arXiv:2301.06099v1 [math.ST] 15 Jan 2023

后验稳健性的一个简单证明

Yasuyuki Hamura*

2023年1月18日

摘要

近年来，文献中对贝叶斯后验稳健性的条件进行了探讨。然而，许多证明似乎冗长而复杂。本文首先总结了一些已被隐式或显式应用的基本引理。随后，我们利用这些引理，给出后验稳健性的一个简单证明。我们的充分条件是新的，且具有实际意义。

Key 词语和短语：贝叶斯、线性回归、后验稳健性、超重尾 distribution 分布

1 引言

在贝叶斯线性回归模型的应用中，我们通常希望在剔除数据中被视为与关注参数无直接关系的离群部分后，依据适中的观测值进行后验推断。由于我们未必能明确判断哪些观测值属于极端值，因此，理想情况下，离群值的影响应能以贝叶斯方式自动消除。关于此类贝叶斯后验稳健性（O'Hagan，1979）及相关主题的研究历史悠久；例如，参见 West（1984）、Andrade 和 O'Hagan（2006，2011）以及 O'Hagan 和 Pericchi（2012）。然而，直到 Desgagn´e（2013，2015）和 Gagnon 等人（2019）发表了具有奠基意义且开创性的论文之前，相关理论研究一直相对较少。

Desgagn´e（2013，2015）首次引入了对数正则变动分布，这类分布对于稳健贝叶斯分析至关重要，并推导了简单（位置—）尺度模型的（完全）后验稳健性条件。随后，Gagnon 等人（2019）得出了一般回归模型的相关结果。此后，研究者在各种重要情形下开展了大量工作，以确立后验稳健性。例如，Hamura 等人（2022）研究了采用新型误差分布以及对回归系数使用收缩先验的情形，而 Hamura 等人（2021）则考察了离散情形。Andrade（2022）和 Gagnon 和 Hayashi（2023）研究了部分稳健的 Student's t-模型。不过，许多证明似乎既冗长又复杂，不易为部分研究者理解。此外，在某些情形下，现有的后验稳健性条件可能过于严格。

本文的主要目的是总结文献中已被隐式或显式应用的一些基本结果，并给出后验稳健性的一个简单证明，以说明这些结果的用法。这有助于让这一主题更容易理解。此外，我们推导出的充分条件

*京都大学经济学研究生院，吉田本町，左京区，京都，606-8501，日本。电子邮件：yasu.stat@gmail.com

是一个新的条件；当离群值的比例可能较高，且假设尺度参数服从重尾先验时，这一条件会很有用。这是本文的另一项贡献。

本文其余部分安排如下。第2节描述我们所考虑的贝叶斯回归模型，并给出后验稳健性的定义。第3节提出后验稳健性的一个充分条件，并将其与文献中已有的条件进行比较。第4节明确陈述两个关键结果，并证明第3节的主定理。附录给出了一个引理的详细证明。第4节所用的其他结果见补充材料。

2 模型

假设对于 $i = 1, \ldots, n$，我们观测到

$$y_i \sim f((y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma,$$

其中，$\boldsymbol{x}_i$ 是连续解释变量，而 $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$ 和 $\sigma \in (0, \infty)$分别是回归系数和尺度参数；此外，f 是一个（适当的）误差密度。将我们对 $(\boldsymbol{\beta}, \sigma)$ 的先验分布记为

$$(\boldsymbol{\beta}, \sigma) \sim \pi(\boldsymbol{\beta}, \sigma).$$

那么，对于任意观测值集合 $\boldsymbol{y}_{\mathcal{I}} = \{y_i | i \in \mathcal{I}\} \subset \boldsymbol{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$，其中 $\mathcal{I} \subset I = \{1, \ldots, n\}$，给定 $\boldsymbol{y}_{\mathcal{I}}$ 时 $(\boldsymbol{\beta}, \sigma)$ 的后验密度为

$$p(\boldsymbol{\beta}, \sigma | \boldsymbol{y}_{\mathcal{I}}) = \frac{\pi(\boldsymbol{\beta}, \sigma) \prod_{i \in \mathcal{I}} \{f((y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma\}}{\int_{\mathbb{R}^p \times (0,\infty)} \pi(\boldsymbol{\beta}, \sigma) \left[\prod_{i \in \mathcal{I}} \{f((y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma\}\right] d(\boldsymbol{\beta}, \sigma)}.$$

按照 Desgagn´e（2015）及其他论文的做法，设 a_1、……、$a_n \in \mathbb{R}$ 以及 b_1、……、$b_n \in \mathbb{R}$，并假设对于所有 $i = 1$、……、n，都有 $y_i = a_i + b_i\omega$ 和 $\omega \to \infty$。设 $\mathcal{K}$、$\mathcal{L} \subset I$ 满足 $\mathcal{K} \neq \emptyset$、$\mathcal{L} \neq \emptyset$、$\mathcal{K} \cap \mathcal{L} = \emptyset$ 和 $\mathcal{K} \cup \mathcal{L} = I$，并假设 $\mathcal{L} = \{i \in I | b_i \neq 0\}$。因此，$\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}$ 分别解释为非离群观测值和离群观测值的索引集合。

注意，$\boldsymbol{y}$ 取决于 $\omega \to \infty$，而 $\boldsymbol{y}_{\mathcal{K}}$ 则不然。如果

$$p(\boldsymbol{\beta}, \sigma | \boldsymbol{y}) \to p(\boldsymbol{\beta}, \sigma | \boldsymbol{y}_{\mathcal{K}})$$

在每个（$\boldsymbol{\beta}$，σ）$\in \mathbb{R}^p \times$（0，∞）处，当 $\omega \to \infty$ 时。这里假设 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}$ 未知。因此，后验稳健性意味着，基于 p（$\boldsymbol{\beta}$，$\sigma | \boldsymbol{y}$）进行后验推断时，离群值的影响会自动消除。

问题在于，f：$\mathbb{R} \to (0, \infty)$、$\pi$：$\mathbb{R}^p \times (0, \infty) \to (0, \infty)$ 满足什么条件时，以及

$|\mathcal{L}| = n - |\mathcal{K}|$ 后验稳健性成立，从而我们得到

$$p(\boldsymbol{\beta}, \sigma|\boldsymbol{y}) = \frac{\pi(\boldsymbol{\beta}, \sigma)\Big[\prod_{i\in\mathcal{K}}\{f((y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top\boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma\}\Big]\prod_{i\in\mathcal{L}}\frac{f((y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top\boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma}{f(y_i)}}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^p\times(0,\infty)}\pi(\boldsymbol{\beta}, \sigma)\Big[\prod_{i\in\mathcal{K}}\{f((y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top\boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma\}\Big]\Big\{\prod_{i\in\mathcal{L}}\frac{f((y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top\boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma}{f(y_i)}\Big\}d(\boldsymbol{\beta}, \sigma)}$$

$$\to \frac{\pi(\boldsymbol{\beta}, \sigma)\displaystyle\prod_{i\in\mathcal{K}}\{f((y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top\boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma\}}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^p\times(0,\infty)}\pi(\boldsymbol{\beta}, \sigma)\Big[\prod_{i\in\mathcal{K}}\{f((y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top\boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma\}\Big]d(\boldsymbol{\beta}, \sigma)} = p(\boldsymbol{\beta}, \sigma|\boldsymbol{y}_\mathcal{K})$$

如 $\omega \to \infty$。非正式地说，文献中已发现，对于 f，其为对数正则变异／超重尾，或在忽略对数因子的情况下满足 $f(|z|) \approx |z|^{-1}$ as$|z| \to \infty$，是必要且充分的。此限制是为了确保 $\{f((y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top\boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma\}f(y_i) \to 1$ 对所有 $i \in \mathcal{L}$ 都成立，从而使上述表达式的分子收敛到正确的（未归一化）密度。相比之下，关于 π 和 $|\mathcal{L}|$ 的现有条件往往彼此相关。这些条件是为了证明分母中的极限与积分可以交换。

3 后验稳健性的条件

下文中，为简单起见，我们假设

$$f(z) = \frac{\gamma/2}{1 + |z|}\frac{1}{\{1 + \log(1 + |z|)\}^{1+\gamma}}$$

对所有 $z \in \mathbb{R}$，存在某个 $\gamma > 0$使得该条件成立。

定理 3.1 假设 $\int_{\mathbb{R}^p\times(0,\infty)}(1 + \sigma^\rho)\pi(\boldsymbol{\beta}, \sigma)d(\boldsymbol{\beta}, \sigma) < \infty$ 对某个 $\rho > 0$成立。假设存在 $\nu > 0$ 和 $M > 0$，使得

$$p(\boldsymbol{\beta}|\sigma) \le M\prod_{k=1}^{p}\Big\{\frac{1}{\sigma}\frac{1}{(1 + |\beta_k|/\sigma)^{1+\nu}}\Big\} \tag{3.1}$$

对于所有 $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p$ 以及所有 $\sigma \in (0, \infty)$。假设 $|\mathcal{K}| \ge |\mathcal{L}| + p$。那么我们有 e

$$\lim_{\omega\to\infty} p(\boldsymbol{\beta}, \sigma|\boldsymbol{y}) = p(\boldsymbol{\beta}, \sigma|\boldsymbol{y}_\mathcal{K})$$

在每个 $(\boldsymbol{\beta}, \sigma) \in \mathbb{R}^p \times (0, \infty)$ 处。

大多数适当先验都满足第一个条件。例如，如果我们使用条件独立先验，并且满足以下条件，则条件 (3.1) 成立：

$$p(\beta_k|\sigma) \propto \frac{1}{\sigma}\frac{1}{(1 + |\beta_k|/\sigma)^{1+\nu_k}} \tag{3.2}$$

对某个 $\nu_k > 0$，对所有 $k = 1$、.....、p 均成立。当 $\boldsymbol{\beta}|\sigma$ 是多元 t，且满足以下条件时，该条件也成立：

$$p(\boldsymbol{\beta}|\sigma) = \frac{1}{\sigma^p} \frac{\Gamma((\nu+p)/2)}{\Gamma(\nu/2)\nu^{p/2}\pi^{p/2}} \frac{1}{(1+\|\boldsymbol{\beta}/\sigma\|^2/\nu)^{(\nu+p)/2}}$$
$$\leq M \prod_{k=1}^{p} \left\{ \frac{1}{\sigma} \frac{1}{(1+|\beta_k|/\sigma)^{1+\nu/p}} \right\}$$

对所有 $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p$ 以及所有 $\sigma \in (0, \infty)$，其中某些 $\nu, M > 0$。

尽管 Gagnon 等（2019）的定理 2.1 也适用于非正规先验，但他们假设 $|\mathcal{K}| \geq |\mathcal{L}| + 2p - 1$，这比上文给出的关于 $|\mathcal{L}|$ 的条件限制更严格。此外，Gagnon 等（2019）假设，对于某些 $M' > 0$，所有 $(\boldsymbol{\beta}, \sigma) \in \mathbb{R}^p \times (0, \infty)$ 都有 $\pi(\boldsymbol{\beta}, \sigma) \leq M' \max\{1, 1/\sigma\}$；例如，当我们采用（3.2）时，对于 σ 的某些先验选择，这一条件并不成立。另一方面，Hamura 等人（2022）对 $|\mathcal{L}|$ 作出了与定理 3.1 相同的条件，并对 $\boldsymbol{\beta}|\sigma$ 的先验分布提出了不同条件，但他们的主要结果仅在 σ 具有足够多负阶矩时才适用。粗略地说，Hamura 等人（2022）考虑的是 $\boldsymbol{\beta}|\sigma$ 的无界先验密度，而我们考虑的是 σ 的无界先验密度。因此，定理 3.1 是一项与实际情形相关的新结果。

4 定理 3.1 的证明

以下　　结果出自 Gagnon 等（2019），为清晰起见，证明见附录　　.

引理 4.1 设 $m, p \in \mathbb{N}$ 满足 $m \geq p+1$。设 $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_m \in \mathbb{R}^p$ 和 $(a_1, b_1) \ldots, (a_m, b_m) \in \mathbb{R}^2$ 满足以下三个条件：

(i) 对于任意一组 p 个互异指标 $i_1, \ldots, i_p \in \{1, \ldots, m\}$，$(\boldsymbol{z}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{z}_{i_p})^\top$ 可逆。

(ii) 对于任意一组 $p+1$ 个互异指标 $i_1, \ldots, i_{p+1} \in \{1, \ldots, m\}$，$((\boldsymbol{z}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{z}_{i_{p+1}})^\top, (a_{i_1}, \ldots, a_{i_{p+1}})^\top)$ 可逆。

(iii) 对于任意一组互异指标 $p+1$，...，$i_{p+1} \in \{1, \ldots, m\}$，$((\boldsymbol{z}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{z}_{i_{p+1}})^\top, (b_{i_1}, \ldots, b_{i_{p+1}})^\top)$ 是可逆的，除非 $b_{i_1} = \cdots = b_{i_{p+1}} = 0$。

那么存在 $\varepsilon > 0$ 和 $M > 0$，使得对于所有 $\omega \geq M$，都有

$$\mathbb{R}^p \subset \bigcup_{i_1=1}^{m} \cdots \bigcup_{i_p=1}^{m} \bigcap_{\{1,\ldots,m\} \setminus \{i_1,\ldots,i_p\}} \{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p | |a_i + b_i\omega - \boldsymbol{z}_i{}^\top \boldsymbol{\beta}| > \varepsilon\}.$$

以下引理与 Hamura 等人（2022）补充材料中给出的内容完全相同。

引理 4.2 设 m、$p \in \mathbb{N}$。设 $(w_1, \ldots, w_m)^\top \in \mathbb{R}^m$。设 $(\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_m)^\top \in \mathbb{R}^{m \times p}$，其任意一组 p 个不同的行向量均线性无关。假设 $m \geq p$。那么存在 $R > 0$ 和 $\delta > 0$，使得

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1 + |w_i - \boldsymbol{z}_i{}^\top \boldsymbol{\beta}|} \leq \frac{1}{(1 + \delta\|\boldsymbol{\beta}\|)^{m-p+1}}$$

对于所有满足 $\|\boldsymbol{\beta}\| \geq R$ 的 $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$。

现在我们来证明定理 3.1。

定理 3.1 的证明。由引理 S1.1 的第 (i) 部分,

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{f((y_i-\boldsymbol{x}_i{}^\top\boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma}{f(y_i)}=1$$

对所有 $i\in\mathcal{L}$ 均成立。因此，只需证明

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_{\mathbb{R}^p\times(0,\infty)}h(\boldsymbol{\beta},\sigma;\omega)d(\boldsymbol{\beta},\sigma)=\int_{\mathbb{R}^p\times(0,\infty)}\pi(\boldsymbol{\beta},\sigma)\Big[\prod_{i\in\mathcal{K}}\{f((y_i-\boldsymbol{x}_i{}^\top\boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma\}\Big]d(\boldsymbol{\beta},\sigma),$$

其中

$$\begin{aligned}h(\boldsymbol{\beta},\sigma;\omega)&=\pi(\boldsymbol{\beta},\sigma)\Big[\prod_{i\in\mathcal{K}}\{f((y_i-\boldsymbol{x}_i{}^\top\boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma\}\Big]\prod_{i\in\mathcal{L}}\frac{f((y_i-\boldsymbol{x}_i{}^\top\boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma}{f(y_i)}\\&=\Big\{\prod_{i\in\mathcal{L}}1(|y_i-\boldsymbol{x}_i{}^\top\boldsymbol{\beta}|\geq|y_i|/2)\Big\}h(\boldsymbol{\beta},\sigma;\omega)+\Big\{1-\prod_{i\in\mathcal{L}}1(|y_i-\boldsymbol{x}_i{}^\top\boldsymbol{\beta}|\geq|y_i|/2)\Big\}h(\boldsymbol{\beta},\sigma;\omega)\end{aligned}$$

对于 $(\boldsymbol{\beta},\sigma)\in\mathbb{R}^p\times(0,\infty)$，对 $\omega>0$ 成立。

由引理 S1.1 的第 (ii) 部分,

$$\begin{aligned}&\Big\{\prod_{i\in\mathcal{L}}1(|y_i-\boldsymbol{x}_i{}^\top\boldsymbol{\beta}|\geq|y_i|/2)\Big\}h(\boldsymbol{\beta},\sigma;\omega)\\&\leq\Big\{\prod_{i\in\mathcal{L}}1(|y_i-\boldsymbol{x}_i{}^\top\boldsymbol{\beta}|\geq|y_i|/2)\Big\}M_1\pi(\boldsymbol{\beta},\sigma)\{1+\log(1+\sigma)\}^{|\mathcal{L}|(1+\gamma)}\prod_{i\in\mathcal{K}}\{f((y_i-\boldsymbol{x}_i{}^\top\boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma\}\\&\leq M_2\pi(\boldsymbol{\beta},\sigma)(1+\sigma^\rho)\prod_{i\in\mathcal{K}}\{f((y_i-\boldsymbol{x}_i{}^\top\boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma\}\end{aligned}$$

对于充分大的 $\omega>0$ 以及所有 $(\boldsymbol{\beta},\sigma)\in\mathbb{R}^p\times(0,\infty)$，对某些 $M_1,M_2>0$ 成立。因此，由控制收敛定理,

$$\begin{aligned}&\lim_{\omega\to\infty}\int_{\mathbb{R}^p\times(0,\infty)}\Big\{\prod_{i\in\mathcal{L}}1(|y_i-\boldsymbol{x}_i{}^\top\boldsymbol{\beta}|\geq|y_i|/2)\Big\}h(\boldsymbol{\beta},\sigma;\omega)d(\boldsymbol{\beta},\sigma)\\&=\int_{\mathbb{R}^p\times(0,\infty)}\Big[\lim_{\omega\to\infty}\Big\{\prod_{i\in\mathcal{L}}1(|y_i-\boldsymbol{x}_i{}^\top\boldsymbol{\beta}|\geq|y_i|/2)\Big\}h(\boldsymbol{\beta},\sigma;\omega)\Big]d(\boldsymbol{\beta},\sigma)\\&=\int_{\mathbb{R}^p\times(0,\infty)}\pi(\boldsymbol{\beta},\sigma)\Big[\prod_{i\in\mathcal{K}}\{f((y_i-\boldsymbol{x}_i{}^\top\boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma\}\Big]d(\boldsymbol{\beta},\sigma).\end{aligned}$$

因此，只需证明

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_{\mathbb{R}^p\times(0,\infty)}\Big\{1-\prod_{i\in\mathcal{L}}1(|y_i-\boldsymbol{x}_i{}^\top\boldsymbol{\beta}|\geq|y_i|/2)\Big\}h(\boldsymbol{\beta},\sigma;\omega)d(\boldsymbol{\beta},\sigma)=0.$$

设 $\widehat{I}=\{-1,\ldots,-p\}\cup\{1,\ldots,n\}$。设 $(a_i,b_i)=(0,0)$，且对 $i\in\{-1,\ldots,-p\}$ 有 $\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{e}_{-i}^{(p)}$。那么，根据引理 4.1，存在 $\varepsilon,M>0$，使得

$$\mathbb{R}^p\subset\bigcup_{\boldsymbol{i}\in\widehat{I}^p}A_{\boldsymbol{i}}(\omega)$$

对所有 $\omega \geq M$ 均成立，其中

$$A_{(i_1,\ldots,i_p)}(\omega) = \bigcap_{i \in \widehat{I} \setminus \{i_1,\ldots,i_p\}} \{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p \mid |a_i + b_i\omega - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta}| > \varepsilon\}$$

对于 $\omega > 0$，对于 $(i_1, \ldots, i_p) \in \widehat{I}^p$。因此，只需证明

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_{\mathbb{R}^p \times (0,\infty)} h_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{\beta}, \sigma; \omega) d(\boldsymbol{\beta}, \sigma) = 0$$

对于所有 $\boldsymbol{i} \in \widehat{I}^p$，其中

$$h_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{\beta}, \sigma; \omega) = 1(\boldsymbol{\beta} \in A_{\boldsymbol{i}}(\omega)) \Big\{ 1 - \prod_{i \in \mathcal{L}} 1(|y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta}| \geq |y_i|/2) \Big\} h(\boldsymbol{\beta}, \sigma; \omega)$$

对于 $(\boldsymbol{\beta}, \sigma) \in \mathbb{R}^p \times (0, \infty)$，对于 $\omega > 0$，对于 $\boldsymbol{i} \in \widehat{I}^p$。

固定 $\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_p) \in \widehat{I}^p$。令 $-p \leq i(1) < \cdots < i(p) \leq n$ 满足 $\{i_1, \ldots, i_p\} \subset \{i(1), \ldots, i(p)\} \subset I$。那么

$$\begin{aligned}
h_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{\beta}, \sigma; \omega) &\leq 1(\boldsymbol{\beta} \in A_{\boldsymbol{i}}(\omega)) \Big\{ 1 - \prod_{i \in \mathcal{L}} 1(|y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta}| \geq |y_i|/2) \Big\} \\
&\quad \times M\pi(\sigma) \prod_{k=1}^{p} \Big\{ \frac{1}{\sigma} \frac{1}{(1 + |\beta_k|/\sigma)^{1+\nu}} \Big\} \Big[\prod_{i \in \mathcal{K}} \{f((y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma\} \Big] \prod_{i \in \mathcal{L}} \frac{f((y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma}{f(y_i)} \\
&= 1(\boldsymbol{\beta} \in A_{\boldsymbol{i}}(\omega)) \Big\{ 1 - \prod_{i \in \mathcal{L}} 1(|y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta}| \geq |y_i|/2) \Big\} M\pi(\sigma) \prod_{j=1}^{p} g_j(\boldsymbol{\beta}, \sigma; \omega) \\
&\quad \times \Big[\prod_{i \in \{-1,\ldots,-p\} \setminus \{i(1),\ldots,i(p)\}} \Big\{ \frac{1}{\sigma} \frac{1}{(1 + |\beta_{-i}|/\sigma)^{1+\nu}} \Big\} \Big] \\
&\quad \times \Big[\prod_{i \in \mathcal{K} \setminus \{i(1),\ldots,i(p)\}} \{f((y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma\} \Big] \frac{\prod_{i \in \mathcal{L} \setminus \{i(1),\ldots,i(p)\}} f((y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma}{\prod_{i \in \mathcal{L}} f(y_i)},
\end{aligned}$$

其中

$$g_j(\boldsymbol{\beta}, \sigma; \omega) = \begin{cases} f(\{y_{i(j)} - \boldsymbol{x}_{i(j)}{}^\top \boldsymbol{\beta}\}/\sigma)/\sigma, & \text{if } i(j) \geq 1, \\ \dfrac{1}{\sigma} \dfrac{1}{\{1 + |\beta_{-i(j)}|/\sigma\}^{1+\nu}}, & \text{if } i(j) \leq -1, \end{cases}$$

对于 $(\boldsymbol{\beta}, \sigma) \in \mathbb{R}^p \times (0, \infty)$，对于 $\omega > 0$ for $j = 1, \ldots, p$。对于任意 $i \in \{-1, \ldots, -p\} \setminus \{i(1) \ldots, i(p)\}$，

$$\begin{aligned}
1(\boldsymbol{\beta} \in A_{\boldsymbol{i}}(\omega)) \frac{1}{\sigma} \frac{1}{(1 + |\beta_{-i}|/\sigma)^{1+\nu}} &\leq 1(\boldsymbol{\beta} \in A_{\boldsymbol{i}}(\omega)) \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1 + |a_i + b_i\omega - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta}|/\sigma} \\
&\leq 1(\boldsymbol{\beta} \in A_{\boldsymbol{i}}(\omega)) \frac{1}{\sigma} \frac{1}{(\varepsilon + |a_i + b_i\omega - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta}|)/(2\sigma)} \\
&= 1(\boldsymbol{\beta} \in A_{\boldsymbol{i}}(\omega)) \frac{2}{\varepsilon + |0 - (\boldsymbol{e}_{-i}^{(p)})^\top \boldsymbol{\beta}|}
\end{aligned}$$

对于所有 $\omega > 0$ 以及所有 $(\boldsymbol{\beta}, \sigma) \in \mathbb{R}^p \times (0, \infty)$。对于任意 $i \in \mathcal{K} \setminus \{i(1) \ldots, i(p)\}$，根据引理 S1.1 的第 (iii) 部分，

$$\begin{aligned} 1(\boldsymbol{\beta} \in A_{\boldsymbol{i}}(\omega)) f((y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma &\leq 1(\boldsymbol{\beta} \in A_{\boldsymbol{i}}(\omega)) M_3 \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1 + |y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta}|/\sigma} \\ &\leq 1(\boldsymbol{\beta} \in A_{\boldsymbol{i}}(\omega)) M_3 \frac{1}{\sigma} \frac{1}{(\varepsilon + |y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta}|)/(2\sigma)} \\ &= 1(\boldsymbol{\beta} \in A_{\boldsymbol{i}}(\omega)) M_3 \frac{2}{\varepsilon + |a_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta}|} \end{aligned}$$

对所有 $\omega > 0$ 以及所有 $(\boldsymbol{\beta}, \sigma) \in \mathbb{R}^p \times (0, \infty)$，其中 $M_3 > \gamma/2$。对于任意 $i \in \mathcal{L} \setminus \{i(1) \ldots, i(p)\}$，根据引理 S1.1 的 (iii) 部分，

$$\begin{aligned} 1(\boldsymbol{\beta} \in A_{\boldsymbol{i}}(\omega)) f((y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta})/\sigma)/\sigma &\leq 1(\boldsymbol{\beta} \in A_{\boldsymbol{i}}(\omega)) M_3 \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1 + |y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta}|/\sigma} \\ &\leq 1(\boldsymbol{\beta} \in A_{\boldsymbol{i}}(\omega)) M_3 \frac{1}{\sigma} \frac{1}{(\varepsilon + |y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta}|)/(2\sigma)} \\ &\leq 1(\boldsymbol{\beta} \in A_{\boldsymbol{i}}(\omega)) M_3 \frac{2}{\varepsilon} \end{aligned}$$

对所有 $\omega > 0$ 以及所有 $(\boldsymbol{\beta}, \sigma) \in \mathbb{R}^p \times (0, \infty)$。因此，

$h_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{\beta}, \sigma; \omega)$

$$\begin{aligned} &\leq 1(\boldsymbol{\beta} \in A_{\boldsymbol{i}}(\omega)) \Big\{ 1 - \prod_{i \in \mathcal{L}} 1(|y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta}| \geq |y_i|/2) \Big\} \pi(\sigma) \prod_{j=1}^{p} g_j(\boldsymbol{\beta}, \sigma; \omega) \\ &\quad \times M_4 \Big\{ \prod_{i \in \{-1, \ldots, -p\} \setminus \{i(1), \ldots, i(p)\}} \frac{1}{\varepsilon + |0 - (\boldsymbol{e}_{-i}^{(p)})^\top \boldsymbol{\beta}|} \Big\} \Big\{ \prod_{i \in \mathcal{K} \setminus \{i(1), \ldots, i(p)\}} \frac{1}{\varepsilon + |a_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta}|} \Big\} \frac{1}{\prod_{i \in \mathcal{L}} f(y_i)} \end{aligned}$$

对所有 $\omega > 0$ 以及所有 $(\boldsymbol{\beta}, \sigma) \in \mathbb{R}^p \times (0, \infty)$，存在某个 $M_4 > 0$。注意，根据引理 4.2，

$$\Big\{ \prod_{i \in \{-1, \ldots, -p\} \setminus \{i(1), \ldots, i(p)\}} \frac{1}{\varepsilon + |0 - (\boldsymbol{e}_{-i}^{(p)})^\top \boldsymbol{\beta}|} \Big\} \prod_{i \in \mathcal{K} \setminus \{i(1), \ldots, i(p)\}} \frac{1}{\varepsilon + |a_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta}|} \leq M_5 \frac{1}{(1 + \|\boldsymbol{\beta}\|)^{|\mathcal{K}| - p + 1}}$$

对所有 $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$，存在某个 $M_5 > 0$。还要注意，存在某个 $M_6 > 0$，使得对于所有 $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$，只要 $1 - \prod_{i \in \mathcal{L}} 1(|y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta}| \geq |y_i|/2) = 1$，就有 $\|\boldsymbol{\beta}\| \geq \omega / M_6$。然后，由于

$$f(y_i) \geq \frac{1}{M_7} \frac{1}{\omega (\log \omega)^{1+\gamma}}$$

对于足够大的 $\omega > 0$ 对所有 $i \in \mathcal{L}$，对某个 $M_7 > 0$，根据引理 S1.1 的第 (iv) 部分，

$h_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{\beta}, \sigma; \omega)$

$$\begin{aligned} &\leq 1(\boldsymbol{\beta} \in A_{\boldsymbol{i}}(\omega)) \Big\{ 1 - \prod_{i \in \mathcal{L}} 1(|y_i - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta}| \geq |y_i|/2) \Big\} \pi(\sigma) \Big\{ \prod_{j=1}^{p} g_j(\boldsymbol{\beta}, \sigma; \omega) \Big\} M_8 \frac{\omega^{|\mathcal{L}|} (\log \omega)^{|\mathcal{L}|(1+\gamma)}}{\omega^{|\mathcal{K}| - p + 1}} \\ &\leq \pi(\sigma) \Big\{ \prod_{j=1}^{p} g_j(\boldsymbol{\beta}, \sigma; \omega) \Big\} M_8 \frac{\omega^{|\mathcal{L}|} (\log \omega)^{|\mathcal{L}|(1+\gamma)}}{\omega^{|\mathcal{K}| - p + 1}}. \end{aligned}$$

对于充分大的 $\omega > 0$，以及所有满足 $(\boldsymbol{\beta}, \sigma) \in \mathbb{R}^p \times (0, \infty)$ 的值，其中某个 $M_8 > 0$。因此，

$$\int_{\mathbb{R}^p \times (0,\infty)} h_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{\beta}, \sigma; \omega) d(\boldsymbol{\beta}, \sigma) \leq M_8 \int_{\mathbb{R}^p \times (0,\infty)} \pi(\sigma) \Big\{ \prod_{j=1}^{p} g_j(\boldsymbol{\beta}, \sigma; \omega) \Big\} d(\boldsymbol{\beta}, \sigma) \frac{\omega^{|\mathcal{L}|} (\log \omega)^{|\mathcal{L}|(1+\gamma)}}{\omega^{|\mathcal{K}|-p+1}}$$
$$= M_9 \frac{\omega^{|\mathcal{L}|} (\log \omega)^{|\mathcal{L}|(1+\gamma)}}{\omega^{|\mathcal{K}|-p+1}} \to 0$$

如 $\omega \to \infty$，对某个 $M_9 > 0$ 成立。证毕。 □

5 附录。引理 4.1 的证明

这里我们证明引理 4.1。

引理 4.1 的证明。设 $B_i^{(r)}(\omega) = \{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p | |a_i + b_i \omega - \boldsymbol{z}_i{}^\top \boldsymbol{\beta}| \leq r\}$ 对 $\omega \geq 0$ 对 $r > 0$ 对 $i = 1, \ldots, m$ 成立。对于 $h \in \mathbb{N}$，设 $I_h = \{(i_1, \ldots, i_h) \in \{1, \ldots, m\}^h | i_j \neq i_{j'}$ 对所有满足 $j \neq j'\}$ 的 $j, j' = 1, \ldots, h$ 均成立。对于 $(i_1, \ldots, i_p) \in I_p$，设 $f_{(i_1,\ldots,i_p)} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ 是由 $f_{(i_1,\ldots,i_p)}(\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{z}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{z}_{i_p})^\top \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$ 定义的函数。那么，对于任意 $(i_1, \ldots, i_p) \in I_p$，根据假设 (i)，$f_{(i_1,\ldots,i_p)}$ 可逆，并且由线性性，

$$\bigcap_{j=1}^{p} B_{i_j}^{(r)}(\omega) = {f_{(i_1,\ldots,i_p)}}^{-1}((a_{i_1} + b_{i_1}\omega, \ldots, a_{i_p} + b_{i_p}\omega)^\top + [-r, r]^p)$$
$$= {f_{(i_1,\ldots,i_p)}}^{-1}((a_{i_1} + b_{i_1}\omega, \ldots, a_{i_p} + b_{i_p}\omega)^\top) + {f_{(i_1,\ldots,i_p)}}^{-1}([-r, r]^p) \quad (5.1)$$

对所有 $\omega \geq 0$ 和所有 $r > 0$。

对于所有 $(i_1, \ldots, i_p, i_{p+1}) \in I_{p+1}$ 以及所有 $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$，根据假设 (ii)，我们有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_{i_1}{}^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{z}_{i_{p+1}}{}^\top \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \neq \begin{pmatrix} a_{i_1} \\ \vdots \\ a_{i_{p+1}} \end{pmatrix},$$

这意味着 对于某个 $|a_{i_j} - \boldsymbol{z}_{i_j}{}^\top \boldsymbol{\beta}| > \delta$ 和某个 $1 \leq j \leq p+1$，有 $\delta > 0$，因此 t

$$\boldsymbol{\beta} \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{p+1} \{B_{i_j}^{(1/k)}(0)\}^c.$$

因此，

$$\mathbb{R}^p \subset \bigcap_{(i_1,\ldots,i_p,i_{p+1}) \in I_{p+1}} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{p+1} \{B_{i_j}^{(1/k)}(0)\}^c$$

并且，由于 I_{p+1} 是有限的，且对于所有 $r' > r > 0$、所有 $i = 1, \ldots, m$，$B_i^{(r)}(0) \subset B^{(r')}{}_i(0)$，因此我们有

$$\mathbb{R}^p \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{(i_1,\ldots,i_p,i_{p+1}) \in I_{p+1}} \bigcup_{j=1}^{p+1} \{B_{i_j}^{(1/k)}(0)\}^c. \quad (5.2)$$

同时，对于所有 $(i_1,\ldots,i_p) \in I_p$ 以及所有 $k \geq 1$,

$$\bigcap_{j=1}^{p} B_{i_j}^{(1/k)}(0) = {f_{(i_1,\ldots,i_p)}}^{-1}((a_{i_1},\ldots,a_{i_p})^\top + [-1/k,1/k]^p)$$
$$\subset {f_{(i_1,\ldots,i_p)}}^{-1}((a_{i_1},\ldots,a_{i_p})^\top + [-1,1]^p)$$

根据 (5.1) 以及 右端是一个紧集，因为 $f_{(i_1,\ldots,i_p)}$ 是一个同胚。因此 ,

$$\bigcup_{(i_1,\ldots,i_p)\in I_p} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{p} B_{i_j}^{(1/k)}(0) \subset B, \tag{5.3}$$

其中

$$B = \bigcup_{(i_1,\ldots,i_p)\in I_p} {f_{(i_1,\ldots,i_p)}}^{-1}((a_{i_1},\ldots,a_{i_p})^\top + [-1,1]^p).$$

注意，由于 I_p 是有限的， B 是紧的。于是

$$B \subset \bigcap_{(i_1,\ldots,i_p,i_{p+1})\in I_{p+1}} \bigcup_{j=1}^{p+1} \{B_{i_j}^{(1/k_0)}(0)\}^c$$

由 (5.2) 以及开集序列的单调性，对于某个 $k_0 \geq 1$ ts

$$\Big(\bigcap_{(i_1,\ldots,i_p,i_{p+1})\in I_{p+1}} \bigcup_{j=1}^{p+1} \{B_{i_j}^{(1/k)}(0)\}^c \Big)_{k=1}^{\infty}.$$

然而，根据 (5.3),

$$B^c \subset \bigcap_{(i_1,\ldots,i_p)\in I_p} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{p} \{B_{i_j}^{(1/k)}(0)\}^c$$
$$\subset \bigcap_{(i_1,\ldots,i_p)\in I_p} \bigcup_{j=1}^{p} \{B_{i_j}^{(1/k_0)}(0)\}^c$$
$$\subset \bigcap_{(i_1,\ldots,i_p,i_{p+1})\in I_{p+1}} \bigcup_{j=1}^{p+1} \{B_{i_j}^{(1/k_0)}(0)\}^c.$$

因此,

$$\mathbb{R}^p \subset \bigcap_{(i_1,\ldots,i_p,i_{p+1})\in I_{p+1}} \bigcup_{j=1}^{p+1} \{B_{i_j}^{(1/k_0)}(0)\}^c$$

and

$$\bigcup_{(i_1,\ldots,i_p,i_{p+1})\in I_{p+1}} \bigcap_{j=1}^{p+1} B_{i_j}^{(\varepsilon)}(0) \subset \emptyset$$

对于某个 $\varepsilon > 0$。

设 $K = \{i \in \{1, \ldots, m\} | b_i = 0\}$ 和 $L = \{1, \ldots, m\} \setminus K = \{i \in \{1, \ldots, m\} | b_i \neq 0\}$。固定 $(i_1, \ldots, i_p, i_{p+1}) \in I_{p+1}$，并注意到

$$\bigcap_{j=1}^{p+1} B_{i_j}^{(\varepsilon)}(0) = \emptyset.$$

首先，假设 $\{i_1, \ldots, i_p, i_{p+1}\} \subset K$。显然

$$\bigcap_{j=1}^{p+1} B_{i_j}^{(\varepsilon)}(\omega) = \bigcap_{j=1}^{p+1} B_{i_j}^{(\varepsilon)}(0) = \emptyset$$

对所有 $\omega \geq 0$均成立。接下来，假设 $\{i_1, \ldots, i_p, i_{p+1}\} \not\subset K$和 $\{i_1, \ldots, i_p, i_{p+1}\} \not\subset L$。那么存在 $1 \leq j_1, j_2 \leq p+1$，使得 $i_{j_1} \in K$, $i_{j_2} \in L$，且 $j_1 \neq j_2$。令 $(i_1', \ldots, i_p') \in I_p$满足 $\{i_1', \ldots, i_p'\} = \{i_1, \ldots, i_p, i_{p+1}\} \setminus \{i_{j_1}\}$，并令 $\widetilde{\boldsymbol{Z}} = (\boldsymbol{z}_{i_1'}, \ldots, \boldsymbol{z}_{i_p'})^\top$、 $\tilde{\boldsymbol{a}} = (a_{i_1'}, \ldots, a_{i_p'})^\top$，以及 $\tilde{\boldsymbol{b}} = (b_{i_1'}, \ldots, b_{i_p'})^\top$。于是，根据 (5.1),

$$\begin{aligned}
\bigcap_{j=1}^{p+1} B_{i_j}^{(\varepsilon)}(\omega) &= B_{i_{j_1}}^{(\varepsilon)}(\omega) \cap \bigcap_{j=1}^{p} B_{i_j'}^{(\varepsilon)}(\omega) \\
&= \{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p | |a_{i_{j_1}} + b_{i_{j_1}}\omega - \boldsymbol{z}_{i_{j_1}}{}^\top \boldsymbol{\beta}| \leq \varepsilon\} \\
&\quad \cap \{f_{(i_1', \ldots, i_p')}{}^{-1}((a_{i_1'} + b_{i_1'}\omega, \ldots, a_{i_p'} + b_{i_p'}\omega)^\top) + f_{(i_1', \ldots, i_p')}{}^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon]^p)\} \\
&= \{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p | |a_{i_{j_1}} - \boldsymbol{z}_{i_{j_1}}{}^\top \boldsymbol{\beta}| \leq \varepsilon\} \cap \{(\widetilde{\boldsymbol{Z}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{a}} + \widetilde{\boldsymbol{Z}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}}\omega) + f_{(i_1', \ldots, i_p')}{}^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon]^p)\}
\end{aligned}$$

~对所有 $\omega \geq 0$ 均成立。注意，根据假设 (i)， $\boldsymbol{Z}$ 是可逆的，并且

$$\mathbf{0}^{(p+1)} \neq \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{Z}} & \tilde{\boldsymbol{b}} \\ \boldsymbol{z}_{i_{j_1}}{}^\top & b_{i_{j_1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{Z}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{Z}} & \tilde{\boldsymbol{b}} \\ \boldsymbol{z}_{i_{j_1}}{}^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{Z}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_p \\ \boldsymbol{z}_{i_{j_1}}{}^\top \widetilde{\boldsymbol{Z}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}} \end{pmatrix}$$

根据假设 (iii)。于是 $\boldsymbol{z}_{i_{j_1}}{}^\top \widetilde{\boldsymbol{Z}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}} \neq 0$，由此可知，对于任意 $\omega \geq 0$, 对所有$\boldsymbol{\beta} \in \bigcap_{j=1}^{p+1} B_{i_j}^{(\varepsilon)}(\omega)$, 都存在 $\boldsymbol{v} \in f_{(i_1', \ldots, i_p')}{}^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon]^p)$ 使得

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\geq |a_{i_{j_1}} - \boldsymbol{z}_{i_{j_1}}{}^\top \boldsymbol{\beta}| = |a_{i_{j_1}} - \boldsymbol{z}_{i_{j_1}}{}^\top (\widetilde{\boldsymbol{Z}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{a}} + \widetilde{\boldsymbol{Z}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}}\omega + \boldsymbol{v})| \\
&\geq |\boldsymbol{z}_{i_{j_1}}{}^\top \widetilde{\boldsymbol{Z}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}}|\omega - |a_{i_{j_1}}| - |\boldsymbol{z}_{i_{j_1}}{}^\top \widetilde{\boldsymbol{Z}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{a}}| - \|\boldsymbol{z}_{i_{j_1}}\|\|\boldsymbol{v}\|.
\end{aligned}$$

因此，存在 $M > 0$ 使得 $\bigcap_{j=1}^{p+1} B_{i_j}^{(\varepsilon)}(\omega) = \emptyset$ 对所有 $\omega \geq M$均成立。最后，假设 $\{i_1, \ldots, i_p, i_{p+1}\} \not\subset K$且 $\{i_1, \ldots, i_p, i_{p+1}\} \subset L$。令 $(i_1', \ldots, i_p') = (i_1, \ldots, i_p) \in I_p$，并令 $\widetilde{\boldsymbol{Z}} = (\boldsymbol{z}_{i_1'}, \ldots, \boldsymbol{z}_{i_p'})^\top$、 $\tilde{\boldsymbol{a}} = (a_{i_1'}, \ldots, a_{i_p'})^\top$ 和 $\tilde{\boldsymbol{b}} = (b_{i_1'}, \ldots, b_{i_p'})^\top$。同样，令~$(i_1'', \ldots, i_p'') = (i_1, \ldots, i_{p-1}, i_{p+1}) \in I_p$，并令 $\widetilde{\boldsymbol{Z}} = (\boldsymbol{z}_{i_1''}, \ldots, \boldsymbol{z}_{i_p''})^\top$、 $\tilde{\tilde{\boldsymbol{a}}} = (a_{i_1''}, \ldots, a_{i_p''})^\top$ 和~$\tilde{\boldsymbol{b}} = (b_{i_1''}, \ldots, b_{i_p''})^\top$。那么，根据 (5.1),

$$\begin{aligned}
\bigcap_{j=1}^{p+1} B_{i_j}^{(\varepsilon)}(\omega) &= \{(\widetilde{\boldsymbol{Z}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{a}} + \widetilde{\boldsymbol{Z}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}}\omega) + f_{(i_1', \ldots, i_p')}{}^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon]^p)\} \\
&\quad \cap \{(\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{Z}}}^{-1}\tilde{\tilde{\boldsymbol{a}}} + \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{Z}}}^{-1}\tilde{\tilde{\boldsymbol{b}}}\omega) + f_{(i_1'', \ldots, i_p'')}{}^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon]^p)\}
\end{aligned}$$

$\sim$ $\sim$ 对所有 $\omega \geq 0$均成立。注意，根据假设 (i)， $\boldsymbol{Z}$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 是可逆的，并且

$$\left(\boldsymbol{z}_{i_p''}{}^\top \quad b_{i_p''}\right) \neq \boldsymbol{z}_{i_p''}{}^\top \widetilde{\boldsymbol{Z}}^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{Z}} & \tilde{\boldsymbol{b}} \end{pmatrix}$$

根据假设 (iii)。于是

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{Z}}} & \tilde{\tilde{\boldsymbol{b}}} \end{pmatrix} \neq \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{X}}} \widetilde{\boldsymbol{Z}}^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{Z}} & \tilde{\boldsymbol{b}} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{Z}}}^{-1} \tilde{\tilde{\boldsymbol{b}}} \neq \widetilde{\boldsymbol{Z}}^{-1} \tilde{\boldsymbol{b}}.$$

因此，对于任意 $\omega \geq 0$，对于所有 $\boldsymbol{\beta} \in \bigcap_{j=1}^{p+1} B_{i_j}^{(\varepsilon)}(\omega)$，存在 $\tilde{\boldsymbol{v}} \in f_{(i_1', \ldots, i_p')}{}^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon]^p)$ 和 $\tilde{\tilde{\boldsymbol{v}}} \in f_{(i_1'', \ldots, i_p'')}{}^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon]^p)$，使得 $\widetilde{\boldsymbol{Z}}^{-1} \tilde{\boldsymbol{a}} + \widetilde{\boldsymbol{Z}}^{-1} \tilde{\boldsymbol{b}} \omega + \tilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\beta} = \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{Z}}}^{-1} \tilde{\tilde{\boldsymbol{a}}} + \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{Z}}}^{-1} \tilde{\tilde{\boldsymbol{b}}} \omega + \tilde{\tilde{\boldsymbol{v}}}$，这意味着 $(\widetilde{\boldsymbol{Z}}^{-1} \tilde{\boldsymbol{b}} - \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{Z}}}^{-1} \tilde{\tilde{\boldsymbol{b}}}) \omega = \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{Z}}}^{-1} \tilde{\tilde{\boldsymbol{a}}} - \widetilde{\boldsymbol{Z}}^{-1} \tilde{\boldsymbol{a}} + \tilde{\tilde{\boldsymbol{v}}} - \tilde{\boldsymbol{v}}$，进而 $\omega \leq (\|\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{Z}}}^{-1} \tilde{\tilde{\boldsymbol{a}}} - \widetilde{\boldsymbol{Z}}^{-1} \tilde{\boldsymbol{a}}\| + \|\tilde{\tilde{\boldsymbol{v}}}\| + \|\tilde{\boldsymbol{v}}\|) / \|\widetilde{\boldsymbol{Z}}^{-1} \tilde{\boldsymbol{b}} - \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{Z}}}^{-1} \tilde{\tilde{\boldsymbol{b}}}\|$。因此，存在 $M > 0$，使得对所有 $\omega \geq M$， $\bigcap_{j=1}^{p+1} B_{i_j}^{(\varepsilon)}(\omega) = \emptyset$。

Si由于 I_{p+1} 是有限的，我们得出结论：存在 $M > 0$，使得对于所有 $\omega \geq M$ ，

$$\bigcup_{(i_1, \ldots, i_p, i_{p+1}) \in I_{p+1}} \bigcap_{j=1}^{p+1} B_{i_j}^{(\varepsilon)}(\omega) = \emptyset.$$

因此，对于所有 $\omega \geq M$,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^p &= \bigcap_{(i_1, \ldots, i_p, i_{p+1}) \in I_{p+1}} \bigcup_{j=1}^{p+1} \{B_{i_j}^{(\varepsilon)}(\omega)\}^c \\ &\subset \bigcup_{i_1=1}^{m} \cdots \bigcup_{i_p=1}^{m} \bigcap_{i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_p\}} \{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p | |a_i + b_i \omega - \boldsymbol{x}_i{}^\top \boldsymbol{\beta}| > \varepsilon\}. \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

致谢

作者的研究部分得到了日本学术振兴会 JSPS KAKENHI 项目资助，项目编号为JP22K20132、JP19K11852。

参考文献

[1] Andrade, J.A.A. (2022). 关于 Student-t 过程对离群值的稳健性。《斯堪的纳维亚统计学杂志》。

[2] Andrade, J.A.A. 和 O'Hagan, A. (2006). 使用正则变化分布进行贝叶斯稳健性建模。《贝叶斯分析》，1，169–188。

[3] Andrade, J.A.A. 和 O'Hagan, A.（2011）。位置参数和尺度参数的贝叶斯稳健性建模。《斯堪的纳维亚统计学杂志》，38，691–711。

[4] Desgagn´e, A.（2013）。贝叶斯建模中尺度参数的完全稳健性。《贝叶斯分析》，8，187–220。[5] Desgagn´e, A.（2015）。使用对数正则变异分布的离群值位置-尺度参数模型稳健性。《统计年鉴》，43，1568–1595。[6] Gagnon, P. 和 Hayashi, Y.（2023）。贝叶斯 Student-t 线性回归的理论性质。《统计与概率快报》，193。[7] Hamura, Y.、Irie, K. 和 Sugasawa, S.（2021）。零膨胀和离群值条件下计数数据的稳健层次建模。arXiv 预印本 arXiv:2106.10503。[8] Hamura, Y.、Irie, K. 和 Sugasawa, S.（2022）。用于稳健回归的正态分布对数正则变异尺度混合模型。《计算统计与数据分析》，173。[9] O'Hagan, A.（1979）。贝叶斯推断中的离群值剔除现象。《皇家统计学会杂志》，B辑（方法论），41，358–367。[10] West, M.（1984）。贝叶斯线性回归中的离群值模型和先验分布。《皇家统计学会杂志》，B辑，《统计方法论》，46，431–439。

补充材料

S1 正文第3节误差密度的性质

以下结果将在正文第4节中使用。

引理 S1.1 设 $\gamma > 0$，且

$$f(z) = \frac{\gamma/2}{1+|z|}\frac{1}{\{1+\log(1+|z|)\}^{1+\gamma}}$$

对于 $z \in \mathbb{R}$。

(i) 对所有 (μ, σ), $\in \mathbb{R} \times (0, \infty)$,

$$f((y-\mu)/\sigma)/\sigma \sim f(y)$$

如 $y \to \pm\infty$。

(ii) 令 t (μ, σ) $\in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ 且 $y \in \mathbb{R}$。那么，若 $|y-\mu| \geq |y|/2$ 且若 $|y| \geq 1$，我们有 e

$$\frac{f((y-\mu)/\sigma)/\sigma}{f(y)} \leq 4(1+\log 3)^{1+\gamma}\{1+\log(1+\sigma)\}^{1+\gamma}.$$

(iii) 对所有 (μ, σ) $\in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ 以及所有 $y \in \mathbb{R}$,

$$f((y-\mu)/\sigma)/\sigma \leq \frac{\gamma}{2}\frac{1}{\sigma}\frac{1}{1+|y-\mu|/\sigma}.$$

(iv) 对所有满足 $|y| \geq 2e$ 的 $y \in \mathbb{R}$,

$$f(y) \geq \frac{\gamma}{2^{3+\gamma}}\frac{1}{|y|(\log|y|)^{1+\gamma}}.$$

证明。第 (i) 部分由 Hamura 等人（2022）的引理 S1 得出。第 (ii) 部分成立，因为对所有 $y_1, y_2 > 0$, $\{1+\log(1+y_1y_2)\}/\{1+\log(1+y_1)\} \leq 1+\log(1+y_2)$；该不等式已在 Hamura 等人（2022）的引理 S6 的证明中得到证明。第 (iii) 和第 (iv) 部分显然成立。□

参考文献

[1] Hamura, Y., Irie, K. 和 Sugasawa, S.（2022）。用于稳健回归的对数正则变异正态尺度混合分布。计算统计与数据分析，173。