arXiv:2301.06090v2 [cond-mat.quant-gas] 7 Jun 2023

通过布洛赫态层析提取光学拉曼晶格的量子几何张量

Chang-Rui Yi,[1, 2, 3, *] Jinlong Yu,[4, 5, *] Huan Yuan,[1, 2, 3] Rui-Heng Jiao,[1, 2, 3] Yu-Meng Yang,[1, 2, 3] Xiao Jiang,[1, 2, 3] Jin-Yi Zhang,[1, 2, 3] Shuai Chen,[1, 2, 3] 和 Jian-Wei Pan[1, 2, 3]

[1] *Hefei National Research Center for Physical Sciences at the Microscale and School of Physical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*

[2] *Shanghai Research Center for Quantum Science and CAS Center for Excellence in Quantum Information and Quantum Physics,University of Science and Technology of China, Shanghai 201315, China*[3] *Hefei National Laboratory, University of Science and Technology of China, Hefei 230088, China*[4] *Center for Theoretical Physics, Hainan University, Haikou 570228, China*[5] *School of Science, Hainan University, Haikou 570228, China*（日期：2023年6月8日）

在希尔伯特空间中，量子态的几何由量子几何张量（QGT）表征，其虚部为贝里曲率，实部为量子度规张量。在此，我们通过实验实现了完整的布洛赫态层析，直接测量超冷原子光学拉曼晶格的本征函数。利用测得的本征函数，我们重建了布里渊区内完整量子几何张量的分布，并通过贝里曲率提取拓扑不变量，同时用量子度规张量测量动量空间中量子态之间的距离。此外，我们通过实验检验了贝里曲率与量子度规张量之间一个已预测的不等式，揭示了拓扑与几何之间的深层联系。

在量子物理中，量子态定义于希尔伯特空间中，贝里相位深刻地反映了希尔伯特空间的基本几何结构[1]。1989年，贝里进一步指出，希尔伯特空间的几何完全由量子几何张量（QGT）决定 [2]。QGT具有一个反对称的虚部，即著名的贝里曲率，它揭示了波函数在参数空间中两个参数点之间的几何相位差。与之相关的拓扑现象已在许多系统中得到广泛研究，例如阿哈罗诺夫–玻姆效应 [3], 、量子霍尔效应[4], 、拓扑绝缘体和拓扑超导体 [5, 6]。此外，QGT还具有一个称为量子度规张量的对称实部 [7, 8], ，它描述参数空间中两个量子态之间的距离。量子度规张量可给出著名的欧拉示性数 [9] ，对于获取量子费舍尔信息 [10, 11] 以及描述量子相变 [12]也至关重要。

拓扑知识从凝聚态物理领域不断拓展，使得通过量子调控测量量子几何张量成为可能。近期，已有多项实验测量了二能级系统的量子几何张量，包括超导量子比特 [13], 、氮空位中心量子比特 [14, 15] 和激子-极化激元 [16]。然而，在晶格系统中，布洛赫能带的完整量子几何张量尚未得到测量。尤其是，在超冷原子领域，光学晶格已发展成为高度可控且可调的量子模拟器，可用于研究拓扑能带物理 [17], ，为测量量子几何张量提供了理想平台 [18]。此外，冷原子系统中已有多种层析实验：基于投影到平带后的动力学 [19–21], ；基于快速加速在不同动量处进行投影 [22], ；基于包围 [23]或穿越能带闭合点 [24], 的路径干涉；以及基于与高能带的非共振耦合 [25]。这些层析方案从不同方面探测光学晶格中的布洛赫态，但没有一种专门研究量子几何张量。

在这里，我们利用光学晶格中的超冷原子，实验测量了拓扑能带的完整 QGT。我们在二维（2D）光学拉曼晶格中，利用可精确控制的动量转移拉曼激光脉冲，实现了完整的布洛赫态层析 [26, 27]。基于布洛赫态层析，通过测量三个泡利矩阵的期望值，可以直接测得拉曼晶格中双能带模型的本征函数。因此，仅依赖本征函数的动量分辨贝里曲率和量子度规张量得以同时重构，从而探测拉曼晶格中布洛赫态的完整几何性质。同时，通过在整个布里渊区内对贝里曲率（量子度规张量）进行积分，得到陈数 [5] （量子体积 [28, 29]）。文献 [28, 29] 中证明的量子体积与陈数之间的不等式也得到了实验检验。

我们的布洛赫态层析是在二维拉- ^{87}曼晶格中的超冷铷原子上实现的， [27, 30, 31], 如图1(a) 所示。拉曼晶格由以下方式构建

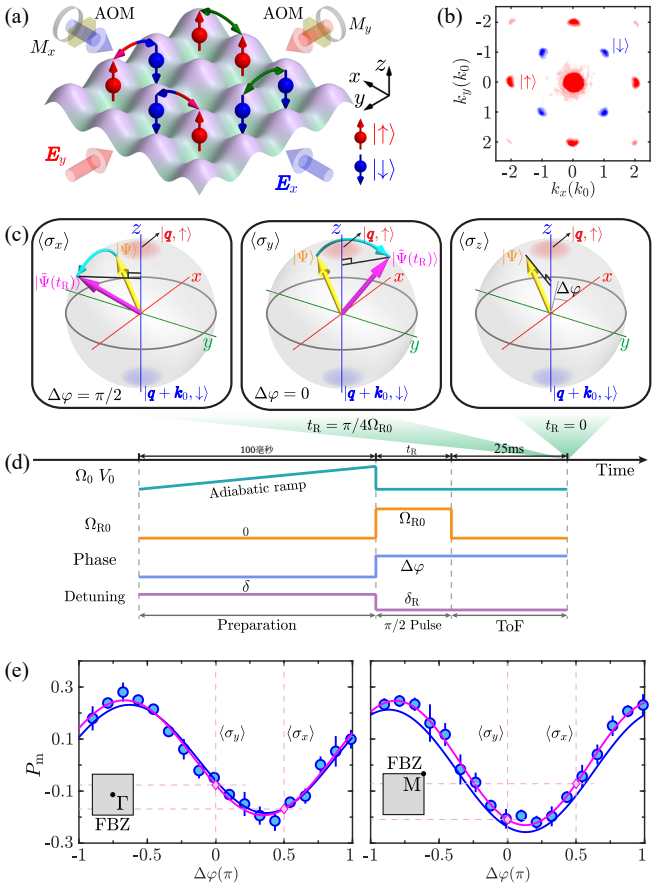

图 1：二维光学拉曼晶格中的布洛赫态层析。(a) 拉曼晶格示意图。(b) 玻色-爱因斯坦凝聚体（BEC）在动量空间中的分布。BEC 制备在 $|\uparrow\rangle$，并处于动量点 $\boldsymbol{k} = (0, 0)$。由于拉曼势，四个 BEC 分布在动量 $\boldsymbol{k} = (\pm k_0, \pm k_0)$处，处于$|\downarrow\rangle$。这里，$k_0$ 为反冲动量。其他 BEC 处于 $|\uparrow\rangle$，并被晶格势衍射，且不发生自旋翻转。(c) 层析原理。原子首先处于 $|\Psi\rangle$ 的叠加态，该态由 $|\boldsymbol{q}, \uparrow\rangle$ 和 $|\boldsymbol{q} + \boldsymbol{k}_0, \downarrow\rangle$ 组成（黄色箭头）。施加一个 $\pi/2$ 拉曼脉冲后，$|\Psi\rangle$ 沿着天蓝色轨迹演化至新的叠加态 $|\Psi\rangle$（洋红色箭头）。 $\Delta\varphi$ 恰好是灰色轴与 x轴之间的夹角。通过调节 $\Delta\varphi$，灰色轴在赤道面内旋转。经过飞行时间（ToF）后，当$\Delta\varphi = \pi/2$ (0)时，得到 $\langle\sigma_x\rangle$ ($\langle\sigma_y\rangle$)。 $\langle\sigma_z\rangle$ 通过飞行时间直接测量，无需施加拉曼脉冲。(d) 实验时序。原子在制备阶段装载到拉曼晶格中。拉曼脉冲通过突然关闭$\boldsymbol{E}_{x,\ y}$的反射光束来实现，并将拉曼脉冲强度设为 Ω_{R0}、相对相位 $\Delta\varphi$ 设为某一特定值以及 $\delta_R = 0$。经过飞行时间后，测量自旋极化。(e) 准动量 Γ 和 M 点处的自旋极化 P_m 随相对相位 $\Delta\varphi$的变化。带误差棒的圆点（蓝色曲线）分别表示实验数据（数值计算）结果。实验数据用正弦函数拟合（红色曲线）。插图标出了第一布里渊区（FBZ）中的 Γ 和 M 点。参数：晶格深度 $V_0 = 4.0E_r$、拉曼势强度 $\Omega_0 = 1.0E_r$、 $\delta = -0.2E_r$、 $t_R = 10\mu s$ 和 $\delta_R = 0$。反冲能量 $E_r \approx 2\pi \times 3.7$千赫。

由两束激光束$\boldsymbol{E}_{x,\ y}$ 波长为 $\lambda = 787$nm，且沿相反方向传播，同时耦合两个磁能级 $|F = 1,\ m_F = -1\rangle \equiv |\uparrow\rangle$ 和 $|F = 1,\ m_F = 0\rangle \equiv |\downarrow\rangle$。哈密顿量为 ($\hbar = 1$)

$$H = \frac{\boldsymbol{k}^2}{2m} + V_{\text{latt}} + \frac{\delta}{2}\sigma_z + \Omega_1\sigma_x + \Omega_2\sigma_y, \qquad (1)$$

其中， $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y)$ m、 δ 和 $\sigma_{x、\ y、\ z}$ 分别表示动量、原子的质量、双光子失谐和泡利矩阵。拉曼势 $\Omega_{1,2}$ （晶格势 V_{latt}）以强度 Ω_0 （V_0）诱导自旋翻转（自旋守恒）跃迁，并传递动量 $\boldsymbol{k}_0$ = （$\pm k_0, \pm k_0$）（$2\boldsymbol{k}_0$）；这可从动量空间中基态原子的分布观察到 [图1(b)] [26, 27]。于是，哈密顿量方程（1）的本征态 $|\Psi（\boldsymbol{q}）\rangle$可表示为 $|\boldsymbol{q}、\uparrow\rangle$ 和 $|\boldsymbol{q} + \boldsymbol{k}_0、\downarrow\rangle$的叠加，即 $|\Psi（\boldsymbol{q}）\rangle = c_\uparrow（\boldsymbol{q}）|\boldsymbol{q}、\uparrow\rangle + c_\downarrow（\boldsymbol{q}）|\boldsymbol{q} + \boldsymbol{k}_0、\downarrow\rangle$ [31]。这里， $\boldsymbol{q} =（q_x, q_y）$ 和 $c_{\uparrow、\downarrow}$分别是准动量和归一化复系数。本征态 $|\Psi（\boldsymbol{q}）\rangle$ 可表示在布洛赫球上，其两极为 $|\boldsymbol{q}、\uparrow\rangle$ 和 $|\boldsymbol{q} + \boldsymbol{k}_0、\downarrow\rangle$[图1(c)]。

层析的核心思想是通过旋转测量基（详见 [31] ），测量拉曼晶格的三个泡利矩阵$\langle\sigma_{x,y,z}（\boldsymbol{q}）\rangle$的期望值。我们通过自旋分辨飞行时间（ToF）成像直接获得期望值 $\langle\sigma_z（\boldsymbol{q}）\rangle$ ，该方法已应用于 [26, 27]。将测量基 $|\boldsymbol{q}, \uparrow\rangle$ 和 $|\boldsymbol{q} + \boldsymbol{k}_0, \downarrow\rangle$ 旋转至布洛赫球上的 x轴（ y轴）后，可通过自旋分辨飞行时间成像 [32]观测期望值 $\langle\sigma_x（\boldsymbol{q}）\rangle$ （$\langle\sigma_y（\boldsymbol{q}）\rangle$）。这种旋转通过相干拉曼脉冲实现。作用于 $|\Psi（\boldsymbol{q}）\rangle$ 的脉冲需要在 $|\boldsymbol{q}, \uparrow\rangle$与 $|\boldsymbol{q} + \boldsymbol{k}_0, \downarrow\rangle$ 之间传递动量 $\boldsymbol{k}_0 =（-k_0, -k_0）$ ，同时保持拉曼脉冲与拉曼晶格之间固定的相对相位 $\Delta\varphi$ ，从而确保准确确定$\langle\sigma_{x,y}（\boldsymbol{q}）\rangle$[图1(c)]。

具体而言，拉曼脉冲由以下入射激光束组成：$\boldsymbol{E}_{x,\ y}$ 回射光束则通过声光调制器（AOM）关闭 [图1（a）]。因此，拉曼脉冲的哈密顿量为 [31]

$$H_R = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k}^2/2m + \delta_R/2 & \Omega_R \\ \Omega_R^* & \boldsymbol{k}^2/2m - \delta_R/2 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

在实验中，施加一个足够短、双光子失谐为 $\delta_R = 0$ 的拉曼脉冲，使得动能可以忽略，拉曼耦合 Ω_R 占主导地位。此外，$\Omega_R = \Omega_{R0}e^{-i[k_0\ (x+y)\ -\Delta\varphi]}$ 的强度 Ω_{R0} 会在 $|\boldsymbol{q}、\uparrow\rangle$ 和 $|\boldsymbol{q} + \boldsymbol{k_0}\ \downarrow\rangle$之间产生 $\boldsymbol{k_0} =（-k_0,\ -k_0）$ 的动量转移。相对相位 $\Delta\varphi$ 由输入激光 $\boldsymbol{E}_{x,\ y}$ 的初始相位差控制；这些输入激光产生拉曼脉冲和拉曼晶格 [31]。

当持续时间为 t_R 的拉曼脉冲施加到 $|\Psi(\boldsymbol{q})\rangle$ 时，相对相位 $\Delta\varphi$ 会被印刻到

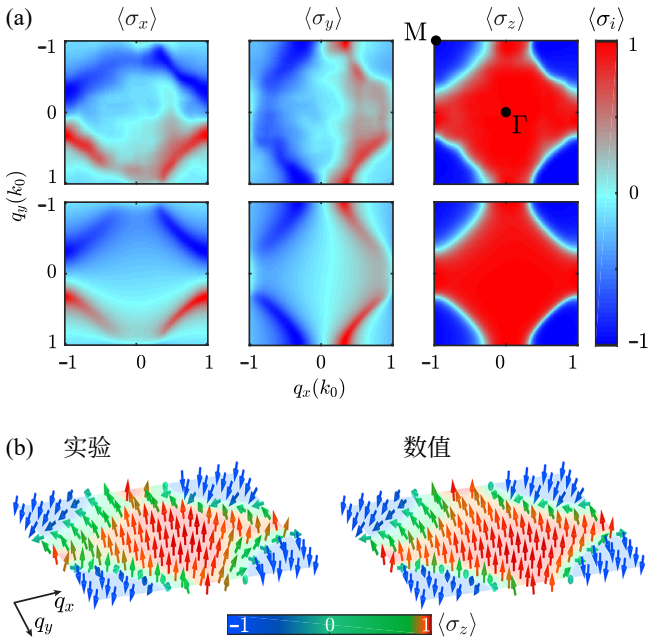

图 2：第一布里渊区中三个泡利矩阵的期望值 $\langle\sigma_{i=x\ y\ z}\rangle$ $\langle\sigma_{x\ y\ z}\rangle$ $\delta = -0.2E_r$。(a) 最低能带的归一化 $\langle\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q})\rangle$，其中结果来自实验数据（上排），并与数值计算结果（下排）进行比较。(b) 第一布里渊区中 $\langle\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q})\rangle$ 的分布呈现斯格明子构型。参数：$(V_0, \Omega_0, \delta) = (4.0, 1.0, -0.2)E_r$。

~ ~随时间变化的态 $|\Psi(\boldsymbol{q},\ t_R)\rangle$。态 $|\Psi\rangle$ 以频率 $\tilde{\Omega}_{R0}$绕布洛赫球上的一个轴进动。例如，$|\Psi\rangle$ 在赤道面上绕 y (x)-轴进动，当 $\Delta\varphi = \pi/2$ (0) [图1(c)]。飞行时间成像后，通过自旋极化 [31]获得泡利矩阵的期望值$\langle\sigma_{x,\ y,\ z}\rangle$

$$\langle\tilde{\Psi}|\sigma_z|\tilde{\Psi}\rangle = \langle\sigma_z\rangle\cos(2\Omega_{R0}t_R) + (\langle\sigma_y\rangle\cos\Delta\varphi + \langle\sigma_x\rangle\sin\Delta\varphi)\sin(2\Omega_{R0}t_R). \quad (3)$$

当 $t_R = 0$, $\langle\sigma_z\rangle$ 得到；当 $t_R = \pi/(4\Omega_{R0})$,$\langle\sigma_x\rangle(\langle\sigma_y\rangle)$ 由一个 $\pi/2$ 拉曼脉冲以 $\Delta\varphi = \pi/2(0)$ [图1(c)]。

现在，我们在实验中阐明这一技术 [31]。实验方案如图1(d)所示。首先，将 ^{87}Rb 原子的玻色-爱因斯坦凝聚体绝热加载到拉曼晶格中。凝聚体在第一布里渊区（FBZ）的 Γ 或 M 点凝聚，这取决于玻色-爱因斯坦凝聚体制备于 $|\uparrow\rangle$ 还是 $|\downarrow\rangle$。与此同时，原子处于拉曼晶格的最低能带。其次，在 200 ns 内开启 $\pi/2$ 拉曼脉冲以耦合原子（脉冲灵敏度见 [31] ）；具体做法是同时对光束 $\boldsymbol{E}_{x,y}$进行以下操作：(i) 关闭$\boldsymbol{E}_{x,y}$的回射光束；(ii) 调节 $\boldsymbol{E}_{x,y}$的强度，将拉曼脉冲强度调至 $\Omega_{R0} \approx 3.4E_r$；(iii) 设置

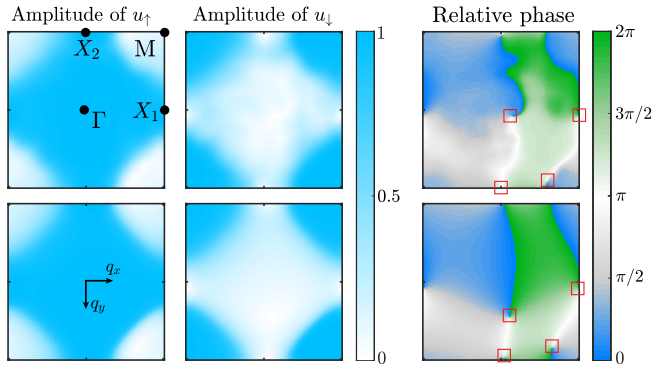

图 3：第一布里渊区内本征函数的实验重构：本征函数 $u_\uparrow$（第一列）和 $u_\downarrow$（第二列）的振幅，以及 $u_\uparrow$ 与 $u_\downarrow$ 之间的相对相位（第三列）。红色方块标出相位涡旋的位置。实验数据（上排）与数值计算结果（下排）进行了比较。参数：$(V_0, \Omega_0, \delta) = (4.0, 1.0, -0.2)E_r$。

通过改变$\boldsymbol{E}_{x,y}$的初始相位，将相对相位 $\Delta\varphi$ 设为特定值；(iv) 通过调节$\boldsymbol{E}_{x,y}$的频率来设置 $\delta_R = 0$ 。最后，保持拉曼脉冲一段时间 $t_R = 10\mu s$后，使用自旋分辨飞行时间成像测量原子数$n_{\uparrow,\downarrow}$，以获得自旋极化，即 $P_m = (n_\uparrow - n_\downarrow)/(n_\uparrow + n_\downarrow)$。

测得的自旋极化 P_m 随相对相位 $\Delta\varphi$ 的变化如图1(e)所示。在 Γ和 M 点处的自旋极化由正弦函数拟合，这表明 $\langle\sigma_x\rangle$ 与$\langle\sigma_y\rangle$ [之间存在叠加态，参见方程（3）]。因此，当 $\langle\sigma_x\rangle$ ($\langle\sigma_y\rangle$在 $\Delta\varphi = \pi/2$ (0)时，在 Γ 和 M 点处通过拟合提取出这些量，并以菱形标示。作为比较，图1(e)中还绘出了相同参数下自旋极化的数值模拟结果，与实验数据一致。这些结果表明，拉曼晶格中的布洛赫态层析已成功实现。

接下来，我们利用这种新颖的布洛赫态层析来探索几何与拓扑，通过测量玻色气体在第一布里渊区中的$\langle\sigma_{x,\ y,z}(\boldsymbol{q})\rangle$ ，直接从本征函数中描绘出量子几何张量。在这种情况下，我们采用了与前述玻色-爱因斯坦凝聚测量几乎相同的流程，只是将原子云冷却至约 100 nK [31]。随后，足够多的原子占据整个最低能带；与此同时，约三分之一的原子占据高能带，因而降低了自旋极化的对比度，这与参考文献 [26, 27, 33] 相同。接着，我们根据数值计算确定的玻色分布，扣除高能带的贡献，从而得到最低能带的$\langle\sigma_{x,y,z}(\boldsymbol{q})\rangle$（详情见 [31]）。

典型的归一化$\langle\sigma_{x,y,z}(\boldsymbol{q})\rangle$ 绘于图2(a)中，可分为两个区域，分别具有$\langle\sigma_{x,y,z}\rangle < 0$ 和$\langle\sigma_{x,y,z}\rangle > 0$。对于 $\langle\sigma_x(\boldsymbol{q})\rangle$ ($\langle\sigma_y(\boldsymbol{q})\rangle$),

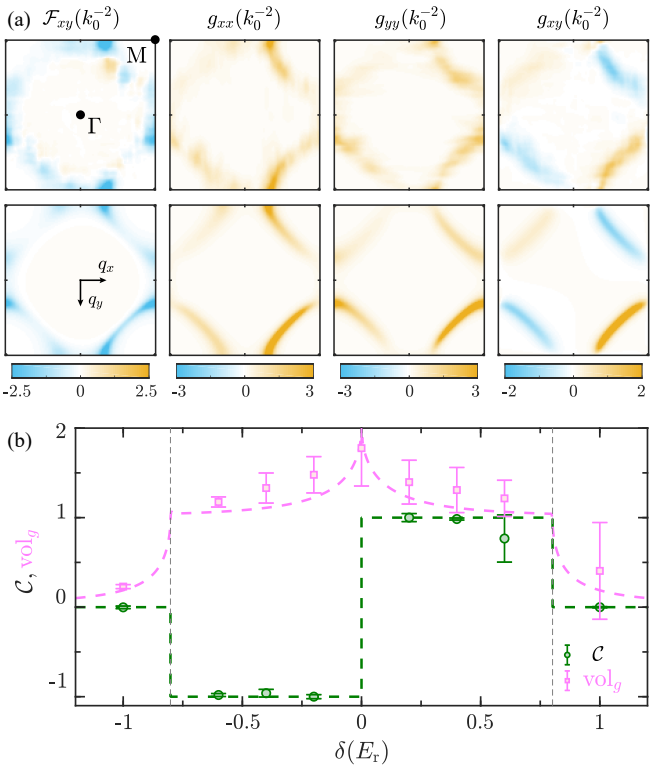

图 4：第一布里渊区中的量子几何张量。(a) 贝里曲率 $\mathcal{F}_{xy}(\boldsymbol{q})$，以及量子度规张量的三个分量 $g_{xx}(\boldsymbol{q})$、$g_{yy}(\boldsymbol{q})$、$g_{xy}(\boldsymbol{q})$。实验数据（上排）与数值计算（下排）的结果进行了比较。参数：$(V_0,\ \Omega_0,\ \delta) = (4.0,\ 1.0,\ -0.2)E_r$。(b) 陈数 $\mathcal{C}$ 和量子体积 vol_g 随失谐 δ的变化。带有误差棒的圆形和方形数据点来自实验结果。粉色和绿色虚线表示数值计算结果。参数：$(V_0,\ \Omega_0) = (4.0,\ 1.0)E_r$。

这两个区域分别分布在第一布里渊区的上方和下方（左侧和右侧）。对于 $\langle\sigma_z(\boldsymbol{q})\rangle$，其中一个区域以 Γ 为中心，另一个区域在 $\delta = -0.2E_r$时以 M 点为中心。这两个区域由围绕 M 点、具有 $\langle\sigma_z\rangle = 0$ 的环状结构分隔，这是我们系统中能带拓扑的一个特征[26, 27]。数值计算与实验测量结果一致。此外，矢量 $\langle\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{q})\rangle = (\langle\sigma_x(\boldsymbol{q})\rangle, \langle\sigma_y(\boldsymbol{q})\rangle, \langle\sigma_z(\boldsymbol{q})\rangle)$的分布在动量空间中形成了斯格明子 [34]结构，扭曲的斯格明子纹理如图 2(b) 所示。这种斯格明子构型为完整层析提供了直接证据。

此外，还可以从归一化后的$\langle\sigma_{x、y、z}\rangle$中提取本征函数。为此，我们考虑式（1） [26, 35]在双能带紧束缚近似下的布洛赫哈密顿量。对布洛赫哈密顿量对角化后，最低能带的本征函数可写为 $|u(\boldsymbol{q})\rangle = \left(\sin(\theta_{\boldsymbol{q}}/2)e^{-i\phi_{\boldsymbol{q}}}, -\cos(\theta_{\boldsymbol{q}}/2)\right)^{\mathrm{T}}$，其中参数 $\theta_{\boldsymbol{q}} = \arccos(-\langle\sigma_z\rangle) \in [0,\pi]$ 和 $\phi_{\boldsymbol{q}} = \arg(\langle\sigma_x\rangle + i\langle\sigma_y\rangle) \in [0, 2\pi)$。图3展示了本征函数$u_{\uparrow、\downarrow}$ 的振幅及其在第一布里渊区（FBZ）内的相对相位。点 Γ 处本征函数 $u_\uparrow$的振幅为 ~ 1，在 M 点附近则接近于零；而 $u_\downarrow$ 的振幅则相反。相对相位与振幅显著不同，大致可分为四个区域：相位图左侧的蓝灰色区域（$0 \le \varphi < 0.5\pi$）和灰色区域（$0.5\pi \le \varphi < \pi$），以及右侧的浅绿色区域（$\pi \le \varphi < 1.5\pi$）和绿色区域（$1.5\pi \le \varphi < 2\pi$）。这四个区域的交界处出现相位涡旋，这意味着矢量 $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle$ 指向布洛赫球 [36]的北极或南极。我们的实验测量结果与数值计算结果基本一致（图3第二行）。需要注意的是，相位涡旋偏离了第一布里渊区（FBZ）的高对称点{Γ,M、$X_{1、2}$}，这主要源于能带 [31]之间的相干性。

得益于对本征函数 $|u(\boldsymbol{q})\rangle$的完整观测，我们可以通过规范不变的量子几何张量 $\chi_{\alpha\beta}$ [37]识别量子态的几何结构。

$$\chi_{\alpha\beta} = \langle\partial_{q_\alpha} u|(1 - |u\rangle\langle u|)|\partial_{q_\beta} u\rangle = g_{\alpha\beta} - i\mathcal{F}_{\alpha\beta}/2. \quad (4)$$

这里，量子度规张量 $g_{\alpha\beta}$ =Re($\chi_{\alpha\beta}$)作为量子几何张量的实部，衡量准动量空间 [7]中量子态之间的距离。贝里曲率$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = -2\mathrm{Im}(\chi_{\alpha\beta})$作为量子几何张量的虚部，在准动量空间 [5]中起到有效“电磁”张量的作用。因此，利用图3中本征函数的测量结果，并根据式(4)，提取出动量分辨的量子度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 和贝里曲率 $\mathcal{F}_{xy}$，如图4(a)所示。贝里曲率$\mathcal{F}_{xy}$ 主要局域在环状结构附近，其符号为负，方向垂直于 q_x-q_y平面。由此，在 $\delta = -0.2E_r$处，布里渊区$\mathcal{C} = \int$中的陈数为 $\mathcal{F}_{xy}d\boldsymbol{q}/2\pi = -1.00 \pm 0.02$，表明该能带是拓扑非平庸的。在图4(b)中，将失谐从 $\delta = -1.0E_r$ 调至 $\delta = 1.0E_r$，并根据陈数得到拓扑相图，这与我们此前通过淬火动力学 [35, 38, 39]进行的测量结果一致。

此外，图4(a) 中非零的量子度规张量也出现在 M 点周围的环形结构上，这表明环上的量子态之间的距离大于其他区域。此外，对整个布里渊区内的量子度规张量积分可得到量子体积 [40]$\mathrm{vol}_g = \int_{\mathrm{BZ}} \sqrt{g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2}d\boldsymbol{q}/\pi$，由此可得陈绝缘体的不等式 $\mathrm{vol}_g \ge |\mathcal{C}|$ [28, 29]。图4(b) 展示了量子体积和陈数随失谐的变化关系，从实验上验证了这一不等式。该不等式与超流性相关

或超导性 [41]。随后，我们可以利用该不等式粗略评估二维拉曼晶格中的拓扑性质：若 $\mathrm{vol}_g < 1$， $\mathcal{C} = 0$；若 $\mathrm{vol}_g \geq 1$ 且$\delta \neq 0$， $|\mathcal{C}| = 1$。请注意，量子体积可以取非整数值，这可直接从量子度规张量的半正定性来解释，详见 [42]。

我们通过布洛赫态层析在二维光学拉曼晶格中测量量子几何张量，展示了一种研究量子态几何与拓扑的新范式。由于这种层析技术只需精确控制动量转移和拉曼脉冲的相位，因此很容易推广到相互作用系统 [43], 多能带系统 [44], 和三维拓扑系统 [33]。它还为时空相干操控开辟了可能，从而有望探测新的动力学拓扑物态。例如，人们可以将层析应用于淬火动力学，以探测霍普夫纤维化的完整结构 [21, 45–47]。当贝里曲率为零或发散时，贝里曲率无法揭示的一些重要信息则可由量子度规张量提供，其中包括几何或拓扑性质 [48], 非厄米系统 [49, 50],几何轨道磁化率 [51] 以及玻色和费米超流体 [41, 52]。通过调整拉曼晶格的参数，使其存在无能隙能带，即可实现这种情形；此时可以探测由量子度规张量所支配的拓扑半金属中的某些现象，例如波包的动力学 [16, 49]。

我们感谢 Ji-Zhou Wu 的深入讨论。本研究得到量子科学与技术创新计划（项目编号：2021ZD0302001 和 2021ZD0302100）、国家自然科学基金（项目编号：12025406 和 12104445）、安徽省量子信息技术行动计划（项目编号：AHY120000）、上海市科技重大项目（项目编号：2019SHZDZX01）以及中国科学院战略性先导科技专项（项目编号：XDB28000000）的资助。J.-Y.Z. 感谢中国科学技术大学启动经费（项目编号：KY2340000152）和上海市浦江人才计划（项目编号：21PJ1413600）的支持。C.-R.Y. 感谢中国博士后科学基金会（项目编号：2021M703112）的资助。

* 这些作者对本项工作的贡献相同。[1] M. V. Berry, Proc. R. Soc. A **392**, 45（1984）。[2] F. Wilczek 和 A. Shapere, *Geometric Phases in Physics*（World Scientific, 1989）第 7–28 页。[3] Y. Aharonov 和 D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485（1959）。[4] K. von Klitzing, Rev. Mod. Phys. **58**, 519（1986）。[5] M. Z. Hasan 和 C. L. Kane, 《现代物理评论》82, 3045 (2010)。[6] X.-L. Qi 和 S.-C. Zhang, 《现代物理评论》83, 1057 (2011)。[7] J. P. Provost 和 G. Vallee, 《数学物理通讯》76, 289 1980( )。[8] J. Anandan 和 Y. Aharonov, 《物理评论快报》65, 1697 (1990)。[9] Y.-Q. Ma、S.-J. Gu、S. Chen、H. Fan 和 W.-M. Liu, 《欧洲物理快报》103, 10008 (2013)。[10] S. L. Braunstein 和 C. M. Caves, 《物理评论快报》72, 3439 1994( )。[11] P. Hauke、M. Heyl、L. Tagliacozzo 和 P. Zoller, 《自然物理学》12, 778 (2016)。[12] P. Zanardi、P. Giorda 和 M. Cozzini, 《物理评论快报》99, 100603 (2007)。[13] X. Tan、D.-W. Zhang、Z. Yang、J. Chu、Y.-Q. Zhu、D. Li、X. Yang、S. Song、Z. Han、Z. Li、Y. Dong、H.-F. Yu、H. Yan、S.-L. Zhu 和 Y. Yu, 《物理评论快报》122, 210401 2019( )。[14] M. Yu、P. Yang、M. Gong、Q. Cao、Q. Lu、H. Liu、S. Zhang、M. B. Plenio、F. Jelezko、T. Ozawa、N. Gold- man 和 J. Cai, 《国家科学评论》7, 254 (2019)。[15] M. Yu、X. Li、Y. Chu、B. Mera、F. N. ¨Unal、P. Yang、Y. Liu、N. Goldman 和 J. Cai, arXiv:2206.00546 (2022)。[16] A. Gianfrate、O. Bleu、L. Dominici、V. Ardizzone、M. De Giorgi、D. Ballarini、G. Lerario、K. W. West、L. N. Pfeiffer、D. D. Solnyshkov、D. Sanvitto 和 G. Malpuech, 《自然》578, 381 (2020)。[17] N. R. Cooper、J. Dalibard 和 I. B. Spielman, Rev. Mod. Phys. 91, 015005 (2019)。[18] L. Asteria、D. T. Tran、T. Ozawa、M. Tarnowski、B. S. Rem、N. Fl¨aschner、K. Sengstock、N. Goldman 和 C. Weitenberg, 《自然物理学》15, 449 (2019)。[19] P. Hauke、M. Lewenstein 和 A. Eckardt, 《物理评论快报》113, 045303 (2014)。[20] N. Fl¨aschner、B. S. Rem、M. Tarnowski、D. Vogel、D.- S. L¨uhmann、K. Sengstock 和 C. Weitenberg, 《科学》352, 1091 (2016)。[21] M. Tarnowski、F. N. ¨Unal、N. Fl¨aschner、B. S. Rem、A. Eckardt、K. Sengstock 和 C. Weitenberg, 《自然通讯》10, 1728 (2019)。[22] T. Li、L. Duca、M. Reitter、F. Grusdt、E. Demler、M. En- dres、M. Schleier-Smith、I. Bloch 和 U. Schneider, 《科学》352, 1094 (2016)。[23] L. Duca、T. Li、M. Reitter、I. Bloch、M. Schleier-Smith 和 U. Schneider, 《科学》347, 288 (2015)。[24] C. D. Brown、S.-W. Chang、M. N. Schwarz、T.-H. Leung、V. Kozii、A. Avdoshkin、J. E. Moore 和 D. Stamper- Kurn, 《科学》377, 1319 (2022)。[25] M. Tarnowski、M. Nuske、N. Fl¨aschner、B. Rem、D. Vo- gel、L. Freystatzky、K. Sengstock、L. Mathey 和 C. Weitenberg, 《物理评论快报》118, 240403 (2017)。[26] Z. Wu、L. Zhang、W. Sun、X.-T. Xu、B.-Z. Wang、S.-C. Ji、Y. Deng、S. Chen、X.-J. Liu 和 J.-W. Pan, 《科学》354, 83 (2016)。[27] W. Sun、B.-Z. Wang、X.-T. Xu、C.-R. Yi、L. Zhang、Z. Wu、Y. Deng、X.-J. Liu、S. Chen 和 J.-W. Pan, 《物理评论快报》121, 150401 (2018)。[28] T. Ozawa 和 B. Mera, 《物理评论B辑》104, 045103 (2021)。[29] B. Mera、A. Zhang 和 N. Goldman, 《SciPost物理》12, 18 2022( )。

[30] X.-J. Liu、K. T. Law 和 T. K. Ng, 《物理评论快报》112, 086401 (2014)。[31]更多详情请参阅补充材料，其中包括实验方案、布洛赫态层析的理论计算、实验方案以及数据分析。[32] E. Alba、X. Fernandez-Gonzalvo、J. Mur-Petit、J. K. Pa- chos 和 J. J. Garcia-Ripoll, 《物理评论快报》107, 235301 2011( )。[33] Z.-Y. Wang、X.-C. Cheng、B.-Z. Wang、J.-Y. Zhang、Y.- H. Lu、C.-R. Yi、S. Niu、Y. Deng、X.-J. Liu、S. Chen 和 J.-W. Pan, 《科学》372, 271 (2021)。[34] T. Skyrme, 《核物理》31, 556 (1962)。[35] W. Sun、C.-R. Yi、B.-Z. Wang、W.-W. Zhang、B. C. Sanders、X.-T. Xu、Z.-Y. Wang、J. Schmiedmayer、Y. Deng、X.-J. Liu、S. Chen 和 J.-W. Pan, 《物理评论快报》121, 250403 (2018)。[36] J. Yu, 《物理评论A辑》96, 023601 (2017)。[37] M. Kolodrubetz、D. Sels、P. Mehta 和 A. Polkovnikov, 《物理报告》697, 1 (2017)。[38] C.-R. Yi、L. Zhang、L. Zhang、R.-H. Jiao、X.-C. Cheng、Z.-Y. Wang、X.-T. Xu、W. Sun、X.-J. Liu、S. Chen 和 J.-W. Pan, 《物理评论快报》123, 190603 (2019)。[39] L. Zhang、L. Zhang、S. Niu 和 X.-J. Liu, 《科学通报》63, 1385 (2018)。[40] 与量子体积的定义相比

参考文献 [28, 29], 中，我们在此将其系数缩放了π倍，以便直接比较该量与陈数：这种约定使不等式的形式略微简洁。[41] S. Peotta 和 P. T¨orm¨a, 《自然·通讯》6, 8944 (2015)。[42] Y.-Q. Ma，arXiv:2001.05946 (2020)。[43] J.-H. Zheng、B. Irsigler、L. Jiang、C. Weitenberg 和 W. Hofstetter, 《物理评论A辑》101, 013631 (2020)。[44] F. N. ¨Unal、A. Bouhon 和 R.-J. Slager, 《物理评论快报》125, 053601 (2020)。[45] C. Wang、P. Zhang、X. Chen、J. Yu 和 H. Zhai, 《物理评论快报》118, 185701 (2017)。[46] J. Yu, 《物理评论A辑》99, 043619 (2019)。[47] C.-R. Yi、J.-L. Yu、W. Sun、X.-T. Xu、S. Chen 和 J.-W. Pan，arXiv:1904.11656 (2019)。[48] Y. Hwang、J. Jung、J.-W. Rhim 和 B.-J. Yang, 《物理评论B辑》103, L241102 (2021)。[49] D. D. Solnyshkov、C. Leblanc、L. Bessonart、A. Nalitov、J. Ren、Q. Liao、F. Li 和 G. Malpuech, 《物理评论B辑》103, 125302 (2021)。[50] W. Chen、S.. Kaya ¨ Ozdemir、G. Zhao、J. Wiersig 和 L. Yang, 《自然》548, 192 (2017)。[51] F. Pi´echon、A. Raoux、J.-N. Fuchs 和 G. Montambaux, 《物理评论B辑》94, 134423 (2016)。[52] M. Iskin, 《物理评论A辑》97, 063625 (2018)。

《通过布洛赫态层析提取光学拉曼晶格的量子几何张量》补充材料

实验方案

实验方案如图 S1 所示。波长为 $\lambda = 787\text{nm}$ 的入射激光束经偏振分束器（PBS）分成两束子激光，其频率由声光调制器（AOM[1,2]）移频。这两束子激光通过保偏光纤传输至实验平台，随后分别通过高消光比 PBS，产生线偏振激光束 $\boldsymbol{E}_x$ 和 $\boldsymbol{E}_y$。$\boldsymbol{E}_{x、y}$ 照射原子云，并由反射镜 $M_{x、y}$反射回来。同时，$\boldsymbol{E}_{x、y}$ 经 $\lambda/2$ 波片分解为两个正交偏振分量 $\boldsymbol{E}_{x、y} = \boldsymbol{E}_{xy、yx} + \boldsymbol{E}_{xz、yz}$，并由 $\lambda/4$ 波片延迟其相位。反射回原子云的 $\boldsymbol{E}_{x、y}$ 的比率（标记为 γ）由 AOM[3,4]控制。需要指出的是，激光通过 AOM[3,4]，后，$\boldsymbol{E}_{x、y}$的偏振必须保持不随时间变化，因此我们使用采用一种称为“高密度火石玻璃”的声光材料的 AOM[3,4] 。因此，激光束 $\boldsymbol{E}_{xy、xz、yx、yz}$ 的分量可写为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{xy} &= |E_{xy}|\, e^{i(\alpha+\alpha_1+\alpha_L/2)} \left[e^{i(k_0x-\alpha_L/2)} + \gamma e^{-i(k_0x-\alpha_L/2)}\right], \\
\boldsymbol{E}_{xz} &= |E_{xz}|\, e^{i(\alpha+\alpha_1+\alpha_L/2)} \left[e^{i(k_0x-\alpha_L/2)} - \gamma e^{-i(k_0x-\alpha_L/2)}\right], \\
\boldsymbol{E}_{yx} &= |E_{yx}|\, e^{i(\beta+\beta_1+\beta_L/2)} \left[e^{-i(k_0y+\beta_L/2)} + \gamma e^{i(k_0y+\beta_L/2)}\right], \\
\boldsymbol{E}_{xz} &= |E_{yz}|\, e^{i(\beta+\beta_1+\beta_L/2)} \left[e^{-i(k_0y+\beta_L/2)} - \gamma e^{i(k_0y+\beta_L/2)}\right],
\end{aligned}
\tag{S1}
$$

其中，反冲动量（波数） $k_0 = 2\pi/\lambda$, $|E_{xy,xz,yx,yz}|$ 是$\boldsymbol{E}_{xy,xz,yx,yz}$, $\alpha_1(\beta_1)$的振幅；由输入声光调制器$_1$ （声光调制器$_2$）的射频信号控制的相位为 α (β)； $\boldsymbol{E}_x$ ($\boldsymbol{E}_y$)的初始相位为 $\alpha_L(\beta_L)$； $\boldsymbol{E}_x$ ($\boldsymbol{E}_y$)从原子云经过额外光程到达反射镜 M_x(M_y)再返回原子云所经历的相位为 $|F=1(m_F=-1\rangle \equiv |\uparrow\rangle$)。两个磁子能级 $|F=1, m_F=0\rangle \equiv |\downarrow\rangle$和 $\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{B}|,z$ 在沿 $\hat{} \ |\boldsymbol{B}| \approx 23.4$方向、强度为$z$G的偏置磁场$\hat{}\boldsymbol{E}_x$作用下发生塞曼劈裂（对应16.5MHz的塞曼劈裂），并由激光束$_y$ [27], V_{latt}耦合。因此，有效哈密顿量具有正文中式（1）的形式，其中方晶格$x(y,)$[1,2]和拉曼势Ω$x(y,)$可写为

$$
\begin{aligned}
\Omega_1(x,y) &= \frac{\Omega_0}{4} e^{-i(\alpha_1-\beta_1)} \left(e^{-ik_0x} - \gamma e^{ik_0x}\right)\left(e^{-ik_0y} + \gamma e^{ik_0y}\right), \\
\Omega_2(x,y) &= \frac{i\Omega_0}{4} e^{-i(\alpha_1-\beta_1)} \left(e^{-ik_0x} + \gamma e^{ik_0x}\right)\left(-e^{-ik_0y} + \gamma e^{ik_0y}\right), \\
V_{\text{latt}}(x,y) &= \gamma V_0 \left[\cos^2(k_0x) + \cos^2(k_0y)\right].
\end{aligned}
\tag{S2}
$$

这里，我们考虑了使用 $U = \text{diag}(e^{i\phi}, e^{-i\phi})$ 的幺正变换，并结合全局相位 $\phi = (\alpha + \alpha_L/2 - \beta - \beta_L/2)/2$ 进行坐标变换: $k_0x - \alpha_L/2 \mapsto k_0x$, $k_0y - \beta_L/2 \mapsto k_0y$。

二维拉曼晶格.–对于 $\gamma = 1$，光学晶格的形式为 $V_{\text{latt}}(x,y) = V_0[\cos^2(k_0x) + \cos^2(k_0y)]$，晶格深度为 V_0；拉曼势的形式为 $\Omega_1(x,y) = \Omega_0 \cos(k_0x)\sin(k_0y)$ 和 $\Omega_2(x,y) = \Omega_0 \cos(k_0y)\sin(k_0x)$，拉曼强度为 Ω_0。这里，不失一般性，我们设定了 $\alpha_1 = \beta_1 = 0$。研究发现，拉曼势在 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$之间产生了 $(\pm k_0, \pm k_0)$ 的动量位移。因此，本征态 $|\Psi(\boldsymbol{q})\rangle$ 可以用平面波完备基 $|\boldsymbol{q} + n\boldsymbol{b}_1 + l\boldsymbol{b}_2\rangle = e^{i(q_x+2k_0n)_x} e^{i(q_y+2k_0l)y}/\sqrt{S}$和 $|\boldsymbol{q} + \boldsymbol{k}_0 + v\boldsymbol{b}_1 \mp w\boldsymbol{b}_2\rangle = e^{i(q_x+2k_0v+k_0)_x} e^{i(q_y+2k_0w+k_0)y}/\sqrt{S}$ [26]展开，即

$$
|\Psi(\boldsymbol{q})\rangle = \begin{pmatrix} \sum_{n,l} C_{n,l,\uparrow} |\boldsymbol{q} + n\boldsymbol{b}_1 + l\boldsymbol{b}_2\rangle \\ \sum_{v,w} C_{v,w,\downarrow} |\boldsymbol{q} + \boldsymbol{k}_0 + v\boldsymbol{b}_1 + w\boldsymbol{b}_2\rangle \end{pmatrix},
\tag{S3}
$$

其中 $C_{n,\ l,\ \uparrow}$和 $C_{n,\ l,\ \downarrow}$为复系数，$\boldsymbol{b}_{1,\ 2}$为倒格子中的矢量，$(n,\ \ l,\ \ v,\ \ w)$为整数， S 表示系统面积。若只考虑第一布里渊区内的准动量，本征态可简单表示为 $|\Psi(\boldsymbol{q})\rangle = c_\uparrow(\boldsymbol{q})\ |\boldsymbol{q},\ \uparrow\rangle + c_\downarrow(\boldsymbol{q})\ |\boldsymbol{q} + \boldsymbol{k}_0,\ \downarrow\rangle$。

拉曼脉冲–对于 $\gamma = 0$，仅保留用于产生拉曼脉冲的 $\boldsymbol{E}_{x,y}$ 入射光束。光学晶格消失。拉曼势转变为拉曼耦合 $\Omega_{\text{R}} = \Omega_{\text{R}0} e^{-i[k_0(x+y)^{-\Delta\varphi}]}$，其中包含拉曼

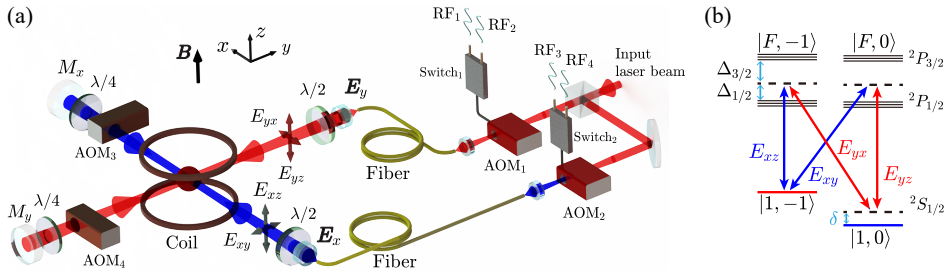

图 S1：（a）实验装置。激光束 $\boldsymbol{E}_{x、y}$ 用于产生二维晶格势、拉曼势和拉曼脉冲。$\boldsymbol{E}_{x、y}$ 的频率、强度和相位分别由声光调制器、相位锁定射频信号 RF$_{1,2,3,4}$ 和射频开关 Switch$_{1,2}$，控制。RF$_{1,2,3,4}$ 分别由两台双通道任意波形发生器（Keysight 33600A）产生。声光调制器$_{3,4}$ 用于关闭$\boldsymbol{E}_{x、y}$的反射光束。沿$\hat{z}$ 方向、强度为 $|\boldsymbol{B}| \approx 23.4$G的偏置磁场 $\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{B}|\hat{z}$ 可将二次塞曼劈裂降低 ~ 79kHz，从而确保在拉曼强度较强时，态 $|F=1、\ m_F=+1\rangle$ 处于解耦状态。（b）能级结构和拉曼跃迁。

脉冲强度 $\Omega_{\mathrm{R0}} = \sqrt{2}\Omega_0/4$，其在 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$之间产生动量位移 $(-k_0, -k_0)$。拉曼脉冲与拉曼晶格之间的相对相位 $\Delta\varphi = -\pi/4 - \alpha_1 + \beta_1$ 仅取决于相位 α_1 和 β_1。拉曼脉冲的哈密顿量因此可表示为

$$H_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k}^2/2m + \delta_{\mathrm{R}}/2 & \Omega_{\mathrm{R}} \\ \Omega_{\mathrm{R}}^* & \boldsymbol{k}^2/2m - \delta_{\mathrm{R}}/2 \end{pmatrix}. \tag{S4}$$

拉曼晶格中的布洛赫态层析

层析的目的是测量三个泡利矩阵的期望值 $\langle\sigma_{i=x,\ y,\ z}\rangle$，它们可写为

$$\begin{aligned} \langle\sigma_x\rangle &= \sum_{n,l} \left(C^*_{n,l,\uparrow} C_{n,l,\downarrow} + C_{n,l,\uparrow} C^*_{n,l,\downarrow}\right), \\ \langle\sigma_y\rangle &= \sum_{n,l} \left(-iC^*_{n,l,\uparrow} C_{n,l,\downarrow} + iC_{n,l,\uparrow} C^*_{n,l,\downarrow}\right), \\ \langle\sigma_z\rangle &= \sum_{n,l} \left(|C_{n,l,\uparrow}|^2 - |C_{n,l,\downarrow}|^2\right), \end{aligned} \tag{S5}$$

根据式（S3）。我们施加一个动量转移拉曼脉冲，以测量$\langle\sigma_{x,\ y,\ z}\rangle$。当对拉曼晶格的本征态 $|\Psi\rangle$ 施加持续时间为 t_{R} 的拉曼脉冲时，态将幺正演化至一个新态

$$|\widetilde{\Psi}(\boldsymbol{q}, t_{\mathrm{R}})\rangle = \exp(-iH_{\mathrm{R}} t_{\mathrm{R}})\,|\Psi\rangle \tag{S6}$$

获得自旋分辨飞行时间图像后，即可得到自旋极化 $P = \left\langle \widetilde{\Psi}\,|\sigma_z|\,\widetilde{\Psi}\right\rangle$。为简洁地描述上述物理过程，我们忽略动能项 $\boldsymbol{k}^2/2m$（如下文所述，这是合理的），并令 $\delta_{\mathrm{R}} = 0$。此时，式（S4）中的哈密顿量化为简化的非对角形式 $H_{\mathrm{R}} = \Omega_{\mathrm{R0}}\cos[k_0（x+y）-\Delta\varphi]\sigma_x + \Omega_{\mathrm{R0}}\sin[k_0（x+y）-\Delta\varphi]\sigma_y$。因此，自旋极化可表示为

$$\begin{aligned} P = &(|c_\uparrow|^2 - |c_\downarrow|^2)\cos(2\Omega_{\mathrm{R0}} t_{\mathrm{R}}) \\ &+ \left(-ie^{i\Delta\varphi} c_\uparrow c^*_\downarrow \langle\boldsymbol{q}|e^{-ik_0(x+y)}|\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k_0}\rangle + ie^{-i\Delta\varphi} c^*_\uparrow c_\downarrow \langle\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}_0|e^{ik_0(x+y)}|\boldsymbol{q}\rangle\right)\sin(2\Omega_{\mathrm{R0}} t_{\mathrm{R}}). \end{aligned} \tag{S7}$$

利用关系式 $\langle\boldsymbol{q}+n\boldsymbol{b}_1+l\boldsymbol{b}_2|e^{-ik_0(x+y)}|\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k_0}+v\boldsymbol{b}_1+w\boldsymbol{b}_2\rangle = \delta_{n,v}\delta_{l,w}$ 和 $\langle\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}_0+v\boldsymbol{b}_1+w\boldsymbol{b}_2|e^{ik_0(x+y)}|\boldsymbol{q}+n\boldsymbol{b}_1+l\boldsymbol{b}_2\rangle = \delta_{n,v}\delta_{l,w}$，可以发现拉曼晶格转移的动量会被拉曼脉冲抵消。然后，结合式 (S5)，式 (S7)可写成$\langle\sigma_{x,y,z}\rangle$的叠加态，如正文中的式 (3)所示。式 (3)实际上是一个随 t_{R} 演化的正弦函数，其振荡幅度为 Amp $= \sqrt{(\langle\sigma_z\rangle)^2 + (\langle\sigma_y\rangle\cos\Delta\varphi + \langle\sigma_x\rangle\sin\Delta\varphi)^2}$。因此，通过调节 $\Delta\varphi$ 和 t_{R}，可以提取出 $\langle\sigma_{x,y,z}\rangle$。当$t_{\mathrm{R}} = 0$时，得到 $\langle\sigma_z\rangle$。当 $t_{\mathrm{R}} = \pi/(4\Omega_{\mathrm{R0}})$时，通过一个持续时间为 $\Delta\varphi = \pi/2$(0)的 $\pi/2$ 拉曼脉冲得到 $\langle\sigma_x\rangle$ ($\langle\sigma_y\rangle$)。

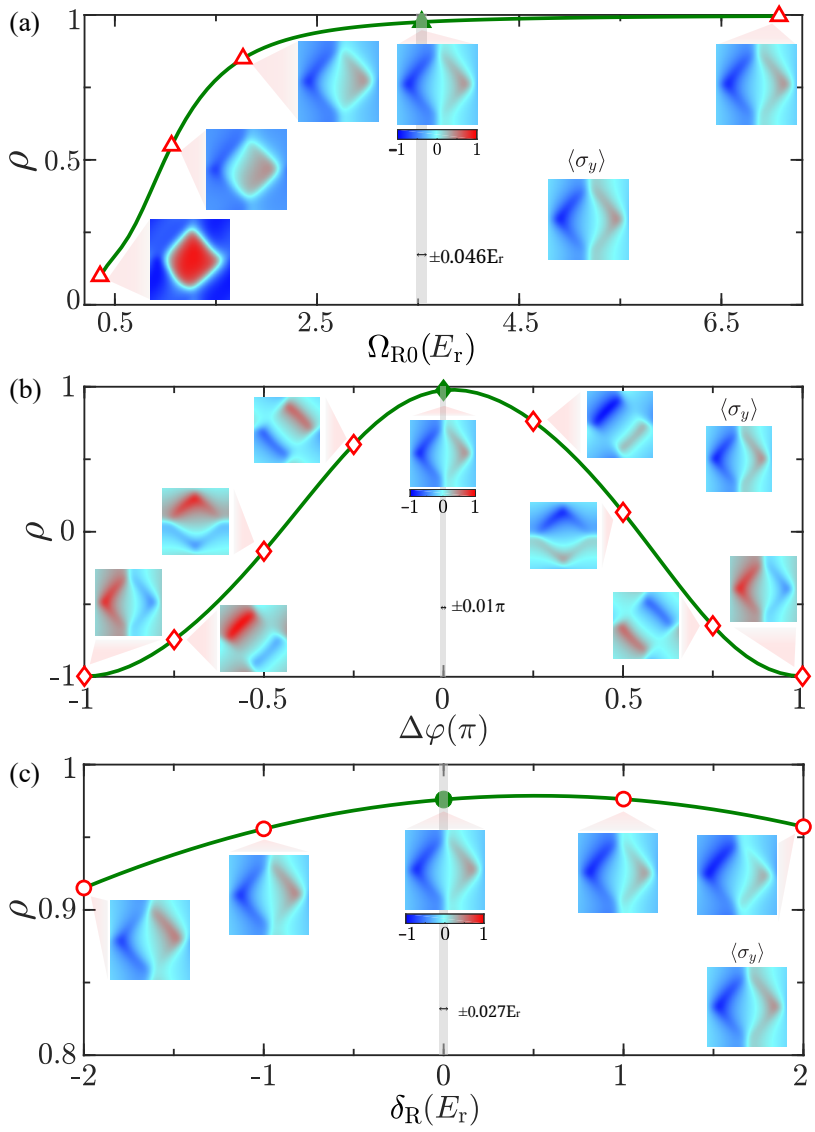

图 S2：布洛赫态层析的灵敏度。最低能带中，$\rho(P,\boldsymbol{q})$ 与 $t(\langle\sigma_y,\boldsymbol{q}\rangle t$ 之间的相关系数 $\rangle$ 随 Ω_{R0} (a)、$\Delta\varphi$ (b) 和 δ_R (c) 的变化。实线分别表示 ρ 随 Ω_{R0}、$\Delta\varphi$ 和 δ_R 的变化。插图：显示了第一布里渊区中的典型 P，其位置分别以三角形、菱形和圆形标出。绿色三角形、菱形和圆形对应的参数为 $\Omega_{R0}\approx 3.4E_r$、$\delta_R=0$ 和 $\Delta\varphi=\pi/2$，相应的相关系数为 $\rho>0.97$。小块灰色阴影区域表示 Ω_{R0}、$\Delta\varphi$ 和 δ_R 的测量误差，这些误差来自多次实验观测。图中的其他结果均为数值模拟。参数：$(V_0,\Omega 0,\delta)=(4,1,0.2)E_r$；(a) $\Delta\varphi=0$ 和 $\delta_R=0$，(b) $\delta_R=0$ 和 $\Omega_{R0}\approx 3.4E_r$，(c) $\Delta\varphi=0$ 和 $\Omega_{R0}\approx 3.4E_r$。

接下来，我们估算拉曼脉冲中的动能项对测量 $\langle\sigma_{x,y}\rangle$ 的影响。为此，我们首先数值计算最低能带的自旋极化 P。在数值计算中，我们设定 $\gamma=10\%$。然后，计算 ρ 与 P 和 $\langle\sigma_{x,y}\rangle$ 之间的相关系数随 Ω_{R0} 的变化，以评估拉曼脉冲强度达到何种程度时可以忽略动能项。相关系数写为 $\rho(P,\langle\sigma_i\rangle)=\mathrm{cov}(P,\langle\sigma_i\rangle)/\sigma_P\sigma_{\langle\sigma_i\rangle}$，其中 $\mathrm{cov}(P,\langle\sigma_i\rangle)$ 以及 σ_P，$_{\langle\sigma_i\rangle}$ 分别为协方差和标准差。当 $\rho=0$ 时，P 和 $\langle\sigma_i\rangle$ 完全不相关；当 $\rho=1$ 时，P 与 $\langle\sigma_i\rangle$ 完全相同。例如，图 S2(a)展示了 $\Delta\varphi=0$ 时，相关系数 ρ 随拉曼脉冲强度 Ω_{R0} 的变化。Ω_{R0} 从 ~ 0 调至 $7E_r$ 时，ρ 从 ~ 0 增至 1。同时，随着 Ω_{R0} 增大，图样 $P(\boldsymbol{q},t_R)$ 与 $\langle\sigma_y\rangle$ 越来越一致。在实验中，我们选择 $\Omega_{R0}\approx 3.4E_r$ 来实现拉曼脉冲，这足以在 $\rho\approx 0.97$ 条件下将 $\langle\sigma_z\rangle$ 旋转至 $\langle\sigma_{x,y}\rangle$。另一方面，直观而言，$\pi/2$ 拉曼脉冲的持续时间 $t_R=10\mu s$ 远小于拉曼晶格的特征时间 $t_c=h/E_r\approx 270\mu s$，原子几乎无法演化

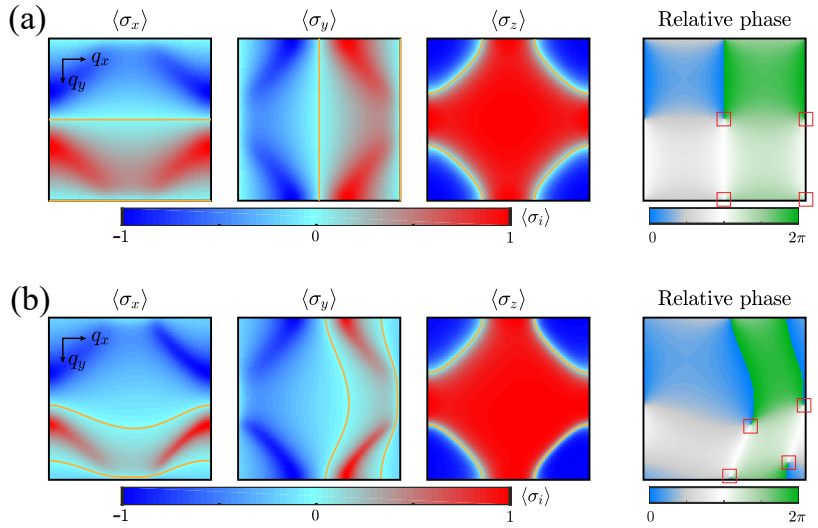

图 S3：在哈密顿量式 (1) 的双带紧束缚近似 (a) 和由式 (1) 确定的多能带 (b) 下，最低能带中三个泡利矩阵 $\langle\sigma_{x,y,z}\rangle$ 的期望值，以及本征函数 $u_{\uparrow,\downarrow}$ 之间的相对相位。黄色实线由 $\langle\sigma_{x,y,z}\rangle = 0$确定。黄色曲线在 $\langle\sigma_{x,y}\rangle$ 的交点确定了相位涡旋，并以红色方块标出。这里我们强调，对 $P_{x,y,z}$ 进行归一化不会改变第一布里渊区中本征函数 $u_{\uparrow,\downarrow}$ 之间的相对相位。参数：$(V_0, \Omega_0, \delta) = (4, 1, -0.2)E_r$；$t_0 \approx 0.09 \propto V_0$, $t_{so} \approx -0.05 \propto \Omega_0$。

在时间 t_R内。

布洛赫态层析的灵敏度

布洛赫态层析的灵敏度取决于与拉曼脉冲相关的参数，包括拉曼脉冲的强度 Ω_{R0} 和失谐 δ_R，以及拉曼晶格与拉曼脉冲之间的相对相位 $\Delta\varphi$。我们分别通过计算最低能带中 $P(\boldsymbol{q}, t_R)$ 与 $\langle\sigma_{x,y}(\boldsymbol{q})\rangle$ 之间的相关系数 ρ，来估算 Ω_{R0}、δ_R 和 $\Delta\varphi$ 对测量 $\langle\sigma_{x、y}(\boldsymbol{q})\rangle$ 的影响。图 S2 展示了 $\langle\sigma_y(\boldsymbol{q})\rangle$ 的一个示例。随着 Ω_{R0} 从 ~ 0 调至 $7E_r$，ρ 从 ~ 0 增至 1［图 S2(a)］。只要 Ω_{R0} 足够强，$P(\boldsymbol{q}, t_R)$ 基本不会随 Ω_{R0} 改变。随着 $\Delta\varphi$ 调节，ρ 以 1 为振幅振荡［图 S2(b)］。当 $\Delta\varphi$ 接近 $\pi/2$ 时，P 对其变化不敏感。将 δ_R 从$-2E_r$ 调至 $2E_r$ 时，P 仅略有变化［图 S2(c)］。总之，P 对参数波动相当不敏感；这些参数接近本实验选定的参数，即 $\Omega_{R0} \approx 3.4E_r$、$\delta_R = 0$ 和 $\Delta\varphi = \pi/2$。

在实验中，我们还测量了这三个参数的标准差。Ω 的标准差$_{R0}$，δ_R 和 $\Delta\varphi$ 分别为 $\pm 0.046E_r$，$\pm 0.01\pi$ 和 $\pm 0.027E_r$（图 S2中的灰色阴影区域）。对于这三种情况，$\rho > 0.97$ 均在标准差范围内。因此，拉曼脉冲非常稳定。换言之，布洛赫态层析对当前参数的扰动不敏感。

偏离高对称点的相位涡旋的起源

图3中相位涡旋的不对称性主要源于高能带的影响，因为最低能带的本征函数会被高能带修正。我们分别采用式（1）的双能带紧束缚近似（TBA，见下文）和包含多能带的式（1），计算三个泡利矩阵的期望值。为简便起见，$\langle\sigma_{x,y,z}\rangle$ 此处指在最低能带中计算得到的结果。(a) TBA 下的布洛赫哈密顿量为 $\mathcal{H}_{TBA} = \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\sigma} = h_x\sigma_x + h_y\sigma_y + h_z\sigma_z = 2t_{so}\sin q_y\sigma_x + 2t_{so}\sin q_x\sigma_y + (\delta/2 - 2t_{so}(\cos\ q_x + \cos\ q_y))\sigma_z$，由此得到 $\langle\sigma_{x,y,z}\rangle = -h_{x,y,z}/|\boldsymbol{h}|$。(b) 包含多能带的哈密顿量式（1）的 $\langle\sigma_{x,y,z}\rangle$ 由公式 $\langle\sigma_{x,y,z}\rangle = P_{x,y,z}/\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$和 $P_{x,y,z} = \langle\Psi(\boldsymbol{q})|\sigma_{x,y,z}|\Psi(\boldsymbol{q})\rangle$计算得到，其中 $|\Psi(\boldsymbol{q})\rangle$ 是哈密顿量式（1）的本征函数。此处，最低能带的本征函数受到最低能带与高能带之间耦合的修正。为计算本征函数，我们对每条能带的 $P_{x,y,z}$ 进行归一化，贝里

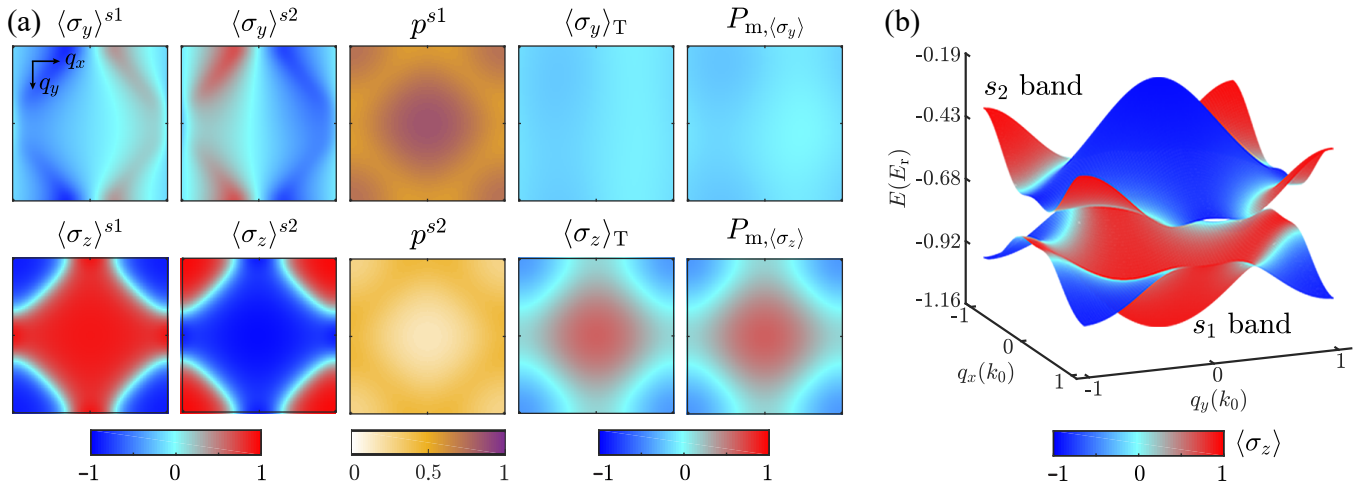

图 S4：（a）布里渊区中泡利矩阵 $\langle\sigma_{y,z}\rangle^{s1,s2}$ 的期望值以及原子 $p^{s1,s2}$ 的比例。$\langle\sigma_{y,z}\rangle_{\mathrm{T}}$ 和计算得到的自旋纹理 $P_{\mathrm{m},\langle\sigma_{y,z}\rangle}$ 分别由公式 S9 和公式 S8 得到。（b）最低的两条能带 $s1$ 和 $s2$。参数：$(V_0, \Omega 0, \delta) = (4, 1, -0.2)E_{\mathrm{r}}, t_{\mathrm{R}} = 10\mu s, \delta_{\mathrm{R}} = 0, \Omega_{\mathrm{R0}} \approx 3.4E_{\mathrm{r}}$。

曲率和最低能带的量子度规张量。对于当前参数，这种归一化基本上是合理的，且几乎不会改变 P（见图 S2 和图 S3 中的 $\langle\sigma_y\rangle$）。

在图 S3 中，我们绘出了上述两种情况下三种泡利矩阵 $\langle\sigma_{x,y,z}\rangle$ 的期望值，以及最低能带本征函数 $u_{\uparrow,\downarrow}$ 之间的相对相位。本征函数之间的相对相位由 $\langle\sigma_x\rangle$ 和 $\langle\sigma_y\rangle$ 得到，即 $\phi_{\boldsymbol{q}} = \arg(\langle\sigma_x\rangle + i\langle\sigma_y\rangle) \in [0, 2\pi)$。在公式（1）的紧束缚近似下，$\langle\sigma_z\rangle$ ($\langle\sigma_{x,y}\rangle$) 关于 q_x 方向对称，而 q_y($q_{x,y}$) 关于 q_x 方向对称；这与由公式（1）确定的多能带结果一致。不过，两者之间也存在一些细微差异。图 S3(a) 显示，$\langle\sigma_{x,y}\rangle = 0$ 中沿 $q_{x,y}$方向有两条直线；而由于高能带的影响，这两条直线发生弯曲，如图 S3(b) 所示。相位涡旋由 $(\langle\sigma_x\rangle, \langle\sigma_y\rangle, \langle\sigma_z\rangle) = (0, 0, \pm 1)$ 确定，其位置由第一布里渊区中黄色直线或曲线的交点标出。由此可见，由于高能带的影响，相位涡旋的位置偏离了高对称点。

实验方案

我们通过向拉曼晶格的本征态施加拉曼脉冲，测量三个泡利矩阵的期望值 $\langle\sigma_{x,\ y,\ z}\rangle$。我们将实验方案分为三个步骤：

i. 态的制备–原子经蒸发冷却。随后，通过调节 $\boldsymbol{E}_{x,\ y}$ 的强度，在 100ms 内将原子绝热装载到拉曼晶格中，温度为 ~ 100nK，并通过 RF[1,3]的功率进行控制。同时，RF[1,3] 的相位和频率保持不变。声光调制器[3,4] 和 RF[2,4]则关闭。随后，原子占据布里渊区中的各个动量点；大多数原子处于最低能带，少部分处于较高能带。

ii. 拉曼脉冲的实现–拉曼脉冲通过同时对光束 $\boldsymbol{E}_{x,y}$执行 4 项操作来实现：1) 开启声光调制器[3,4]，以关闭$\boldsymbol{E}_{x,y}$ 的反射光束。反射回原子 γ 的光束$\boldsymbol{E}_{x,y}$的比例约为 10%，该比例通过在开启声光调制器[3,4]时校准光晶格深度来评估。$\gamma > 0$ 的原因是声光调制器的衍射效率无法达到 100%。2) 通过调节$\boldsymbol{E}_{x,y}$的强度，将拉曼脉冲的强度设为 $\Omega_{\mathrm{R0}} \approx 3.4E_{\mathrm{r}}$。3) 通过调节$\boldsymbol{E}_{x,y}$的相位来调整相对相位 $\Delta\varphi$。 $\Delta\varphi$ 通过匹配实验测量和数值计算 [来确定。事实上，不需要绝对 $\Delta\varphi$。实验中，测量 $\langle\sigma_x\rangle$和 $\langle\sigma_y\rangle$只需要 $\Delta\varphi = \pi/2$ 的差值。为了在相同的 $\Delta\varphi$下比较实验与理论，我们通过对实验 $\Delta\varphi$施加偏移，使实验数据的相位与数值计算保持一致。], 如图1(e)所示。通过比较有无拉曼脉冲时的自旋极化 P_{m}，评估 $\Delta\varphi$ 的稳定性。实验测量表明，无论是否施加拉曼脉冲，100 张照片中 P_{m} 的不确定度均为 0.03，这说明 $\Delta\varphi$ 的不确定度不会干扰实验观测。4) 通过调整$\boldsymbol{E}_{x,y}$的频率，将拉曼脉冲的失谐 δ_{R} 设为 0。同时，比例-

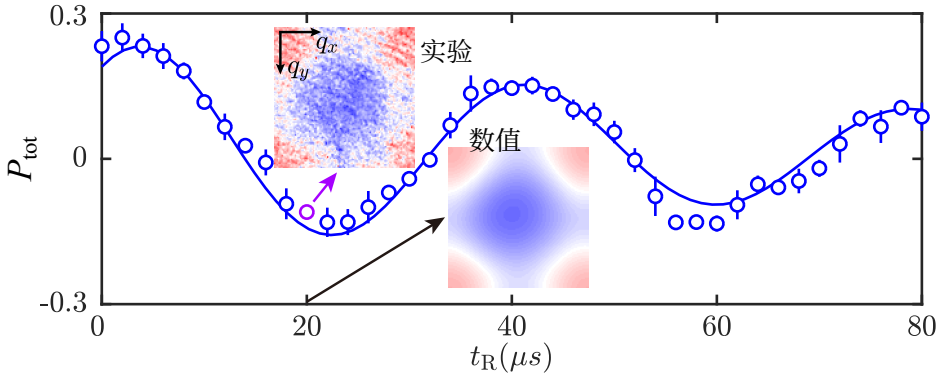

图 S5：自旋极化随 $t_{\rm R}$ 拉曼脉冲持续时间的变化，$T = 100$nK。带误差棒的圆点（实线）为实验数据（采用阻尼正弦函数拟合）。自旋纹理取自 $t_{\rm R} = 20\mu s$ 处的原始实验测量和数值计算。参数：$(V_0,\ \Omega_0,\ \delta) = (4.0,\ 1.0,\ -0.2)E_{\rm r}$，$\Delta\varphi = \pi$，$\Omega_{\rm R0} \approx 3.4E_{\rm r}$。

频率信号通过开关$_{1,2}$，从 RF$_{1,3}$ 切换至 RF$_{2,4}$，切换速度约为 200 ns，远小于 $t_{\rm R} = 10\mu$ s。通过输入至声光调制器$_{1,2}$的 RF$_{1,2,3,4}$ 的功率、相位和频率，精确控制$\boldsymbol{E}_{x,y}$ 的强度、相位和频率。

iii. 自旋极化的探测–对原子施加拉曼脉冲一段时间 $t_{\rm R}$ 后，在不到 1μs 的时间内关闭所有激光和偏置场。随后开启斯特恩–盖拉赫磁场，使 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 原子云分离。原子自由膨胀 25ms 后，我们沿 $\hat{z}$ 方向拍摄原子照片，以获得 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 中的原子分布。因此，得到原子数 $n_\uparrow(\boldsymbol{q})$ 和 $n_\downarrow(\boldsymbol{q})$。

数据分析

我们首先分析测量自旋纹理的实验方案。

i. 原子在 100ms 内被装载到拉曼晶格中，这一过程可视为绝热过程，随后会使原子的布居遵循玻色分布。原子布居于动量点 $\boldsymbol{q}$ 的第 j能带 $p^j(\boldsymbol{q}) \in [0,1]$ 的比例由玻色分布根据输入参数进行数值计算，输入参数包括原子温度 T、原子密度 n_d 和能带结构，如图 S4所示。在此，T 和 n_d 通过实验测量获得，而能带结构则通过对正文中公式（1）的哈密顿量进行对角化得到。当原子温度为 s 时，且原子密度为 $T = 100$nK 时，原子几乎全部分布在最低的两个 $n_d = 3\times10^{18}m^{-3}$能带中。对于 $s1$ ($s2$) 能带，约有 67%（33%）的原子布居于其中，$\delta = -0.2E_{\rm r}$。

ii. 施加拉曼脉冲后，自旋极化按照正文公式 (3) 演化。从数值上看，施加拉曼脉冲后的测量的自旋纹理可以分解为各个能带之和，即，

$$P_{\rm m}(\boldsymbol{q}) = \frac{n_\uparrow(\boldsymbol{q}) - n_\downarrow(\boldsymbol{q})}{n_\uparrow(\boldsymbol{q}) + n_\downarrow(\boldsymbol{q})} = \frac{\sum_{j=1}^{j=N} p^j(\boldsymbol{q})[A_\uparrow^j(\boldsymbol{q}) - A_\downarrow^j(\boldsymbol{q})]}{\sum_{j=1}^{j=N} p^j(\boldsymbol{q})[A_\uparrow^j(\boldsymbol{q}) + A_\downarrow^j(\boldsymbol{q})]}, \tag{S8}$$

其中，$A_\uparrow^j = |\widetilde{\Psi}_\uparrow^j(\boldsymbol{q})|^2$ ($A_\downarrow^j = |\widetilde{\Psi}_\downarrow^j(\boldsymbol{q})|^2$) 由 $|\uparrow\rangle$ ($|\downarrow\rangle$) 的第 j 个能带的演化态 $|\widetilde{\Psi}_\uparrow^j(\boldsymbol{q})\rangle$ ($|\widetilde{\Psi}_\downarrow^j(\boldsymbol{q})\rangle$) 决定。这里，我们假设 $p^j(\boldsymbol{q})$ 不会随时间变化，且 $t_{\rm R} \in [0,10)\mu s$，这与以下数值证据和实验数据相符。

对于数值证据，我们可以通过对具有非零温度的三个泡利矩阵期望值求和来计算它们，即 $\langle\sigma_{x,\ y,\ z}\rangle^j$，其比例为 $p^j(\boldsymbol{q})$，即，

$$\langle\sigma_{x,y,z}(\boldsymbol{q})\rangle_{\rm T} = \sum_{j=1}^{j=N} p^j(\boldsymbol{q})\langle\sigma_{x,y,z}(\boldsymbol{q})\rangle^j. \tag{S9}$$

根据式（S9），$\langle\sigma_{x,y,z}(\boldsymbol{q})\rangle_{\rm T}$ 包含了高能带占据的修正。为验证我们的假设，我们需要确认使用拉曼脉冲测得的泡利矩阵期望值与直接

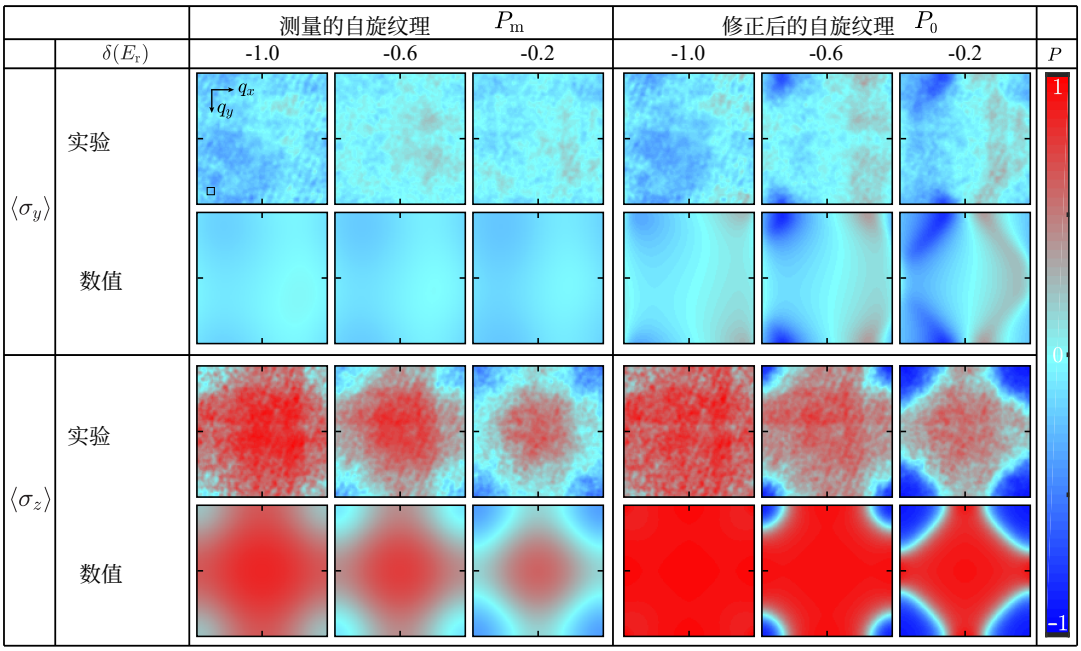

图 S6：最低能带中测量的自旋纹理和修正后的自旋纹理。参数：$(V_0,\ \Omega_0) = (4,\ 1)E_{\mathrm{r}}$。

根据本征态计算得到的结果一致，即 $P_{\mathrm{m},i} \simeq \langle\sigma_i\rangle_{\mathrm{T}}\,(i = x, y, z)$。因此，我们在原子温度为 nK、原子密度为 的条件下，对式（S9）和式（S8）进行了数值计算，如图 S4 所示。对于各个能带，自旋纹理 $\langle\sigma_{y,z}\rangle^{s1,s2}$ 具有很高的对比度。然而，约有 33% 的原子占据 s2 能带，这降低了自旋纹理的对比度。对于时长为 10μs 的 $\pi/2$ 拉曼脉冲，$P_{\mathrm{m},\langle\sigma_i\rangle}$ 与 $\langle\sigma_i\rangle_{\mathrm{T}}$ 之间的相关系数 ρ 超过 0.9，这表明 $P_{\mathrm{m},i} \simeq \langle\sigma_i\rangle_{\mathrm{T}}$。

对于实验数据，我们比较拉曼脉冲的能隙和拉比频率，以验证我们的假设。根据原子所在的准动量点不同，能隙从几百赫兹到几千赫兹不等，远低于拉曼脉冲的拉比频率 25kHz（见正文中的式 (3)）。因此，实验中应无法观测到原子跃迁至其他能带。为验证这一点，我们测量$P_{\mathrm{tot}} = (N_\uparrow - N_\downarrow)/(N_\uparrow + N_\downarrow)$，原子数为 $|\uparrow, \downarrow\rangle$ $N_{\uparrow,\downarrow}$，如图 S5 所示。 $P_{\mathrm{tot}}(t_{\mathrm{R}})$的周期约为 $35\mu s$，由强度 Ω_{R0} 决定，与能隙无关。此外， $t_{\mathrm{R}} = 20\mu s$ 处的自旋纹理与数值计算结果一致，这表明当 $t_{\mathrm{R}} = 10\mu s$时，可以忽略原子跃迁至其他能带的情况。

现在，我们从测量的自旋纹理中去除高能带占据数。去除高能带占据数后，即可得到最低能带的自旋极化，即 $P_0(\boldsymbol{q}) = (n_\uparrow^{s1}(\boldsymbol{q}) - n_\downarrow^{s1}(\boldsymbol{q}))/(n_\uparrow^{s1}(\boldsymbol{q}) + n_\downarrow^{s1}(\boldsymbol{q}))$，其中自旋向上和自旋向下的最低能带原子数分别为 $n_\uparrow^{s1}(\boldsymbol{q})$ 和 $n_\downarrow^{s1}(\boldsymbol{q})$。为此，需要获得最低能带中原子的占比 $\eta_{\uparrow,\downarrow}(T)$。根据利用式 (S6) 计算得到的 $|\uparrow\rangle$ ($|\downarrow\rangle$) 在第 j 能带的演化态 $|\widetilde{\Psi}_\uparrow^j(\boldsymbol{q})\rangle$ ($|\widetilde{\Psi}_\downarrow^j(\boldsymbol{q})\rangle$)，在 $t_{\mathrm{R}} = 10\mu s$, $n_\uparrow^j(\boldsymbol{q}) = p^j A_\uparrow^j$ ($n_\downarrow^j(\boldsymbol{q}) = p^j A_\downarrow^j$) 下，且 $A_\uparrow^j = |\widetilde{\Psi}_\uparrow^j(\boldsymbol{q})|^2$ ($A_\downarrow^j = |\widetilde{\Psi}_\downarrow^j(\boldsymbol{q})|^2$)。随后可得到占比 $\eta_{\uparrow,\downarrow}(T) = n_{\uparrow,\downarrow}^{s1}/n_{\uparrow,\downarrow}$，其中 $n_{\uparrow,\downarrow}$由实验测量获得。因此，最低能带的自旋极化表示为 $P_0(\boldsymbol{q}) = [\eta_\uparrow(T)n_\uparrow - \eta_\downarrow(T)n_\downarrow]/[\eta_\uparrow(T)n_\uparrow + \eta_\downarrow(T)n_\downarrow]$。之后，我们对测量数据进行修正，修正后的自旋纹理 $\langle\sigma_{x,y,z}\rangle$ 绘于图 S6 中。最后，经过归一化 $\sqrt{\langle\sigma_x\rangle^2 + \langle\sigma_y\rangle^2 + \langle\sigma_z\rangle^2} = 1$ 并在相邻动量点之间平滑处理后，$\langle\sigma_{x,y,z}\rangle$ 展示于正文中。平滑处理通过计算正方形区域内自旋极化的平均值实现。例如，图 S6 黑色方框中心点的平滑值，是对该黑色方框内的自旋极化取平均得到的。黑色方框的面积约为第一布里渊区面积的 0.3%。第一布里渊区包含约 12000 个动量点，在动量空间中具有较高的分辨率；每个动量点约为 2.6μm，由相机的像素尺寸决定。

此外，我们还应明确，高能带占据会直接降低自旋纹理的对比度，并间接降低振荡幅度。为此，我们将正文中的式（3）推广到有限温度的情形。有限温度下，振荡幅度为 $\mathrm{Amp}_{\mathrm{T}} = \sqrt{\langle\sigma_z\rangle_{\mathrm{T}}^2 + (\langle\sigma_y\rangle_{\mathrm{T}}\cos\Delta\varphi + \langle\sigma_x\rangle_{\mathrm{T}}\sin\Delta\varphi)^2}$；而 $s1$ 能带中的幅度为 $\mathrm{Amp}^{s1} =$

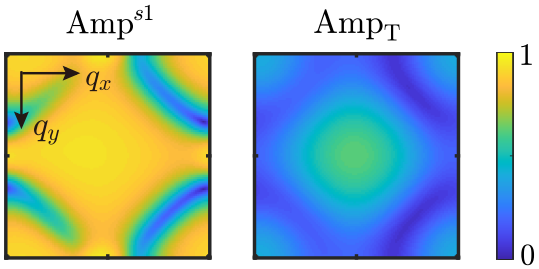

图 S7：第一布里渊区中 $s1$ 能带 Amp^{s1} 的振荡幅度以及有限温度下的 $\mathrm{Amp}_{\mathrm{T}}$。不对称性源于 $s1$ V_0 $_0$ δ = 4 1 E_{r} $t_{\mathrm{R}} = 10\mu s$ $\delta_{\mathrm{R}} = 0$ $_{\mathrm{R}0}$ ≈能带与其他能带之间的耦合。参数：(, Ω,) $3.4E_{\mathrm{r}}$ (, , −0.2), , , Ω。

$\sqrt{(\langle\sigma_z\rangle^{s1})^2 + (\langle\sigma_y\rangle^{s1}\cos\Delta\varphi + \langle\sigma_x\rangle^{s1}\sin\Delta\varphi)^2}$. $\mathrm{Amp}_{\mathrm{T}} < \mathrm{Amp}^{s1}$ since $0 < p^j < 1$. $\mathrm{Amp}_{\mathrm{T}}$ and Amp^{s1} with $\Delta\varphi = 0$如图所示：S7。根据对振荡幅度的计算，有限温度下振荡幅度的下降直接源于自旋极化对比度的降低。然而，自旋极化对比度的降低是由原子占据高能带直接导致的。换言之，原子占据高能带会间接降低振荡幅度。