilon(w)$ 的非对角项相对于对角算子是相对紧算子。(2) 算子 $D\Upsilon(w)$ 与算子同伦

$$\begin{pmatrix} \overline{\partial}^{\nabla^\pi} + T^{\pi,(0,1)}_{dw} + B^{(0,1)} & 0 \\ 0 & -\Delta(\lambda(\cdot))\, dA \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

通过同伦

$$s \in [0,1] \mapsto \begin{pmatrix} \overline{\partial}^{\nabla^\pi} + T^{\pi,(0,1)}_{dw} + B^{(0,1)} & \frac{s}{2}\lambda(\cdot)(\mathcal{L}_{R_\lambda} J)J(\pi dw)^{(1,0)} \\ s\, d\left((\cdot)\rfloor d\lambda\right) \circ j) & -\Delta(\lambda(\cdot))\, dA \end{pmatrix} =: L_s \tag{1.14}$$

它是一个 Fredholm 算子的连续族。

(3) 并且主符号

$$\sigma(z,\eta) : w^*TM|_z \to w^*\xi|_z \oplus \Lambda^2(T_z\Sigma), \quad 0 \neq \eta \in T^*_z\Sigma$$

(1.13) 的主符号由矩阵给出

$$\begin{pmatrix} \frac{\eta + i\eta\circ j}{2} Id & 0 \\ 0 & |\eta|^2 \end{pmatrix}.$$

那么，我们有 $D\Upsilon(w)$ 的 Fredholm 指标为

$$\operatorname{Index} D\Upsilon(w) = \operatorname{Index}(\overline{\partial}^{\nabla^\pi} + T^{\pi,(0,1)}_{dw} + B^{(0,1)}) + \operatorname{Index}(-\Delta_0).$$

为了将线性化算子的 Fredholm 指标表示为拓扑指标，尤其是表示为能够赋予相关 Floer 型复形绝对分次的拓扑指标，我们需要引入带锚勒让德子流形的概念。这一概念改编自辛几何中 [FOOO10] 所研究的拉格朗日子流形概念。

定义 1.12。取环境接触流形 $(M, \xi)$ 中的一个基点 $y$。设 $R$ 是 $(M, \xi)$ 的一个勒让德子流形。我们定义从 $R$ 到 $y$ 的锚为一条路径 $\ell\colon [0,1] \to M$，满足 $\ell(0) = y$，$\ell(1) \in R$。我们称一对 $(R, \ell)$ 为带锚勒让德子流形。链 $\mathcal{E} = ((R_0, \ell_0) \ldots, (R_k, \ell_k))$ 称为带锚勒让德链。

为了用 Maslov 型拓扑指标表示 (1.4) 的线性化问题的解析指标，我们需要按照 [FOOO10] 的做法，为锚配备额外的数据。对于上述给定的基点 $y \in M$，我们固定一个拉格朗日子空间 $V_y \in Lag(\xi_y)$。

定义 1.13. 考虑一个带锚的勒让德子流形 $(R, \ell)$。我们将 $\alpha$ 记作 $\ell^* Lag(\xi, d\lambda)$ 的一个截面，使得

$$\alpha(0) = V_y, \quad \alpha(1) = T_{\ell(1)}R \subset \xi_{\ell(1)}$$

我们称这样的二元组 $(\ell, \alpha)$ 为 $R$ 的分次锚（相对于 $(y, V_y)$），称三元组 $(R, \ell, \alpha)$ 为分次带锚定的 Legendrian 子流形。

设给定 Legendrian 链环 $\vec{R}=(R_0,\dots,R_k)$。设 $\gamma_i^+$ 对于 $i=1,\cdots,s^+$，以及 $\gamma_j^-$ 对于 $j=1,\cdots,s^-$，分别是正穿孔和负穿孔处给定的两组 Reeb 弦。沿用 [BEHZ03]，中的记号，我们用 $\underline{\gamma}$ 和 $\overline{\gamma}$ 表示相应的集合

$$\begin{aligned}\underline{\gamma} &= \{\gamma_1^+,\cdots,\gamma_{s^+}^+\}\\ \overline{\gamma} &= \{\gamma_1^-,\cdots,\gamma_{s^-}^-\}.\end{aligned}$$

对于每个边界 puncture，我们在边界 puncture 的邻域上关联条带型坐标 $(\tau,t)\in[0,\infty)\times[0,1]$（分别为 $(\tau,t)\in(-\infty,0]\times S^1$）。

我们考虑满足以下边界条件的光滑映射集合

$$w(z)\in R_i \quad \text{for } z\in\overline{z_{i-1}z_i}\subset\partial\dot{\Sigma} \tag{1.15}$$

以及以下渐近条件

$$\lim_{\tau\to\infty} w((\tau,t)_i)=\gamma_i^+(T_i(t+t_i)),\qquad \lim_{\tau\to-\infty} w((\tau,t)_j)=\gamma_j^-(T_j(t-t_j)) \tag{1.16}$$

对于某些 $t_i, t_j\in S^1$，其中

$$T_i=\int_{S^1}(\gamma_i^+)^*\lambda,\ T_j=\int_{S^1}(\gamma_j^-)^*\lambda.$$

这里，$t_i, t_j$ 取决于给定的解析坐标以及 Reeb 弦的参数化。

固定一个定义域复结构 $j$ 及其对应的 K¨ahler 度量 $h$。我们将这一赋值

$$\Upsilon: w\mapsto\left(\overline{\partial}^{\pi}w, d(w^*\lambda\circ j)\right),\quad \Upsilon:=(\Upsilon_1,\Upsilon_2)$$

视为一个（无限维）向量丛的截面，并考虑线性化算子

$$D\Upsilon(w):\Omega^0(w^*TM,(\partial w)^*T\vec{R})\to\Omega^{(0,1)}(w^*\xi)\oplus\Omega^2(\Sigma).$$

（精确表述见 [Ohb]，简要总结见第7节。）

结合 Fredholm 指标的（线性）粘合公式，以及对经过适当同伦后的半条带上 Index$(\overline{\partial}^{\nabla^\pi}+T^\pi,\ {}^{(0,1)}_{dw}+B^{(0,1)})$ 和 Index$(-\Delta_0$ 的显式计算，可在第10节推导出以下指标公式。前者的计算与 [FOOO10] 中所做的计算类似。然而，后者涉及拉普拉斯算子的计算，是一个有待研究的新内容。（详见第10节。）

定理1.14（定理 10.3）。设 $w$ 是方程 (1.4) 的一个解，即 $\Upsilon(w)=0$。设 $D\Upsilon(w)$ 为方程 (1.4) 的线性化算子。那么 Fredholm 指标为

$$\operatorname{Index} D\Upsilon(w)=n-\sum_{i=1}^{k}\mu([w^+_{(i-1)i},\gamma_i];\alpha_{(i-1)i}).$$

这里的 $\mu([w,\gamma_i];\alpha_{(i-1)i})$ 是某种 Maslov 型指标，其精确定义请参见第9节。对于一阶喷射丛零截面的哈密顿同位情形，[OYb] 将对该指标作更明确的说明，并由此得到一个公式，它是辛几何中余切丛情形下 [Oh97] 所给公式的对应形式。

1.5. 与辛化上伪全纯曲线相关的其他文献。我们想提及，
Hofer-Wysocki-Zehnder 曾在一系列论文中研究了三维情形下通过辛化分析伪全纯曲线的相关问题。其中的论文 [HWZ96b, HWZ96a] 与本文内容尤为相关。

至于恰当情形下的局部正则性结果——定理 1.3，即 $w^*\lambda \circ j = df$，它可以毫不费力地从 [HWZ96b, HWZ96a] 的局部正则性结果推导出来。而在研究辛化中的一对 $(M, R)$ 的相关边值问题之后，[HWZ96b, HWZ96a] 或 [Wen]（另见 [Bou02]）给出的渐近收敛结果，也可以从 [HWZ96b, HWZ96a] 和 [Wen] 中的渐近研究推导出来。

在这些情形下，可以认为我们的证明只是沿着几何分析的思路、以黎曼几何中常用的方式给出的不同整体张量证明。不过，我们想指出，定理 1.3 的正则性结论与辛化中伪全纯曲线研究文献中已有的结论性质不同，而且更强：我们对 $w$ 的估计完全独立于“径向分量”，而我们的研究中并不存在这一分量；相比之下，辛化中伪全纯曲线的正则性研究则将接触部分与径向部分的研究混在一起。（这一点已在 [OW18a] 的引言中提及。）我们预期，从研究接触瞬子入手，这类估计将有助于更精细地研究辛化中伪全纯曲线的模空间。例如，我们相信可以为接触瞬子的模空间构造一种 Kuranishi 结构，并使其具有到辛化中伪全纯曲线模空间的某种态射。我们猜想，这对于辛场论的完整框架会有所助益。（关于这方面的一些迹象，见 [Oh22b] 。）

对于恰当情形 $w^*\lambda \circ j = df$，通过对 1-形式 $w^*\lambda \circ j$ 积分，我们的正则性结果自动推出其中径向分量 $f$ 的正则性。为澄清这一点并证明我们的主张，我们希望在其他地方从我们已发展的接触瞬子理论出发，重新论述辛化上伪全纯曲线的分析。事实上，论文作者研究接触流形的 $\mathfrak{lcs}$-化上的伪全纯曲线时，已在 [OS, Theorem 1.15], 中明确完成了这项工作，具体而言，是针对 [OS] 中的 Fredholm 理论。辛化的情形是其中的一个特例，此时 [OS] 中定义的荷类消失；或者说，辛化对应于 $\mathfrak{lcs}$-化的“零温极限”。

我们的整体张量方法已在接触哈密顿动力学问题的研究中证明了其用途和有效性，尤其体现在一些整体变分法、接触哈密顿微积分和接触哈密顿动力学方面。（参见 [Oh21b], [Oh22a]。）这种整体方法与众所周知的 Bochner-Weitezenb¨ock 型公式策略相结合，对于受扰接触瞬子方程 (1.5) 的解析基础至关重要；该方程是 Floer 哈密顿受扰轨道方程在接触情形下的对应方程。（关于后者方程及其应用的相应解析研究，参见 [SZ92] 。）

我们想提及，Ekholm-Etynre-Sullivan[EES05, EES07] 在相对 Legendrian 接触同调的背景下，研究了相对情形中经由辛化的伪全纯曲线的相关分析：他们将研究范围限制在接触流形 $M$ 允许存在投影 $\pi$ 的情形：

$M \to P$ 其中某个恰当辛流形 $(P, d\alpha)$ 满足上述条件，且接触形式 $\lambda$ 由 $\lambda = dt + \alpha$ 定义在 $M$ 上。就此而言，我们的研究将他们的结果推广至任意一对由接触流形 $M$和勒让德子流形 $R$ 构成的对象，其中两者均为紧致的，或在 $M$ Oh21b$R$ 的意义下是 tame 的。

下面按顺序介绍本文的结构。本文分为两部分。第 1 部分介绍先验估计，以及边界 puncture 处的渐近收敛和荷消失。在第 3 节和第 4 节中，我们分别为 $k \geq 1$ 建立局部 $W^{2,\,2}$ 和 $C^{k,\,\delta}$ 估计。在第 5 节中，我们证明 Legendrian 屏障的存在会迫使渐近荷消失。在第 6 节中，我们证明，当穿孔附近的勒让德边界对 $(R_0, R_1)$ 在适当意义下横截时，上述收敛是指数快速的。在第 2 部分中，我们为具有勒让德边界条件的接触瞬子建立 Fredholm 理论，并证明相关的指标公式。

本文的第 I 部分曾作为第一作者 arXiv 预印本 arXiv:2103.15390《接触哈密顿动力学与具有勒让德边界条件的扰动接触瞬子》的一部分发布。本文不仅对其中的证明提供了更多细节，还补充了方程 (1.4) 的指标公式；这两者都是一般性研究解的模空间及其在接触拓扑和接触哈密顿动力学中的应用所必不可少的要素。（例如，参见 [Oh21b、OYb、Ohc] 。）关于带边界接触瞬子模空间的紧化研究，参见 [Oh21b] ；关于其在研究接触同胚的平移点的 Sandon-Shelukhin 猜想中的应用，参见 [Oh22a] ；关于接触瞬子的粘合理论，参见 [Ohb]；关于将本文的研究拓展至哈密顿扰动的（带边界）接触瞬子，参见 [Oh21a] 。

应广大读者的要求，我们新增了第 1.5 小节，阐释我们对接触瞬子的分析与辛化中的伪全纯曲线研究之间的关系，并在附录 A 中加入了一个附录，总结向量值形式的基本外微分演算。

注 1.15. (1) 借此机会，我们首次以书面形式指出，自 [OW14] 引入接触三元组联络以来，三元组联络最适用于对（扰动）接触瞬子进行有效的张量研究。（更详细的评论见注 A.2。）(2) 关于在接触流形的 $\mathfrak{lcs}$-化上研究伪全纯曲线的类似结果，我们请读者参阅 [OS] ；这些结果同样适用于辛化情形。

致谢：我们衷心感谢匿名审稿人指出了许多疏忽造成的错误，并就论文的呈现方式提出了有益的建议。我们相信，这些建议极大地改善了论文的阐述。

约定：

- （接触哈密顿量）时间依赖接触向量场 $X_t$ 的接触哈密顿量定义为

$$H := -\lambda(X_t).$$

我们用 $X_H$ 表示接触向量场，其对应的接触哈密顿量为 $H = H(t,x)$。

- 辛流形 $(P,\omega)$ 上的哈密顿向量场定义为 $X_H \rfloor \omega = dH$。我们用

$$\psi_H : t \mapsto \psi_H^t$$

表示其哈密顿流。

- 我们用 $R_\lambda$ 表示与 $\lambda$ 对应的 Reeb向量场。我们用

$$\phi_{R_\lambda}^t$$

表示其流。于是有 $\phi_{R_\lambda}^t = \psi_{-1}^t$，即 Reeb流是常值哈密顿量 $H = -1$ 所对应的接触哈密顿流。

- 全文中会出现各种正的常数，记作 $C$ 或 $C_i$，以及函数 $C_\delta = C_\delta(r)$ $C_\delta(r,s)$ 和 $C_\delta(r_1, r_2, \ldots, r_k)$；它们会随位置而变化。这些常数和函数与光滑映射 $w$ 无关，只取决于三元组 $(M,\lambda,J)$ 的几何、勒让德边界条件，以及估计中考虑的 $w$ 的相关子区域。对于第 4 节中出现的 $C_\delta$，它在 $\vec{r} = (r_1, \cdots, r_k) = (0, \ldots, 0)$ 处总是连续的，并且对所有充分小的 $\vec{r}$ 都有定义；其小到何种程度取决于第 4 节交替自举归纳过程中前一阶段所得的界。

第一部分：先验估计、渐近收敛与电荷消失

考虑一般的接触流形 $(M,\lambda)$，它们配备了一个 $\lambda$-适配的 CR 近复结构；在 [OW14、OW18a、OW18b] 中，这种结构称为接触三元组。

为了突出带勒让德边界条件的受扰接触瞬子的先验估计中的要点，本文余下部分将限于 $H = -1$ 的情形，并将讨论如何修改以处理哈密顿项的问题留待后续论文探讨 [Oh21a], [OYb]。

我们先概述 [OW14] 中引入的接触三元组联络的基本性质，这些性质将在推导各种 Weitzenb¨ock 型公式时用于张量计算。三元组联络的定义性质也与接触瞬子的勒让德边界条件配合得很好。（具体见第 3 节。）

## 2. Review of the contact triad connection

设 $(M,\lambda,J)$ 是接触流形 $(M,\xi)$ 上的一个接触三元组，并赋予其接触三元组度量 $g = g_\xi + \lambda \otimes \lambda$。在 [OW14], 中，作者为每个带有接触三元组度量的接触三元组 $(M,\lambda,J)$ 引入了相应的接触三元组联络，并证明了其存在性和唯一性。

定理 2.1（接触三元组联络 [OW14]）。对于每个接触三元组（$M$， $\lambda$， $J$），存在唯一的仿射联络 $\nabla$，称为接触三元组联络，它满足以下性质：

（1）联络 $\nabla$ 关于接触三元组度量是度量相容的，即$\nabla g = 0$；（2） $\nabla$ 的挠率张量 $T$满足 $T(R_\lambda, \cdot) = 0$；（3）协变导数满足 $\nabla_{R_\lambda} R_\lambda = 0$，且对于任意 $Y \in \xi$，有 $\nabla_Y R_\lambda \in \xi$；（4）投影 $\nabla^\pi := \pi\nabla|_\xi$ 定义了向量丛 $\xi \to M$ 上的厄米联络，其厄米结构为（$d\lambda|_\xi$， $J$）；（5）挠率 $T$的 $\xi$-投影记作 $T^\pi$: $= \pi T$，满足以下性质:

$$T^\pi(JY, Y) = 0 \tag{2.1}$$

对所有与 $\xi$ 相切的 $Y$；

(6) 对于 $Y \in \xi$，我们有如下

$$\partial_Y^\nabla R_\lambda := \frac{1}{2}(\nabla_Y R_\lambda - J\nabla_{JY} R_\lambda) = 0.$$

由此定理可知，接触三元组联络 $\nabla$ 规范地诱导出厄米向量丛 $(\xi, J, g_\xi)$ 上的厄米联络 $\nabla^\pi$，我们称之为接触厄米联络。后续各节将利用此联络研究 $\pi$-能量的估计。

此外， [OW14], 证明了接触三元组联络的以下基本性质，这些性质有助于后续进行张量计算。

推论 2.2. 设 $\nabla$ 为接触三元组联络。则

(1) 对于 $M$ 上的任意向量场 $Y$，

$$\nabla_Y R_\lambda = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{R_\lambda} J)JY; \tag{2.2}$$

(2) $\lambda(T|_\xi) = d\lambda$。

关于三元组联络及其与其他相关典范型联络之间关系的更多讨论，请读者参阅 [OW14] 。

## 3. Local coercive $W^{2,2}$ estimate under Legendrian boundary condition

现在我们为边值问题 (1.4) 建立椭圆先验估计，该问题推广了 [OW18a] 中证明的内部估计。

3.1. [OW18a] 中的基本微分不等式。我们从 [OW18a] 中推导出的以下逐点不等式开始。

引理 3.1（方程 (5.13)， [OW18a]）。设 $w$ 为任意接触瞬子 $w : (\Sigma, j) \to (M; \lambda, J)$，即满足方程的任意映射

$$\overline{\partial}^\pi w = 0, \quad d(w^*\lambda \circ j) = 0. \tag{3.1}$$

那么我们有

$$|\nabla(dw)|^2 \le C_1|dw|^4 - 4K|dw|^2 - 2\Delta|dw|^2 \tag{3.2}$$

回顾 (1.7)，我们有

$$|dw|^2 = |d^\pi w|^2 + |w^*\lambda|^2 = |\partial^\pi w|^2 + |w^*\lambda|^2$$

对于满足 $\overline{\partial}^\pi w = 0$ 的接触瞬子 $w$。

为了展示 (3.1) 的用途，并为我们即将进行的张量计算做准备，我们回顾以下 $\epsilon$-正则性和内部密度估计的证明；这些结果已在 [OW18a] 中证明。

定理 3.2（推论 5.2 [OW18a]）。存在常数 $C$、 $\epsilon_0$ 和 $r_0 > 0$，它们仅依赖于 $J$ 以及 $\dot{\Sigma}$上的 Hermitian 度量 $h$，使得对于任意 $C^1$ 接触瞬子 $w: \Sigma \to M$ 满足

$$E(r_0) := \frac{1}{2}\int_{D(r_0)} |dw|^2 \leq \epsilon_0,$$

以及圆盘 $D(2r) \subset \operatorname{Int}\Sigma$，其中 $0 < 2r \leq r_0$、 $w$ 满足

$$\max_{\sigma\in(0,r]} \left( \sigma^2 \sup_{D(r-\sigma)} e(w) \right) \leq CE(r) \tag{3.3}$$

对所有 $0 < r \leq r_0$均成立。特别地，令 $\sigma = r/2$，可得

$$\sup_{D(r/2)} |dw|^2 \leq \frac{4CE(r)}{r^2} \tag{3.4}$$

对所有 $r \leq r_0$均成立。

该定理的证明可由将 (3.1) 重写为下式立即得出

$$\Delta|dw|^2 \leq -\frac{1}{2}\nabla|dw|^2 + \frac{C_1}{2}|dw|^4 - 2K|dw|^2 - \Delta|dw|^2 \leq \frac{C_1}{2}|dw|^4 - 2K|dw|^2$$

由此得到以下微分不等式

$$\Delta e(w) \leq Ce(w)^2 + \|K\|_{L^\infty(\dot{\Sigma})} e(w),$$

with

$$C = 2\|\mathcal{L}_{R_\lambda} J\|^2_{C^0(M)} + \|\nabla^\pi(\mathcal{L}_{R_\lambda} J)\|_{C^0(M)} + \|\mathrm{Ric}\|_{C^0(M)} + 1$$

这是一个与 $w$ 无关的正数。将其限制在足够小的区域上，再由 [Sch] 中的标准论证即可得到定理（另见 [Oh15, 定理 8.13] 和 [OW18a, 定理 5.1] 的证明。）

接下来，我们将再次利用 (3.1) 推导局部边界先验估计，其中勒让德边界条件和接触三元组联络的使用发挥着重要作用。

3.2. $W^{1,2}$ 边界估计。本节的主要目标是推导以下局部边界先验估计。

定理 3.3. 设 $w: \mathbb{R}\times[0,1] \to M$ 满足 (1.4)。那么，对于任意相对紧区域 $D_1$ 和 $D_2$，若它们满足 $\Sigma$ 中的 $\overline{D_1} \subset D_2$，则有

$$\|dw\|^2_{W^{1,2}(D_1)} \leq C_1\|dw\|^2_{L^2(D_2)} + C_2\|dw\|^4_{L^4(D_2)} \tag{3.5}$$

其中 $C_1$、 $C_2$ 是一些常数，它们仅取决于 $D_1$、 $D_2$ 和 $(M, \lambda, J)$；而 $C_3$ 是一个还取决于 $R_i$，且 $w(\partial D_2) \subset R_i$ 也成立的常数。

在深入进行张量计算之前，我们先概述证明的策略，该策略沿用 [Oh15 第 8.2节和第 8 节中针对具有拉格朗日边界条件的伪全纯曲线所采用的相同策略:

(1) 首先，我们利用接触三元组联络 $\nabla$ 研究边值问题，推导出以下微分不等式

$$\|dw\|^2_{W^{1,2}(D_1)} \leq C_1\|dw\|^2_{L^2(D_2)} + C_2\|dw\|^4_{L^4(D_2)} + \int_{\partial D} |C(\partial D)| \tag{3.6}$$

其中我们有

$$C(\partial D) := -8\left\langle B\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}\right), \frac{\partial w}{\partial y}\right\rangle \tag{3.7}$$

取适配于 $\partial\Sigma \cap D_2$ 的等温坐标 $z = x + iy$。

(2) 一旦推导出 (3.6)，注意到接触瞬子的勒让德边界条件 $R$ 自动构成自由边值问题，即

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} \perp TR,$$

可以使用使 $R$ 成为全测地的度量的列维-奇维塔联络（即 $B = 0$），从而消除上述 (3.6) 中出现的边界贡献项。接着回顾一个标准事实：对于 (2, 1) 张量， $\nabla = \nabla^{\mathrm{LC}} + P$，我们便可将该不等式转化为 (3.5)。（相关细节见 [Oh15，第 8 节。3] ）

因此，本节余下部分将着重推导不等式 (3.6)。

定理 3.3 的证明。证明的第一部分与 [OW18a 中的内部估计类似，即 [OW18a 附录 C] 中给出的命题 5.3] 。

然而，为了在估计中处理勒让德子流形边界条件，我们需要仔细分析接触瞬子方程与勒让德子流形边界之间的相互作用。这也正是充分运用接触三元组联络定义性质的另一处。

我们首先考虑一对半测盘 $D_1 \subset D_2$ 满足 $\partial D_1, \partial D_2 \subset L$ 的情形 $\Sigma$。（开圆盘的情形 $D_1 \subset \dot{D}_2$ 已在 [OW18a 附录 C] 中讨论。）

对于给定的一对区域 $D_1$ 和 $D_2$，我们选取另一个区域 $D$，使得 $\overline{D_1} \subset D \subset \overline{D} \subset D_2$，并取一个光滑截断函数 $\chi\colon D_2 \to \mathbb{R}$，使得 $\chi \geq 0$且 $\chi \equiv 1$ 在 $\overline{D_1}$上、 $\chi \equiv 0$ 在 $D_2 - D$ 上。于是有

$$\int_{D_1} |\nabla(dw)|^2 \leq \int_D \chi^2 |\nabla(dw)|^2.$$

将 (3.2) 乘以 $\chi^2$ 并在 $D$ 上积分，我们还得到

$$\begin{aligned}\int_D \chi^2|\nabla(dw)|^2 &\leq C_1\int_D \chi^2|dw|^4 - 4\int_D K\chi^2|dw|^2 - 2\int_D \chi^2\Delta e \\ &\leq C_1\int_{D_2} |dw|^4 + 4\|K\|_{L^\infty(\dot{\Sigma})}\int_{D_2}|dw|^2 - 2\int_D \chi^2\Delta e \end{aligned} \tag{3.8}$$

其中 $C_1$ 是 (3.2) 中出现的同一个常数。

现在处理最后一项 $\int_{D_2}\chi^2\Delta e$。我们将其改写为

$$\begin{aligned}\chi^2\Delta e\, dA &= *(\chi^2\Delta e) = \chi^2 * \Delta e = -\chi^2 d * de \\ &= -d(\chi^2 * de) + 2\chi d\chi \wedge (*de). \end{aligned} \tag{3.9}$$

为处理右端，我们分别估计这两项。

对于 (3.9) 的第二项，我们推导出以下不等式。（其推导细节见 [OW18a，第 677] 页。）

引理 3.4（方程（3.7），[OW18a]）。对于任意 $\epsilon > 0$，有

$$\left| \int_D \chi d\chi \wedge (*de) \right| \leq \frac{1}{\epsilon} \int_D \chi^2 |\nabla(dw)|^2 \, dA + \epsilon \|d\chi\|^2_{C^0(D)} \int_D |dw|^2 \, dA \tag{3.10}$$

现在我们估计（3.9）中第一项的积分

$$\int_D -d(\chi^2 * de) = \int_{\partial D} -\chi^2 * de \tag{3.11}$$

斯托克斯公式估计（3.9）中第一项的积分。为此，我们需要明确计算 $*de|_{\partial D}$。新要素——边界估计——正是在此处开始发挥作用，而其计算在 [OW18a] 中并不存在。这也是接触三元组联络的定义性质充分发挥作用之处。

令 $z_0 \in \dot{\Sigma}$ 为任意边界点，$z = x + iy$ 为（$\dot{\Sigma}$，$j$）的一个等温坐标，使得在带有 $\partial D^2 \subset \partial \dot{\Sigma}$ 且 $\frac{\partial}{\partial x} \in TR$ 位于 $\partial D^2$ 上的半圆盘开邻域 $D_2 \subset \dot{\Sigma}$ 中，$h = dx^2 + dy^2$。

引理 3.5. $w$ 满足诺伊曼边界条件，即 $\frac{\partial w}{\partial y} \perp TR_i$。

证明。由于 $R_i$ 是勒让德子流形，$TR \subset \xi$，因此

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^\pi$$

沿着 $\partial D_2$。由于 $\overline{\partial}^\pi w = 0$，我们有

$$-J \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^\pi = \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^\pi = \frac{\partial w}{\partial x} \in TR_i.$$

因此 $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^\pi \in NR_i$。由于 $R_\lambda \in NR_i$，这就证明了

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^\pi + \lambda \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) R_\lambda$$

包含于 $NR_i$ 中。证明完毕。 □

注 3.6. 我们回顾一下：接触三元组联络保持度量，但可能具有非零挠率，也就是说，它不是三元组度量的列维-奇维塔联络。对于这样的黎曼联络，子流形 $S \subset (M, g)$ 的第二基本形式仍是一个双线性映射 $B\colon\ TS \times TS \to NS$，其定义为对称平均

$$B(X_1, X_2) = \frac{1}{2}((\nabla_{X_1} X_2)^\perp + (\nabla_{X_2} X_1)^\perp). \tag{3.12}$$

由于 $\xi \perp R_\lambda$ 相对于三元组度量，且 $\frac{\partial w}{\partial x} \in TR \subset \xi$ 在 $\partial \dot{\Sigma}$ 上，

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^\pi = -J \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^\pi,$$

and

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^\pi + \lambda \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) R_\lambda.$$

因此，我们可以将调和能量密度函数表示为

$$e := \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial w}{\partial y}\right|^2 = 2\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^2 + \left|\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right|^2.$$

接下来我们计算

$$*\, de|_{\partial D} = -\frac{de}{dt} = -4\left\langle \nabla_t \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}\right\rangle - 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right)\cdot\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right). \tag{3.13}$$

由于 $w$ 满足诺伊曼边界条件，第一项变为

$$-4\left\langle B\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}\right), \frac{\partial w}{\partial y}\right\rangle \tag{3.14}$$

其中第二基本形式由定义（7.5）给出。

对于（3.13）的第二项，我们证明如下消失结论。

引理3.7。我们有

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right) = 0 \tag{3.15}$$

在 $\partial D_2$ 上。特别地，(3.13) 的第二项在 $\partial D_2$ 上消失。

证明。由闭性 $d(w^*\lambda\circ j) = 0$，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right) = 0$$

通过计算 $0 = d(w^*\lambda\circ j)(\partial_x, \partial_y)$ 可得。因此我们有

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right).$$

由于 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 在 $\partial\dot{\Sigma}$ 上与勒让德子流形 $R$ 相切，后一项沿 $\partial\dot{\Sigma}$ 消失。证明至此完成。□

我们将上述关于 $*de|_{\partial D}$ 的计算总结为以下命题。

命题3.8。我们有

$$*\, de = -4\left\langle B\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}\right), \frac{\partial w}{\partial y}\right\rangle \tag{3.16}$$

在 $\partial D$ 上。

然后，将 (3.10) 和 (3.16) 代入 (3.9) 的积分中，可得

$$\left|2\int_D \chi^2\Delta e\right| \le \int_D \frac{2\chi^2}{\epsilon}|\nabla(dw)|^2 + 2\epsilon\|d\chi\|_{C^0(D)}\int_{D_2}|dw|^2 + \int_{\partial D}|C(\partial D)|$$

其中

$$C(\partial D) := 8\left\langle B\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}\right), \frac{\partial w}{\partial y}\right\rangle$$

对于任意正数常量 $\epsilon > 0$。

将其代入 (3.8)，并重新排列各项后，可得

$$\begin{aligned}\int_D \chi^2|\nabla(dw)|^2 &\leq \int_D \frac{2\chi^2}{\epsilon}|\nabla(dw)|^2 \\ &\quad + \left(4\|K\|_{L^\infty(\dot\Sigma)} + 2\epsilon\|d\chi\|_{C^0(D)}\right)\int_{D_2}|dw|^2 \\ &\quad + C_1\int_{D_2}|dw|^4 + \int_{\partial D}|C(\partial D)|\end{aligned}$$

这等价于

$$\begin{aligned}\int_D \left(1-\frac{2}{\epsilon}\right)\chi^2|\nabla(dw)|^2 &\leq \left(4\|K\|_{L^\infty(\dot\Sigma)} + 2\epsilon\|d\chi\|_{C^0(D)}\right)\int_{D_2}|dw|^2 \\ &\quad + C_1\int_{D_2}|dw|^4 + \int_{\partial D}|C(\partial D)|.\end{aligned}$$

现在取 $\epsilon = 4$。于是得到

$$\begin{aligned}&\int_D \chi^2|\nabla(dw)|^2 \\ &\leq \left(8\|K\|_{L^\infty(\dot\Sigma)} + 16\|d\chi\|^2_{C^0(D)}\right)\int_{D_2}|dw|^2 + 2C_1\int_{D_2}|dw|^4 + 2\int_{\partial D}|C(\partial D)|.\end{aligned}$$

回想一下 $D_1 \subset D \subset D_2$，并且根据 $\chi$ 的定义性质，$\int_{D_1}|\nabla(dw)|^2 \leq \int_D \chi^2|\nabla(dw)|^2$。因此令 $D \to D_2$ 并设

$$\begin{aligned}C_1' &= C_1'(D_1, D_2) = 8\|K\|_{L^\infty(\dot\Sigma)} + 16\|d\chi\|^2_{C^0(D)} \\ C_2' &= C_2'(D_1, D_2) = 2C_1\end{aligned}$$

我们得到了

$$\int_{D_1}|\nabla(dw)|^2 \leq C_1'\int_{D_2}|dw|^2 + C_2'\int_{D_2}|dw|^4 + 2\int_{\partial D}|C(\partial D)|.$$

去掉撇号并调整常数后，我们终于完成了 (3.6) 的证明，从而也完成了定理 3.3。□

## 4. $C^{k,\,\delta}$ COERCIVE ESTIMATES FOR $k \geq 1$

一旦我们建立了 $W^{2,\,2}$ 估计，就可以像 [OW18a 第 5 节2]那样，归纳地进行 $W^{k+2,\,2}$ 估计 $k \geq 1$。Legendrian 边界条件对高阶导数估计的影响并不十分直接，不过应该是可行的。我们改用较简单的方法：将下述基本方程写在 $(\Sigma, j)$ 的等温坐标中，使用赫尔德估计而非索博列夫估计。当前方法也简化了 [OW18a 第 5 节2] 中的高阶导数估计；该处采用的是 $W^{k+2,\,2}$ 估计。

定理 4.1（定理 4.2, [OW14]）。设 $w$ 满足 $\overline{\partial}^\pi w = 0$。则

$$d^{\nabla^\pi}(d^\pi w) = -w^*\lambda \circ j \wedge \left(\frac{1}{2}(\mathcal{L}_{R_\lambda}J)\, d^\pi w\right). \tag{4.1}$$

（为方便读者，我们在附录 A 中回顾协变外微分 $d^{\nabla^\pi}$ 的定义，以及一般情况下适用于向量值微分形式的其他相关微积分。）

在等温坐标 $z = x + iy$ 中，将（$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$）代入（4.1），方程变为

$$\nabla_x^\pi \zeta + J\nabla_y^\pi \zeta + \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)(\mathcal{L}_{R_\lambda} J)\zeta - \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)(\mathcal{L}_{R_\lambda} J)J\zeta = 0.$$

（参见 [OW14，推论 4.3]。）通过写作

$$\overline{\nabla}^\pi := \nabla^{\pi(0,1)} = \frac{\nabla^\pi + J\nabla_{j(\cdot)}^\pi}{2}$$

它是 $\nabla^\pi$ 的反复线性部分，而线性算子

$$P_{w^*\lambda}(\zeta) := \frac{1}{4}\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)(\mathcal{L}_{R_\lambda} J)\zeta - \frac{1}{4}\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)(\mathcal{L}_{R_\lambda} J)J\zeta,$$

该方程变为

$$\overline{\nabla}^\pi \zeta + P_{w^*\lambda}(\zeta) = 0 \tag{4.2}$$

这是一个柯西-黎曼型线性一阶偏微分方程。我们注意到，根据索伯列夫嵌入， $W^{2,\ 2} \subset C^{0,\ \delta}$ 对 $0 \leq \delta < 1/2$ 成立。因此，我们从 $C^{0,\ \delta}$界开始，其中 $0 < \delta < 1/2$ ，并将通过归纳逐步将其提升为 $C^{k,\ \delta}$ 界，对 $k \geq 1$ 成立

不失一般性，假设 $(x, y) \subset$ 使得 $\dot{\Sigma}$ 是一个半圆盘，满足 $\partial D \subset \partial$ 。

$$D_2 = \{(x, y) \mid |x|^2 + |y|^2 < \epsilon,\ y \geq 0\}$$

对某个 $\epsilon > 0$ ，因此 $\partial D_2 \subset \{(x, y) \in D \mid y = 0\}$。设 $D_1 \subset D_2$ 是半径为 $\epsilon/2$的半圆盘。我们按照 [OW18a], 中的记号，记$\zeta = \pi\frac{\partial w}{\partial x}$, $\eta = \pi\frac{\partial w}{\partial y}$，并考虑复值函数

$$\alpha(x, y) = \lambda\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \sqrt{-1}\left(\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right) \tag{4.3}$$

按照 [OW18b 第11.5]小节中的定义。注意，由于 $w$ 满足勒让德子流形边界条件，我们有

$$\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \tag{4.4}$$

在 $\partial D_2$上。

引理 4.2（引理 11.19 [OW18b]）。设$\zeta = \pi\frac{\partial w}{\partial x}$。则

$$*d(w^*\lambda) = |\zeta|^2.$$

结合引理 4.2 和方程 $d(w^*\lambda \circ j) = 0$，我们注意到 $\alpha$ 满足以下方程

$$\begin{cases} \overline{\partial}\alpha = \nu, \quad \nu = \frac{1}{2}|\zeta|^2 \\ \alpha(z) \in \mathbb{R} \quad z \quad \text{for} \quad \in \partial D_2 \end{cases} \tag{4.5}$$

根据（4.4），其中 $\overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ 是标准复结构 $J_0 = \sqrt{-1}$ 对应的标准柯西-黎曼算子。

于是我们得到关于这一对（$\zeta, \alpha$）的以下方程组

$$\begin{cases} \nabla_x^\pi \zeta + J\nabla_y^\pi \zeta + \frac{1}{2}\lambda(\frac{\partial w}{\partial y})(\mathcal{L}_{R_\lambda} J)\zeta - \frac{1}{2}\lambda(\frac{\partial w}{\partial x})(\mathcal{L}_{R_\lambda} J)J\zeta = 0 \\ \zeta(z) \in TR_i \quad \text{for} \quad z \in \partial D_2 \end{cases} \tag{4.6}$$

对于某些 $i = 0, \ldots, k$，以及

$$\begin{cases} \overline{\partial}\alpha = \frac{1}{2}|\zeta|^2 \\ \alpha(z) \in \mathbb{R} \quad \text{for } z \in \partial D_2. \end{cases} \tag{4.7}$$

这两个方程构成了关于 $(\zeta, \alpha)$ 的非线性椭圆系统，其中两者相互耦合：$\alpha$ 通过其系数进入 (4.6)，随后 $\zeta$ 为方程 (4.7) 提供输入，之后两者交替作用。利用这种耦合结构，我们现在可以通过在 $\zeta$ 和 $\alpha$ 之间交替使用自举论证，推导高阶导数估计。

定理 4.3. 设 $w$ 是满足 (1.4) 的接触瞬子。则对于任意一对满足 $\overline{D_1} \subset D_2$ 的区域 $D_1 \subset D_2 \subset \Sigma$，有

$$\|dw\|_{C^{k,\delta}(D_1)} \leq C_\delta(\|dw\|_{W^{1,2}(D_2)})$$

对于某个正函数 $C_\delta = C_\delta(r)$，它在 $r = 0$ 处连续，依赖于 $J$、$\lambda$ 和 $D_1$、$D_2$，但与 $w$ 无关。

本节其余部分将用于证明，该证明采用在 $\zeta$ 和 $\alpha$ 之间来回交替自举的论证。

4.1. 交替自举的开始：$W^{1,2}$- $dw$估计。将等温坐标 $(x, y)$ 中的 Reeb 分量 $w^*\lambda = f\,dx + g\,dy$ 写成

$$f = \lambda\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad g = \lambda\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

我们将复值函数 $\alpha$ 表示为上文(4.3)中定义的 $\alpha = g + \sqrt{-1}f$。于是，$\zeta$满足方程(4.6)。显然，当给定 $w^*\lambda = f\,dx + g\,dy$时，(4.6)是关于 $\zeta$的一个带有全实边界方程的柯西-黎曼型线性椭圆方程。

于是，定理 3.3可直接转化为以下关于 $\zeta$的 $W^{1,2}$ 界。

引理 4.4。我们有

$$\|\zeta\|^2_{W^{1,2}(D_1)} + \|w^*\lambda\|^2_{W^{1,2}(D_1)} \leq C_4(\|\zeta\|^4_{L^4(D_2)} + \|w^*\lambda\|^4_{L^4(D_1)})$$

对常数 $C_4$作适当调整后，特别地，我们有

$$\|\zeta\|^2_{W^{1,2}(D_1)} \leq C_4(\|\zeta\|^4_{L^4(D_2)} + \|w^*\lambda\|^4_{L^4(D_1)}) \tag{4.8}$$

$$\|w^*\lambda\|_{W^{1,2}(D_1)} \leq C_4(\|\zeta\|^4_{L^4(D_2)} + \|w^*\lambda\|^4_{L^4(D_1)}). \tag{4.9}$$

然后我们考虑关于 $\zeta$ 的方程(4.6)，并得到估计

$$\|\overline{\nabla}^\pi\zeta\|^2_{W^{1,2}(D_1)} \leq C(\|f\|_{W^{1,4}(D_2)} + \|g\|_{W^{1,4}(D_2)})\|\zeta\|_{W^{1,4}(D_2)}.$$

根据$\overline{\nabla}^\pi$ 中柯西-黎曼算子的带狄利克雷边界条件的黎曼-希尔伯特问题在 $W^{2,2}$ Sobolev空间中的标准估计，并结合不等式$\|\zeta\|_{C^{0,\delta}(D_1)} \leq C\|\zeta\|_{W^{2,2}(D_1)}$，我们得出

$$\|\zeta\|^2_{C^{0,\delta}(D_1)} \leq C_1(\|f\|_{W^{1,4}(D_2)} + \|g\|_{W^{1,4}(D_2)})\|\zeta\|_{W^{1,4}(D_2)}$$

例如 $\delta = 2/5 < 1/2$。请注意，右端仅涉及 $dw = d^\pi w + w^*\lambda\, R_\lambda$ 的 $W^{1,4}$范数。

4.2. $C^{1,\,\delta}$-估计 $w^*\lambda = f\,dx + g\,dy$。接下来我们考虑 (4.7)，它是柯西-黎曼算子的另一个带实（或虚）边界条件的黎曼-希尔伯特问题 $\overline{\partial}$。同样，根据带实（或虚）边界条件的黎曼-希尔伯特问题的标准估计，我们得到

$$\|\alpha\|_{C^{1,\delta}(D_1)} \le C_2(\|\zeta\|^2_{C^{0,\delta}(D_2)}, \|\alpha\|_{C^0(D_2)}). \tag{4.10}$$

（参见 Sik94 中的基本 H¨older 估计，命题 2.3.6] ，适用于如下类型的方程:

$$\overline{\partial} f + q(f)\partial f = 0$$

例如。）

4.3. $C^{1,\,\delta}$-估计（ $d^\pi w$）。此时，(4.6) 是 (4.2) 的形式，因此可推出存在一个正函数 $C_\delta = C_\delta(r)$，使得

$$\|\overline{\nabla}^\pi \zeta\|_{C^{0,\delta}(D_1)} \le C_\delta(\|\zeta\|_{C^{0,\delta}(D_2)})$$

对于所有相应的解均成立。这里，函数 $C_\delta(r)$ 对所有充分小的$r$ 均有定义（且在 $r = 0$ 处连续），其充分小性取决于前一阶段得到的 $\|\zeta\|_{C^{0,\,\delta}(D_2)}$ 的界。

再次应用于 (4.6) 的柯西-黎曼型方程估计 $\overline{\partial} f + q(f)\partial f = 0$ 表明，任何相应的解 $\zeta$ 确实满足

$$\|\zeta\|_{C^{1,\delta}(D_1)} \le C_\delta(\|\zeta\|_{C^{0,\delta}(D_2)}, \|\zeta\|_{C^0(D_2)})$$

其中， $C_\delta(r, s)$ 在 $(r, s) = (0, 0)$ 处仍为连续函数。将两者结合，我们得到

$$\|\zeta\|_{C^{1,\delta}(D_1)} \le C_\delta(\|\zeta\|_{C^{0,\delta}(D_2)}, \|\zeta\|_{C^0(D_2)}) \tag{4.11}$$

对于 (4.13) 的所有解。

4.4. $C^{2,\,\delta}$-估计，适用于 $w^*\lambda$。现在我们回到 (4.7)。对其关于 $x$ 求导，得到同类型的方程

$$\begin{cases} \overline{\partial}(\nabla_x \alpha) + [\nabla_x, \overline{\partial}]\alpha = \nabla_x \nu \\ \nabla_x \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{for } z \in \partial D_2 \end{cases}$$

其中， $[\nabla_x, \overline{\partial}]$ 是 $\nabla_x$ 与 $\overline{\partial}$ 的交换子，它是一个零阶算子。我们有

$$\nabla_x \nu = \langle \nabla_x \zeta, \zeta \rangle$$

从而得到界

$$\|\nabla_\tau \nu\|_{C^{0,\delta}} \le \|\zeta\|_{C^0} \|\nabla_x \zeta\|_{C^{0,\delta}} \|\zeta\|_{C^{0,\delta}} \|\nabla_x \zeta\|_{C^0} \le C_\delta(\|\zeta_{C^{0,\delta}}, \|\zeta\|_{C^0}).$$

通过重复使用 $C^{1,\,\delta}$-估计，该估计引自 [Sik94，命题 2.3.6(ii)] ，并将其应用于 $\nabla_x \alpha$ 而非 $\alpha$，我们得到

$$\|\nabla_\tau \alpha\|_{C^{1,\delta}(D_1)} \le C_\delta(\|\zeta\|_{C^{0,\delta}(D_2)}, \|\alpha\|_{C^{0,\delta}(D_2)}). \tag{4.12}$$

接着注意到，(4.7) 可以写成

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + i\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\|\zeta\|^2,$$

(4.12) 还意味着对 $\nabla_y \alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial y}$ 有类似的估计。这意味着不等式

$$\|\nabla \alpha\|_{C^{1,\delta}(D_1)} \le C_\delta(\|\zeta\|_{C^{0,\delta}(D_2)})$$

这证明了 $\alpha$ 的 $C^{2,\delta}$-估计。

4.5. $C^{2,\delta}$-估计（针对 $d^\pi w$）。现在我们回到 (4.13)。在这一步中，我们暂时不使用三元组联络，而是采用列维-奇维塔联络$\nabla^{LC}$ 进行协变微分；如前所述，相对于该联络， $R_i$ 是全测地的。（这是因为如果我们采用 $\nabla_x\zeta$，后者可能不与 $R_i$ 相切，因此无法应用 (4.6) 的前一步。）

利用 $\nabla^{\mathrm{LC}} = \nabla + A$ 与一个零阶算子 $A$这一事实，可得

$$\begin{cases} \nabla_x^\pi(\nabla_x^{\mathrm{LC}}\zeta) + J\nabla_y^\pi(\nabla_x^{\mathrm{LC}}\zeta) - \frac{1}{2}g\,\mathcal{L}_{R_\lambda}J\,(\nabla_x^{\mathrm{LC}}\zeta) + \frac{1}{2}f(\mathcal{L}_{R_\lambda}J)J(\nabla_x^{\mathrm{LC}}\zeta) + Q(\zeta) = 0, \\ \nabla_x^{\mathrm{LC}}\zeta \in TR_i \quad \text{for } z \in \partial D_2 \end{cases} \tag{4.13}$$

其中， $Q$ 是关于 $\zeta$ 的线性零阶算子，其系数至多依赖于$\zeta$ $f$、 $\nabla_x f$、 $g$、 $\nabla_x g$ ，而这些目前都属于 $C^{1,\delta}$ 类。该方程对于变量 $\nabla^{\mathrm{LC}}\zeta$而言仍是一个柯西-黎曼型方程。

项 $Q(\zeta)$ 的出现，是因为对 (4.6) 取协变微分时，不仅涉及 $\nabla_x^{\mathrm{LC}}\zeta$ ，还涉及线性方程系数函数的微分，以及该方程的交换子

$$\left[\nabla_x^\pi, \nabla_x^{\mathrm{LC}}\right].$$

因此，将前面的 $C^{1,\,\delta}$-估计应用于 $\nabla_x^{\mathrm{LC}}\zeta$ 而非 $\zeta$，我们得到

$$\|\nabla_x^{\mathrm{LC}}\zeta\|_{C^{1,\delta}(D_1)} \leq C_\delta(\|\zeta\|_{C^{0,\delta}(D_2)}, \|\alpha\|_{C^{1,\delta}(D_2)}, \|\zeta\|_{C^0(D_2)}).$$

综合以上结果，我们便可推出

$$\|\zeta\|_{C^{2,\delta(D_1)}} \leq C_\delta(\|\alpha\|_{C^{1,\delta}(D_2)}, \|\zeta\|_{C^{1,\delta}(D_2)}, \|\zeta\|_{C^0(D_2)}, \|\alpha\|_{C^0(D_2)})$$

w第 i 个 $C_\delta$ 与上面的是同一类函数 ve.

4.6. 交替自举论证的总结。现在，我们通过对 $\nabla_x^{\mathrm{LC}}$ 取微分，在 $\zeta$ 和 $\alpha$ 之间来回重复上述交替自举论证，从而归纳地推出 $C^{k,\,\delta}$-估计，分别以$\|\zeta\|_{L^4(D_2)}$ 和$\|\alpha\|_{L^4(}$ $_{D_2)}$ 为依据，得到关于 $\zeta$ 和 $\alpha$ 的估计；这等价于考虑完整的$\|dw\|_{L^4}$。定理 4.3 得证。

注 4.5. 随着求取的导数阶数不断增加，上述函数 $C_\delta$ 中自变量个数的多项式增长，与高阶协变微分 $(\nabla)^{k+1}(dw)$ 的类似多项式界相一致；后者是关于 $d^\pi w$ 和 $w^*\lambda$ 的，其 $W^{k+2,\,2}$ Sobolev空间界由闭弦背景下接触瞬子的情形给出，见 [OW18a，定理 1.7]。

## 5. Vanishing of asymptotic charge and subsequence convergence

本节研究带有条带状端的度量 $h$ 所对应的黎曼曲面 $(\Sigma, j)$ 上接触瞬子的渐近行为。具体而言，我们假设存在一个紧集 $K_\Sigma \subset \Sigma$，使得 $\Sigma - \mathrm{Int}(K_\Sigma)$ 是若干带穿孔半圆盘的不交并，且每个半圆盘都与半条带$[0,\infty) \times [0,1]$ 或 $(-\infty, 0] \times [0,1]$ 等距，其中选取正条带还是负条带取决于穿孔处解析坐标的选取。我们将正穿孔记为$\{p_i^+\}_{i=1,\cdots,l^+}$，将负穿孔记为 $\{p_j^-\}_{j=1,\cdots,l^-}$。这里 $l = l^+ + l^-$。将这类条带型坐标记为 $\phi_i^\pm$。我们首先陈述研究

边界 puncture 行为的假设。（内点 puncture 的情形见 [OW18a 第 6] 节。）

定义 5.1. 设 $\Sigma$ 是一个亏格为零、带边界穿孔的黎曼曲面，其穿孔为 $\{p_i^+\}_{i=1,\ \cdots,\ l^+} \cup \{p_j^-\}_{j=1,\ \cdots,\ l^-}$ 并配备度量 $h$，在紧子集 $K_\Sigma$之外具有条带-状端。设 $w$：$\Sigma \to M$ 是任意满足勒让德边界条件的光滑映射。我们定义总的 $\pi$-调和能量 $E^\pi(w)$ 为

$$E^\pi(w) = E^\pi_{(\lambda,J;\dot\Sigma,h)}(w) = \frac{1}{2}\int_{\dot\Sigma} |d^\pi w|^2 \tag{5.1}$$

其中，范数是相对于 $\Sigma$ 上的给定度量 $h$ 以及 $M$上的三元组度量取的。

在对有限能量接触瞬子映射 $w$ 进行渐近研究时，我们采用以下假设；这些映射如 [OW18a], 中所述，但不要求满足电荷消失条件 $Q = 0$。在勒让德边界条件这一假设下，我们将在此证明该条件本身成立：

假设 5.2. 设 $h$ 为上述给定的 $\Sigma$ 上的度量。假设 $w : \Sigma \to M$满足接触瞬子方程 (1.4)，并且

(1) $E^\pi$ ($\lambda$<style id='5', $J$<style id='8'; $\dot\Sigma$<style id='11', $h$)$(w) < \infty$ （有限 $\pi$-能量）；(2) $\|dw\|_{C^0($ $\dot\Sigma) < \infty$。(3) 像 $w \subset$ K $\subset M$，其中 K 是某个紧集。

在本节中，我们始终在边界穿孔 $p$ 附近进行局部研究，即在一个穿孔半圆盘 $D^\delta(p)$ $\setminus \{p\}$ 上。通过取相应的共形坐标$\phi^+ =(\tau, t)$ : $D^\delta(p) \setminus \{p\} \to [0,\infty) \times [0,1]$，使得 $h = d\tau^2 + dt^2$，不失一般性，我们只需考察定义在半条带 $[0,\infty) \times [0,1] \to M$ 上的映射 $w$。

上述有限 $\pi$-能量和 $C^0$ 有界假设意味着

$$\int_{[0,\infty)\times[0,1]} |d^\pi w|^2\, d\tau\, dt < \infty, \quad \|dw\|_{C^0([0,\infty)\times[0,1])} < \infty \tag{5.2}$$

在这些坐标中。

我们将使用下面这个等式，该等式在 [OW14] 中推导得出。（参见 [OW14，公式 (3.1)]。）

引理 5.3. 设 $h$ 是 ($\Sigma$, $j$) 上的 K ¨ahler 度量。假设 $w$ 满足 $\overline{\partial}^\pi w = 0$。则

$$d(w^*\lambda) = \frac{1}{2}|d^\pi w|^2 dA \tag{5.3}$$

其中 $dA$是 $h$的面积形式。

设 $w$ 满足假设 5.2。此外，我们假设极限 $\lim_{\tau\to\infty} w(\tau,)$ $\to\infty$ 存在。于是，在每个穿孔处，我们可以定义两个自然的渐近不变量：

$$\begin{aligned} T &:= \lim_{r\to\infty}\int_{\{r\}\times[0,1]} (w|_{\{0\}\times[0,1]})^*\lambda \\ Q &:= \lim_{r\to\infty}\int_{\{r\}\times[0,1]} ((w|_{\{0\}\times[0,1]})^*\lambda \circ j). \end{aligned}$$

（此处我们只考虑正穿孔。负穿孔的情形类似。）我们称 $T$ 为接触瞬子 $w$ 在给定穿孔处的渐近接触作用量，称 $Q$ 为其渐近接触荷。

注释 5.4。特别地，式（5.3）对任意接触瞬子 $w$均成立。由斯托克斯公式，我们可以将其表示为

$$T = \frac{1}{2}\int_{[s,\infty)\times[0,1]} |d^\pi w|^2 + \int_{\{s\}\times[0,1]} (w|_{\{s\}\times[0,1]})^*\lambda, \quad \text{for any } s \geq 0$$

不依赖于 $s \geq 0$。

以下子列收敛结果的证明大体沿用了 [OW18a 的定理 6.4]。由于我们需要处理勒让德边界条件，并且还需要在证明过程中证明电荷 $Q$ 消失，因此我们在证明的前半部分重复其中证明的细节，然后在后半部分说明在勒让德边界条件下电荷消失是如何发生的。可以说，勒让德屏障的存在阻止了瞬子螺旋式运动。

定理 5.5（子列收敛）。设 $w\colon [0,\infty) \times [0,1] \to M$ 满足接触瞬子方程（1.4）和假设（5.2）。

那么对于任意序列 $s_k \to \infty$，存在一个子列（仍记为 $s_k$）以及一个无质量瞬子 $w_\infty(\tau, t)$（即 $E^\pi(w_\infty) = 0$），定义在圆柱 $\mathbb{R} \times [0,1]$ 上，并满足以下条件：

(1) $\overline{\partial}^\pi w_\infty = 0$ 并且对于任意 $l$，在 $C^l(K \times [0,1], M)$ 意义下成立，其中 $K \subset [0,\infty)$ 是任意紧集。(2) $\lim_{k\to\infty} w(s_k + \tau, t) = w_\infty(\tau, t)$ 的渐近荷 $Q = 0$ 消失，并满足 $w_\infty(\tau, t) = \gamma(T t)$，其中某个 Reeb 弦 $\gamma$ 是连接 $R_0$ 和 $R_1$、周期为 $T$ 的 Reeb 弦，位于每个穿孔处。(3) 在每个穿孔处，关联的边界条件对 $(R, R')$ 满足 $R \cap R' = \emptyset$，并且 $T \neq 0$。

证明。对于给定的接触瞬子 $w\colon [0,\infty) \times [0,1] \to M$，我们考虑由 $w_s(\tau, t) = w(\tau + s, t)$ 定义的一族映射 $w_s\colon [-s,\infty) \times [0,1] \to M$，其满足勒让德边界条件

$$w_s(\tau, 0) \in R, \quad w_s(\tau, 1) \in R'$$

对于 $R$、$R' \in \{R_0, \ldots, R_k\}$。对于任意紧集 $K \subset \mathbb{R}$，都存在某个足够大的 $s_0$，使得对每个 $s \geq s_0$ 都有 $K \subset [-s,\infty)$。对于这样的 $s \geq s_0$，我们还可以通过定义 $w_s^K := w_s|_{K\times[0,1]}\colon K \times [0,1] \to M$ 来得到一个 $[s_0,\infty)$-族的映射。

$w$ 在无穷远处的渐近行为，可以通过研究对于给定的每个紧集 $K \subset \mathbb{R}$，映射序列 $\{w_s^K\colon K \times [0,1] \to M\}_{s\in[s_0,\infty)}$ 的极限行为来理解。

首先，容易检查，在假设 5.2 下，族 $\{w_s^K\colon K \times [0,1] \to M\}_{s\in[s_0,\infty)}$ 满足以下条件

(1) 对于每个 $s \in [s_0,\infty)$，

$$\begin{cases} \overline{\partial}^\pi w_s^K = 0, \quad d((w_s^K)^*\lambda \circ j) = 0 \\ w_s(\tau, 0) \in R, \quad w_s(\tau, 1) \in R'. \end{cases}$$

(2) 极限 $\lim_{s\to\infty} \|d^\pi w_s^K\|_{L^2(K\times[0,1])} = 0$ (3) $\|dw_s^K\|_{C^0(K\times[0,1])} \leq \|dw\|_{C^0([0,\infty)\times[0,1])} < \infty$.

由 (1) 和 (3)，结合 Image $w \subset M$ 的紧性（这提供了一个一致的 $L^2(K \times [0,1])$ 界）以及定理 4.3，我们得到

$$\|w_s^K\|_{C^{1,\alpha}(K\times[0,1])} \le C_{K;(1,\alpha)} < \infty,$$

对某个与 $s$ 无关的常数 $C_{K;(1,\alpha)}$。那么 $\{w_s^K \colon K \times [0,1] \to M\}_{s\in[s_0,\infty)}$是序列预紧的。因此，对任意序列 $s_k \to \infty$，都存在一个子序列（仍记为 $s_k$）以及某个极限 $w_\infty^K \in C^1(K \times [0,1], M)$（它可能依赖于子序列 $\{s_k\}$），使得

$$w_{s_k}^K \to w_\infty^K, \quad \text{as } k \to \infty,$$

在 $C^1(K \times [0,1], M)$-范数意义下。此外，将这一结果与 (2) 和 (5.3) 结合，可得

$$dw_{s_k}^K \to dw_\infty^K \quad \text{and} \quad dw_\infty^K = (w_\infty^K)^*\lambda \otimes R_\lambda,$$

且 $(w_\infty^K)^*\lambda$ 和 $(w_\infty^K)^*\lambda \circ j$ 都是调和一形式：$(w_\infty^K)^*\lambda$ 的闭性由 (5.3) 以及收敛性得出

$$|d^\pi w_\infty^K|^2 = \lim_{k\to\infty} |d^\pi w_{s_k}^K|^2 = 0.$$

$(w_\infty^K)^*\lambda \circ j$ 的闭性（等价于 $(w_\infty^K)^*\lambda$ 的余闭性）由假设得出。极限映射 $w_\infty^K$ 也满足勒让德边界条件

$$w_\infty^K(\tau,0) \in R, \quad w_\infty^K(\tau,1) \in R'$$

因为 $w_{s_k}^K \to w_\infty^K$ 属于 $C^1$-拓扑，并且每个 $w_{s_k}^K$ 都满足相同的勒让德子流形边界条件。

注意，这些极限映射 $w_\infty^K$ 有一个共同延拓 $w_\infty \colon \mathbb{R}\times[0,1] \to M$，这是通过对角序列论证得到的：取一列紧集 $K$，其中每个紧集都包含前一个，并且其并集穷尽 $\mathbb{R}$。于是可得 $w_\infty$ 是 $C^1$，满足

$$\|dw_\infty\|_{C^0(\mathbb{R}\times[0,1])} \le \|dw\|_{C^0([0,\infty)\times[0,1])} < \infty$$

并且 $d^\pi w_\infty = 0$。因此

$$dw_\infty = w_\infty^*\lambda \otimes R_\lambda$$

然后由定理 4.3 可得，$w_\infty$ 实际上属于 $C^\infty$。还要注意，$w_\infty^*\lambda$ 和 $w_\infty^*\lambda \circ j$ 都是 $\mathbb{R} \times [0,1]$上的有界调和一形式。

引理 5.6。我们有

$$w_\infty^*\lambda = b\,dt, \quad w_\infty^*\lambda \circ j = b\,d\tau$$

其中 $b$为某个常数。

证明。我们有 $w_\infty^*\lambda = f\,d\tau + g\,dt$，其中 $f$、$g$ 是有界函数。此外，$w_\infty^*\lambda$ 是调和函数，当且仅当 $(f,\ g)$ 满足柯西–黎曼方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial \tau}, \ \frac{\partial f}{\partial \tau} = -\frac{\partial g}{\partial t} \tag{5.4}$$

对于复坐标 $\tau + it$。这尤其意味着 $\Delta f = 0$。另一方面，勒让德边界条件

$$w_\infty(\tau,0) \in R, \quad w(\tau,1) \in R'$$

意味着

$$\lambda\left(\frac{\partial w_\infty}{\partial \tau}(\tau,0)\right) = 0 = \lambda\left(\frac{\partial w_\infty}{\partial \tau}(\tau,1)\right). \tag{5.5}$$

因此， $f$ 有界且满足

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{on } R \times [0,1] \\ f(\tau,0) = f(\tau,1) = 0 & \text{for all } \tau \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

根据关于条带上满足狄利克雷边界条件的调和函数的标准结果，可得 $\mathbb{R} \times [0,1]$ $f = 0$。方程 (5.4) 进而推出 $\frac{\partial g}{\partial \tau} = 0 = \frac{\partial g}{\partial t}$，由此我们得到 $g$ 是一个常函数。因此，形式 $w_\infty^*\lambda$ 和 $w_\infty^*\lambda \circ j$ 必可写成

$$w_\infty^*\lambda = b\, dt, \quad w_\infty^*\lambda \circ j = b\, d\tau.$$

对某些常数 $b$成立。证明至此完成。 □

显然，我们有

$$\int_{\{r\}\times[0,1]} (w_\infty|_{\{r\}\times[0,1]})^*\lambda \circ j = \int_{\{r\}\times[0,1]} b\, d\tau = 0$$

对所有 $r \geq 0$ 均成立，因此

$$Q = \lim_{r\to\infty} \int_{\{r\}\times[0,1]} \lim_{k\to\infty} (w_{s_k}|_{\{r\}\times[0,1]})^*\lambda \circ j = 0.$$

现在我们证明 $T = b$。

任取一点 $r \in K$，由于 $w_\infty|_{\{r\}\times[0,1]}$ 是某个序列 $w_{s_k}|_{\{r\}\times[0,1]}$ 在 $C^1$ 意义下的极限，我们可得

$$\begin{aligned} b &= \int_{\{r\}\times[0,1]} (w_\infty|_{\{r\}\times[0,1]})^*\lambda = \int_{\{r\}\times[0,1]} \lim_{k\to\infty} (w_{s_k}|_{\{r\}\times[0,1]})^*\lambda \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{\{r\}\times[0,1]} (w_{s_k}|_{\{r\}\times[0,1]})^*\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_{\{r+s_k\}\times[0,1]} (w|_{\{r+s_k\}\times[0,1]})^*\lambda \\ &= \lim_{k\to\infty} (T - \frac{1}{2}\int_{[r+s_k,\infty)\times[0,1]} |d^\pi w|^2) \\ &= T - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\int_{[r+s_k,\infty)\times[0,1]} |d^\pi w|^2 = T \end{aligned}$$

在推导过程中，我们用到了注释 5.4。与 [OW18a], 中的论证相同，由于 $\mathbb{R} \times [0,1]$的连通性，我们得出 $w_\infty$ 的像包含在 Reeb 叶状结构的单个叶中。令 $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ 为该叶的参数化，使得 $\dot\gamma = R_\lambda(\gamma)$。于是我们可以写成 $w_\infty(\tau,t) = \gamma(s(\tau,t))$，其中 $s\colon \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 且 $s = T\,t + c_0$，因为 $ds = T\,dt$，这里 $c_0$ 是某个常数。

由此可得，若 $T \neq 0$, $\gamma$ 是一个周期为$T$、连接 $R$ 和 $R'$的（非平凡）Reeb 弦。当然， $T$ 可以为零，此时 $w_\infty$ 是一个常值映射，因而对应于一个交点 $R \cap R'$。只要 $R \cap R' = \emptyset$，后一种情况就不会发生。至此证明完成。至此证明完成。□

注释 5.7。无质量瞬子的这种电荷消失 $Q = 0$ 对于当前的开弦情形是一大优势，这与 [OW18a、OW18b、Oha]中研究的闭弦情形大不相同。关于圆柱上的无质量瞬子的分类，我们请参阅 [Oha，第 8 节。1] 在该分类中，具有 $Q \neq 0$ 但 $T = 0$ 的这类无质量瞬子会出现于闭弦情形。这称为沿 Reeb 核心出现螺旋瞬子，也就是

一般闭弦背景下，有限能量接触瞬子的模空间之 Fredholm 理论与紧化所面临的唯一障碍。

上述定理消除了勒让德边界条件下开弦情形中的这一障碍。可以说，勒让德子流形的存在阻止了接触瞬子的这种螺旋现象。在本论文的后续工作中，例如 [Oh21b, Ohc], ，我们将构造接触流形上的 Fukaya 型范畴，其对象为勒让德子流形，态射及乘积则通过对满足指定渐近条件和勒让德边界条件的适当瞬子计数来定义。

注 5.8. 我们指出，对于一般的 $k+1$ tuple $\{R_0,\dots,R_k\}$ $R_i$，各者因维数原因两两不交；而由此得到的一对 $(R,R')$ 不可能使常值解成为连接两个不同 $R\neq R'$ （横截弦）的渐近弦。另一方面，当 $R=R'$ 时，相关穿孔处的渐近极限可能是一条常值曲线，此时它将具有 $Q=0=T$。在这种情况下， [Oha, 定理 8.7] 证明，在有限能量假设下，内点穿孔是可去的：借助定理 3.3 和 4.3 中给出的先验边界估计，同一证明也适用于当前的边界穿孔情形。

由前述定理，我们立即得到如下推论，见[OW18a 的第 8] 节。我们先回顾 Reeb 弦非退化性的标准概念。

定义 5.9. 若 $(\gamma,T)$ 是 $(R_0,R_1)$ 的一条 Reeb 弦，且线性化映射 $\Psi_\gamma=d\phi^T(p):\ \xi_p\to\xi_p$ 满足

$$\Psi_\gamma(T_{\gamma(0)}R_0)\pitchfork T_{\gamma(1)}R_1\quad\text{in }\ \xi_{\gamma(1)}$$

或者等价地

$$\Psi_\gamma(T_{\gamma(0)}R_0)\pitchfork T_{\gamma(1)}Z_{R_1}\quad\text{in}\,T_{\gamma(1)}M.$$

更一般地，我们考虑如下情形。回顾勒让德子流形的 Reeb 迹 $Z_R$ 的定义

$$Z_R:=\bigcup_{t\in\mathbb{R}}\phi^t_{R_\lambda}(R).$$

（关于其一般性的详细讨论，见 [Ohb，附录 B] 。）

假设 5.10（非退化性）。设 $\vec{R}=(R_1,\cdots,R_k)$ 是一条勒让德子流形链。我们假设有

$$Z_{R_i}\pitchfork R_j$$

对所有 $i,j=1,\dots,k$。

这里，$\phi^t_{R_\lambda}$ 是由 Reeb向量场 $R_\lambda$生成的流。我们注意到，这种非退化性等价于 $R_i$ 与 $R_j$之间 Reeb 弦的非退化性。（参见 [Oh21b，推论 4.8]。）

推论 5.11。设 $w:\ \Sigma\to M$ 满足接触瞬子方程 (1.4) 和假设（5.2）。我们假设对 $(\lambda,\vec{R})$ 而言，按照

假设 5.10 的意义是非退化的。那么，在穿孔附近的每个条带状端上，取条带型坐标 $(\tau, t) \in [0,\infty) \times [0,1]$

$$\lim_{s\to\infty} \left|\pi \frac{\partial w}{\partial \tau}(s+\tau,t)\right| = 0, \quad \lim_{s\to\infty} \left|\pi \frac{\partial w}{\partial t}(s+\tau,t)\right| = 0$$

$$\lim_{s\to\infty} \lambda(\frac{\partial w}{\partial \tau})(s+\tau,t) = 0, \quad \lim_{s\to\infty} \lambda(\frac{\partial w}{\partial t})(s+\tau,t) = T$$

*and*

$$\lim_{s\to\infty} |\nabla^l dw(s+\tau,t)| = 0 \quad \textit{for any} \quad l \geq 1.$$

当 $(\tau, t)$ 属于具有紧致 $K \subset \mathbb{R}$ 的 $K \times [0,1]$ 时，所有极限均一致收敛。

证明。此推论的证明思路与 [OW18a 推论 5.11]，中考虑闭弦情形的证明相同。由于我们需要考虑边界条件，且在当前情形下 $Q$ 的消失是自动的，为方便读者，我们在此给出证明的详细过程，仅对细节作少许调整。

我们首先考虑一阶导数估计，即 $C^1$-衰减估计。如果上述极限中有任何一个不一致收敛（例如取 $|\pi \frac{\partial w}{\partial \tau}(s+\tau,t)|$），那么存在某个 $\epsilon_0 > 0$ 以及一个序列 $k \to \infty$，$(\tau_j, t_j) \in K \times S^1$，使得 $|\pi \frac{\partial w}{\partial \tau}(s_k+\tau_j, t_j)| \geq \epsilon_0$。于是我们可以取一个子列极限 $(\tau_j, t_j) \to (\tau_0, t_0)$，使得 $|\pi \frac{\partial w}{\partial \tau}(s_k+\tau_0, t_0)| \geq \frac{1}{2}\epsilon_0$ 对充分大的 $k$ 成立。

然而，根据定理 5.5，我们可以取 $s_k$ 的一个子序列，使得 $w(s_k+\tau, t)$ 在 $(\tau_0, t_0) \in K \times S^1$ 的一个邻域内，按 $C^\infty$ 意义收敛到 $\gamma(T\,t)$。这里，$\gamma$ 是与给定穿孔相关的对 $(R, R')$ 的一条 Reeb 弦，从 $R$ 到 $R'$。于是我们得到 $\lim_{s\to\infty} |\pi \frac{\partial w}{\partial \tau}(s_k+\tau_0, t_0)| = 0$，从而得到矛盾。

一旦我们建立了这一一致的 $C^1$-衰减结果（它蕴含 $W^{1,\,2}$-衰减），高阶衰减结果便直接由我们定理 4.3 中关于条带的一致局部逐点高阶先验估计得出，因为我们可以用大小一致的一对覆盖 $\{U_\alpha\}$ 和 $\{V_\alpha\}$ 覆盖该条带。至此，证明完成。□

## 6. Exponential $C^\infty$ convergence

本节中，我们假设假设 5.10。在此假设下，我们将在横截性假设下，将子列收敛改进为指数 $C^\infty$ 收敛。设元组 $\vec{R} = (R_0, \ldots, R_k)$ 满足横截性，即所有两两之间的 Reeb 弦均为非退化。特别地，我们假设这些元组两两不相交。

我们基本沿用 [OW18b 第 11] 节中的论证。该节讨论了荷消失假设下的闭弦情形 $Q = 0$。由于在当前的开弦情形中，这种消失已得到证明，因此，只需将其中的论证调整以适应边界条件，就可以逐字重复使用。下面我们概述证明的主要论证，详细论证参见 [OW18b 第 11] 节，同时仅指出所需的必要改动。

### 6.1. $L^2$- $dw$的 Reeb 分量的指数衰减。

我们将证明 Reeb 分量 $w^*\lambda$的指数衰减。我们聚焦于穿孔 $z_i \in \partial\Sigma$ 周围一个配备条带型坐标 $(\tau, t) \in [0,\infty) \times [0,1]$的去心邻域。

我们再次考虑式 (4.3) 中给出的复值函数 $\alpha$ 。根据勒让德边界条件，我们知道 $\alpha(\tau, i) \in \mathbb{R}$，即

$$\operatorname{Im} \alpha = 0$$

对于 $i = 0,\ 1$。

以下引理在闭弦情形下已于 [OW18b] 中证明（适用于更一般的 Morse-Bott 情形）。为方便读者，我们提供一些细节，说明在存在边界条件时如何调整论证。

引理 6.1（与引理 11.20 [OW18b] 比较）。设定义在 $[0, \infty) \times [0, 1]$ 上的复值函数 $\alpha$ 和 $\nu$ 满足

$$\begin{cases} \overline{\partial}\alpha = \nu, \\ \alpha(\tau, i) \in \mathbb{R} \text{ for } i = 0,\ 1, \\ \|\nu\|_{L^2([0,1])} + \|\nabla\nu\|_{L^2([0,1])} \leq Ce^{-\delta\tau} \quad \text{for some constants } C, \delta > 0 \\ \lim_{\tau\to+\infty} \alpha(\tau, t) = T \end{cases}$$

则对于某个常数 $\overline{C}$，有 $\|\alpha - T\|_{L^2(S^1)} \leq \overline{C}e^{-\delta\tau}$。

证明。注意到，根据上一节的结果，我们已经得到了 $\nu = \frac{1}{2}|\zeta|^2$ 的 $W^{1,2}$- 指数衰减。一旦这一点成立，便可再次通过标准的三区间方法证明这一 $L^2$- 指数衰减结果，因此略去证明。关于处理一般 Morse-Bott 情形的抽象框架，参见 [OW18b 定理 10.11] 。对于非退化情形的详细说明，也请参阅 [OW18a] 的 arXiv 版本附录。□

注 6.2. [OW18b 引理 11.20]的表述中有一处错误，其中

$$\lim_{\tau\to+\infty} \alpha(\tau, t) = 0$$

以及不等式 $\|\alpha\|_{L^2(S^1)} \leq \overline{C}e^{-\delta\tau}$ 出现了：这是一个明显的错误，应将 $\alpha$替换为 $\alpha - T$，见 [OW18b 引理 11.20]。（感谢一位指出这一笔误的审稿人！）由于 [OW18b] 后续的证明均基于正确的表述，我们在这里也可以应用这些证明。

6.2. $C^0$ 指数收敛。现在，利用前文给出的 $L^2$-指数估计，可以用与 [OW18b 命题 11.21] 证明完全相同的论证，证明 $w(\tau, \cdot)$ 在 $\tau \to \infty$ 时指数收敛到某个 Reeb 弦，其中将 $S^1$ 替换为此处的 $[0, 1]$ 。因此我们省略其证明。

命题 6.3（与 21 [OW18b] 命题 11.21 [比较）。在假设 5.2 下，对于任意满足勒让德边界条件的接触瞬子 $w$，存在唯一的 Reeb 轨道 $\gamma$，使得曲线 $z(\cdot) = \gamma(T\cdot) : [0, 1] \to M$ 满足

$$\|d(w(\tau, \cdot), z(\cdot))\|_{C^0([0,1])} \to 0,$$

其中 $\tau \to +\infty$， $d$ 表示由三元组度量在 $M$ 上定义的距离。这里，$T = T_\gamma$ 是 $\gamma$ 的作用，其定义为 $T_\gamma = \int \gamma^*\lambda$。

我们仅提及，证明基于以下引理；其证明可参见 [OW18b 的引理 11.22]。

引理 6.4. 设给定 $t \in [0,1]$ 。那么，对于任意给定的 $\epsilon > 0$，都存在充分大的 $\tau_1 > 0$ ，使得

$$d(w(\tau,t), w(\tau',t)) < \epsilon$$

对所有 $\tau, \tau' \geq \tau_1$ 均成立。

还证明了以下 $C^0$-指数收敛。

命题 6.5（对比 OW18b 中的命题 11.23 []）。存在一些足够大的常数 $C > 0, \delta > 0$ 和 $\tau_0$ ，使得对任意 $\tau > \tau_0$,

$$\|d\left(w(\tau,\cdot), z(\cdot)\right)\|_{C^0([0,1])} \quad \leq \quad C\, e^{-\delta\tau}$$

6.3. $C^\infty$-指数衰减 $dw - R_\lambda(w)\, d\tau$。至此，我们已证明如下结果:

- $W^{1,\,2}$-指数衰减 $w$,
- $C^0$-指数收敛于某个 Reeb 弦 $z$ 两端的两个勒让德子流形 $R, R'$，当 $\tau \to \infty$ 时，$w(\tau,\cdot) \to z(\cdot)$。

现在，我们可以通过证明 $dw - R_\lambda(w)\, dt$的 $C^\infty$-指数衰减，完成 $C^\infty$-指数收敛 $w(\tau,\cdot) \to z$ 的证明。接下来将证明后者的衰减，我们将对系统 (1.4) 应用自举论证。

结合上述三项，我们得到了全导数 $dw$的 $L^2$-指数估计。按照引理 6.1 的证明，在条带状区域上利用局部一致先验估计进行自举论证，我们得到该项更高阶的 $C^{k,\,\alpha}$-指数衰减

$$\frac{\partial w}{\partial t} - TR_\lambda(z), \quad \frac{\partial w}{\partial \tau}$$

对所有 $k \geq 0$，其中 $w(\tau,\cdot)$ 在 $C^0$ 意义下于 $\tau \to \infty$ 时收敛到 $z$ 。结合这一点、引理 6.1 以及定理 4.3 给出的椭圆 $C^{k,\alpha}$-估计，我们完成了 $w(\tau,\cdot) \to z$ 在 $\tau \to \infty$时的 $C^\infty$-收敛证明。

第 2 部分。指标公式

第一位署名作者在 [Ohb] 中为带边界接触瞬子建立了相关的 Fredholm 理论。我们沿用 [Ohb] 的离壳解析框架；该框架又是从 [Oha], [OS] 改编而来，应用于当前的边值问题 (1.4)。

在本部分中，我们将在以勒让德子流形为对象的接触流形上构造 Fukaya 型范畴这一背景下，计算方程 (1.4) 的线性化算子的 Fredholm指标。为此，我们考虑圆盘接触瞬子 $w$。我们将用一种拓扑指标来计算其线性化算子的指标，这种拓扑指标称为[FOOO10]所定义类型的多边形 Maslov 指标。为此，我们需要说明精确的几何框架，使得为整个模空间系统定义的 Floer 型复形的分次，在按照类似于 [Oh22b]中的方式粘合模空间时能够保持相容。为此，我们需要引入分次带锚定的 Legendrian 子流形这一概念。

## 7. Off-shell framework of the moduli spaces

设 $(\Sigma, j)$ 是一个带边界紧黎曼曲面，并令 $\Sigma$ 为具有 $\{z_1, \ldots, z_k\} \subset \partial\Sigma$的圆盘型带 puncture 的黎曼曲面，我们考虑模空间

$$\mathcal{M}_k((\dot{\Sigma}, \partial\dot{\Sigma}), (M, \vec{R})), \quad \vec{R} = (R_1, \cdots, R_k)$$

有限能量映射 $w\colon \Sigma \to M$ 满足方程 (1.4)。

备注 7.1。研究接触瞬子模空间时所采用的正确能量概念见 [Oha], [Oh21b] ，该概念用于接触瞬子模空间的鼓泡分析。然而，对于我们的指标计算目的而言，能量的讨论基本上并无必要，因为指标计算针对给定的接触瞬子 $w$ 进行，并假设其按照下文所述的非退化假设，渐近收敛于适当的 Reeb 弦。

根据条带型坐标的选取，我们将 $\{z_1, \ldots, z_k\}$ 划分为以下并集

$$\{p_1^+, \ldots, p_{s^+}^+, p_1^-, \ldots, p_{s^-}^-\}$$

其中 $k = s^+ + s^-$ 使得（边界）穿孔曲面

$$\dot{\Sigma} = D^2 \setminus \{p_1^+, \ldots, p_{s^+}^+, p_1^-, \ldots, p_{s^-}^-\} \subset \mathbb{C}$$

在其中两两不交的开子集上承载条带状端

$$U_i^+ = \phi_i^+([0,\infty) \times [0,1]) \subset \dot{\Sigma} \quad \text{for } i = 1, \ldots, s^+$$
$$U_j^- = \phi_j^-((-\infty, 0] \times [0,1]) \subset \dot{\Sigma} \quad \text{for } j = 1, \ldots, s^-$$

其中，$\phi_i^+$ 和 $\phi_j^-$ 分别是从相应半条带到 $\mathbb{C}$ 的双全纯映射。

在假设 5.10 给出的条件下，我们有有限能量模空间的分解

$$\mathcal{M}_k((\dot{\Sigma}, \partial\dot{\Sigma}), (M, \vec{R})) = \bigcup_{\vec{\gamma} \in \prod_{i=1}^k \mathfrak{Reeb}(R_i, R_{i+1})} \mathcal{M}(\vec{\gamma}), \quad \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$$

其中，$i$ 按模 $k$ 计数。（关于闭弦情形，参见 [Oha] ；该情形可按 [Oh21b] 中的方法轻易推广到当前的带边界情形。）

设 $\gamma_i^+$ 对应于 $i = 1$、$\cdots$、$s^+$，而 $\gamma_j^-$ 对应于 $j = 1$、$\cdots$、$s^-$，它们分别是正穿孔和负穿孔处给定的两组 Reeb 弦。沿用 [BEHZ03], 中的记号，我们用 $\underline{\gamma}$ 和 $\overline{\gamma}$ 表示相应的集合

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \{\gamma_1^+, \cdots, \gamma_{s^+}^+\} \\ \overline{\gamma} &= \{\gamma_1^-, \cdots, \gamma_{s^-}^-\}. \end{aligned}$$

对于每个 $p_i$（分别地，每个 $q_j$），我们在边界穿孔的邻域上关联条带型坐标（$\tau$，$t$）$\in [0,\infty)$（分别地，（$\tau$，$t$）$\in$（$-\infty$，$0$]$\times S^1$）。

我们考虑满足边界条件的光滑映射集合

$$w(z) \in R_i \quad \text{for } z \in \overline{z_{i-1}z_i} \subset \partial\dot{\Sigma} \tag{7.1}$$

以及渐近条件

$$\lim_{\tau\to\infty} w((\tau,t)_i) = \gamma_i^+(T_i(t+t_i)), \qquad \lim_{\tau\to-\infty} w((\tau,t)_j) = \gamma_j^-(T_j(t-t_j)) \tag{7.2}$$

对于某些 $t_i$、 $t_j \in S^1$，其中

$$T_i = \int_{S^1} (\gamma_i^+)^* \lambda,\, T_j = \int_{S^1} (\gamma_j^-)^* \lambda.$$

此处 $t_i$, $t_j$ 取决于给定的解析坐标以及 Reeb 弦的参数化。

我们将固定一个定义域复结构 $j$ 及其关联的 K¨ahler 度量 $h$。我们将此赋值视为

$$\Upsilon : w \mapsto \left( \overline{\partial}^{\pi} w, d(w^* \lambda \circ j) \right), \quad \Upsilon := (\Upsilon_1, \Upsilon_2)$$

一个（无限维）向量丛的截面：利用分解$TM = \xi \oplus \mathbb{R}\langle R_\lambda \rangle$，我们写作 $\Upsilon = (\Upsilon_1, \Upsilon_2)$。于是，我们可以将此赋值视为

$$\Upsilon_1 : w \mapsto \overline{\partial}^{\pi} w$$

某个无限维向量丛的光滑截面，并将此赋值视为

$$\Upsilon_2 : w \mapsto d(w^* \lambda \circ j)$$

一个映射到 $\Omega^2(\Sigma)$ 的映射。（关于这些算子的精确离壳框架，请参见 [Ohb] 。）

我们考虑

$$D\Upsilon(w) : \Omega^0(w^*TM, (\partial w)^* T\vec{R}) \to \Omega^{(0,1)}(w^*\xi) \oplus \Omega^2(\Sigma)$$

每个接触瞬子 $w$ 的线性化算子，即 $\Upsilon(w) = 0$。

对于闭弦情形， [Oha] 推导出了其显式公式；该公式在附加勒让德边界条件时同样成立。（提醒读者注意，此处使用的记号 $B$ 与先前用于表示第二基本形式的记号 $B$ 毫无关系。）

定理7.2（定理10.1 [Oha]；另见定理1.15 [OS]）。根据分解 $d\pi = d^\pi w + w^* \lambda R_\lambda$ 和 $Y = Y^\pi + \lambda(Y) R_\lambda$，有

$$\begin{aligned} D\Upsilon_1(w)(Y) &= \overline{\partial}^{\nabla^\pi} Y^\pi + B^{(0,1)}(Y^\pi) + T^{\pi,(0,1)}_{dw}(Y^\pi) \\ &\quad + \frac{1}{2}\lambda(Y)(\mathcal{L}_{R_\lambda} J) J(\partial^\pi w) \qquad (7.3) \\ D\Upsilon_2(w)(Y) &= -\Delta(\lambda(Y))\, dA + d((Y^\pi \rfloor d\lambda) \circ j) \qquad (7.4) \end{aligned}$$

其中 $B^{(0,1)}$ 和 $T^{\pi,\,(0,\,1)\,dw}$ 分别是 $B$ 和 $T^\pi_{dw}$ 的 (0, 1)-分量； $B$、 $T^\pi_{dw}$ : $\Omega^0(w^*TM) \to \Omega^1(w^*\xi)$ 是零阶微分算子，其定义如下：

$$B(Y) = -\frac{1}{2} w^* \lambda \otimes ((\mathcal{L}_{R_\lambda} J) JY) \qquad (7.5)$$

*and*

$$T^\pi_{dw}(Y) = \pi T(Y, dw) \qquad (7.6)$$

分别。

我们回顾本文第 1.4 节中的命题 1.11，该命题陈述了具有勒让德边界条件的带边界接触瞬子的线性化算子的 Fredholm 性质。这将作为接下来几节中进行指标计算的基础。

在开始计算之前，我们先提醒读者分解 $Y = Y^\pi + \lambda(Y)\, R_\lambda$。注意到 $Y^\pi$ 和 $\lambda(Y)$彼此独立，我们将写作

$$Y = Y^\pi + f R_\lambda, \quad f := \lambda(Y) \tag{7.7}$$

其中 $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ 是满足边界条件的任意函数

$$Y^\pi(\partial\dot{\Sigma}) \subset T\vec{R}, \quad f|_{\partial\dot{\Sigma}} = 0 \tag{7.8}$$

根据 $Y$所满足的勒让德边界条件。

至此，关于线性化映射的 Fredholm 性质的讨论告一段落

$$D\Upsilon_{(\lambda,T)}(w) : \Omega^0_{k,p}(w^*TM, (\partial w)^*T\vec{R}; J; \underline{\gamma}, \overline{\gamma}) \to \Omega^{(0,1)}_{k-1,p}(w^*\xi) \oplus \Omega^2_{k-2,p}(\dot{\Sigma})$$

该方法借鉴自 [Ohb]。

在接下来的三节中，我们将用一个称为多边形 Maslov 指标的拓扑指标来计算线性化算子 $D\Upsilon(w)$ 的（Fredholm）指标。不过，为此我们需要更多数据。因此，我们将采用 [FOOO10] 中的锚这一概念。

## 8. Anchored Legendrian links

定义 8.1. 固定环境接触流形 $(M, \xi)$ 的一个基点 $y$。令 $R$ 为 $(M, \xi)$ 的一个勒让德子流形。我们定义从 $R$ 到 $y$ 的锚为一条路径$\ell : [0,1] \to M$，满足 $\ell(0) = y$，$\ell(1) \in R$。我们称一对 $(R, \ell)$ 为带锚勒让德子流形。链 $\mathcal{E} = ((R_1, \ell_1) \ldots, (R_k, \ell_k))$ 称为带锚勒让德链。

对于给定的 $\mathcal{E} = ((R_1, \ell_1) \ldots, (R_k, \ell_k))$，我们定义弦的集合

$$\Omega(R_i, R_j) = \{\ell : [0,1] \to M \mid \ell(0) \in R_i,\ \ell(1) \in R_j\}$$

对每一对 $i, j$，其中 $i = j$ 允许。于是，这些锚通过拼接 $\ell_i$ 和 $\ell_j$，系统地确定一条基路径 $\ell_{ij} \in \Omega(R_i, R_j)$，即，

$$\ell_{ij}(t) = \overline{\ell}_i * \ell_j(t) = \begin{cases} \ell_i(1-2t) & t \le 1/2 \\ \ell_j(2t-1) & t \ge 1/2 \end{cases} \tag{8.1}$$

这一构造的结果是如下重叠性质

$$\ell_{ij}(t) = \ell_{il}(t) \quad \text{for } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \qquad \ell_{ij}(t) = \ell_{lj}(t) \quad \text{for } \frac{1}{2} \le t \le 1 \tag{8.2}$$

对所有 $i$、$j$、$l$。

Let $\vec{R} = (R_1, \ldots\ldots, R_k)$ 是一个勒让德子流形链。我们考虑满足 (7.1)-(7.2) 的映射 $w : \dot{\Sigma} \to M$ 的同伦类集合。记作 $\pi_2(\vec{R}; \underline{\gamma}, \overline{\gamma})$。如果 $\mathcal{E} = (\vec{R}, \vec{\ell})$ 是一个带锚勒让德链，则我们滥用记号，以 $\pi_2(\mathcal{E}; \underline{\gamma}, \overline{\gamma})$ 代替 $\pi_2(\vec{R}; \underline{\gamma}, \overline{\gamma})$。

定义8.2. 设 $\mathcal{E} = \{(R_i, \ell_i)\}_{1 \le i \le k}$ 是一条由带锚的勒让德子流形组成的链。若同伦类 $B \in \pi_2(\mathcal{E}; \underline{\gamma}, \overline{\gamma})$ 可由一个多边形得到，且该多边形是由 $k$ 个满足以下条件的边界条带 $w^+{}_{(i-1)i}$ 粘合而成的，则称其对 $\mathcal{E}$ 可容许：$[0,1] \times [0,1] \to M$

$$\begin{aligned} &w^+_{(i-1)i}(0,t) = \gamma_i(t) \\ &w^+_{(i-1)i}(1,t) = \ell_{(i-1)i}(t) \quad (= \overline{\ell}_{i-1} * \ell_i(t)) \\ &w^+_{(i-1)i}(\tau,0) \in R_{i-1}, \quad w^+_{(i-1)i}(\tau,1) \in R_i \end{aligned} \tag{8.3}$$

在这种情况下，我们将该同伦类 $B$ 记为

$$B = [w_{12}^+] \# \dots \# [w_{k1}^+]$$

并将可容许同伦类的集合记为 $\pi_2^{ad}(\mathcal{E}; \underline{\gamma}, \overline{\gamma})$。为了定义多边形指标，我们需要额外的数据，如 [FOOO10] 中所述；下面将对此加以说明。

令 $y \in M$ 为上文给出的基点。我们固定一个拉格朗日子空间 $V_y \in Lag(\xi_y)$。

定义 8.3。考虑一个带锚勒让德子流形 $(R, \gamma)$。我们将 $\alpha$ 记为 $\gamma^* Lag(\xi, d\lambda)$ 的一个截面，使得

$$\alpha(0) = V_y, \quad \alpha(1) = T_{\gamma(1)} R \subset \xi_{\gamma(1)}$$

我们称这样的二元组 $(\gamma, \alpha)$ 为 $R$ 的分次锚（相对于 $(y, V_y)$），并称三元组 $(R, \gamma, \alpha)$ 为分次带锚勒让德子流形。

为了继续讨论，我们回顾马斯洛夫指标的构造（参见 [Arn67] 或 [FOOO10]），并引入锚的分次这一概念（参见 [FOOO10]）。

设 $(S, \omega)$ 是一个辛向量空间。记

$$Lag(S, \omega) = \{V \mid V \text{ is a Lagrangian subspace of } (S, \omega)\}$$

为 $(S, \omega)$ 的拉格朗日格拉斯曼流形，并令

$$Lag_1(S, \omega) = \{V \in Lag(S, \omega) \mid \dim(V \cap V_0) \geq 1\}$$

为马斯洛夫循环，其庞加莱对偶表示马斯洛夫类 $\mu \in H^1(Lag(S, \omega); \mathbb{Z})$ [Arn67]。

切空间 $T_{V_0} Lag(S, \omega)$ 与 $V_0$ 上的二次型集合有典范同构。

定义 8.4. 我们称对应于正定非退化二次型的任意切向量为正向定向的。

下面的命题对于构造多边形 Maslov 指标很有用。其证明见 [Arn67]。

命题 8.5. 设 $(S, \omega)$ 是一个辛向量空间，$V_1 \in (S, \omega)$ 是给定的拉格朗日子空间。设 $V_0 \in Lag(S, \omega) \setminus Lag_1(S, \omega; V_1)$，即为满足 $V_0 \cap V_1 = \{0\}$ 的拉格朗日子空间。考虑满足以下条件的光滑路径 $\alpha : [0, 1] \to Lag(S, \omega)$

(1) $\alpha(0) = V_0$, $\alpha(1) = V_1$. (2) 对所有 $0 \leq t < 1$, $\alpha(t) \in Lag(S, \omega) \setminus Lag_1(S, \omega; V_1)$。(3) $-\alpha'(1)$ 为正向定向。

那么，任意两条路径 $\alpha_1, \alpha_2$ 均可通过满足上述三个条件的同伦 $\alpha_s$ 相互同伦，其中每个 $s$ 都满足这些条件。

注 8.6. 我们的多边形边界装饰有按逆时针顺序排列的勒让德子流形 $R_1, \dots, R_k$，而在 [FOOO10] 中，拉格朗日子流形 $L_1, \dots, L_k$ 按顺时针顺序排列。为与 [FOOO10], 中的顺序保持一致，我们在上面的命题中选取与 [FOOO10, Proposition 5.3] 中路径方向相反的 $\alpha$ 方向。更明确地说，若取 $\overline{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$ 而非 $\alpha(t)$，则我们的命题与 [FOOO10, Proposition 5.3] 完全相同。

设 $(R_0, \ell_0, \alpha_0)$ 和 $(R_1, \ell_1, \alpha_1)$ 是相对于 $(y, V_y)$ 的一对分次锚定勒让德子流形，并且满足假设 5.10 中针对该对子所述的横截性条件，即 $Z_{R_0} \pitchfork R_1$。

然后，我们可以通过拼接 $\alpha_0$ 和 $\alpha_1$来定义路径 $\alpha_{01}(t) \in Lag(\xi_{\ell_{01}(t)})$，即：

$$\alpha_{01} = \overline{\alpha}_0 * \alpha_1.$$

现在考虑一条从 $R_0$ 到 $R_1$ 的 Reeb 弦 $\gamma$，以及一个映射 $w\colon [0,1]^2 \to M$，它满足边界条件

$$w(\tau, 0) \in R_0,\ w(\tau, 1) \in R_1, \tag{8.4}$$

$$w(0, t) = \ell_{01}(t),\ w(1, t) = \gamma(t). \tag{8.5}$$

用 $[w, \gamma]$ 表示这类 $w$ 的同伦类。类似地，我们用 $[\gamma, w]$ 表示满足以下条件的这类 $w$ 的同伦类，其中 (8.4) 和 (8.5) 被替换为

$$w(0, t) = \gamma(t), \quad w(1, t) = \ell_{01}(t)$$

取而代之。

注 8.7。根据第 6 节中的指数收敛，我们可以紧化满足以下条件的映射接触瞬子 $w\colon [0,\infty) \times [0,1] \to M$

$$w(0, t) = \ell_{01}(t),\ w(\tau, 0) \in R_0,\ w(\tau, 1) \in R_1 \ \lim_{\tau\to\infty} w(\tau, t) = \gamma(t)$$

到一个从 $\overline{w}\colon [0,\infty) \cup \{\infty\} \times [0,1] \cong [0,1]^2$ 的连续映射。后一个映射定义了一个相对同伦类 $[w, \gamma]$，即映射 $\overline{w}$ 的相对同伦类，其中 (8.4) 在 $t = 1$ 处的条件被 $\tau = \infty$ 处的渐近条件取代。我们记

$$[w, \gamma]$$

为该映射的同伦类 $\overline{w}$。接触瞬子 $w$ 的解析指标将用这个紧化映射 $\overline{w}$ 的某个拓扑指标来表示。（类似做法可参见 [FOOO10] 。）

现在，我们可以为每条 Reeb 弦 $\gamma \in \mathfrak{Reeb}(R_0, R_1)$ 赋予一个整数分次，条件是 $R_i$' 均为分次锚。

回想由 $TM = \xi \oplus \mathbb{R}\langle R_\lambda\rangle$ 得到的 $Y$ 的分解 (7.7)，我们可以通过将平凡化取为如下的对角形式，选取一个平凡化 $\Phi\colon w^*TM \to [0,1]^2 \times \mathbb{R}^{2n+1}$。

定义 8.8（对角平凡化 $\Phi$）。 $\Phi$ 满足

- 它保持直和分解 $w^*TM = w^*\xi \oplus \mathbb{R}\langle R_\lambda\rangle$，并且
$$\mathbb{R}^{2n+1} \cong \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{R},$$
- $\Phi|_{w^*\xi}\colon w^*\xi \to [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \times \{0\} \cong [0,1]^2 \times \mathbb{R}^{2n}$ 是一个辛平凡化。

于是我们可以关联一个定义在 $\partial[0,1]^2 \setminus \{(1,1)\}$ 上的拉格朗日路径 $\alpha^{\Phi}_{[w,\gamma];\alpha_{01}}$，其定义为

$$\begin{cases} \alpha^{\Phi}_{[w,\gamma];\alpha_{01}}(\tau, i) = \Phi(T_{w(\tau,i)}R_i) & \text{for } i = 0, 1 \\ \alpha^{\Phi}_{[w,\gamma];\alpha_{01}}(0, t) = \Phi(\alpha_{01}(t)), \\ \alpha^{\Phi}_{[w,\gamma];\alpha_{01}}(1, t) = \Phi(d\phi^{T_0 t}_{R_\lambda}(T_{\gamma(0)}R_0)). \end{cases}$$

这里 $T_0$ 由 $\gamma(t) = \phi^{T_0 t}_{R_\lambda}(\gamma(0))$ 定义。注意，它不一定非负。若 $T_0 < 0$，则 $\gamma(t)$ 关于Reeb向量场互为相反。注意

$$\lim_{t\to 1} \alpha^{\Phi}_{[w,\gamma];\alpha_{01}}(1, t) = \Phi(d\phi^{T_0}_{R_\lambda}(T_{\gamma(0)}R_0))$$

and

$$\lim_{\tau\to 1}\alpha^{\Phi}_{[w,\gamma];\alpha_{01}}(\tau,1)=\Phi(T_{w(\tau,1)}R_1)$$

根据假设 5.10 中给出的非退化假设，它们彼此横截。于是我们得到一条拉格朗日路径 $\alpha^-$，从 $\Phi(d\phi^{T_0}_{R_\lambda}(T_{\gamma(0)}R_0))$ 到 $\Phi(T_{w(\tau,1)}R_1)$，满足命题 8.5 中的条件。将这两条路径首尾相接，便得到 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的一条拉格朗日环 $\widetilde{\alpha}^{\Phi}_{[w,\gamma];\alpha_{01}}$。

定义 8.9（弦的分次）。我们将 $\mu([w,\gamma];\alpha_{01})$ 定义为此拉格朗日环 $\widetilde{\alpha}^{\Phi}_{[w,\gamma];\alpha_{01}}$ 在 $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ 中的马斯洛夫指标。

注意，此指标与所选平凡化 $\Phi$ 无关，只取决于可容许同伦类。一般而言，这定义了一个 $\mathbb{Z}/\Gamma$ 分次，其中 $\Gamma=\Gamma_{R_0R_1}$ 是阿贝尔群的正生成元

$$\Gamma_{R_0R_1}:=\{\mu(A)\in\mathbb{Z}\mid A\in\pi_1(\Omega(R_0,R_1))\}\tag{8.6}$$

其中 $\mu(A)$ 是环带映射 $u\colon S^1\times[0,1]\to M$ 的马斯洛夫指标，且该映射满足边界条件

$$u(\theta,0)\in R_0,\ u(\theta,1)\in R_1\quad \theta\in S^1.$$

## 9. Polygonal Maslov index

令 $\dot\Sigma=D^2\setminus\{z_1,\dots,z_k\}$, $\vec R=(R_1,\dots,R_k)$, $(\underline\gamma,\overline\gamma)$ 和 $\mathcal{F}((\dot\Sigma,\partial\dot\Sigma),\mathcal{E};J;\underline\gamma,\overline\gamma)$ 如上所述。

本节中，我们为每个同伦类 $B\in\pi_2(\mathcal{E};\underline\gamma,\overline\gamma)$ 定义一个多边形 Maslov 指标 $\mu(\mathcal{E},\underline\gamma,\overline\gamma;B)$。（见注 8.7。）我们考虑映射 $w\in\mathcal{F}((\Sigma,\partial\Sigma),\mathcal{E};J;\underline\gamma,\overline\gamma)$，其中 $[w]=B\in\pi_2(\mathcal{E};\underline\gamma,\overline\gamma)$。我们再次选取对角平凡化 $\Phi\colon w^*TM\to\dot\Sigma\times\mathbb{R}^{2n+1}$，如定义 8.8 所述。在辛平凡化 $\Phi|_{w^*\xi}$ 下，我们有 $k$ 条光滑拉格朗日路径

$$\alpha_i:\overline{z_{i-1}z_i}\subset\partial\dot\Sigma\to Lag(\mathbb{R}^{2n},\omega_0);\qquad \alpha_i(t)=\Phi(T_{w(t)}R_i)=:\Lambda_i(t)$$

对于 $i=1$、.....、$k$ 以及 $k$ 条光滑拉格朗日路径

$$\beta_i:[0,1]\to Lag(\mathbb{R}^{2n},\omega_0);\qquad \beta_i(t)=\Phi(T\psi^{T_it}_{R_\lambda}(T_{\gamma_i(0)}R_i))$$

这里，$z_i=p^+_{i+1}$ 对应于 $i=1$、.....、$s^+$，而 $z_j=p^-_{j-s^+}$ 对应于 $j=s^++1$、.....、$k$，它们是 $D^2$ 的穿孔；$\overline{z_{i-1}z_i}$ 是一条从 $z_{i-1}$ 到 $z_i$ 的开弧，而 $T_i$ 由 $\gamma_i(t)=\psi^{T_it}_{R_\lambda}(\gamma_i(0))$ 定义。

为了构造一个拉格朗日环路，我们需要构造更多 $k$ 拉格朗日路径。根据假设 5.10，

$$\beta_{i-1}(1)\pitchfork\alpha_i(z_{i-1}):=\lim_{t\to z_{i-1}+0}\alpha_i(t)$$

在 $\mathbb{R}^{2n}$中。现在我们有 $\overline\alpha\colon\ [0,1]\to Lag(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$，满足命题 8.5 中关于 $i=1$、.....、$k$ 的条件，因此 $\overline\alpha(0)=\beta_{i-1}(1)$，且 $\overline\alpha(1)=\alpha_i(z_{i-1})$。

现在我们有一条拉格朗日路径

$$\widetilde\alpha_w=\overline\alpha_1*\alpha_1*\beta_1*\cdots*\overline\alpha_k*\alpha_k*\beta_k$$

在 $Lag(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$中。

定义 9.1. 我们通过拉格朗日环 $\widetilde\alpha_w$ 的马斯洛夫指标来定义多边形指标 $\mu(\mathcal{E},\underline\gamma,\overline\gamma;B)$，即

$$\mu(\mathcal{E},\underline\gamma,\overline\gamma;B)=\mu(\widetilde\alpha_w).$$

注意，该定义与平凡化 $\Phi$ 的选择无关，而且在构造指标时我们尚未使用锚。假设 $\mathcal{E}=\{(R_i,\ell_i,\alpha_i)\}_{1\le i\le k}$ 是一条由分次带锚定的 Legendrian 子流形组成的链。它沿着 $\ell_{ij}=\overline{\ell}_i*\ell_j$ 为 $i,j$ 诱导出一个分次 $\alpha_{ij}=\overline{\alpha}_i*\alpha_j$。那么 $\alpha_{ij}$ 也满足重叠性质

$$\alpha_{ij}|_{[0,1/2]}=\alpha_{il}|_{[0,1/2]}\qquad \alpha_{ij}|_{[1/2,1]}=\alpha_{lj}|_{[1/2,1]} \tag{9.1}$$

对所有 $i,j$。

回顾 $B\in\pi_2^{ad}(\mathcal{E},\underline{\gamma},\overline{\gamma})$，即，

$$B=[w_{12}^+]\#\ldots\#[w_{k1}^+]$$

其中 $w^+{}_{(i-1)i}$ 在定义8.2中定义。根据 $[w^+{}_{(i-1)i}、\ \gamma_i]$ 和 $\alpha_{ij}$的定义，我们可以定义 Maslov 指标 $\mu([w^+{}_{(i-1)i},\gamma_i];\alpha_{(i-1)i})$。

现在给出以下命题，其证明与 [FOOO10，引理 5.12]类似，因此省略。

命题 9.2. 设 $\mathcal{E}$ 是一个分次锚定Legendrian链。假设 $B\in\pi_2^{ad}(\mathcal{E},\underline{\gamma},\overline{\gamma})$。那么我们有

$$\mu(\mathcal{E},\underline{\gamma},\overline{\gamma};B)=\sum_{i=1}^{k}\mu([w_{(i-1)i}^+,\gamma_i];\alpha_{(i-1)i}).$$

## 10. Calculation of Fredholm index

设 $\mathcal{E}=\{(R_i,\ell_i,\alpha_i)\}_{1\le i\le k}$ 为一个分次锚定Legendrian链。回顾算子

$$\Upsilon:\mathcal{W}^{k,p}\to\mathcal{H}^{(0,1)}_{k-1,p}(\xi;\vec{R})$$

在第7节中定义。从现在起，我们将 $\Upsilon$ 限制为

$$\mathcal{W}^{k,p}:=\mathcal{W}^{k,p}_{ad}((\dot{\Sigma},\partial\dot{\Sigma}),\mathcal{E};\underline{\gamma},\overline{\gamma})$$

它由满足 $[w]=B$ 可容许的元素 $w$ 组成。

回顾一下， $\Upsilon$ 的线性化 $D\Upsilon(w)$ 与式 (1.13) 中带有勒让德边界条件的对角算子同伦。将此算子记为 $L$。注意，该同伦保持指标不变。因此我们有

$$\mathrm{Index}D\Upsilon(w)=\mathrm{Index}L=\mathrm{Index}(\bar{\partial}^{\nabla^\pi}+B^{(0,1)}+T^{w,(0,1)}_{dw})+\mathrm{Index}(-\Delta)$$

因此，我们只需计算算子 $L$的指标。为区分记号，我们将其记为 $L_w$。为计算该指标，我们将使用粘合公式。更具体地，考虑半无限条带上的算子 $L$

$$Z^+:=(-\infty,0]\times[0,1]\quad\text{for } i=1,\ldots,s^+$$

（分别为 $Z^-:=[0,\infty)\times[0,1]$ 对于 $i=s^++1$，.....， $k$）及其边界条件：

$$Y(0,t)\in\alpha_{(i-1)i}(t),\ Y(\tau,0)\in TR_{i-1},\ Y(\tau,1)\in TR_i \tag{10.1}$$

我们将 $L_{w^+{}_{(i-1)i}}$ 记在 $Z^\pm$ 上。然后，我们可以将所有算子粘合起来，从而得到一个算子

$$L_{\mathrm{glued}}:=L_w\#\sum_{i=1}^{k}L_{w^+_{(i-1)i}}$$

它满足（线性的）勒让德边界条件，其区域同胚于一个闭圆盘。根据 Fredholm 指标的粘合公式，我们得到

$$\mathrm{Index} L_w = \mathrm{Index} L_{\mathrm{glued}} - \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Index} L_{w^+_{(i-1)i}}.$$

现在我们计算右端各个项的指标。在进一步讨论之前，我们指出以下标准事实：虽然我们没有明确提及，但研究线性化算子的指标时，需要取某种 $W^{k,\,p}$ 完备化，并满足 $k \geq 2$ 。因此，我们需要施加条件

$$\|Y\|_{W^{2,p}} < \infty \tag{10.2}$$

（关于线性化算子的 Fredholm 理论所采用的精确离壳框架，参见 [Ohb] 。）

10.1. 粘接算子的计算。我们首先计算粘接算子的指标。注意，粘接区域的拓扑类型是一个闭圆盘，我们在下文将其记为 $D^2$ 。

利用微分算子主符号的坐标不变性，并结合其构造方式以及分解 (7.7)，我们知道该算子可以同伦变形为以下算子的直和

- 一个二阶微分算子，其符号与 $D^2$ 上带狄利克雷边界条件的拉普拉斯算子 $-\Delta$ 相同，并作用于 $f = \lambda(Y)$。我们将其记为 $D_2$。
- 一个作用于 $D^2$ 上的线性化 Cauchy-Riemann 型算子，带有拉格朗日边界条件，该条件由某个拉格朗日环确定。事实上，由于 $[w]$满足可容许性假设，很容易看出这个环同伦于常值环。我们将所得算子记为$D_1$。

（关于辛几何中作用于 $Z^-$ 上的类似 Cauchy-Riemann 型算子的处理，请参阅 [Oh99, 附录] 以及 [FOOO10] 。）

因此我们得到

$$\mathrm{Index} L_{\mathrm{glued}} = \mathrm{Index}(L_2) + \mathrm{Index}(L_1) = 0 + n = n :$$

这里我们用到以下标准事实：主符号决定线性微分算子的椭圆性，而 Fredholm 指标在 Fredholm 算子的连续族下保持不变。计算 Index$L_2$时，我们注意到 $L_2$ 可在圆盘上作为一个椭圆族变形为狄利克雷拉普拉斯算子 $-\Delta_0$ 。因此它的指标为 0。对于作用于 $D^2$上的算子 $L_1$ ，我们也可以将其变形为 Cauchy-Riemann 算子 $\overline{\partial}$ （通过消去其零阶部分），并以可缩的拉格朗日环作为其边界条件。由 Riemann-Hilbert 算子的标准指标计算可知，该算子的指标为 $n$ 。（例如参见 [Oh95], 。）（此计算属于带边界紧流形上椭圆边值问题的指标理论范畴，见 [AB64]。在我们的情形中，区域就是 $D^2$。）

10.2. 半条带上的指标计算。现在只需计算 Index$L_{w^+{}_{(i-1)i}}$'s 的指标，其中每个都具有定义在 $Z^-$ 上并满足勒让德边界条件的 $L_{[w,\gamma]}$ 形式

$$Y(0,t) \in \alpha_{01}(t),\ Y(\tau,0) \in TR_0,\ Y(\tau,1) \in TR_1$$

以及 (10.2)。根据同伦 (1.14) 下的同伦不变性，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Index}L_{[w,\gamma]} &= \mathrm{Index}\begin{pmatrix}\bar\partial^{\nabla^\pi}+B^{(0,1)}+T^{w,(0,1)}_{dw} & 0\\ 0 & -\Delta_0\end{pmatrix}\\ &= \mathrm{Index}(\bar\partial^{\nabla^\pi}+B^{(0,1)}+T^{w,(0,1)}_{dw})+\mathrm{Index}(-\Delta_0).\end{aligned}$$

（在 $Z^+$ 上，我们可以通过变量代换 $(\tau,t)\mapsto(-\tau,t)$ 将算子变换到 $Z^-$ 上，因此只需考虑 $Z^-$ 的情形。）

**10.2.1. Reeb 分量的贡献。**我们首先计算 $\mathrm{Index}(-\Delta_0)$。根据（线性）椭圆正则性，只需考虑算子 $\Delta_0$的 $W^{2,\,p}$-完备化，并以 $p>2$ 作为其离壳函数；其核由以下形式的狄利克雷问题的解构成：

$$\begin{cases}\Delta f=0, \quad \|f\|_{W^{2,p}}<\infty,\\ f(\tau,0)=f(\tau,1)=f(0,t)=0,\end{cases}\tag{10.3}$$

其中 $f:\ Z^-\subset\mathbb{C}\to\mathbb{R}$。

引理 10.1. $\mathrm{Index}(-\Delta_0)=0$。

证明。为证明此结论，我们先计算 $-\Delta_0$ 的形式伴随算子。该形式伴随方程定义如下：对于满足 $1/p+1/q=1$ 的 $g\in L^q$

$$\int_{Z^-}(-\Delta f\cdot g)\,dA=0$$

对所有满足与（10.3）相同边界条件的 $f\in C^\infty_0(Z^-)$。

通过（形式上）进行分部积分，我们计算得

$$\begin{aligned}\int_{Z^-}(-\Delta f\cdot g)dA &= \int_{Z^-}\big(-\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\big)\cdot g dA\\ &= -\int_{Z^-}\frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\cdot g dA-\int_{Z^-}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\cdot g dA\\ &= -\int_{Z^-}f\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial\tau^2}dA-\int_{Z^-}f\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}dA+\int_0^1\frac{\partial f}{\partial\tau}(0,t)\cdot g(0,t)dt\\ &\quad+\int_0^\infty\frac{\partial f}{\partial t}(\tau,0)\cdot g(\tau,0)d\tau-\int_0^\infty\frac{\partial f}{\partial t}(\tau,1)\cdot g(\tau,1)d\tau\\ &= \int_{Z^-}f\cdot(-\Delta g)dA+\int_0^1\frac{\partial f}{\partial\tau}(0,t)\cdot g(0,t)dt\\ &\quad+\int_0^\infty\frac{\partial f}{\partial t}(\tau,0)\cdot g(\tau,0)d\tau-\int_0^\infty\frac{\partial f}{\partial t}(\tau,1)\cdot g(\tau,1)d\tau\\ &= 0.\end{aligned}$$

由于 $f$ 是任意的，我们得到了方程

$$\begin{cases}-\Delta g=0, \quad \|g\|_{L^q}<\infty\\ g(\tau,0)=g(\tau,1)=g(0,t)=0.\end{cases}\tag{10.4}$$

根据椭圆正则性，(10.3) 和 (10.4) 的解都是光滑的，且解空间相同。这意味着 $\mathrm{dimker}(-\Delta_0)^\dagger=\dim\ker(-\Delta_0)$。由于 $\mathrm{coker}(-\Delta_0)\cong\ker(-\Delta_0)^\dagger$，我们得出

$$\mathrm{Index}(-\Delta_0)=\dim\ker(-\Delta_0)-\dim\mathrm{coker}(-\Delta_0)=0$$

这就完成了该引理的证明。 □

10.2.2. $\xi$ 分量的贡献。现在我们将计算该算子的指标

$$\bar{\partial}^{\nabla^\pi} + B^{(0,1)} + T^{\pi,(0,1)}_{dw}$$

遵循 [Oh99，附录]。注意，事实上它是线性化 $D\Upsilon_1$ 在 $\Omega^0(w^*\xi;\ TR_0, TR_1;\ \alpha_{01})$ 上的限制。

为计算线性化 $D\Upsilon_1$ ，我们再次使用构造多边形 Maslov 指标时所用的平凡化 $\Phi$ 。于是得到推前算子

$$\Phi_* D\Upsilon_1 : W^{1,2}(Z^-, \mathbb{R}^{2n+1}; \Lambda_0, \Lambda_1; \alpha_{01}^\Phi) \to L^2(Z^-, \mathbb{R}^{2n})$$

其中，对于 $i = 0,\ 1$，且 $\alpha_{01}^\Phi = \Phi(\alpha_{01})$，$\Lambda_i(\tau) = \Phi(T_{w(\tau,i)}R_i)$。那么该算子给出一个算子

$$\Phi_*(D\Upsilon_1|_{w^*\xi}) : W^{1,2}(Z^-, \mathbb{R}^{2n}; \Lambda_0, \Lambda_1; \alpha_{01}^\Phi) \to L^2(Z^-, \mathbb{R}^{2n})$$

这里，$\Lambda_i$ 被视为 $\mathbb{R}^{2n}$中的拉格朗日子空间。注意，该算子具有带边界条件的坐标形式的线性化 Cauchy-Riemann 算子的形式

$$Y^\pi(0,t) \in \alpha_{01}^\Phi(t),\ Y^\pi(\tau,0) \in \Lambda_0(\tau),\ Y^\pi(\tau,1) \in \Lambda_1(\tau).$$

为了计算指标，我们使用 [FOOO10，命题 6.3]。回忆一下，拉格朗日环 $\widetilde{\alpha}^\Phi_{[w,\gamma],\ \alpha_{01}}$ 由 (8.6) 定义。然而，为了使用 [FOOO10，命题 6.3] $\alpha^-$，(8.6) 中的 $(t)$ 必须满足 $(\alpha^-)'(0)$（而非 $-(\alpha^-)'(1)$）是正向定向的。通过变量代换 $(\tau, t) \mapsto (\tau, 1-t)$，我们可以先计算定义在 $W^{1,\ 2}(Z^+, \mathbb{R}^{2n};\ \Lambda_1, \Lambda_0;\ \alpha_{10}^\Phi)$ 上的算子 $D\Upsilon_1$ 的指标，然后在结果上取负号。因此，我们得到以下命题。

命题 10.2。我们有

$$\mathrm{Index} D\Upsilon_1|_{w^*\xi} = -\mu([w,\gamma]; \alpha_{01}).$$

10.3. 总结。最后，我们得到所需的指标公式

定理 10.3。设 $w$ 是满足 (1.4) 的接触瞬子。那么我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Index} D\Upsilon(w) = \mathrm{Index} L_w &= \mathrm{Index} L_{\mathrm{glued}} + \sum_{i=0}^{k} \mathrm{Index} L_{w_{(i-1)i^+}} \\ &= n - \sum_{i=1}^{k} \mu([w^+_{(i-1)i}, \gamma_i]; \alpha_{(i-1)i}). \end{aligned}$$

根据命题 9.2，我们还可以将其表示为

$$\mathrm{Index} D\Upsilon(w) = n + \mu(\mathcal{E}, \underline{\gamma}, \overline{\gamma}; B)$$

其中 $B = [w]$。

## Appendix A. Summary of the exterior calculus of vector valuedforms

在本附录中，我们回顾适用于当前情形的标准 Weitzenb¨ock 公式。关于一般 Weitzenb¨ock 公式的精彩阐述可见于 [FU84] 的附录，而关于证明中涉及的协变外微分演算， [Wel73 第五章第1], 节也提供了很好的阐述。本文仅借用这一一般演算中的一部分，以满足本文的需要。

设 $(P,h)$ 是一个维数为 $n$ 、度量为 $h$ 的黎曼流形， $D$ 是列维-奇维塔联络。设 $E\to P$ 是任意带有内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的向量丛，并假设 $\nabla$ 是 $E$ 上与 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 相容的联络。

对于任意 $E$ 值微分形式 $s$，计算其能量密度 $s$ 的（Hodge）拉普拉斯算子，可得

$$-\frac{1}{2}\Delta|s|^2=|\nabla s|^2+\langle \mathrm{Tr}\nabla^2 s,s\rangle,$$

其中，对于 $|\nabla s|$ ，我们指向量丛 $T^*P\otimes E$ 上的诱导范数，即 $|\nabla s|^2=\sum_i|\nabla_{E_i}s|^2$，其中 $\{E_i\}$ 是 $TP$ 的正交归一标架。 $Tr\nabla^2$ 表示联络拉普拉斯算子，其定义为 $Tr\nabla^2=\sum_i\nabla^2_{E_i,\ E_i}s$，其中 $\nabla^2_{X,\ Y}:=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_{\nabla_X Y}$。

记 $\Omega^k(E)$ 为 $P$ 上取值于 $E$ 的 $k$-形式空间。联络 $\nabla$ 诱导的外微分定义为

$$\begin{aligned} d^\nabla &: \Omega^k(E)\to\Omega^{k+1}(E)\\ d^\nabla(\alpha\otimes\zeta) &= d\alpha\otimes\zeta+(-1)^k\alpha\wedge\nabla\zeta. \end{aligned}$$

不难验证，对于任意 1-形式，也可以等价地写成

$$d^\nabla\beta(v_1,v_2)=(\nabla_{v_1}\beta)(v_2)-(\nabla_{v_2}\beta)(v_1),$$

其中 $v_1$、 $v_2\in TP$。我们将霍奇星算子扩展到 $E$ 值形式上，定义为

$$\begin{aligned} * &: \Omega^k(E)\to\Omega^{n-k}(E)\\ *\beta &= *(\alpha\otimes\zeta)=(*\alpha)\otimes\zeta \end{aligned}$$

对于 $\beta=\alpha\otimes\zeta\in\Omega^k(E)$。

定义联络 $\nabla$ 的霍奇拉普拉斯算子为

$$\Delta^\nabla:=d^\nabla\delta^\nabla+\delta^\nabla d^\nabla,$$

其中， $\delta^\nabla$ 定义为

$$\delta^\nabla:=(-1)^{nk+n+1}*d^\nabla*.$$

以下引理给出了一个有用且重要的公式，可用于推导 Weitzenb¨ock 公式。

引理 A.1. 假设 $\{e_i\}$ 是 $P$ 的正交归一标架，且 $\{\alpha^i\}$ 是对偶标架。则有

$$\begin{aligned} d^\nabla &= \sum_i\alpha^i\wedge\nabla_{e_i}\\ \delta^\nabla &= -\sum_i e_i\rfloor\nabla_{e_i}. \end{aligned}$$

关于我们情形下的维岑伯克公式的证明，请参阅 [OW18a，附录] ¨。

在当前语境下，三元组联络诱导出投影映射

$$\nabla^\pi : \Omega_0(\xi) \to \Omega_1(\xi)$$

由性质定理 2.1 (4) 得出。然后利用与 $\lambda$ 相适配的 CR 近复结构 $J$，我们可以分解

$$\nabla^\pi = \nabla^{\pi(1,0)} + \nabla^{\pi(0,1)}$$

根据显式公式

$$\nabla^{\pi(1,0)} = \frac{\nabla^\pi - J\nabla^\pi_{j(\cdot)}}{2}, \quad \nabla^{\pi(0,1)} = \frac{\nabla^\pi + J\nabla^\pi_{j(\cdot)}}{2}.$$

（也可以像正文中那样将 $\nabla^{\pi(0,1)}$ 写作 $\overline{\nabla}^\pi$ 。）

然后，将相关的协变微分反对称化，即可得到我们上文定义的 $d^\nabla$ 。将上文的 $\nabla$ 替换为 $\nabla^\pi$，便定义了微分算子

$$d^{\nabla^\pi} : \Omega^k(\xi) \to \Omega^{k+1}(\xi).$$

注 A.2. 接触三元组联络满足以下两条性质：

- $J$ 是平行的，
- $\pi$(0,1)（或 $\pi$(1,0)）投影是一个相对于作用于 Γ($w^*\xi$)的厄米联络 $\nabla^\pi$ 而言的平行运算，对任意接触瞬子 $w$均成立。

常用的列维-奇维塔联络不具备这些平行性。接触三元组联络的这些性质，使我们能够以有效的张量方式整理协变微分过程中出现的各种项。由于列维-奇维塔联络（相对于三元组度量）缺少这样的典范分解，使用列维-奇维塔联络时，只能追踪 $J$ 以及幂等算子 Π的导数，并将它们一路保留到最后：这些项无法整理成自然的张量表达式，只能各自单独保留！这样一来，张量计算的最终结果就无法像接触三元组联络给出的结果那样简洁优雅，例如导出整体 $W^2$, 2-估计的计算，或线性化算子 $D\Upsilon(w)$的公式。相较于列维-奇维塔联络，这些都是接触三元组联络在 [OW18a、OW18b、Oha]以及本文所进行的张量计算中的几个显著优点。在较小的范围内，复几何中陈联络与一般厄米联络之间也存在类似情况。（见 [Che]¦ Oh15，第 7]章。）这也是Wang和第二作者最初在 [OW14] 中引入三元组联络，并在[OW18a、OW18b]中加以应用的原因之一。它使原本复杂的张量计算变得易于处理，并能得到简洁的最终结果。例如， [Oha，定理10.1] 中给出的线性化算子$D\Upsilon(w)$的表达式形式优雅，且具有明确的几何意义。该公式也见于定理7.2，并被用于我们的指标计算研究。

## References

[AB64] M.F. Atiyah 和 R. Bott, *The index problem for manifolds with boundary*，第 175–186 页，牛津大学出版社，伦敦，1964 年。[Arn67] V. I. Arnol′d,
*On a characteristic class entering the quantizations*，《函数分析及其应用》1（1967 年），1–14。

[BEHZ03] F. Bourgeois、Y. Eliashberg、Wysocki K. Hofer、H. 和 E. Zehnder, *Compactness results in symplectic field theory* **7** 2003 799 888 , 《Geom. Topol.》（），–。

[Bhu01] M. Bhupal, *A partial order on the group of contactomorphisms of $\mathbb{R}^{2n+1}$ via generating functions* **25** 2001 125 235 , 《Turkish J. Math.》（），–。[Bou02] F. Bourgeois, *A Morse-Bott approach to contact homology*, 博士论文，斯坦福大学，2002 年。[Che] S.S. Chern, *Complex manifolds without potential theory*, 范·诺斯特兰德数学研究丛书。[EES05] Tobias Ekholm、John Etnyre 和 Michael Sullivan, *The contact homology of Legendrian submanifolds in $\mathbb{R}^{2n+1}$* **71** 2005 2, 177 305 , 《J. Differential Geom.》（），第 – 期。[EES07] , *Legendrian contact homology in $P \times \mathbb{R}$*, 《Trans. Amer. Math. Soc.》359（2007 年），第 7 期，3301–3335。[FOOO10] Kenji Fukaya、Y.-G. Oh、Hiroshi Ohta 和 Kaoru Ono, *Anchored lagrangian subman-ifolds and their floer theory*, 《镜像对称与热带几何》（罗德岛州普罗维登斯），《当代数学》，第 527 卷，美国数学会，2010 年，第 15–54 页。[FU84] D. Freed 和 K. Uhlenbeck, *Instantons and Four-Manifolds*, MSRI 出版物，第 1 卷，Srpringer-Verlag，纽约，1984 年。[HWZ96a] H. Hofer、K. Wysocki 和 E. Zehnder, *Correction to: "properties of pseudoholomorphic curves in symplectisations. I. Asymptotics"* , 《Ann. Inst. H. Poincare C Anal. Non Lin´eaire》15（1996 年），第 4 期，535–538。[HWZ96b] , *Properties of pseudoholomorphic curves in symplectisations. I. Asymptotics.*, 《Ann. Inst. H. Poincar´e C Anal. Non Lin´eaire》13（1996 年），第 3 期，337–379。[Jos86] J. Jost, *On the regularity of minimal surfaces with free boundaries in Riemannian manifolds* **56** 1986 3, 279 291 , 《Manuscripta Math.》（），第 – 期。[Oha] Y.-G. Oh, *Analysis of contact Cauchy-Riemann maps III: energy bubbling and Fredholm theory* , 《Bulletin of Math. Sci.》，在线发表，https://doi.org/10.1142/S1664360722500114。[Ohb] , *Bordered contact instantons and their Fredholm theory and generic transver-salities*, 预印本，提交至 Bumsig Kim 纪念会议论文集，2021 年 10 月，韩国高等研究院，arXiv:2209.03548(v2)。[Ohc] , *Geometry and analysis of contact instantons and entanglement of Legendrian links II* , 准备中。[Oh95] , *Riemann–Hilbert problem and application to the perturbation theory of analytic discs* , 《Kyungpook Math. J.》**35** 1995 39 75 （），第 – 期。[Oh97] , *Symplectic topology as the geometry of action functional I: Relative Floer theory on the cotangent bundle* **46** 1997 3, 499 577 , 《J. Differ. Geom.》（），第 – 期。[Oh99] , *Symplectic topology as the geometry of action functional II: Pants product and cohomological invariants* **7** 1999 1, 1 54 , 《Comm. Anal. Geom.》（），第 – 期。[Oh15] , *Symplectic Topology and Floer Homology, vol. 1*, 新数学专著，第 28 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2015 年。[Oh21a] , *Geometric analysis of perturbed contact instantons with Legendrian boundary conditions* 2205 , arXiv: .12351，2021 年。[Oh21b] , *Geometry and analysis of contact instantons and entangement of Legendrian links I* 2111 , 预印本，arXiv: .02597，2021 年。[Oh22a] , *Contact instantons anti-contact involution and proof of Shelukhin's conjecture* 2212 , 预印本，arXiv: .03557，2022 年。[Oh22b] , *Gluing theories of contact instantons and of pseudoholomorphic curves in SFT* 2205 00370, 2022 , 预印本，arXiv: . 。[OS] Y.-G. Oh 和 Y. Savelyev, *Pseudoholomoprhic curves on the $\mathfrak{LCS}$-fication of contact manifolds* , 《Advances in Geometry》，（即将出版）。[OW14] Y.-G. Oh 和 R. Wang, *Canonical connection on contact manifolds*, 《实与复子流形》，Springer 数学与统计学论文集，第 106 卷，2014 年（完整版见 arXiv:1212.4817），第 43–63 页。[OW18a] , *Analysis of contact Cauchy-Riemann maps I: A priori $C^k$ estimates and asymptotic convergence* **55** 2018 4, 647 679 , 《Osaka J. Math.》（），第 – 期。[OW18b] , *Analysis of contact Cauchy-Riemann maps II: Canonical neighborhoods and exponential convergence for the Morse-Bott case* **231** 2018 128 , 《Nagoya Math. J.》（），– 223。

[OYa] Y.-G. Oh 和 Seungook Yu, *Canonical generating function of Legendrian submanifolds on the one-jet bundle* 2023 , 预印本, .[
——— *Legendrian spectral invariants on the one jet bundle via perturbed contact instantons* 2023 , 预印本, .
[San] S. Sandon,
*Contact homology capacity and non-squeezing in $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$ via generating* , , 《Ann. *functions*
Inst. Fourier（Grenoble）》。[Sch] R. Schoen, *Analytic aspects of hte harmonic map problem*, Springer，柏林，S.S. Chern 编，第 321–358 页。[Sik94] J. C. Sikorav,
*Some properties of holomorphic curves in almost complex manifolds*, 《辛几何中的全纯曲线》第 V 章，Audin, M. 和 La- fontaine, J. 编，Birkh¨auser，巴塞尔，[SZ92] Dietmar Salamon 和 Eduard Zehnder, *Morse theory for periodic solutions of hamiltonian systems and the maslov index* **45** 1992 ，
《纯粹与应用数学通讯》（），第 10 期，1303 1360–。[Th´e95] D. Th´eret，博士论文，巴黎第七大学（Denis Diderot），1995 年。[Vit92] C. Viterbo,
*Symplectic topology as the geometry of generating functions*, 《数学年刊》292（1992），第 4 期。[Wei87] A. Weinstein，加利福尼亚大学伯克利分校研究生课程，1987 年。[Wel73] Raymond O. Wells,
*Differential analysis on complex manifolds*, 《数学研究生教材》第 65 卷，Springer，纽约，1973 年。[Wen] C. Wendl, *Lectures on Symplectic Field Theory*，书稿，arXiv:1612.01009。

Center for Geometry and Physics、 Institute for Basic Science (IBS)、 77 Cheongam-ro, Nam-gu, Pohang-si, Gyeongsangbuk-do, Korea 790-784 & POSTECH, Gyeongsangbuk-do, Korea
*Email address*: yongoh1@postech.ac.kr

POSTECH、 & Center for Geometry and Physics、 Institute for Basic Science (IBS)、77 Cheongam-ro、 Nam-gu、 Pohang-si、 Gyeongsangbuk-do、 Korea 790-784*Email address*: yso1460@postech.ac.kr